

DELLORI, Anna
Paderborn

Vernetzung von schulischem und akademischem Fachwissen: Vereinheitlichungsprozesse zum Neutralelement beim Lösen von Gleichungen

Es besteht ein allgemeiner Konsens darüber, dass fachmathematisches Wissen Teil der professionellen Kompetenz von Mathematiklehrkräften ist. Dazu gehört auch akademisches mathematisches Fachwissen. Dieses wird jedoch von Lehramtsstudierenden häufig als nicht relevant für den späteren Lehrberuf angesehen. Aus diesen Gründen ist es sinnvoll, akademisches mathematisches Fachwissen mit schulischen Inhalten in Lehrveranstaltungen explizit zu vernetzen.

Die vermutete Wirkung einer stärkeren expliziten Vernetzung des akademischen und schulischen Fachwissens in der universitären Lehrkräfteausbildung sieht Wasserman (2018) im Reshaping des Wissens von (angehenden) Lehrkräften sowie den damit verbundenen potentiellen Wirkungen auf gewisse Aspekte von Unterrichtsqualität. Eine Teilfacette des Reshaping ist das Vereinheitlichen scheinbar zusammenhangsloser mathematischer Objekte unter einer übergreifenden mathematischen Idee bzw. Konzept (Serbin, 2021). Beispiele sind die Vereinheitlichung der Eins und Identität als Neutralelemente, sowie von Kehrbrüchen und inversen Drehungen als Inverse.

Zur Beschreibung des Grads des Vereinheitlichens können die Entwicklungsstufen von Verbindungen mentaler Objekte nach Piaget und Garcia (1989, zitiert nach Serbin, 2021) genutzt werden. Die Entwicklungsstufen beschreiben verschiedene Grade der von Lehramtsstudierenden hergestellten Verbindungen: Auf *Intra-Stufe* liegt noch eine isolierte Betrachtung von Objekten vor; auf der nächsthöheren *Inter-Stufe* werden erste Gemeinsamkeiten von Objekten erkannt. Die *Trans-Stufe* beschreibt den höchsten Grad der hergestellten Verbindung, denn es werden Gemeinsamkeiten der Objekte erkannt und aus mathematisch-struktureller Perspektive reflektiert.

Teilweise haben Studierende Schwierigkeiten damit, verschiedene konkrete Neutralelemente und Inverse als Ausprägung desselben Phänomens unter dem algebraischen Konzept "Neutralelement" bzw. "Inverse" zu vereinheitlichen (Serbin, 2023). Für diese Konzepte gibt es jedoch Vorstellungen, die über die verschiedenen Ausprägungen (z.B. Eins und Identität) hinweg aufgebaut und vereinheitlicht werden sollten. Das Neutralelement hat keine Auswirkung auf andere Elemente und wird deshalb in der englischsprachigen Literatur auch als "do-nothing-element" bezeichnet (Serbin, 2023). Diese zentrale Vorstellung zum Neutralelement soll vereinheitlicht werden.

Für die Vernetzung der Gruppenaxiome mit schulischen Inhalten wurden in einem Entwicklungsforschungsprojekt drei Lernumgebungen für Studierende entwickelt. Bei der Entwicklung und Umsetzung der Lernumgebungen wurde als ein Designprinzip die Darstellungsvernetzung mit dem Designelement des Kontrastierens und Vergleichens berücksichtigt (Überblick über die Designprinzipien in Dellori & Wessel, im Druck). Zum Beispiel werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede von zwei verschiedenen symbolisch gegebenen Gleichungen betrachtet (siehe Abbildung 1). Der intendierte Effekt dieses Designprinzips ist die Initiierung von Vereinheitlichungsprozessen, welcher jedoch noch empirisch zu untersuchen ist. Aus diesem Grund ergibt sich die Forschungsfrage: "Welche Prozesse des Vereinheitlichens können bei Lehramtsstudierenden rekonstruiert werden und inwiefern werden diese durch implementierte Designprinzipien initiiert?"

Methode

Die Daten für diesen Beitrag sind Teil der ersten Lernumgebung zum Lösen von Gleichungen (siehe Abb. 1). Zwischen Aufgabe 1 und 2 beschäftigen sich die Studierenden mit den Symmetrieabbildungen eines gleichseitigen Dreiecks und arbeiten mit einer Verknüpfungstafel. Die Design-Experimente à 90 Minuten wurden von der Autorin mit Paaren von Studierenden des gymnasialen Lehramts ($N=8 \times 2$) durchgeführt (3. Designzyklus). Diese befanden sich im 1.-3. Mastersemester. Zum Zeitpunkt der Datenerhebung besuchten 15 der 16 Studierenden eine Algebra Veranstaltung. Es ist anzumerken, dass das Gruppenkonzept den Teilnehmenden vor der Studie bereits bekannt war.

Aufgabe 1

Julia

$$x \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

$$(x \cdot \frac{2}{3}) \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2}$$

$$x \cdot (\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2}$$

$$x \cdot 1 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{2 \cdot 5}{6 \cdot 2}$$

- Überprüft auf Korrektheit und beschreibt die einzelnen Schritte von Julias (1)/ Niklas (2) Lösungsprozess.
- Welche mathematischen Ideen und Konzepte assoziiert ihr mit Julias (1)/ Niklas (2) Vorgehen?

Aufgabe 2

Niklas

$$d_{120^\circ} \circ x = s_1$$

$$\Leftrightarrow d_{240^\circ} \circ (d_{120^\circ} \circ x) = d_{240^\circ} \circ s_1$$

$$\Leftrightarrow (d_{240^\circ} \circ d_{120^\circ}) \circ x = d_{240^\circ} \circ s_1$$

$$\Leftrightarrow id \circ x = d_{240^\circ} \circ s_1$$

$$\Leftrightarrow x = d_{240^\circ} \circ s_1$$

$$\Leftrightarrow x = s_2$$

Aufgabe 3

Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede findet ihr zwischen dem Lösungsweg von Julia und Niklas?

Abb. 1: Aufgaben der ersten Lernumgebung

Die Intra-, Inter- und Trans-Vereinheitlichungsstufen wurden für die Konzepte des Neutralelements und der Inversen adaptiert wie im Folgenden beschreiben. In der Lernumgebung sind die Eins (bekannte schulische Gleichung) und die Identität (unbekannte Gleichung) verschiedene Ausprägungen des Neutralelements. Hierfür wurden die einzelnen Vereinheitlichungsmöglichkeiten ausgearbeitet (siehe Abb. 2 links) und in einer Turn-by Turn Analyse codiert. Anschließend wurden auf Basis aller codierten Stellen für jede der drei Aufgaben eine Einordnung in die Vereinheitlichungsstufen

(siehe Abb. 2 rechts) vorgenommen. Diese Adaption der Vereinheitlichungsstufen setzt voraus, dass zuvor die fachlichen Vorstellungen des Neutralelements der Studierenden rekonstruiert wurden. Für das Konzept der Inversen wurde analog vorgegangen. In diesem Beitrag werden aus Platzgründen nur Ergebnisse für das Konzept des Neutralelements dargestellt.

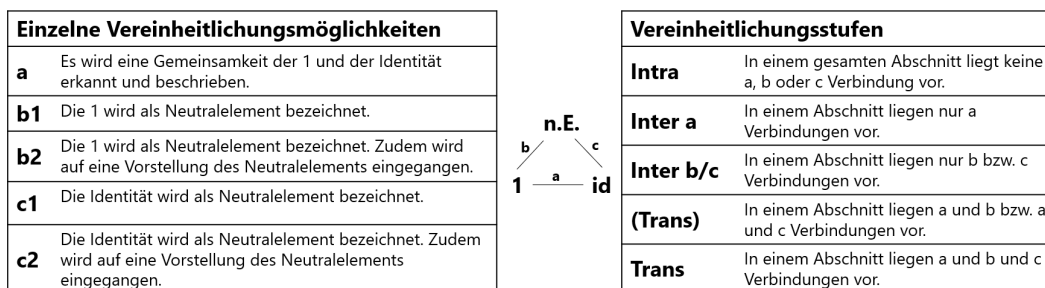


Abb. 2: Operationalisierung der Vereinheitlichungsstufen

Ergebnisse: Rekonstruktion der Vereinheitlichungsprozesse

Bei Beschreibung der Lösungsschritte von Julia in Aufgabe 1 vereinheitlicht Nico (Paar 5) die Eins als Neutralelement auf Inter-b Stufe. Bei Beschreibung der Lösungsschritte von Niklas in Aufgabe 2 adressiert Nico die Vorstellung, dass die Identität keine Wirkung hat. Allerdings vereinheitlicht er die Identität mit dieser Vorstellung nicht als Neutralelement.

- Nico: [...]kommt da eins raus und eins ist neutrales Element der Multiplikation, kann ich weglassen (Ausschnitt aus der Beschreibung in Aufgabe 1)
- Nico: Hier haben wir dann einfach, die Eigenschaft der Identität hat er benutzt. Ne, dass du die halt so dran verketteten kannst und es nichts ändert (Ausschnitt aus der Beschreibung in Aufgabe 2).

Ebenso wie Nico (P5) vereinheitlichen zwei weitere Paare (P4, P8) in Aufgabe 1 auf Inter-b Stufe und in Aufgabe 2 auf Intra-Stufe. Ein einziges Paar (P3) vereinheitlicht in den Prozessen zu Aufgabe 1 und Aufgabe 2 auf den analogen Stufen Inter-b und Inter-c. Die Trans-Stufe wird noch von keinem Paar erreicht. Die restlichen Paare (P1, P2, P6, P7) vereinheitlichen in Aufgabe 1 auf der Intra-Stufe. Dazu gehören auch Pia und Nora (P6), die in Aufgabe 2 als eine erste Gemeinsamkeit zwischen der Eins und der Identität herausstellen, dass diese beide im Lösungsprozess der Gleichung weggelassen wurden. Eine ähnliche Betrachtung von ersten Gemeinsamkeiten auf Inter-a Stufe findet sich auch bei Paar 7.

- Pia: [...] und dann lässt er die Identität halt weg, also ja gut/
 Nora: Vereinfachen.

Pia: Ja, ja stimmt, haben wir hier auch mit der Eins ne, ja.

Das Paar P2 vereinheitlicht auf Inter-c Stufe ohne jedoch auf Gemeinsamkeiten einzugehen. Als einziges Paar vereinheitlicht P1 in den Prozessen zu beiden Aufgaben auf der Intra-Stufe.

Im Prozess zu Aufgabe 3 geht Luisa (P4) darauf ein, dass die Eins und die Identität gemeinsam haben, dass sie andere Elemente nicht verändern. Luisa adressiert damit die Vorstellung des Neutralelements als "do-nothing-element" und vereinheitlicht diese für die Eins und die Identität unter dem fachlichen Konzept. Ähnlich wie Luisa vereinheitlichen auch alle anderen Paare (P1-P8) die Eins und die Identität als Neutralelement und sind deswegen auf der Trans-Stufe einzuordnen. Es gibt jedoch Unterschiede welche Vorstellungen des Neutralelements adressiert und vereinheitlicht werden.

Luisa: Ja, grundsätzlich ist die Eigenschaft, dass sie [bezieht sich hier auf die Eins und die Identität] ja ein Neutralelement sind ja quasi das gleiche, weil sie an alles dran multipliziert oder eben verknüpft das quasi erhalten, also sie ändern halt nichts an der Abbildung oder halt dem Zahlenwert, also diese Eigenschaft, da sind sie halt gleich.

Diskussion

Die Eins in der bekannten schulischen Gleichung (Aufgabe 1) und die Identität in der unbekanntem Gleichung (Aufgabe 2) werden teilweise als Neutralelement vereinheitlicht (A1: 4 von 8 Paaren Inter-b Stufe; A2: 2 von 8 Paaren Inter-c Stufe). Nur zwei Paare betrachten in Aufgabe 2 erste Ideen zu Gemeinsamkeiten der Eins und der Identität auf Inter-a Stufe ohne einen explizit eingeforderten Vergleich. Die Trans-Stufe wird erst in der dritten Aufgabe von allen Paaren erreicht.

Diese Ergebnisse geben erste Hinweise auf die Wirkung des Designelements des Kontrastierens und Vergleichens, denn das explizite Suchen von Gemeinsamkeiten und Unterschieden der beiden Gleichungen in Aufgabe 3 scheint Vereinheitlichungsprozesse bei den Studierenden zu initiieren. Die Gelingensbedingungen sind noch genauer zu bestimmen. Diesbezüglich werden als nächstes die Vereinheitlichungsprozesse im Detail und unter Berücksichtigung der von der Designexperimentleitung gegebenen Impulse zur Suche von Gemeinsamkeiten und Unterschieden analysiert.

Literatur

- Dellori, A. & Wessel, L. (im Druck). Prospective teachers' mathematical knowledge: Relating representations as design principle for developing knowledge of non-local mathematics for teaching in abstract algebra. In *Proceedings of CERME13*.
- Serbin, K. S. (2021). *Prospective Teachers' Knowledge of Secondary and Abstract Algebra and their Use of this Knowledge while Noticing Students' Mathematical Thinking*. [Dissertation, Virginia Tech]. <https://vtechworks.lib.vt.edu/handle/10919/104563>
- Serbin, K. S. (2023). Prospective teachers' unified understandings of the structure of identities. *The Journal of Mathematical Behavior*, 70, 101066.
- Wasserman, N. H. (2018). Knowledge of nonlocal mathematics for teaching. *The Journal of Mathematical Behavior*, 49, 116–128. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.003>