

BÖCHERER-LINDER, Katharina
Freiburg

Sprachliche Formulierung von bedingten Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeiten lassen sich sprachlich ganz unterschiedlich beschreiben: "Wie wahrscheinlich ist ein Temperatursturz *unter der Bedingung, dass es regnet?* / *falls es regnet?* / *bei Regen?* / *wenn man weiß, dass es regnet?*". Angesichts der Vielzahl an Formulierungsmöglichkeiten überrascht es nicht, dass Schülerinnen und Schüler bedingte Wahrscheinlichkeiten oft nicht als solche erkennen und fälschlicherweise einfache oder konjugierte Wahrscheinlichkeiten berechnen (z.B. Eichler & Vogel, 2013).

Über den Einfluss des Informationsformates bei Fragen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten liegen bereits umfangreiche Forschungsergebnisse vor, allerdings fokussieren die Studien dazu hauptsächlich auf den Einfluss von Zahlenformaten (McDowell & Jacobs, 2017) oder Visualisierungen (z.B. Binder et al., 2023). Welchen Einfluss die verbale Beschreibung der Bedingung im Zusammenhang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten hat, ob es sprachliche Formulierungen gibt, bei denen die mathematische Struktur besser erkannt wird und ob manche Formulierungen fehleranfälliger sind, ist hingegen ein Forschungsdesiderat.

Die Mathematik bietet in ihrer formal-symbolischen Darstellung in der Regel eine präzise und eindeutige Beschreibung an. Sobald jedoch das mathematische Konzept auf einen Kontext angewendet werden soll bzw. eine Situation modelliert wird, müssen sprachliche Beschreibungen interpretiert und im Sinne des mathematischen Konzeptes gedeutet werden. Da sprachliche Bestandteile auch im Alltag genutzt werden, möglicherweise aber weniger präzise oder in anderer Bedeutung, kann dies zur Gefahr eines Scheinverstehens führen (Guckelsberger & Schacht, 2018).

Es stellt sich die Frage, welches die sprachlichen Beschreibungen sind, die zur Verfügung stehen, um eine bedingte Wahrscheinlichkeit verbal darzustellen. In welcher Weise wird die mathematische Struktur sprachlich ausgedrückt? Die Klärung dieser Frage trägt einerseits zur Identifikation von Sprachmitteln bei, was für die Sprachförderung im Mathematikunterricht grundlegend ist (Leuders & Prediger, 2017). Andererseits liegt die Vermutung nahe, dass verschiedene sprachliche Formulierungen unterschiedlich fehleranfällig sind und ein Kategoriensystem, das die möglichen sprachlichen Beschreibungen erfasst, kann ein wichtiges Werkzeug sein, um Fehlvorstellungen im Bereich bedingter Wahrscheinlichkeiten zu erforschen

(siehe z.B. das DFG-Forschungsprojekt FehlBa: www.bayesianreasoning.de).

Im Folgenden soll Einblick gegeben werden in zwei Studien, die sich diesen Fragen widmen. In der ersten Studie wurde mit Hilfe einer Schulbuchanalyse induktiv ein Kategoriensystem entwickelt, das die sprachlichen Formulierungen für bedingte Wahrscheinlichkeiten in der deutschen Sprache systematisch erfasst. Zusätzlich wurden die Übungsaufgaben ausgewählter Schulbücher einer kategoriengeleiteten Textanalyse unterzogen, um einen Eindruck davon zu bekommen, welche Variationsbreite an Formulierungen durch die Schulbücher angeboten werden. In einer zweiten Studie mit $N=77$ Abiturientinnen und Abiturienten wurde untersucht, welche Formulierung die Lernenden selbst bevorzugen und bei welchen Formulierungen typische Fehler, die im Zusammenhang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten bekannt sind (z.B. Eichler & Vogel, 2013), besonders häufig auftreten.

1. Entwicklung des Kategoriensystems zur Formulierung bedingter Wahrscheinlichkeiten

Da Schulbücher einen enormen Einfluss auf das Unterrichtsgeschehen haben (Pepin & Haggarty, 2001), Lehrkräfte Schulbücher zur Unterrichtsvorbereitung nutzen, sie überwiegend auf Übungsaufgaben aus den Schulbüchern zurückgreifen und man Schulbuchlehrtexten eine gewisse Verbindlichkeit und Autorität zuschreibt (Kaganova, 2015), wird zur Beantwortung der Frage „Wie wird die Bedingung formuliert?“ eine Schulbuchanalyse durchgeführt. Ziel ist dabei die Entwicklung eines Kategoriensystems zur sprachlichen Formulierungen bedingter Wahrscheinlichkeiten in der Schulmathematik.

Die Auswahl der Schulbücher orientiert sich dabei zunächst an den aktuell zugelassenen Lehrwerken für das Gymnasium Baden-Württemberg. Um möglichst viele verschiedene sprachliche Ausdrucksvarianten zu erfassen, werden die oben genannten Schulbücher durch Werke ergänzt, die in anderen Traditionen stehen: Einerseits zwei ältere Lehrwerke der Oberstufe, andererseits ein Lehrwerk, das aus der Reformbewegung der 2000er Jahre hervorgegangen ist und eines, das im Rahmen von Unterrichtsentwicklungsforschung entstanden ist.

Das Kategoriensystem zur Formulierung bedingter Wahrscheinlichkeiten wird mittels qualitativer Inhaltsanalyse (Mayring & Fenzel, 2019) gewonnen. Dafür werden aus dem Material zunächst induktiv Kategorien gebildet. Der zu analysierende Textkorpus besteht für diesen ersten Schritt aus den jeweiligen Schulbuchkapiteln zur bedingten Wahrscheinlichkeit. Für die Bildung von Kategorien wird dabei besonders auf sprachliche bzw. grammatikalische Aspekte geachtet.

Es wurden folgende Kategorien gebildet: Die Bedingung kann formuliert werden durch ...

- (D) einen **dass-Satz** eingeleitet durch ein Signalwort (z.B. "unter der Bedingung, dass...").
- (K) einen **Konditional-Satz** (z.B. "wenn..." oder "falls...").
- (H) einen vorgeschalteten **Hauptsatz**.
- (R) einen **Relativsatz**, der den Merkmalsträger näher beschreibt.
- (N) eine **Nominalphrase** (z.B. Nomen mit Adjektiv).
- (A) eine **adverbiale Bestimmung**, die die Situation näher beschreibt.

Im Vortrag werden der Kodierungsprozess berichtet, sowie genauere Beschreibungen und Ankerbeispiele gegeben. Es wurde eine Kodierleitfaden erstellt, mit dem eine kategoriengeleitete Textanalyse der von Schulbüchern bereitgestellten Übungsaufgaben durchgeführt wurde. Es zeigte sich, dass zwischen den verschiedenen Schulbüchern in Bezug auf die Häufigkeit der verwendeten Formulierungen deutliche Unterschiede bestehen und teilweise innerhalb eines Schulbuches die Formulierungen wenig variieren.

2. Methode und Ergebnisse der Anschlussstudie

In einer Anschlussstudie wurden 77 Abiturientinnen und Abiturienten (49 m, 24 w, 4 keine Angabe) des Mathematik-Leistungskurses mit Hilfe eines paper-pencil-Tests befragt. Dabei wurde sowohl ein offenes Testitem (Abb. 1) sowie drei geschlossene Testitems verwendet.

In einer 30-köpfigen Schulklasse werden im Mathematikunterricht die Noten der letzten Klassenarbeit vorgelesen. In dieser Schulklasse sind 11 Jungen und 19 Mädchen. Insgesamt gab es fünfmal die Note 1, darunter drei Schülerinnen.

Es seien:

A: „Die Person ist ein Mädchen.“

B: „Die Person hat die Note 1.“

Formuliere eine mögliche Fragestellung, wenn $P_B(A)$ berechnet werden soll:

Abb. 1: Offenes Testitem der Anschlussstudie

In Tabelle 1 sind die Ergebnisse der 77 Antworten zum offenen Testitem gezeigt. Die Antworten der Schülerinnen und Schüler wurden dabei nach den in Abschnitt 1 gezeigten Kategorien kodiert. Die Häufigkeiten der verschiedenen Formulierungen sind in Klammern angegeben. Interessant ist, dass alle sechs Kategorien in den Antworten vorkommen, die Lernenden insgesamt also sehr verschiedene Formulierungen wählten. Am häufigsten wurde die Bedingung mittels einer Nominalphrase (18 N) ausgedrückt (z.B. "Person mit Note 1" oder "Einser-Schreiber"). Allerdings wurde auch bei der Verwechslung von Bedingung und Bedingtem, d.h. $P_A(B)$ statt $P_B(A)$, häufig eine Nominalphrase verwendet (z.B. "weibliche Person").

Korrekte Wahrscheinlichkeitsformulierung $P_B(A)$	58 (15 D, 8 K, 3 H, 13 R, 18 N, 1 A)
Konjugierte Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$	8
Falsche bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$	6 (5 N, 1 K)
Frage nach passender absoluter Häufigkeit	3
Sonstige Fehler	2

Tab. 1: Ergebnisse zum offenen Testitem

In den drei geschlossenen Testitems wurden jeweils mehrere Antwortmöglichkeiten zu einer Frage gegeben und es musste angekreuzt werden, welche Formulierungen passend sind bzw. zusammengehören. Dabei wurden zum einen die Formulierungskategorien (D, K, H, R, N, A) durchvariiert, jeweils mit unterschiedlicher Kombination $P_A(B)$ oder $P_B(A)$, sowie auch immer eine Formulierung von $P(A \cap B)$ angeboten. Ziel war es, Zusammenhänge zwischen den sprachlichen Formulierungen und bestimmten Fehlertypen zu finden.

Die Ergebnisse beider Studien können Ansätze sowohl für Sprachförderung im Mathematikunterricht als auch für das Verständnis bedingter Wahrscheinlichkeiten liefern, denn sprachliche wie fachliche Herausforderungen scheinen hier untrennbar verbunden.

Literatur

- Binder, K., Steib, N. & Krauss, S. (2023). Von Baumdiagrammen über Doppelbäume zu Häufigkeitsnetzen - kognitive Überlastung oder didaktische Unterstützung? *Journal für Mathematikdidaktik* (44), S. 471-503.
- Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik*. Wiesbaden: Springer.
- Guckelsberger, S. & Schacht, F. (2018). Bedingt wahrscheinlich? Perspektiven für einen sprachbewussten Stochastikunterricht. *mathematik lehren* (206), S. 29-33.
- Kaganova, E. (2015). *Das Lehrpotential von Schulbuchlehrtexten im Fach Mathematik. Dissertation*, Universität Potsdam.
- Leuders, T. & Prediger, S. (2017). *Flexibel differenzieren und fokussiert fördern im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen.
- Mayring, P. & Fenzl, T. (2019). Qualitative Inhaltsanalyse. In N. Baur & J. Blasius (Hrsg.), *Handbuch Methoden der empirischen Sozialforschung*. Wiesbaden: Springer. S. 633-648.
- McDowell, M., & Jacobs, P. (2017). Meta-analysis of the effect of natural frequencies on Bayesian reasoning. *Psychological bulletin* (143), S. 1273–1312.
- Pepin, B. & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 33(5), S. 158-175.