

KIRSTEN, Katharina & NEUHAUS-ECKHARDT, Silke
Münster, Würzburg

Beispielnutzung in der Beweiskonstruktion

Das Generieren und Betrachten von Beispielen ist eine bekannte und vielfach empfohlene Strategie bei der Konstruktion von Beweisen. Studien zeigen jedoch, dass nicht alle Lernende von dieser Strategie profitieren (z. B. Iannone et al., 2011). Insbesondere im Hochschulkontext deuten qualitative Untersuchungen darauf hin, dass Studierende Schwierigkeiten haben, geeignete Beispiele auszuwählen und diese im Beweisprozess sinnvoll zu nutzen (z. B. Alcock & Weber, 2010). Inwiefern sich diese Schwierigkeiten quantifizieren lassen und über welches strategische Wissen zur Beispielnutzung Studierende verfügen, wird in diesem Beitrag untersucht.

Strategisches Wissen und Anwendungsschwierigkeiten

Nach dem CAPS-Modell (Ellis et al., 2019) benötigt es vier Komponenten strategischen Wissens, um Beispiele effektiv im Beweisprozess nutzen zu können: (1) Kriterien zur Auswahl von Beispielen (criteria), (2) Kenntnis über den Beitrag der Beispielnutzung für den Beweisprozess (affordance), (3) Unterscheidung verschiedener Zwecke der Strategieverwendung (purpose) und (4) Wissen über die spezifische Umsetzung der Strategie (strategy). Inwiefern Studierende über ein derartiges strategisches Wissen verfügen und wie Defizite eine produktive Strategieverwendung beeinträchtigen können, wurde für einzelne Komponenten im Rahmen von Experten-Novizen-Vergleichen untersucht. In Bezug auf die Auswahlkriterien deutet ein von Lynch und Lockwood (2019) durchgeführter Vergleich darauf hin, dass Mathematiker:innen Beispiele selektiv auswählen und verschiedene Arten von Beispielen für unterschiedliche Ziele verwenden. Studierende neigen demgegenüber dazu, beliebige Beispiele zu wählen, sich auf elementare Beispiele zu beschränken und die erforderlichen Eigenschaften der Beispiele nicht immer konsequent zu überprüfen, wodurch sie auch inkorrekte Beispiele nutzen (Alcock & Weber, 2010; Iannone et al., 2011). In Hinblick auf den Zweck der Strategieverwendung setzen sich Studierende grundsätzlich ähnliche Ziele wie Mathematiker:innen (Alcock & Weber, 2010). Demnach werden Beispiele dazu verwendet, um die zu beweisende Aussage einschließlich der relevanten Begriffe und Konzepte zu verstehen, die Plausibilität der Aussage zu hinterfragen, Gegenbeispiele zu generieren oder verallgemeinerbare Muster und damit Beweisideen aufzudecken (Alcock & Weber, 2010; Lockwood et al., 2016). Während Mathematiker:innen alle Zwecke gleichermaßen bedienen, fokussieren sich Studierende jedoch häufig auf das Verstehen der Aussage (Alcock & Weber, 2010).

Forschungsfragen

Die bisherigen Forschungsergebnisse zeigen, dass das Potenzial der Beispielbetrachtung nicht ausgeschöpft werden kann, wenn strategisches Wissen wie adäquate Auswahlkriterien, eine konsequente Überprüfung von Beispielen oder eine differenzierte Zielsetzung fehlt. In diesem Beitrag werden daher folgende Fragestellungen untersucht:

FF1: Inwiefern sind Studierende in der Lage, zwischen korrekten und inkorrekten Beispielen zu unterscheiden?

FF2: Welche Begründungen geben Studierende bei der Bewertung von Beispielen hinsichtlich ihrer Nützlichkeit für den Beweisprozess an?

Methodik

Um diese Forschungsfragen zu adressieren, wurden $N = 152$ Studierende (gymnasiales Lehramt und Fachstudierende) zu Beginn ihres zweiten Semesters in Hinblick auf ihr beispielbezogenes Strategiewissen befragt. Hierfür wurde die folgende Aufgabe aus der Analysis I als Grundlage gewählt: „Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeige, dass f einen Fixpunkt hat, d.h. es existiert ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$.“ Die Studierenden wurden sodann gebeten, vier vorgegebene Beispiele hinsichtlich ihrer Korrektheit (dichotom, korrekt vs. inkorrekt) und ihrer Nützlichkeit (dichotom, nützlich vs. nicht nützlich) in Bezug auf die gezeigte Aufgabe zu bewerten. Zusätzlich sollte in einem offenen Freitextfeld eine Begründung für die Einschätzung angegeben werden. Folgende Beispiele standen zur Bewertung: (a) $g(x) = 2x - 3, a = 1, b = 4$, (b) $g(x) = |x|, a = 2, b = 4$, (c) $g(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^3 + 2, a = 1, b = 3$, und (d) $g(x) = |x|, a = -4, b = -2$. Von den 152 Teilnehmenden füllten nur 90 eine Begründung aus. Die angegebenen Begründungen wurden mithilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse induktiv am Material entwickelt. Muster im Antwortverhalten wurden mithilfe von Chi-Quadrat-Tests auf Signifikanz geprüft.

Ergebnisse

Abbildung 1 gibt einen Überblick über die prozentuale Verteilung der studentischen Antworten. Hier wird deutlich, dass die Studierenden lediglich die Korrektheit der beiden Beispiele mit der Betragsfunktion sicher bestimmen konnten. Zudem deutet das Antwortverhalten der Studierenden auf einen Zusammenhang zwischen der angenommenen Korrektheit eines Beispiels und der Bewertung von dessen Nützlichkeit an. Ein Chi-Quadrat-Test bestätigt zumindest für die Beispiele (a) und (c), dass die Bewertungskom-

binationen „korrekt“ und „hilfreich“ bzw. „nicht korrekt“ und „nicht hilfreich“ signifikant häufiger als andere auftreten ((a) $\chi^2(1) = 33.31, p < .001$, (c) $\chi^2(1) = 17.21, p < .001$).

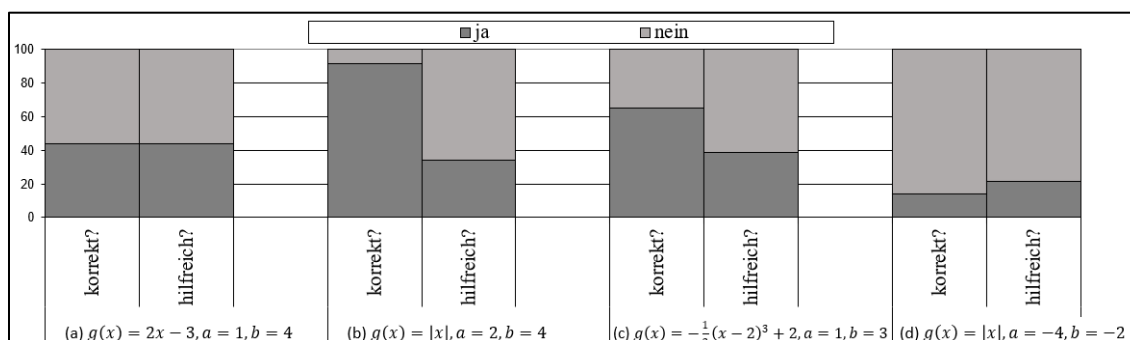


Abbildung 1: Prozentuale Verteilung der Studierendenbewertung

Die qualitative Auswertung der Freitextantworten ergab fünf verschiedene inhaltstragende Kategorien, die jeweils ein Argument für bzw. gegen die Nützlichkeit eines konkreten Beispiels beschreiben (siehe Tabelle 1).

Kategorie	Beschreibung	Beispiel
Korrektheit	Die angegebenen Funktionen werden daraufhin überprüft, ob sie die Voraussetzungen erfüllen.	„falsch → nicht hilfreich“
Verständnis	Es wird beurteilt, wie gut ein Beispiel die zu zeigende Aussage veranschaulicht und zum Verständnis beiträgt.	„Beispiel, wie so eine Funktion aussehen könnte“
Komplexität	Die Nützlichkeit der gegebenen Beispiele wird danach bewertet, ob sie einfach oder kompliziert sind.	„hilfreich, weil einfachster Fall“
Erkenntnisgewinn	Die Beispiele werden danach bewertet, inwiefern sie neue Einsichten vermitteln. Die gewonnenen Erkenntnisse können die Lösungsgenerierung unterstützen.	„Die Funktion $g(x)$ schneidet $f(x)$, woraus man Teile der Lösung ableiten kann“
Epistemologischer Gehalt	Die Begründung nimmt Bezug auf eine allgemeine Einstellung zu Beispielen und deren Wert in der Beweisführung.	„nur ein Beispiel, wo es zufällig passt“

Tabelle 1: Studentische Begründungen zur Nützlichkeit eines Beispiels

Die genannten Begründungen geben dabei einerseits Aufschluss über die Auswahlkriterien der Studierenden und zeugen andererseits von unterschiedlichen Betrachtungsweisen und Zielsetzungen. So stellen beispielsweise „Korrektheit“ und „Komplexität“ zwei Auswahlkriterien dar, während „Verständnis“ und „Erkenntnisgewinn“ auf eine konkrete Zielsetzung hinweisen.

Diskussion

Da nicht alle Studierenden gleichermaßen von der vielfach empfohlenen Strategie der Beispielnutzung im Beweisprozess profitieren, wurde in diesem Beitrag das strategische Wissen von Studierenden untersucht. Die quantitativen Ergebnisse bestätigen zunächst die qualitativen Beobachtungen von Alcock und Weber (2010) sowie Iannone et al. (2011), nach denen Studierende Schwierigkeiten aufweisen, die vorgegebenen Eigenschaften bei nicht-trivialen Beispielen zu überprüfen. Dies ist insbesondere vor dem Hintergrund, dass die Korrektheit eines Beispiels in vielen Fällen eng mit der Bewertung von dessen Nützlichkeit verbunden ist, von Relevanz. Neben der Korrektheit eines Beispiels konnten vier weitere Argumente für die Nützlichkeit eines Beispiels aus studentischen Begründungen rekonstruiert werden. Dem CAPS-Modell folgend spiegeln sich in diesen Argumenten unterschiedliche Auswahlkriterien und Zielperspektiven wider (Ellis et al., 2019). Die Kategorie „Verständnis“ zielt beispielsweise darauf ab, die gegebene Aussage zu verstehen, während die Argumente „Erkenntnisgewinn“ und „epistemologische Gehalt“ eher von der Suche nach Beweisideen zeugen. Inwiefern die elaborierteren Begründungsansätze auch zu erfolgreicherem Beweiskonstruktionen führen, wird in Folgeuntersuchungen analysiert.

Literatur

- Alcock, L. & Weber, K. (2010). Undergraduates' example use in proof construction: purposes and effectiveness. *Investigations in Mathematics Learning*, 3(1), 1–22.
- Ellis, A. B., Ozgur, Z., Vinsonhaler, R., Dogan, M. F., Carolan, T., Lockwood, E., Lynch, A., Sabouri, P., Knuth, E. & Zaslavsky, O. (2019). Student thinking with examples: The criteria-affordances-purposes-strategies framework. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 263–283. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.06.003>
- Iannone, P., Inglis, M., Mejía-Ramos, J. P., Simpson, A. & Weber, K. (2011). Does generating examples aid proof production? *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 1–14. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9299-0>
- Lockwood, E., Ellis, A. B. & Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' Example-Related Activity when Exploring and Proving Conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(2), 165–196. <https://doi.org/10.1007/s40753-016-0025-2>
- Lynch, A. G. & Lockwood, E. (2019). A comparison between mathematicians' and students' use of examples for conjecturing and proving. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 323–338. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.07.004>