

Engelbert NIEHAUS, Dominik FAAS, Koblenz-Landau

## **Mathematische Beweise in elektronischen Klausuren in der Lehramtsausbildung**

Multiple-Choice-Klausuren werden im Allgemeinen nicht als geeignete Prüfungsform für fachmathematische Beweise betrachtet. Die Komplexität logischer Strukturen und die Möglichkeit, unterschiedliche Beweiswege und Begründungen zu wählen, machen ferner eine algorithmische Überprüfung von Beweisen schwierig. Ziel ist es, in Anlehnung an Beweispuzzle für Online-Prüfungsumgebungen die Grenzen und Chancen von Beweisen in elektronischen Klausuren an dem Beispiel einer fachwissenschaftlichen Veranstaltung in der Lehramtsausbildung zu beleuchten und allgemeinere fachdidaktische Schlussfolgerungen für elektronische Klausuren mit Beweisen zu ziehen.

### **1. Zielsetzung der E-Klausur & organisatorische Rahmenbedingungen**

Eine E-Klausur im Masterstudiengang Lehramt Mathematik wurde auf der Basis der an der Universität Koblenz-Landau für E-Klausuren genutzten OpenSource Software ILIAS konzipiert (IWM Koblenz 2011) und die Nutzung von Beweispuzzlen bezog sich dabei auf ein Standard-E-Klausurumgebung ohne verfügbare Methoden zu automatischen Beweisüberprüfung im Sinne von (Adams u. a. 1999). Die Klausur war nicht als reine E-Klausur angelegt, sondern eine *"Hybridklausur"* mit 3 E-Klausuraufgaben als Beweispuzzle und einer Beweisaufgabe die konventionell auf Papier in herkömmlicher Weise bearbeitet wurde. Die allgemeine Motivation zum Einsatz von E-Klausuren findet man z.B. bei (Wetter 2010). Die E-Klausuranteile wurden an Rechnern von den Studierenden in ILIAS eingegeben. Die Klausuren wurden aber ausgedruckt und der Ausdruck wurde von den Studierenden unterschrieben. Damit ist die E-Klausur formal eine konventionelle Papierklausur mit elektronischer Unterstützung, für die rechtlich in der Prüfungsordnung keine Erweiterung der Prüfungsform auf E-Klausuren notwendig war.

Inhaltliche Zielsetzung war die Implementierung von mathematischen Beweisen als Aufgaben innerhalb der E-Klausur, wobei die Möglichkeiten der gegebenen E-Klausurumgebung in Hinblick auf den Aufgabentyp "Mathematischer Beweis" in dem Piloten untersucht werden sollte.

Durch die Hybridklausur aus E-Klausuranteilen und Papierklausuraufgabe war ein erster Vergleich von Lösungskompetenzen bei E-Klausuranteilen und Papierklausuranteil möglich, der allerdings in dieser Phase noch keine statistisch belastbaren Ergebnisse liefert.

### **2. Umsetzung der E-Klausur-Aufgaben**

Die Umsetzung der E-Klausuraufgaben wurde als ein Beweispuzzle

geplant, bei dem im Allgemeinen  $m$  Fragmente eines Beweises auf  $p$  Positionen mit  $p \leq m$  verteilt werden konnten. In der Pilotklausur war den Studierenden die Anzahl  $n$  der notwendigen Beweisfragmente mit  $n=p$  bekannt und es wurden immer zusätzliche Beweisfragmente angeboten, die als falsche Fragmente nicht für den Beweis verwendet werden konnten (d.h. es gilt  $p < m$ ). Schwieriger würde das Beweispuzzle für Studierende, wenn aus  $m$  möglichen Beweisfragmenten nur  $n$  notwendige Beweisfragmente benötigt werden und damit aus der Anzahl der angebotenen Beweispositionen  $p$  nicht von den Studierenden abgeleitet werden kann, wie viele Beweisfragmente für den Beweis tatsächlich notwendig sind, d.h., für eine solche Beweispuzzleaufgabe gilt  $n < p < m$ .

### 3. Arbeitsweise mit dem Beweispuzzlen

Zunächst wird die Klausur in Papierform den Studierenden ausgehändigt. Fast alle Studierenden, die an der Klausur teilgenommen haben, bearbeiteten die E-Klausurbestandteile zunächst in Papierform. In der Regel wurde erst dann der Laptop verwendet, um die gefundene Sequenz aus Beweisfragmenten in die E-Klausurumgebungen ILIAS einzugeben (ILIAS Society 2013). Die E-Klausuraufgaben waren so aufgebaut, dass auf der *linken* Seite  $p$  Beweispositionen zur Verfügung standen und auf der *rechten* Seite die  $m$  möglichen Beweisfragmente mit der Maus auf die entsprechende Beweisposition gezogen werden konnten. Mit Beweisfragmenten belegte Positionen konnten nach der Zuordnung noch abgeändert werden und auf eine neue Position im Beweis gezogen werden. Die Eingabe der Lösung zu dem Beweis bereitete den Studierenden keine Probleme, da eine Demoaufgabe von den Studierenden im Vorfeld der Klausur in einem öffentlichen Bereich der ILIAS-Klausurumgebung bereits getestet werden konnte. Dieses Vorgehen war vorgesehen, damit während der bewerteten Testklausur keine technischen Probleme die mathematisch-inhaltliche Lösung der Aufgabe beeinträchtigen sollte. Eine Demoaufgabe zu den Beweispuzzlen steht unter (IWM Koblenz 2011) in einem öffentlichen Bereich zur Verfügung. Die erste Pilot-E-Klausur mit mathematischen Beweisen zeigt bereits die unterschiedliche Arbeitsweisen, mit denen diese Beweispuzzles bearbeitet wurden. Zunächst einmal kann man das Problem als reine graphentheoretische Anordnungsaufgabe verstehen, bei der eine Teilmenge der Beweisfragmente in eine logisch sinnvoll Abfolge gebracht wird, die ausgehend von einem *Startzustand* mit den gegebenen Voraussetzungen eine Beweislücke zu einem in der Aufgabenstellung genannten Zielzustand schließt (Interpolationsbeweis). Beweisfragmente können dabei aus

- Begründungen (z.B. "mit Anwendung des Distributivgesetzes"),
- einzelnen Termen (z.B.  $a(b+c)$ )
- Ungleichung oder Gleichungen (z.B.  $a(b+c)=ab+ac$ ),

- Vergleichssymbolen mit Begründungen  $<, =, >, \dots$   
(z.B. " $\leq$  mit Dreiecksungleichung")

bestehen. Mit den gegebenen Voraussetzungen in ILIAS können Beweise als vollständig korrekt identifiziert werden, wenn die Beweisfragmente einer bestimmten vordefinierten Reihenfolge entsprechen. Dabei muss in einem zweiten Schritt berücksichtigt werden, dass Studierende in Papierbeweise unterschiedliche Fehlertypen zeigen, die entsprechend in der E-Klausur durch *intelligente Falschantworten* abgebildet werden sollten, um das formale Verständnis der Beweisfragmente abzufragen. Erst diese intelligenten Falschantworten erhöhen die Schwierigkeiten der Interpolationsbeweise in einer E-Klausur und reduzieren die Möglichkeit für die Studierenden durch grobe Musterähnlichkeiten in den Beweisfragmenten die korrekte Anordnung identifizieren zu können. Für die Entwicklung von Interpolationsbeweisen sind daher Fehleranalysen in konventionellen Beweisen wesentlich. Diese Fehleranalysen können erst dann die intelligenten Falschantworten für ein Beweispuzele liefern. Im Zusammenhang mit den Falschantworten ist für die Beweisfragmente ein weiterer wesentlicher Planungsschritt erforderlich. In der graphentheoretischen Abbildung des Lösungsraumes muss man überprüfen, ob man sowohl beim *Vorwärtsarbeiten* von dem Startzustand als auch bei einem *Rückwärtsarbeiten* von dem Zielzustand geeignete intelligente Falschantworten angeboten werden, die typische Fehler der Studierenden bedienen (Stein 1986). Dadurch kann man vermeiden, dass ein Rückwärtsarbeiten von dem Zielzustand aus viel geringere Antwortalternativen ermöglicht und so das Beweispuzele durch Rückwärtsarbeiten zu stark vereinfacht.

#### **4. Ergebnisse & Bewertung der E-Klausuranteile**

Die automatische Korrektur bedurfte bei einer vollständig korrekten Lösung der E-Klausuraufgaben keine Nachbearbeitung. Das war in 64% der Aufgaben gegeben, wenn die Lösung der Studierenden mit dem vordefinierten Beweisweg übereinstimmte. Wurde allerdings in ILIAS nicht die volle Punktzahl bei den E-Klausuraufgaben erreicht, so musste in 93% der Fälle eine manuelle Nachkorrektur vorgenommen werden. Davon wurde 56% der automatischen Punktevergabe manuell schlechter bewertet und 44% manuell besser als die automatische Korrektur.

#### **5. Grundproblem der automatischen Bewertung in ILIAS**

Betrachtet man die Bewertungsmöglichkeiten in der E-Klausurumgebung ILIAS, so hängt die Bewertung von der korrekten Positionierung eines Beweisfragmentes ab (z.B. Beweisfragment C auf Position 2). Der Bewertungsalgorithmus der Aufgabe ist unbrauchbar, wenn z.B. eine Begründung als Beweisfragment vergessen wurde. Fehlt z.B. das Beweisfragment C auf Position 2, so verschieben sich alle nachfolgende

Beweisfragmente um 1 Position nach vorne. Damit stehen ab Position 2 in der Beweisssequenz u.U. alle nachfolgenden korrekten Beweisschritte auf der falschen Beweisposition und werden von dem Bewertungsalgorithmus ab Position 2 als falsch bewertet. Damit wird deutlich, dass alle nicht mit der vollen Punktzahl bewerteten Aufgaben eine manuelle Nachkorrektur benötigen. Umgekehrt werden vollständig korrekte Lösungen selbst bei dieser elementaren in ILIAS implementierten Bewertungsmethode vollständig korrekt bewertet, wenn der Beweisweg bzw. die Beweiswege korrekt in ILIAS hinterlegt wurden.

## 6. Fazit

Die erste E-Klausur an der Universität Koblenz-Landau im Fach Mathematik hat bei der Eingabe der Lösungen zu keinen erkennbaren Problemen bei den Studierenden geführt. Der Aufgabentyp mit Beweisfragmenten lieferte für die Studierenden eine deutliche Unterstützung bei der Suche nach einer korrekten Beweisstruktur. Die Identifikation von intelligenten Falschantworten ist bei der Generierung von Beweispuzzlen ein wesentlicher Aspekt für die Qualität von E-Klausuraufgaben. Die Konzeption einer Hybridklausur, bei der sowohl E-Klausuranteile als auch Papierklausuranteile auftreten, wird in Zukunft daher weiter verfolgt. Die Rückmeldung unter Vorbehalt direkt nach Abschluss der Klausur, ob die Studierenden bereits mit dem E-Klausuranteil die notwendigen Punkte für das Bestehen der Klausur erreicht haben, wurde von den Studierenden positiv aufgenommen. Dennoch sind rechtliche Aspekte zu berücksichtigen, wenn die Punktezahl nach unten korrigiert werden muss.

**Danksagung:** Institut für Wissensmedien IWM an der Universität Koblenz-Landau (Ingo Dahn, Peter Ferdinand, Guido Vollbach) für die sehr gute Unterstützung

## 7 Literatur

Adams, A.A. u. a., 1999. Automated theorem proving in support of computer algebra: symbolic definite integration as a case study. In *Proceedings of the 1999 international symposium on Symbolic and algebraic computation*. S. 253–260.

ILIAS Society, 2013. ILIAS Open Source e-Learning. Available at: <http://www.ilias.de>.

IWM Koblenz, 2011. ILIAS Installation des Instituts für Wissensmedien. *OpenSource E-Klausurumgebung v4.1.8-EA 2011-10-25*. Available at: <https://ilias-ea.uni-koblenz.de/>.

Stein, M., 1986. *Beweisen. Eine Analyse des Beweisprozesses*,

Wetter, G., 2010. Unterstützung von E-Klausuren durch das Zentrum für Datenverarbeitung der Universität Mainz. *PIK - Praxis der Informationsverarbeitung und Kommunikation*, 33(1), S.45–55.