

Lea Mareike DASENBROCK, Leipzig

Historische Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen: Mathematikgeschichte im zeitgemäßen Mathematikunterricht

Der Einsatz der Mathematikgeschichte im aktuellen Schulunterricht der Sekundarstufe lohnt nicht nur hinsichtlich der Einbettung wichtiger Mathematiker, wie Euklid oder Adam Ries, sondern auch in Bezug auf die Entwicklung mathematischer Themen im Laufe der Zeit. Gerade dies ermöglicht den Lernenden eine intensive und reflektierende Auseinandersetzung mit der Mathematik, den Einblick in die Mathematik als eine gewachsene Wissenschaft sowie ein vertieftes Verständnis von mathematischen Konzepten, Begriffen, Problemen und Lösungen. Die Konzeption entsprechender Unterrichtsmaterialien verspricht auch für die sie erstellenden Lehramtsstudierende gewinnbringend zu sein. Beide Seiten sollen im Beitrag beleuchtet werden.

Einbeziehung von Mathematikgeschichte im Mathematikunterricht

„Der Zustand der Mathematik ist [...] in jedem Augenblick ein Produkt der Vergangenheit, ein Ergebnis der Mathematik von gestern“ (Scriba, 1983, S. 114). Um die Mathematikgeschichte im Unterricht einzubinden, gibt es zwei Zugänge: Sie kann zum einen durch historische Anekdoten, Biographien berühmter Mathematiker oder durch isolierte Problemstellungen („strategy of addition“) oder zum anderen durch die Darstellung der Veränderungen mathematischer Konzepte, Begriffe und Notationen („strategy of accomodation“) in den Unterricht integriert werden (Fried, 2001, S. 392f.). In Schulbüchern treten historische Bezüge vor allem als Infokasten über berühmte Mathematiker und als historisch eingekleidete Aufgaben auf. Sie verfolgen dabei unterschiedliche Ziele, wie die Vermittlung historischer Fakten, Historizitätsbewusstsein, diverse affektive Ziele und das Ziel die Mathematik als Teil unserer Kultur zu verstehen (Schulte, 2016, S. 106ff.). Dies soll ermöglichen, die Mathematik als eine sich über die Zeit entwickelnde Wissenschaft begreifbar zu machen und versteht somit „history as a goal“ (Jankvist, 2009, S. 239). Neben dem Verständnis, dass die Mathematik einem fortlaufenden Veränderungsprozess unterliegt, dient die Einbeziehung von Mathematikgeschichte auch der Motivation der Lernenden (Buchholtz, 2019, S. 5). Ein Hindernis zur Integration mathematikhistorischer Themen im Schulkontext ist neben Zeitfaktoren, die immer wieder von Lehrkräften angeführt werden, auch die eigene Kenntnis mathematikhistorischer Themen. In den meisten Mathematiklehramtsstudiengängen wird diese unzureichend thematisiert bzw. nicht behandelt. Wie gehen also Studierende vor, wenn sie Material unter dem Aspekt der Mathematikgeschichte entwickeln

sollen und welche Vorteile bieten sich Studierenden ein mathematisches Thema wie das Lösen quadratischer Gleichungen als ein sich entwickelndes Konzept zu betrachten? Und wie erfolgt der Umgang der Lernenden mit Materialien, die unter den obigen Aspekten erstellt wurden? Diese Fragestellungen sollen im Folgenden beleuchtet werden.

Historische Lösungsverfahren quadratischer Gleichungen

Das Lösen quadratischer Gleichungen ist ein immanentes Thema, das die Lernenden nach der Einführung ihre gesamte Schulzeit und möglicherweise in Ausbildung oder Studium begleitet. Allerdings sind gerade auf dem Gebiet der Gleichungen bzw. Funktionen kaum bis gar keine mathematikhistorischen Bezüge in Schulmaterialien zu finden (Schulte, 2016, S. 109 f.). Um die quadratischen Gleichungen den Studierenden sowie den Lernenden als sich ein entwickelndes Themengebiet begreifbar zu machen und ein tiefergehendes Verständnis der zugehörigen Theorie hervorzurufen, ist in Zusammenarbeit mit Studierenden Material entwickelt worden, dessen Hauptaugenmerk auf den historischen Lösungsverfahren liegt. Hierbei steht nicht die rein algorithmische Anwendung der Lösungsformel im Vordergrund, vielmehr sollen die Lernenden durch den Vergleich der verschiedenen historischen Zugänge bzgl. deren Effizienz und Vollständigkeit sowie die Studierenden durch die Erstellung geeigneter diesbezüglicher Aufgaben und der eigenen Durchdringung dieser Gesichtspunkte die Bedeutung unserer heute im Mathematikunterricht genutzten Lösungsformel erkennen. Zudem lassen sich auf diese Weise exemplarisch einige Etappen dieses Entwicklungsprozesses verdeutlichen. In dem Material liegt der Schwerpunkt auf dem Kennenlernen und der Anwendung „neuer“ historischer Verfahren, die eine immanente Rolle in der Geschichte der quadratischen Gleichungen spielen. Die im kleinen Rahmen stattfindende Reise durch die Geschichte der quadratischen Gleichungen fällt unter den Aspekt der „strategy of accomodation“.

Die Zeitreise verdeutlicht zum einen die Weiterentwicklung der Lösungsverfahren bzw. der mathematischen Fachsprache. Dieses zeigt die Betrachtung des Verfahrens der Babylonier (ca. 3000 v. Chr.) im Vergleich zu dem nach Michael Stifel (um 1530 n. Chr.) auf. Beide Verfahren beziehen sich auf den Kontrast zwischen den Epochen. Einen weiteren Einblick in das Lösen quadratischer Gleichungen bietet die Thematisierung dieser nach al-Khwarizmi (um 780 - um 840 n. Chr.), der einen starken Bezug zur Geometrie herstellt. Durch die Konfrontation mit einem echten Quadrat bzw. der versinnbildlichten Ergänzung zu ebendiesem wird ein tieferes inhaltliches Verständnis der Gleichungen angeregt (Kaske, 1998, S. 18). Eine weitere Möglichkeit der Lösung (einfacher) quadratischer Gleichungen ist der Wurzelsatz von Vieta

(nach F. Viète (1540-1603 n. Chr.)), der den Zusammenhang zwischen Koeffizienten und Lösungen verdeutlicht und das Verständnis über den Aufbau dieser Gleichungen schult. Die Verfahren wurden von Studierenden ausgewählt, um die Vielfalt und Entwicklung dieser den Lernenden zu verdeutlichen. Das Ziel der Thematisierung der vier Verfahren soll die Vorteile der heute genutzten Lösungsformel aufzeigen. Neben diesen Verfahren wurde durch die Auswahl des Heron-Verfahrens (um 100 n. Chr.) eine Möglichkeit gegeben, die Quadratwurzel geometrisch zu interpretieren, und ebenso wie im Lösungsverfahren nach al-Khwarizmi die Geometrie mit der Algebra zu verknüpfen.

Ansätze zur Umsetzung im Mathematikunterricht

Die Einbeziehung einer Zeitreise zum Lösen quadratischer Gleichungen kann zum Verständnis der Lernenden beitragen, die Entwicklung der Lösungsformel nachzuvollziehen und das Potenzial der heutigen Lösungsformel festzustellen. Dabei bietet sich vor allem die Thematisierung in der neunten Klasse an. Um den Lernenden einen Einblick in möglichst viele verschiedene Verfahren zu geben und eine Zeitreise zu ermöglichen, wurde das Material als Gruppenpuzzle konzipiert, das dem Lösen eines Rahmenproblems (Pharaoproblem) dient. Die Aufgaben der Expertengruppen thematisieren die oben genannten Verfahren und dienen alle der Lösung des Pharaoproblems. Sie sind ebenfalls auf einem Laufzettel wiedergegeben, dessen Aufbau eine schrittweise Annäherung der Lösung des Problems erlaubt und zum Ende in den Stammgruppen zu einer gemeinsamen Lösung führt. Zuerst wird die geometrische Lösung der Gleichung thematisiert, die auf al-Khwarizmi zurückzuführen ist und diese durch den Bezug zu einem Quadrat löst. Aufgrund der nur positiven Lösung der Gleichung wird den Lernenden die Grenze des Verfahrens und die Notwendigkeit der Entwicklung eines weiteren Verfahrens verdeutlicht. Dies ist durch den Wurzelsatz von Vieta gegeben, der die Normalform der Gleichung nutzt und eine Aussage über die Beziehung zwischen Koeffizienten und Lösung ermöglicht. Dieses Verfahren gibt die zweite Lösung des Pharaoproblems wieder. Beide Lösungen werden mit dem Lösungsverfahren von Michael Stifel überprüft. Dieser Vergleich verdeutlicht den Lernenden, dass die Methode dem heutigen Vorgehen sehr ähnlich war, der größte Unterschied aber in der Berechnung der zweiten Lösung besteht. Die Entwicklung der Lösungsverfahren wird ebenfalls in der letzten Aufgabe des Laufzettels aufgegriffen, Ziel des Vergleichs und des Materials ist es festzustellen, dass die p/q -Formel eine historisch gewachsene mathematische Lösungsformel und eine sehr gute Möglichkeit zum Lösen quadratischer Gleichungen ist.

Entwicklung des Materials durch Studierende

Die Studierenden entwickelten unter dem Aspekt der Mathematikgeschichte mit Hilfe der Strategie „strategy of accomodation“ Material, das Lernenden die Veränderung der Lösungsverfahren verdeutlichen soll. Hierbei legten sie großen Wert auf die Entwicklung der Mathematik im Laufe der Zeit, deshalb war es für sie wichtig, den Lernenden darzustellen, welcher Prozess hinter der Entwicklung eines Verfahrens steckt. Neben wichtigen Erkenntnissen zur Erstellung von Arbeitsmaterialien für den Unterricht, insbesondere der sorgfältigen Formulierungen von Arbeitsaufträgen bzw. Aufgabenstellungen, konnten die Studierenden einen vertieften Einblick in die Entwicklung der Lösungsverfahren quadratischer Gleichungen erlangen sowie die Vor- und Nachteile der Mathematikgeschichte im Unterricht nachvollziehen. Die Studierenden überlegten sich in der Auseinandersetzung mit historischen Quellen, welche Aspekte für die Lernenden besonders interessant sind und auf welche man verzichten muss, da sie zu hohe Anforderungen an diese stellen. Diese bewusste und sorgfältige Auswahl von Verfahren ermöglicht zugleich den Lernenden eine zielgerichtete und motivierte Auseinandersetzung. Insgesamt führte die Thematisierung der historischen Lösungsverfahren zu einem allgemeinen Überblick über die Entwicklung der Theorie der quadratischen Gleichungen und zu einem vertieften Verständnis bzgl. ausgewählter Verfahren und macht exemplarisch deutlich, dass Mathematik etwas historisch Gewachsenes darstellt.

Literatur

- Buchholtz, N. & Schorcht, S. (2019). Welche Überzeugungen haben Lehramtsstudierende zur Geschichte der Mathematik? – Ergebnisse der Studie über LEGMa. *Mathematica didactica*, 42, 1–19.
- Fried, M. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education*, 10, 391–408.
- Jankvist, U.T. (2009). *Using history as a ‚goal‘ in mathematics education* [Dissertation, Roskilde University]. <http://thiele.ruc.dk/imfufatekster/pdf/464.pdf>
- Kaske, R. (1998). Quadratische Gleichungen bei al-Khwarizmi. *Mathematik Lehren*, 91, 14–18.
- Scriba, Ch. J. (1983). Die Rolle der Geschichte der Mathematik in der Ausbildung von Schülern und Lehrern. *DMV - Jahresbericht*. 85. Band, Heft 3. Teubner.
- Schulte, L. (2016). Eine Querschnittsanalyse der Rolle der Mathematikgeschichte in aktuellen Schulbüchern. In R. Krömer & G. Nickel (Hrsg.), *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik*. 7. Band (S. 99 –130). Universitätsverlag Siegen.