

Michael MEYER, Dortmund

Die Erarbeitung mathematischer Zusammenhänge – Analyse von Schulbüchern

In einem Gemeinschaftsprojekt analysierten wir (s. Meyer und Voigt 2008) Aufgaben, die zur Erarbeitung mathematischer Zusammenhänge in Schulbüchern der Sekundarstufe I eingesetzt werden. In diesem Beitrag werden die Methode und einzelne Ergebnisse der Analyse vorgestellt, wobei der Schwerpunkt der Betrachtung auf dem Entdecken solcher Zusammenhänge liegt.

1. Einleitung

Die Schulbücher der Sekundarstufe I befinden sich im Spannungsfeld zwischen einem für alle verbindlichen Aufbau der Mathematik und den Ansprüchen an die Eigenaktivität der Schüler. Dies äußert sich häufig darin, dass mathematische Zusammenhänge zunächst in einleitenden Aufgaben von den Schülern entdeckt werden können, bevor sie dann explizit präsentiert werden. In Meyer und Voigt (2008 u.a.) untersuchten wir die „Einstiegsaufgaben“ (Rezat 2008) aus Schulbüchern nach ihren Potentialen zum Entdecken, Prüfen und Begründen von mathematischen Zusammenhängen.

Der Gestaltung der einleitenden Aufgaben kommt ein großes Gewicht zu, denn von ihnen hängt ab, ob sich der mathematische Zusammenhang (im Folgenden auch „Merksatz“ genannt) a) mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit entdecken lässt bzw. b) ob sich mit dem Merksatz auch eine Idee für den nachfolgenden Beweis entdecken lässt und/oder c) wie groß die Plausibilität ist, die der Merksatz durch die Entdeckung gewinnen kann. Auch wenn sich in Schulbüchern der Sekundarstufe I die zu behandelnden Merksätze relativ leicht identifizieren lassen, bedarf es einer Analyse der Aufgaben(folge) auf der Schulbuchseite um zu erfahren, welche Wege der Erkenntnisgewinnung von den Schülern erwartet werden bzw. welche Wege den Schülern bei der Bearbeitung der Aufgaben nahe liegen. Insbesondere der zweite Teil bereitet erhebliche methodologische Probleme, denn will man bei der Schulbuchanalyse das Lehren und Lernen von Mathematik in den Blick nehmen und sich nicht auf äußere Merkmale beschränken, so muss man sich hermeneutischer Methoden bedienen (vgl. Wagemann 1981).

Zur Klärung der genannten Punkte wurde ein Begriffsnetz verwendet, welches sich bereits in der mathematikdidaktischen Forschung etabliert hat (u.a. Voigt 2000; Hoffmann 2001; Meyer 2007): Die Theorie der Abduktion des amerikanischen Philosophen Charles Sanders Peirce.

2. Theoretischer Hintergrund – Abduktion

Die Abduktion bildet die dritte elementare Schlussform neben der Deduktion und der Induktion. Durch eine Abduktion finden wir ausgehend von einem beobachteten Phänomen eine ursächliche Erklärung: Mittels der tentativen Unterstellung eines Gesetzes wird ein konkreter Fall vermutet, der das Resultat hat entstehen lassen können. Das Gesetz ist vor der kognitiven Generierung einer Abduktion nicht gegeben: Auch ein anderes Gesetz könnte ursächlich für das beobachtete Phänomen gewesen sein. Die Unterstellung des Gesetzes bedingt die logische Feststellung des Phänomens als ein Resultat des Gesetzes (s. auch Meyer 2007, Meyer und Voigt 2008).

| | | | |
|----------------------|--|-----------|--|
| Phänomen (Resultat): | $R(x_0)$ | Resultat: | $R(x_0)$ |
| Gesetz: | $\forall i: F(x_i) \Rightarrow R(x_i)$ | Gesetz: | $\forall i: F(x_i) \Rightarrow R(x_i)$ |
| Fall: | $F(x_0)$ | Fall: | $F(x_0)$ |

Abb. 1: Die kognitive Generierung einer Abduktion (links) und deren öffentliche Darstellung (rechts)

Betrachten wir hierzu ein Beispiel: Der Winkelsummensatz für Vierecke wird in dem Schulbuch „Mathematik heute 7“ (Realschule, NRW, Griesel und Postel 2001, S. 107f) vorbereitet, indem untersucht werden soll, ob man aus deckungsgleichen Vierecken ein Parkett herstellen kann. Gleich große Winkel sind hierzu mit derselben Farbe zu färben und aneinander zu legen. Der Arbeitsauftrag endet mit der Anweisung, dass die Schüler einen Zusammenhang entdecken sollen.

Bei solchen Arbeitsanweisungen können Schüler vieles entdecken. Wird die Entdeckung des Winkelsummensatzes angezielt, so müssen die Schüler ausgehend von der konkreten Parkettierung erkennen, dass die an einer Ecke zusammenstoßenden, verschiedenfarbigen Winkel den Innenwinkeln des zu Beginn gewählten Vierecks entsprechen (für eine ausführlichere Analyse s. Meyer und Voigt 2008, S. 130f). Entsprechend würde den Schülern folgende Abduktion die Entdeckung des Satzes ermöglichen:

| | |
|-----------|---|
| Resultat: | An den Ecken der Parkettierung ergeben vier verschiedenfarbige Winkel einen Vollwinkel. |
| Gesetz: | Wenn die Innenwinkel eines beliebigen Vierecks zusammengefügt werden, ergeben sie einen Vollwinkel. |
| Fall: | Die vier verschiedenfarbigen Winkel an jeder Ecke sind die Innenwinkel des zu Beginn gewählten, konkreten Vierecks. |

Abb. 2: Eine Abduktion zur Entdeckung des Winkelsummensatzes

3. Optionen zur Gestaltung von Entdeckungsaufgaben

In Meyer (2007) wurde dargestellt, dass die Abduktion die charakteristische Schlussform für das Entdecken ist. Die Existenz von nur einer gegebenen Prämisse verdeutlicht, dass für die Entdeckung eines Merksatzes in den einleitenden Aufgaben Phänomene bereitgestellt oder vom Schüler erarbeitet werden sollten, die durch die Abduktion als ein Resultat des zu entdeckenden Zusammenhanges erscheinen (im Folgenden wird die logische Unterscheidung zwischen Phänomenen und Resultaten vernachlässigt). Die folgenden Optionen zeigen mögliche Unterschiede hinsichtlich der Anzahl und der Struktur der Resultate zur Entdeckung eines Merksatzes.

Option 1: Entdeckung an einem speziellen Resultat

Die Resultate, die zur Entdeckung eines Merksatzes erarbeitet werden, können Anlass geben, nicht nur den intendierten, sondern auch einen anderen Merksatz zu entdecken. Sollen die Schüler zum Beispiel ein regelmäßiges Viereck zur Parkettierung verwenden, kann der entstandene Vollwinkel auch durch nicht-verschiedenfarbige Innenwinkel zusammengesetzt werden. Entsprechend können die Schüler auch nicht-intendierte Zusammenhänge zur Lösung der Aufgabe verwenden, z. B. „wenn ein rechter Winkel viermal aneinandergesetzt wird, dann ergibt sich ein Vollwinkel“. Bei der Entdeckung an einem speziellen Resultat besteht also die Möglichkeit, dass auch andere mathematische Zusammenhänge als die intendierten zur Erklärung des Resultates genutzt werden.

Option 2: Entdeckung an einem typischen Resultat

Erfolgt die Entdeckung an einem typischen Resultat, so erhält der zu erkennende Merksatz mehr Plausibilität, weil er nicht mit einem anderen konkurriert. Zum Beispiel wird in dem Parkettierungsbeispiel ein Viereck gewählt, bei dem sich ein Vollwinkel nur dann ergibt, wenn alle vier verschiedenen Winkel aneinandergelegt werden müssen.

Option 3: Entdeckung an mehreren Resultaten

Bei den ersten beiden Optionen wird jeweils ein Beispiel zur Entdeckung eines Merksatzes genutzt. Die Entdeckung kann jedoch eine größere Plausibilität erhalten, wenn mehrere Vierecke und somit mehrere Parkettierungen zur Entdeckung beitragen.

Option 4: Entdeckung an einer Klasse von Resultaten

Bilden die Resultate eine ganze Klasse, erhält die Entdeckung eine besondere Plausibilität. Bei dem Beispiel des Winkelsummensatzes für Vierecke ist es jedoch nicht möglich, eine ganze Klasse von Vierecken zu verwenden.

Option 5: Entdeckung mit latenter Beweisidee

Einleitende Aufgaben können nicht nur den mathematischen Zusammenhang entdecken lassen, sondern auch eine Idee für dessen nachfolgenden Beweis liefern. Der Winkelsummensatz für Vierecke lässt sich beispielsweise entdecken, indem die Schüler in ein konkretes, vorgegebenes Viereck eine Diagonale einzeichnen und dann den Winkelsummensatz für Dreiecke anwenden sollen. Die Anwendung des Winkelsummensatzes für Dreiecke kann den folgenden Beweis orientieren, wenn die Schüler die Unabhängigkeit vom konkreten Vorgehen erkennen. Die Beweisidee bleibt vorerst latent, weil die Schüler sie erkennen müssen.

4. Fazit

Die präsentierten Optionen zeigen aus philosophisch-logischer Perspektive Möglichkeiten der Gestaltung von Aufgaben zur Entdeckung von Merksätzen (eine an didaktischen Prinzipien orientierte Aufgabenkonstruktion findet sich in Büchter und Leuders 2005). Will man einen Merksatz mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit entdecken lassen, so müssen den Schülern Resultate dieses Satzes gegeben sein oder von ihnen erarbeitet werden können. Je nach Art und Struktur der Resultate kann die Plausibilität, die der Merksatz durch seine Entdeckung erhält, potentiell gesteigert oder verringert werden. Wenn in dieser Erarbeitung die entscheidenden Schritte zum Beweis des Merksatzes im Konkreten angewendet werden, muss der Schritt zum nachfolgenden Beweis nicht groß sein.

Literatur

- Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen.
- Griesel, H. & Postel, H. (Hg., 2001). *Mathematik heute 7*. RS, NRW. Hannover: Schroedel.
- Hoffmann, M. (2001). Skizze einer semiotischen Theorie des Lernens. In: *Journal für Mathematikdidaktik*, 22(3/4), S. 231-251.
- Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.
- Meyer, M. & Voigt, J. (2008). Entdecken mit latenter Beweisidee. Analyse von Schulbuchseiten. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(2), S. 124-151.
- Rezat, S. (2008). Die Struktur von Mathematikschulbüchern. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(1), S. 46-67.
- Voigt, J. (2000). Abduktion. In: *BzM*. Hildesheim: Franzbecker, S. 694-697.
- Wagemann, E. (1981). Überlegungen und Anregungen zum nicht-quantitativen Vergleichen von mathematischen Schulbüchern. In: Glatfeld, M. (Hg.): *Das Schulbuch im Mathematikunterricht*. Braunschweig: Vieweg.