

AßMUS, Daniela & FRITZLAR, Torsten  
Halle a. d. S.

## **Wie vergleichen Grundschüler\*innen Flächeninhalte von Vielecken? – eine Interviewstudie**

Vorstellungen und Kenntnisse zu Flächeninhalten sowie Fähigkeiten zu deren Bestimmung und Vergleich sind sowohl für den Mathematikunterricht über verschiedene Schulstufen hinweg als auch für verschiedene Lebensbereiche relevant (z. B. Kuntze, 2018). Allerdings gilt das Umgehen mit Flächeninhalten sowohl auf der konzeptionellen als auch auf der prozeduralen Ebene als anspruchsvoll, entsprechende Schwierigkeiten wurden in mehreren internationalen Studien vor allem für Lernende der Mittelstufe deutlich (z. B. Eames et al., 2020; Harris et al., 2023). Bereits 1991 konstatiert Fraedrich für den Beginn der Sekundarstufe in Deutschland, dass Schüler\*innen u. a. nur über unzureichende Erfahrungen und Vorstellungen zu Flächeninhalten verfügen, zu wenige Erfahrungen mit qualitativen Flächenvergleichen gesammelt und zu wenig Einsicht in das Prinzip der Flächeninvarianz haben (Fraedrich, 1991). Auch nach Wörner (2014) wird von Sekundarstufenlehrkräften immer wieder wahrgenommen, dass Schüler\*innen kaum geeignete Strategien zur Bestimmung des Flächeninhalts von unrichtlich untypischen Figuren nutzen können, woraus sich die Frage ableiten lässt, inwieweit Schüler\*innen überhaupt über mathematisch sinnvolle Grundvorstellungen zum Flächeninhaltsbegriff verfügen.

Für das Grundschulalter liegen bislang nur wenige empirische Befunde zu Kompetenzen von Grundschüler\*innen zu Flächeninhalten vor. Mit einem Forschungsprojekt, das verschiedene Teilstudien zum Vergleichen von Flächeninhalten in der Primarstufe umfasst, wollen wir einen Beitrag zur Reduktion dieser Forschungslücke leisten. Dabei interessieren wir uns insbesondere für Vorgehensweisen von Schüler\*innen bei entsprechenden Aufgaben sowie die Begründungen des Vergleichsurteils, über die sich dann unter anderem auch kindliche Vorstellungen zu Begriffen wie Fläche oder Flächeninhalt rekonstruieren lassen.

### **Eine explorative Interviewstudie zum qualitativen Flächenvergleich**

In der Grundschule können Flächen hinsichtlich ihrer Größe auf unterschiedliche Weise verglichen werden: durch Übereinanderlegen, Zerlegen, Ergänzen oder Auslegen; ausgehend vom Auslegen kann bei geeigneten Flächen die Anzahl der Teilflächen auch unter Nutzung der Multiplikation bestimmt werden. Darüber hinaus sind weitere, heuristische Ansätze wie das Wiegen von Flächenrepräsentanten möglich. Wenig bekannt ist allerdings, wie Schüler\*innen insbesondere bei untypischen Vielecken tatsächlich vorgehen.

In einer Interviewstudie im Rahmen des oben angesprochenen Projekts soll untersucht werden, wie Schüler\*innen jeweils zwei oder drei Polygone qualitativ hinsichtlich ihrer Größe miteinander vergleichen, die auf einem Quadrat- oder einem Punktgitter vorgegeben sind. Uns interessiert dabei insbesondere, ob und gegebenenfalls wie das jeweilige Gitter für den Flächeninhaltsvergleich genutzt wird und wie sich die Unterschiedlichkeit der Gitter auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben und auf Vorgehensweisen der Schüler\*innen auswirkt. In der Untersuchungsgruppe werden deshalb Paare von aus Lehrkräftesicht ähnlich leistungsstarken Lernenden gebildet, von denen ein Kind mit Flächen auf dem Quadratgitter und das andere Kind mit denselben Flächen auf dem Punktgitter an insgesamt neun Vergleichsaufgaben arbeitet. Die jeweils zu vergleichenden Vielecke werden bezüglich verschiedener Merkmale und im Hinblick auf den Grad ihrer Ähnlichkeit variiert. Bei der Auswahl dieser Merkmale haben wir uns insbesondere an deren Relevanz für verschiedene (aus unserer Sicht) nahe liegende Vorgehensweisen beim Flächeninhaltsvergleich orientiert. Abb. 1 zeigt eine Beispielaufgabe, die aus unserer Sicht einen erhöhten (theoretischen) Schwierigkeitsgrad besitzt, weil die Flächen auf einem Punktegitter vorgegeben sind, sehr unterschiedliche Formen aufweisen, die rechte Fläche ausschließlich mit Einheitsdreiecken ausgelegt werden kann und weil die rechte Fläche die kleinere ist, obwohl sie in Höhe und Breite eine größere Ausdehnung hat und auf ihrem Rand ein Gitterpunkt mehr liegt als bei der linken Figur.

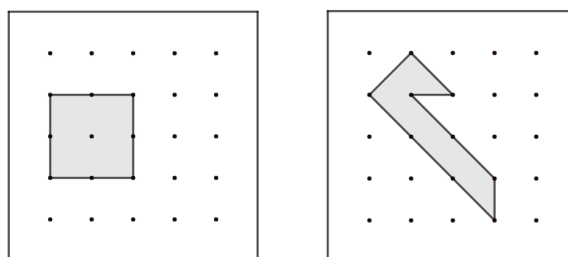


Abb. 1: Beispielaufgabe mit Vielecken auf dem Punktgitter

Die Aufgaben wurden auf Papier präsentiert. Stifte und Lineal konnten genutzt werden. Zusätzlich stand Legematerial (rechtwinklige Dreiecke, Quadrate, Rechtecke in der Größe eines doppelten Quadrates) zur Verfügung.

Die Aufgaben wurden zunächst mit 23 Schülerpaaren aus drei verschiedenen vierten Klassen durchgeführt.

Bei der Auswertung werden die Vorgehensweisen und Begründungen der Kinder kategorienbildend analysiert und daraus insbesondere auch Folgerungen hinsichtlich möglicher (Fehl-)Vorstellungen zum Flächen- und Flächeninhaltsbegriff gezogen.

## Ein Fallbeispiel

Merle bearbeitet die Aufgaben auf dem Punktgitter. Sie nimmt keine Zeichnungen vor, sondern fällt ihre Vergleichsurteile mental. In ihren Begründungen werden verschiedene Vorstellungen zu Flächen, ihrer Größe und zum Flächeninhaltsvergleich deutlich:

- Flächen gleicher Form haben die gleiche Größe. ("Also wenn man (...) sie jetzt in di/ genau dieselbe Form wie die bringen würde [...] wärn sie gleich groß.")
- Bei Figuren gleicher Breite hat die Längere die größere Fläche. ("Weil (.) sie sind ja gleich breit, und wenn sie dann länger ist, ist sie dann größer.")
- Figuren lassen sich so umstrukturieren, dass sich die Form verändert, die Flächengröße jedoch gleichbleibt.

Letzteres wendet Merle auf die linke Figur in Abb. 2 an, indem sie die Eckpunkte verschiebt. Unklar bleibt, warum sie der Meinung ist, dass diese Veränderung zu einer flächeninhaltsgleichen Figur führt. Eventuell ist hier die gleichartige Veränderung der Lage der Eckpunkte für sie ausschlaggebend.

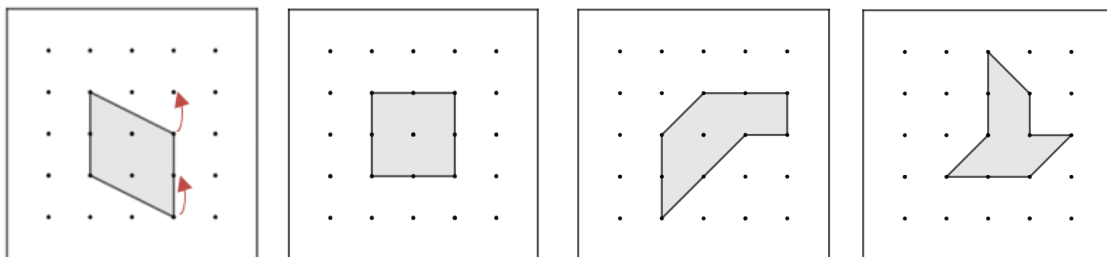


Abb. 2

Abb. 3

- Der Flächeninhaltsvergleich lässt sich anhand der Punktzahl auf der Randlinie vornehmen.

Das Zählen der Randpunkte wendet Merle bei komplexeren Figuren mit mehreren halben Quadraten wie in Abb. 3 und danach bei allen weiteren Aufgaben an. Gründe könnten in einer Orientierung am Umfang liegen, der über die Punktzahl für sie messbar erscheint. Eventuell greift sie aber auch auf die Punkte zurück, weil sie diese generell als einzige zählbare Elemente wahrnimmt.

Nach Bearbeitung aller Aufgaben wird Merle nach Möglichkeiten zur Überprüfung ihrer Ergebnisse gefragt. Da sie Ratlosigkeit äußert, erhält sie die Legematerialien und legt u. a. die Flächen in Abb. 3 unter Nutzung von Dreiecken, Quadraten und Rechtecken lückenfrei aus. Beim Vergleich der Flächengrößen zählt sie die genutzten Legeplättchen. Auch dabei zeigen sich spezifische Vorstellungen zum Flächeninhaltsbegriff bzw. -vergleich:

- Der Flächeninhaltsvergleich kann über die Anzahl der auslegenden Plättchen vorgenommen werden, unabhängig von ihrer Größe.
- Die Größenrelation zweier Flächen kann sich verändern, je nachdem mit welchen Figuren man die Flächen auslegt. ("Also im Moment ist die noch größer [Figur A, ohne Abbildung]. Aber wenn man jetzt [Abb. 3, linke Figur] s anders machen würde, wär die ja wieder größer.")

Während Merle zunächst aus geometrischen Eigenschaften bzw. deren Vergleich passende Rückschlüsse auf die Relation der Flächeninhalte zieht und auch mit der Transformation eines einfachen Vielecks angemessen umgeht, scheint sie bei komplexeren Vielecken auf zählbare Elemente auszuweichen. Insbesondere scheint die grundlegende Eigenschaft der Invarianz des Flächeninhalts bei ihr noch nicht gefestigt. Auch beim Umgang mit Legeplättchen zeigen sich Fehlvorstellungen, die sich möglicherweise durch eine bisherige Beschränkung auf homogenes Legematerial im Mathematikunterricht ausbilden konnten.

### Weiteres Vorgehen

Bislang konnten erst wenige Interviews detailliert analysiert werden. Für fundiertere Erkenntnisse sollen im nächsten Schritt alle bereits vorhandenen Interviews ausgewertet und vor allem auch jüngere Schüler\*innen in diese Studie einbezogen werden. Im Rahmen des übergeordneten Projektes findet derzeit eine zweite Untersuchung statt, die weitere Vergleichsmöglichkeiten wie den direkten Vergleich durch Aufeinanderlegen, Auslegen ohne Raster, Abtrennen und Ansetzen von Figurenteilen etc. einbezieht.

### Literatur

- Eames, C. L., Barrett, J. E., Cullen, C. J., Rutherford, G., Klanderma, D., Clements, D. H., Sarama, J., & van Dine, D. W. (2020). Examining and developing fourth grade children's area estimation performance. *School Science and Mathematics, 120*(2), 67–78. <https://doi.org/10.1111/ssm.12386>
- Fraedrich, A. M. (1991). Flächenauslegen in der 1./2. Klasse. *Grundschule, 23*(2), 20–24.
- Harris, D., Logan, T., & Lowrie, T. (2023). Spatial visualization and measurement of area: A case study in spatialized mathematics instruction. *The Journal of Mathematical Behavior, 70*, 101038. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101038>
- Kuntze, S. (2018). Flächeninhalt und Volumen. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme, & G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (3., erweiterte und überarbeitete Auflage, S. 149–177). Springer Spektrum. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8_7)
- Wörner, D. (2014). Grundvorstellungen zum Flächeninhaltsbegriff ausbilden – eine exemplarische Studie. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1327–1330). WTM.