FROHN, Daniel
Bielefeld

Stetigkeit im Mathematikunterricht - (k)ein Thema?

Der Stetigkeitsbegriff spielt in den gegenwärtigen Curricula der Sekundarstufen nur eine sehr marginale Rolle. Im Kernlehrplan für die Sekundarstufe II in Nordrhein-Westfalen taucht die Stetigkeit - von der Verwendung bei den stetigen Zufallsgrößen in der Stochastik abgesehen - nur ein einziges Mal auf, und das auch nur im Leistungskurs: "Schülerinnen und Schüler begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs […]" (s. Kernlehrplan NRW, 2023, S. 28). Dass die Stetigkeit im Gegensatz zur Differenzierbarkeit in der Schule fast kein Thema ist, lässt sich didaktisch nachvollziehbar begründen. Fischer (1976) schreibt dazu: "Stetigkeit ist allerdings eine wesentlich andere Qualität als Differenzierbarkeit: Sie zieht keine "praktischen Berechnungen" nach sich […]. Sie wird beim Exaktifizieren als Abgrenzungseigenschaft relevant […]. Natürlich ist der Gesichtspunkt Stetigkeit - Differenzieren - Taylor'scher Satz vom Mathematisch-Strukturellen interessant und wichtig und im nachhinein erwähnenswert - als Grundlage des Analysisunterrichts aber ungeeignet." (zitiert nach Blum & Törner, 1983, S.82) In diesem Beitrag wird der Frage nachgegangen, ob und inwieweit die im Mathematikunterricht oftmals implizit vorausgesetzte Stetigkeit an bestimmten Stellen nicht doch explizit gemacht werden kann und sollte, um funktionales Denken zu fördern und Grundvorstellungen aufzubauen.

Grundvorstellungen zur Stetigkeit

In Greefrath et. al. (2016, S. 141f) werden (fast etwas versteckt) im Abschnitt "fachliche Klärung zur Differenzialrechnung" drei Grundvorstellungen zur Stetigkeit formuliert:

- **Sprungfreiheit**: Der Graph einer stetigen Funktion hat keine Sprünge.
- **Vorhersagbarkeit**: Kleine Änderungen der unabhängigen Werte haben nur kleine Änderungen der abhängigen (Funktions-)Werte zur Folge.
- **Darstellbarkeit**: Der Funktionsgraph lässt sich in einem Zug ohne Absetzen zeichnen.

Die Autoren weisen darauf hin, dass aus fachwissenschaftlicher Sicht diese Grundvorstellungen nur eingeschränkt korrekt (Sprungfreiheit, Darstellbarkeit) und alle präzisierungsbedürftig sind (Was ist ein Sprung? Was bedeutet "klein"? Was heißt "in einem Zug ohne Absetzen zeichnen"?). Hierzu lässt sich ergänzen, dass sich die fachliche Problematik bei Sprungfreiheit und Darstellbarkeit unterscheidet: Die Aussage zur Sprungfreiheit ist in obiger

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Form fachlich korrekt, da sie nur behauptet, dass Sprungfreiheit eine notwendige Bedingung für Stetigkeit ist (dass sie keine hinreichende Bedingung ist, sieht man z.B. an der unstetigen Funktion mit dem Term sin(1/x), die an der Stelle x = 0 etwa durch den Wert 0 fortgesetzt wird). Die Aussage zur Darstellbarkeit dagegen ist fachlich nicht korrekt, da es stetige Funktionen gibt, deren Graph über einem kompakten Intervall eine nach unendlich divergierende Bogenlänge besitzen (wie z.B. die stetige Funktion mit dem Term x sin(1/x), die an der Stelle x = 0 durch den Wert 0 fortgesetzt wird, über dem Intervall [0; 1]).

Trotz dieser fachwissenschaftlichen Schwierigkeiten sind die genannten Vorstellungen geeignet, um eine mentale Repräsentation für den Begriff der stetigen Funktion aufzubauen. An welchen Stellen des Mathematikunterrichts in den Sekundarstufen solche Vorstellungen eine Rolle spielen können, soll unten aufgezeigt werden. Zusätzlich werden folgende weitere Grundvorstellungen vorgeschlagen:

- **Zwischenwerteigenschaft**: Alle zwischen zwei Funktionswerten $f(x_1)$ und $f(x_2)$ liegenden Werte werden von der stetigen Funktion f in dem Intervall $[x_1; x_2]$ angenommen.
- **Fortsetzbarkeit**: Strebt x gegen eine Stelle x_0, so ist $f(x_0)$ der Wert, gegen den die Funktionswerte f(x) streben.

Die Zwischenwerteigenschaft ist fachlich gesehen wie die Sprungfreiheit lediglich eine notwendige Bedingung für die Stetigkeit, was man mit demselben Beispiel wie oben zeigt. Sie ist aber eine zentrale und oft verwendete Eigenschaft in schulischen Kontexten. Die Fortsetzbarkeit beruht direkt auf dem fachlichen Aspekt der Vertauschbarkeit von Funktionsanwendung und Grenzwertbildung (s. Greefrath et. al., 2016, S.141), gibt diesem aber eine dynamische Deutung (Abb. 1).

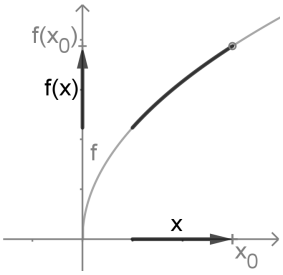

Abb. 1: Fortsetzbarkeit in dynamischer Sichtweise

Curriculare Beispiele für die Verwendung von Stetigkeitseigenschaften

Anhand der folgenden Beispiele kann an dieser Stelle aus Platzgründen nur schlaglichtartig aufgezeigt werden, an welchen Stellen im Mathematikunterricht Stetigkeitseigenschaften (implizit) verwendet werden.

Zahlbereichserweiterung zu den reellen Zahlen

Während sich die Zahlbereichserweiterungen von den natürlichen zu den positiven Bruchzahlen noch gut anhand konkreter inhaltlicher Deutungen mittels Verfeinern und Vergröbern von Einteilungen durchführen lässt, ergibt sich schon beim Übergang zu den negativen rationalen Zahlen die Notwendigkeit, neben konkreten Modellen wie z.B. Schulden und Guthaben auch innermathematische Prinzipien zu nutzen, etwa indem mithilfe von Permanenzreihen begründet wird, dass "Minus mal Minus gleich Plus" ist. Bei der Zahlbereichserweiterung zu den reellen Zahlen kann man sich nun gar nicht mehr auf Sachkontexte berufen, sondern muss ausschließlich innermathematisch argumentieren. Wenn beispielsweise die Multiplikation mit $\sqrt{2}$ erklärt werden soll, kann anhand einer Intervallschachtelung deutlich gemacht werden, dass das Produkt $\sqrt{2} \cdot a$ beliebig genau durch Produkte der Form $1{,}4 \cdot a$, $1{,}41 \cdot a$, $1{,}414 \cdot a$, ... angenähert wird. Hierbei wird das Prinzip der Fortsetzbarkeit bzw. der Vorhersagbarkeit angewendet; und auch wenn hier nicht explizit von stetigen Funktionen die Rede ist, besteht der mathematische Hintergrund darin, dass die Multiplikation mit einer reellen Zahl x so definiert wird, dass die Funktion mit dem Term $x \cdot a$ stetig ist.

Dieses Prinzip der Fortsetzbarkeit kann auch bei der Potenzrechnung verwendet werden, um die Bedeutung von Potenzen mit reellen Exponenten zu erklären: Hier geht es um die Stetigkeit von Exponentialfunktionen. Ein weiteres Beispiel ist die Erweiterung des Definitionsbereichs für Sinus und Kosinus auf die Winkelgrößen 0° und 90°, die bei der Definition am rechtwinkligen Dreieck noch undefiniert waren. Zusammengefasst ist bei den hier angeführten Beispielen weniger die Frage, ob eine gegebene Funktion stetig ist, sondern wie sie sich stetig ergänzen lässt. Die Stetigkeit kann also wie das Permanenzprinzip als Leitidee für die Erweiterung von Definitionsbereichen angesehen werden.

Untersuchung elementarer Funktionen

Eine fundamentale Grundlage für die Analyse reeller Funktionen ist die Vollständigkeit der reellen Zahlen - eine Analysis auf den rationalen Zahlen ist eben nicht sinnvoll möglich (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 38-40). Die Vollständigkeit zusammen mit der Stetigkeit von Funktionen ermöglichen anschauliche Argumentationen, wie sie im Mathematikunterricht im Zusammenhang mit elementaren Funktionen üblich sind, z.B.:

- Anzahl der Nullstellen von quadratischen Funktionen grafisch anhand der Lage des Scheitelpunktes bestimmen
- Mit dem Globalverlauf begründen, dass jede ganzrationale Funktion ungeraden Grades mindestens eine Nullstelle hat

- Nullstellen durch systematisches Probieren näherungsweise bestimmen
- Begründen, dass zwischen zwei Nullstellen eine Extremstelle liegt, und dass sich zwischen zwei Extremstellen eine Wendestelle befindet

Für Argumentationen dieser Art kann gut auf die Zwischenwerteigenschaft zurückgegriffen werden. Um diese meist nur implizit verwendete Argumentationsbasis expliziter zu machen, bietet es sich an, auch kontrastierende Gegenbeispiele unstetiger Funktionen in den Unterricht einzubringen und die Bedeutung der reellen Zahlen anhand einer Funktion wie z.B. mit dem Term $x^2 - 2$ zu verdeutlichen.

Integralrechnung

Interessanterweise ist beim Einstieg in die Integralrechnung inzwischen ein Zugang über die Rekonstruktion einer Größe aus stückweise konstanten Änderungsraten weit verbreitet. Hierbei wird also mit "nicht sprungfreien" Änderungsraten gearbeitet, wobei die Sprungstellen in der Regel kaum thematisiert werden. Dagegen wird bei der Definition des Integrals meist (implizit) auf stetige Funktionen zurückgegriffen, damit der Flächeninhalt unter dem Graphen existiert (Darstellbarkeit) und durch Produktsummen angenähert werden kann. Der zentrale Inhalt, an dem die Stetigkeit laut Lehrplan explizit thematisiert werden soll, ist der inhaltlich-anschauliche Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Für eine ausführliche Analyse dazu sei auf vom Hofe, Lotz & Salle (2023, S. 191-193) und die dort angeführte Literatur verwiesen. Bei der Begründung des Hauptsatzes unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs kann auf die Grundvorstellungen Sprungfreiheit, Darstellbarkeit und Fortsetzbarkeit zurückgegriffen werden, je nachdem, wie der Differenzenquotient der Integralfunktion geometrisch interpretiert wird.

Literatur

Blum, W. & Törner, G. (1983). *Didaktik der Analysis*. Vandenhoeck & Ruprecht.

Danckwerts, R., & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Spektrum.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Springer Spektrum.

vom Hofe, R., Lotz, J., & Salle, A. (2023) Analysis: Leitidee Zuordnung und Veränderung. In *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 159-199). Springer Spektrum

Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium / Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen Mathematik (2023). Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen.