MÄHNERT, Jessica & ERATH, Kirstin
Halle a. d. S.

Analysen von Schriftprodukten zu operativen Aufgaben im Kontext der Division von Brüchen

Das Dividieren von Brüchen gehört zu den schwierigsten Konzepten in der Schule, insbesondere wenn das Ziel darin besteht, konzeptuelles Verständnis zu entwickeln (Malle & Huber, 2004). So zeigt eine Studie mit 243 Lernenden aus sieben Klassen der 7. Schuljahres, dass trotz der vermeintlich einfachen Regel nur 32% der gestellten Divisionsaufgaben richtig gelöst werden konnten (Padberg, 1982). Padberg (1982) stellte in seinen Analysen heraus, dass die hohe Fehlerquote zu einem hohen Prozentsatz auf falschen Lösungsstrategien beruhe. Darüber hinaus wendet ein Großteil der Lernenden die Komponente Kehrwertbildung falsch an, indem sie beispielweise den Kehrwert vom ersten Bruch, zweimal den Kehrwert oder den Kehrwert vom ersten Bruch mit anschließender Division bilden. Daher stellt sich nun die Frage, wie eine anschauliche Ableitung der Divisionsregel für Brüche gelingen kann.

Für das Design einer ersten Lernumgebung soll im Rahmen der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Gravemeijer & Cobb, 2006) zunächst die Lernendenperspektive erfasst werden, mit dem Ziel Aufschluss über bestehende Schwierigkeiten und vorhandene Ressourcen zu erhalten. Die Ergebnisse aus dem ersten Zyklus werden hier vorgestellt, wobei aus Platzgründen nur ein kleiner Ausschnitt präsentiert werden kann.

Forschungsdesign

Im Rahmen des Promotionsprojekts der Erstautorin wurde bisher ein Zyklus von Design-Experimenten in Laborsettings realisiert mit dem Ziel, lokale Theorien zum Lerngegenstand zu modifizieren sowie ein besseres Verständnis zur Bruchdivision zu erlangen. Die Design-Experimente wurden als Partnererprobungen in der sechsten Jahrgangsstufe einer Gemeinschaftsschule durchgeführt. Insgesamt nahmen 12 Lernende (6 Schriftprodukte) teil. Die Lernenden haben zuvor im Regelunterricht bereits die Multiplikation und Division von Brüchen thematisiert.

Die Lernumgebung im ersten Zyklus zielte darauf ab, die Grundvorstellung des Aufteilens (Malle, 2004), welche hier aufgrund des geometrischen Kontextes in der Literatur auch als Messen bezeichnet wird, über das Legen von Bruchstreifen aufzubauen. Zuerst wird den Lernenden eine Strategie zur Bestimmung der Frage wie oft passt 1/2 in ein Ganzes präsentiert, welche sie nachvollziehen und anschließend selbst anwenden sollen: erst für Stammbrüche, die in ein Ganzes passen (vgl. Abbildung 1) und dann auch für echte

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Brüche, die in beliebige Ganze passen.

Das in Abbildung 1 abgedruckte Aufgabenset enthält eine operativ strukturierte Aufgabenfolge, um die Division im Kontext des Messens zu thematisieren und um den mathematischen Zusammenhang, dass das Produkt eines Bruches mit seinem Kehrwert stets eins ergibt, zu erkunden. Steinweg (2005) setzte Rechenaufgaben ein, um Kinder an die Konstanzgesetze der Summe und der Differenz heranzuführen und betont dabei den Vorteil, dass Grundschulkinder so Gesetze handeln erfahren können und "eine Idee davon [bekommen], welche Veränderungen bei dieser jeweiligen Operation die Gleichheit nicht verändert" (Steinweg, 2005, S.16). In diesem Zusammenhang kommt der operativen Vorgehensweise eine wichtige Bedeutung zu, denn durch sie lassen sich einzelne Komponenten systematisch variieren und Zusammenhänge ausnutzen. Diese Vorgehensweise, dass sich der Quotient nicht ändert, wenn Dividend und Divisor mit dem gleichen Betrag multipliziert werden, soll hier Anwendung finden. Dabei kommt auch dem Kehrwert eine bedeutende Rolle zu, denn werden Dividend und Divisor mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert, ergibt sich eine Division durch eins. Somit ermöglich die Lernumgebung zur Division von Brüchen das Erkunden mathematischer Zusammenhänge.

b) Bestimmt nun selber, wie oft eine Größe in ein Ganzes passt. Nutzt die Bruchstreifen. Malt zu jeder Aufgabe ein Bild und schreibt einen Antwortsatz.

(1) Wie oft passt $\frac{1}{3}$ in 1?

(2) Wie oft passt $\frac{1}{4}$ in 1?

(3) Wie oft passt $\frac{1}{5}$ in 1?

c) Übertragt euer Ergebnis aus Aufgabe b) in die Tabelle.

blaue 1er Streifen	grüne Bruch-streifen	Wie oft passt der gründe Bruch-streifen in den blauen 1er Streifen?

Abb. 1 Operativ strukturierte Aufgabenfolge zur Division von Brüchen

Forschungsfragen und erste Ergebnisse der Analysen

Bei den eingesetzten Aufgabenserien handelt es sich um operativ strukturierte Übungen. Dadurch lassen sich jeweils Objekte (Zahl, Zähler, Nenner) ausmachen, mit denen Operationen (bleibt gleich, wird um eins größer) ausgeführt werden und Objekte (Anzahl), an denen die operative Variation sichtbar wird.

In der Aufgabenserie (vgl. Abbildung 1) können die Zahlen der ersten und zweiten Spalte als Objekte aufgefasst werden, mit denen verschiedene Operationen durchgeführt werden, und die Zahlen in der dritten Spalte als Objekte, an denen die Auswirkungen sichtbar werden. Operationen können sich auch dadurch auszeichnen, dass Objekte bewusst konstant gehalten werden (Link, 2012).

Die Schriftprodukte der Lernenden wurden hinsichtlich folgender Forschungsfrage untersucht: Wie beschreiben Lernende schriftlich Muster in operativ strukturierten Übungen zur Division von Brüchen?

Zur Beantwortung der Forschungsfrage wird auf ein Auswertungsschema von Link (2012) zurückgegriffen, welches zur Analyse schriftlicher Beschreibungen operativ strukturierter Übungen entwickelt wurde. Für eine Beurteilung der Qualität der Beschreibungen kategorisiert Link (2012) diese danach, inwiefern die einzelnen Objekte und die operativen Veränderungen dieser (1) gar nicht oder falsch, (2) exemplarisch (d. h. Zitation konkreter Zahlen aus der Aufgabe), (3) generalisierend nicht eindeutig (d. h. über ungenaue Wörter und Formulierungen wie "die Zahl die unten steht") oder (4) generalisierend eindeutig (d. h. über eindeutige Wörter und Formulierungen wie "Zähler", "Nenner", "wird immer um eins größer", "bleibt gleich") sind. Die Analysekategorien sollen dahingehend Aufschluss geben, ob und wie verschiedene Elemente von den Lernenden beschrieben werden.

In den Schriftprodukten der Lernenden der hier vorgestellten Studie finden sich nur generalisierende und keine exemplarischen Beschreibungen. Von den 12 genannten Objekten sind 9 eindeutig identifizierbar, während von den 10 Operationen nur 4 generalisierend und eindeutig beschrieben werden.

Im Folgenden sollen die unterschiedlichen Präzisionsgrade in Bezug auf das Objekt *Nenner* beschrieben werden, da der Nenner das am häufigsten genannte Objekt ist. Hinzu kommt, dass die Komponente des Veränderns am Nenner sichtbar wird. Eine Erhöhung des Nenners um 1 bei gleichbleibendem Zähler sorgt dafür, dass der Teil kleiner wird und somit häufiger in das Ganze passt. Dieser mathematische Zusammenhang ist dann für die spätere Regelableitung besonders zentral. Im Folgenden werden Aussagen verschiedener Lernender der Studie zur besseren Veranschaulichung mithilfe dieses Auswertungsschemas analysiert: A1: "Unten verändert sich es immer um eins."; A2: "Der Nenner verändert sich immer um eins."; A3: "Der Nenner wird immer um eins größer."

In A1 versucht der Lernende, sowohl das Objekt *unten* als auch die Operation *verändert sich immer um eins* allgemein zu beschreiben. Mit dieser Beschreibung lässt sich das Muster aber nicht fortsetzen, weil das Objekt und die Operation zu ungenau beschrieben sind: Welche Zahl ist genau gemeint? Was meint der Lernende mit *verändert sich immer um eins*? In A2 wird das Objekt *Nenner* generalisierend und eindeutig beschrieben. Daher wird im Unterschied zur ersten Äußerung deutlich, dass sich der Lernende bei der operativen Veränderung *verändert sich immer um eins* auf das Objekt *Nenner* bezieht. Eine Fortsetzung des Musters ist aber ebenfalls nicht möglich,

da die Operation zu ungenau beschrieben ist: Wird der Nenner um eins größer oder kleiner? Die operative Veränderung wird somit als generalisierend und nicht eindeutig eingestuft. In A3 wird sowohl das Objekt *Nenner* als auch die Operation *immer um eins größer* als generalisierend und eindeutig beschrieben. Die Lernenden nehmen somit die Veränderung wahr, aber eine Präzisierung der Operation bleibt in vielen Fällen aus. Ob die ungenaue Präzisierung auf ein mangelndes Verständnis zurückzuführen ist, wird noch analysiert. Insgesamt konnte in den Untersuchungen herausgestellt werden, dass alle Lernenden sich nur auf einen Teilaspekt des Musters beziehen, indem sie eine oder mehrere der operativen Auffälligkeiten beschreiben. Am häufigsten wird die Auffälligkeit beschrieben, dass das Ganze konstant bleibt und dass der Nenner sich verändert, dem Ergebnis, also der Anzahl, kommt am wenigsten Aufmerksamkeit zu.

Fazit und Ausblick

Da kein Lernender das operative Muster den Kategorien nach Link (2012) entsprechend in vollem Umfang wahrnimmt, sollen nun im zweiten Zyklus Aufgabenformate zur Reflexion über die Qualität von Beschreibungen operativer Zusammenhänge ergänzt werden. Ziel ist, dass die mathematischen Beziehungen von den Schülerinnen und Schülern beschrieben und erklärt werden können, sodass die Lernenden das Muster so beschreiben, dass eine Fortsetzung möglich ist. Die Lernenden sollen das Muster so beschreiben können, dass es von anderen Lernenden verstanden wird, und gleichzeitig soll die Beschreibung präzise genug sein, um Zusammenhänge erkennen und formulieren zu können.

Literatur

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Hrsg.), *Educational design research* (S. 17–51). Routledge.

Link, M. (2012). *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster. Entwurf, Erprobung und Überarbeitung von Unterrichtsaktivitäten als ein Beispiel für Entwicklungsforschung.* Springer Spektrum.

Malle, G (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren, 123*, 4–8.

Malle, G. & Huber, S. (2004). Schülervorstellungen zu Bruchzahlen und deren Rechenoperationen. *mathematik lehren, 123*, 20–22.

Padberg, F. (1982). Wege zur Ableitung der Divisionsregel der Bruchrechnung. Bestandaufnahme - Beurteilung - Folgerung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 3*, 67–88.

Steinweg, A. S. (2005). Arithmetik ist mehr als Ausrechnen. *Der Grundschulunterricht,* (7–8), 15–17.