

Figurierte Zahlen als Zugang zu Termumformungen

Probleme bei Termen und Termumformungen werden immer wieder von Lehrkräften als Hürde in ihrem eigenen Unterricht wahrgenommen. Vorge stellt wird, wie Figurierte Zahlen einen Zugang darstellen können, der hinsichtlich der Sprache zunächst zwar voraussetzungsarm ist, aber im weiteren Verlauf auch deren Entwicklung unterstützen kann.

Rahmenbedingungen

Seit Februar 2016 gibt es an der privaten Otto-Kühne-Schule in Bonn eine Internationale Vorbereitungsklasse (IVK) für 20 Schülerinnen und Schüler im Alter von 15 bis 18 Jahren. Diese stammen aus verschiedenen Krisen- und Kriegsregionen der Welt und sind meist in den letzten neun bis 15 Monaten mit geringen oder gänzlich fehlenden Deutschkenntnissen in Deutschland angekommen. Ziel der IVK ist es, diese Kinder innerhalb von zwei Jahren in das Schulsystem einzugliedern. Der Unterricht in der IVK umfasst u.a. pro Woche zwölf Stunden Deutsch als Fremdsprache sowie fünf Stunden Mathematik. Trotz sprachlicher Schwierigkeiten wird der Mathematikunterricht (bewusst) auf Deutsch durchgeführt. Aufgrund der sehr heterogenen Vorbildung der einzelnen Schülerinnen und Schüler findet der Mathematikunterricht in verschiedenen Gruppen statt, die die Themen vom kleinen 1×1 bis hin zu quadratischen Gleichungen behandeln.

(Theoretische) Vorbemerkungen

Einer Schulbuchanalyse von Prediger & Krägeloh (2015, S.91) folgend, werden Variablen in deutschen Schulen meist mit sprachlichen Mitteln eingeführt und erläutert. Dabei wird, insbesondere um ein breiteres Verständnis aufzubauen und die Variable als Verallgemeinerung wahrzunehmen, auf die Alltagssprache der Schülerinnen und Schüler Bezug genommen. Aufgrund der besonderen sprachlichen Situation innerhalb der IVK war ein linguistischer Zugang nicht möglich und es wurden Figurierte Zahlen als zentrales mathematisches Objekt gewählt. Unter einer solchen verstehen wir eine Sequenz aus Punkten wie in Abb. 1 einschließlich der zugehörigen Zahlfolge.



Abbildung 1: „Das Füllglas“ mit der Zahlfolge 6, 10, 14, ...

Figurierte Zahlen als Zugang zu Termen und Termumformungen haben zwar eine starke Tradition in der mathematikdidaktischen Forschung (u.a. Gardner, 1973; Wellstein, 1978), gleichwohl werden diese in den aktuell zugelassenen Schulbüchern des Bundeslandes NRW¹ nicht als Einführung verwendet. Falls Figurierte Zahlen auftreten, werden diese meist nur als Illustration eingefügt. Wir möchten im Folgenden daher aufzeigen, dass Figurierte Zahlen einen Rahmen bieten, in dem Schülerinnen und Schülern Erfahrungen mit Mustern und Strukturen sammeln können, die bei der Bildung des Variablenbegriffs und bei der Begründung von Termumformungen unterstützen können.

Der Fokus dieses Projektes ist die Begriffs- und Sprachentwicklung bei dem Umgang mit Termen. Ziel dabei ist es, insbesondere den Entwicklungsverlauf im Klassenunterricht zu betrachten und besser zu verstehen. Dies ist eine deutlich andere Herangehensweise als im Projekt von Oswald (2017): Dort wird in einer kurzen qualitativen Einzelfallanalyse ein ergänzender Mathematikunterricht betrachtet, in dem einzelne Bilder (ähnlich den Figurierte Zahlen) als Beweise ohne Worte den (minderjährigen) Flüchtlingen vorgelegt wurden.

Die Unterrichtseinheit lässt sich grob in zwei Teile unterteilen. Im ersten Teil wurden Figurierte Zahlen und Zahlfolgen als Term-Generatoren benutzt, bevor im zweiten Teil die Gleichheit von Termen sowie die Plausibilisierung erster Umformungsregeln thematisiert wurde.

Im ersten Teil sollten gegebene Musterfolgen zunächst ins Heft gemalt und fortgesetzt werden. Danach sollten für jede Folge die Punkte gezählt und in eine Tabelle eingetragen werden. Schließlich sollten Gesetzmäßigkeiten verbal oder ikonisch beschrieben und eine (oder mehrere) Zählformeln aufgestellt werden. Diese waren dann mit einer geeigneten Abzählung zu begründen. Die Figurierten Zahlen waren dabei meist lineare Progressionen.

Die Episode der „Ungeraden Zahlen“

In diesem kurzen Beitrag soll auf eine Episode über die Zahlfolge 1, 3, 5, 7, ... fokussiert werden, die den Übergang zwischen den beiden Teilen der Unterrichtseinheit darstellt. Zunächst wurde die Folge durch die Schülerinnen und Schüler passend fortgesetzt. Hierbei ist aufgefallen, dass der Begriff der ungeraden Zahl weder in Deutsch noch in der jeweiligen Muttersprache präsent war und der Folge somit keine besondere Bedeutung beigemessen wurde.

¹Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW (2016).

	1	2	3	4	...	x
<i>Folge</i>	1	3	5	7	...	?
<i>Idee 1:</i>	$2 \cdot 1 - 1$	$2 \cdot 2 - 1$	$2 \cdot 3 - 1$	$2 \cdot 4 - 1$...	$2 \cdot x - 1$
<i>Idee 2:</i>	$1 + 0$	$2 + 1$	$3 + 2$	$4 + 3$...	$x + (x - 1)$
<i>Idee 3:</i>	<i>n/a</i>	$4 - 1$	$9 - 4$	$16 - 9$...	$x^2 - (x - 1)^2$

Tabelle 1: Die Folge der ungeraden Zahlen

Bei der Beschäftigung mit der obigen Folge benutzten die Schülerinnen und Schüler drei verschiedene Strategien zur Berechnung weiterer Folgenglieder (Tab. 1). Seitens der Schülerinnen und Schüler wurden zunächst ein „_“ oder ein „?“ anstatt eines „ x “ geschrieben. In Einzelfällen lieferten alle Terme zwar die gleichen Werte, aber es kam die Frage auf, welcher dieser Terme denn „**der Richtige**“ sei. Einziges Richtmaß dafür waren die Punktmuster. Die dazu angefertigten Figurierungen sind in Abb. 2 zu finden.

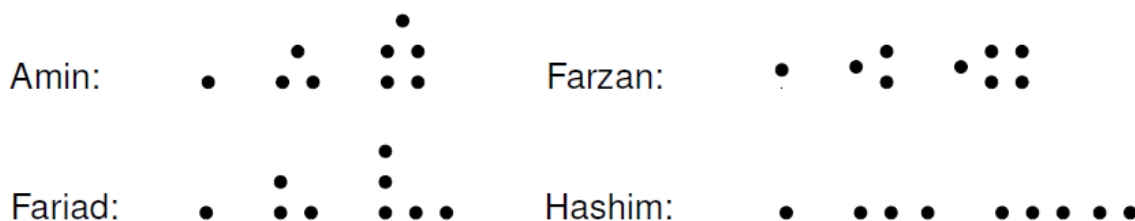


Abbildung 2: Figurierungen der ungeraden Zahlen durch die Schülerinnen und Schüler²

Die Beschaffenheit der (vermeintlich) verschiedenen Muster führte zu einer Invarianz-Diskussion bezüglich Drehungen und Verschiebungen von Punkten. Die Gleichheit von Amins und Farzans Figurierungen war schnell ausgehandelt und die ersten beiden Strukturierungen konnten dort gut erkannt werden: Nach einer Verschiebung des einzelnen Punktes kann das Muster zum einen durch einen zusätzlichen Punkt zu einem Rechteck ergänzt werden (Idee 1) und zum anderen als Summe zweier aufeinander folgenden Zahlen betrachtet werden (Idee 2).

Fariads Figurierung ist insoweit interessant als dass sie für den geübten Betrachter am ehesten die Differenz zweier Quadrate darstellt. Er selbst hat aber damit Idee 1 figurieren wollen und konnte nur sehr mühselig eine Beziehung zu Idee 3 herstellen. Andersherum konnte Mehari, der Idee 3 äußerte, keine dazu passende Figurierung anfertigen.

Nachdem Hashim die ersten drei Figurierungen sah, hat er die letzte Figurierung angezeichnet. Dabei hat er zum Ausdruck gebracht, dass für ihn die Figurierungen sehr beliebig wirken und man somit auch alle Punkte in eine Zeile zeichnen könnte. Bemerkenswert ist hierbei, dass er jeweils nach dem

² Die Namen der Schülerinnen und Schüler wurden verändert.

mittleren Punkt einen minimal größeren Abstand gewählt hat (dies hat er auf Nachfrage bestätigt) und somit auch seine Figurierung eine gewisse Struktur besitzt.

Die Vielfalt der entstandenen Terme und Figurierungen bot hier vielerlei Anlässe, um Begrifflichkeiten innerhalb der Klasse auszuhandeln. In dieser Episode wurden bestimmte Figurierungen als eine Art Normalform wahrgenommen, also als **der** Standardvertreter. Für die Folge der ungeraden Zahlen war dies Farzans Figurierung (Abb. 2): die einzelnen Punkte stehen links und das Muster setzt sich als Rechteck nach rechts fort. Dies ebnete im weiteren Verlauf den Weg für das Zusammenfassen von Termen der Form $ax + b$.

Resümee

Insgesamt war eine sehr hohe Motivation bei den Schülerinnen und Schülern zu bemerken. Diese war unabhängig von der mathematischen Begabung und resultierte bei den meisten in einer konzentrierten Beschäftigung mit den figurierten Zahlen und später in viele produktive Diskussionen (wie der oben skizzierten). Die scheinbare Einfachheit der Aufgaben einhergehend mit der Offenheit führte zunächst zu einer Unterforderung der Schülerinnen und Schüler. Dies änderte sich bei dem Übergang zur symbolischen Ebene sehr schnell. Weitere Durchführungszyklen in anderen Internationalen Klassen und deutschen Regelklassen sind in Vorbereitung.

Danksagung

Ein besonderer Dank geht an Malte Mink für die tatkräftige Unterstützung dieses Projektes.

Literatur

- Gardner, M. (1973). "Look-see": Diagrams that offer visual proof of complex algebraic formulas. In *Scientific American*, 229(4), 114–118.
- Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2016). *Verzeichnis der zugelassenen Lernmittel: Gymnasium Sekundarstufe I*. Verfügbar unter <https://www.schulministerium.nrw.de> [Zugriff: 01.12.2016]
- Oswald, N.M.R. (2017). Beweise ohne Worte mit jugendlichen Geflüchteten. *GDM-Mitteilungen*, 102, 5–11.
- Prediger, S. & Krägeloh, N. (2015). "x-arbitrary means any number, but you do not know which one" - The epistemic role of languages while constructing meaning for the variable as generalizers. In: Halai, A. & Clarkson, P. (Eds.), *Teaching and Learning Mathematics in Multilingual Classrooms: Issues for Policy, Practice and Teacher Education*. Rotterdam, the Netherlands: Sense, 89–108.
- Wellstein, H. (1978). Abzählen von Gitterpunkten als Zugang zu Termumformungen. *Didaktik der Mathematik*, 6(1), 54–64.