

# Theorie und Numerik zur Berechnung und Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien

FRANZ-JOSEPH BARTHOLD

Unabridged, electronic reprint of the PhD dissertation on  
theory and computation in analysis and optimisation  
of structures with isotropic, hyperelastic material behaviour.

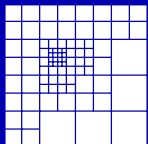
Original publication:

Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik  
der Universität Hannover, Bericht F93/2, Institut für Baumechanik  
und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 1993

NMI-REPORT 2004-A-01

## Contact

Prof. Dr.-Ing. habil. Franz-Joseph Barthold  
Chair of Numerical Methods and Information Processing  
Department of Architecture and Civil Engineering  
University of Dortmund  
August-Schmidt. Str. 8, D-44221 Dortmund, Germany  
Phone: +49-(0)231-755-4776, Fax: +49-(0)23-755-7260  
E-Mail: franz-joseph.barthold@uni-dortmund.de  
URL: <http://www.bauwesen.uni-dortmund.de/nmi/>



**Theorie und Numerik**  
**zur Berechnung und Optimierung**  
**von Strukturen aus**  
**isotropen, hyperelastischen Materialien**

Vom Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen  
der Universität Hannover  
zur Erlangung des Grades

*Doktor-Ingenieur*

genehmigte Dissertation

von

*Dipl.-Ing. Franz-Joseph Barthold, M.Sc.*

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. E. Stein  
Korreferenten: Prof. Dr.-Ing. E. Ramm  
Dr. rer. nat. Dr.-Ing. habil. D. Bischoff

Tag der Einreichung: 12. Oktober 1992  
Tag der mündlichen Prüfung: 29. Januar 1993

**Herausgeber:**

Prof. Dr.-Ing. E. Stein

**Organisation und Verwaltung:**

Dr.-Ing. habil. W. Wagner  
Institut für Baumechanik  
und Numerische Mechanik  
Universität Hannover  
Appelstr. 9 A  
30167 Hannover  
Tel.: 0511/762-3369  
Fax.: 0511/762-5496

©1993 Franz-Joseph Barthold  
Institut für Baumechanik  
und Numerische Mechanik  
Universität Hannover  
Appelstr. 9 A  
30167 Hannover

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine kontinuumsmechanische Theorie sowie ein geeigneter Algorithmus zur Behandlung von Formoptimierungs- und Identifikationsaufgaben isotroper, hyperelastische Materialien unter großen Deformationen angegeben.

Im ersten Teil wird nach der Darstellung der kontinuumsmechanischen Grundlagen eine eigenvektorfremie Formulierung der Spannungs- und Materialtensoren der betrachteten Materialklasse für die Abhängigkeit der Formänderungsenergie von den Eigenwerten (z.B. Ogden-Material) hergeleitet. Damit ist eine einheitliche Formulierung der Spannungs- und Materialtensoren aller Spannungszustände für kompressible und inkompressible Materialien bzgl. einer Berechnung in den Größen der Referenz- bzw. der Momentankonfiguration gelungen.

Durch die systematische Erweiterung der kontinuumsmechanischen Grundlagen um die Abhängigkeit vom Design wird im zweiten Teil die Optimale Formgebung als Teilgebiet der Kontinuumsmechanik vorgestellt. Die funktionalen Abhängigkeiten der kontinuumsmechanischen Feldgrößen führen aufgrund der vergleichbaren mathematischen Struktur zu Aussagen, die den bekannten Beziehungen der Zeitableitung äquivalent sind. Aus dieser Ähnlichkeit folgt, daß gerade in der Sensitivitätsanalyse dem Materialtensor eine große Bedeutung zukommt.

Die Konzepte einer systematischen algorithmischen Realisation dieser kontinuumsmechanisch formulierten Strukturoptimierung für das FE-Forschungsprogrammpaket INA-OPT (INelastisc Analysis and OPTimization) werden im dritten Teil vorgestellt. Anhand einiger Beispiele wird gezeigt, daß die vollständige analytische Sensitivitätsanalyse nichtlinearer strukturmechanischer Probleme effektiv realisiert werden kann.

## Abstract

A continuum mechanical theory and an efficient algorithm for solving structural optimization as well as identification problems for isotropic, hyperelastic materials with large deformations is proposed.

After introducing the continuum mechanical notation a formulation of stresses and elastic moduli for strain energy functions depending on the eigenvalues (e.g. Ogden's material law) without needing the eigenvectors is derived. Using this result, a uniform representation of the stresses and elastic moduli for all stress states of compressible as well as incompressible materials is given.

In a second part, a systematical extension of the classical continuum mechanical theory by introducing design dependencies establishes structural optimization as a part of continuum mechanics. Since the continuum mechanical functions have the same mathematical structure, similar formulae can be derived for linearization in time and in design. Therefore, the tensor of elastic moduli is crucial for a correct sensitivity analysis.

The concepts leading to a systematical implementation of the theoretical results into the finite element based research analysis tool INA-OPT (INelastisc Analysis and OPTimization) are outlined in a third part. The efficiency of the fully analytical formulated sensitivity analysis for nonlinear problems with large deformations is shown for some examples.

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner fünfjährigen Tätigkeit am Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover.

Meinem geschätzten akademischen Lehrer, Herrn Prof. Dr.-Ing. E. Stein, danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit, sein förderndes wissenschaftliches Interesse, die Schaffung geeigneter Rahmenbedingungen in personeller und materieller Hinsicht, die gewährten Freiheiten und die Übernahme des Hauptreferates.

Mein Dank gilt weiterhin Herrn Prof. Dr.-Ing. E. Ramm und Herrn Dr.-Ing. habil. D. Bischoff für ihr stetes Interesse am Fortgang der Arbeit, ihre wertvollen Anregungen und Hinweise sowie die Übernahme der Korreferate.

Allen Mitarbeitern des Instituts für Baumechanik und Numerische Mechanik, insbesondere meinen Kollegen Dr.-Ing. A. Becker und Dipl.-Ing. A. Falk, danke ich, die durch ihre freundschaftliche Zusammenarbeit, ihre wertvollen Ratschläge und hilfreichen Diskussionen wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gebührt meiner Frau Silke, meinen Kindern und allen denen, die mir die familiären Voraussetzungen für den erfolgreichen Abschluß der Promotion geschaffen haben.

Hannover, im Dezember 1993

Franz-Joseph Barthold

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Problemstellung . . . . .	1
1.2	Aufgabenstellung und Ziele dieser Arbeit . . . . .	3
1.3	Umfang dieser Arbeit . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Kontinuumsmechanische Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Kinematik . . . . .	7
2.1.1	Der materielle Körper und seine Lage im Raum . . . . .	7
2.1.2	Der materielle Deformationsgradient und die Verzerrungsmaße . . . . .	11
2.2	Bilanzgleichungen . . . . .	13
2.2.1	Massenbilanz . . . . .	13
2.2.2	Impulsbilanz . . . . .	13
2.2.3	Spannungstensoren . . . . .	13
2.2.4	Die dynamischen Feldgleichungen . . . . .	14
2.2.5	Drehimpulsbilanz . . . . .	15
2.3	Zeitableitung kontinuumsmechanischer Größen . . . . .	16
2.3.1	Die Pull-Back- und Push-Forward-Operation . . . . .	16
2.3.2	Die Lie-Ableitung . . . . .	17
2.3.3	Die Doyle-Ericksen Formeln . . . . .	17
2.4	Materialgesetze . . . . .	19
2.4.1	Darstellung isotroper, hyperelastischer Materialien . . . . .	19
2.4.2	Die vollständige Form der Formänderungsenergiefunktion . . . . .	20
2.4.3	Das Ogden-Material . . . . .	21
2.4.4	Einige Modelle für gummiartige Materialien in Abhängigkeit der Invarianten . . . . .	22
2.4.5	Formulierung der Formänderungsenergiefunktion für die numerische Berechnung . . . . .	22
2.5	Energie- und Variationsformulierungen . . . . .	23

2.5.1	Die schwache Form des Gleichgewichts . . . . .	23
2.5.2	Berücksichtigung der Inkompressibilitätsbedingung . . . . .	24
2.6	Linearisierung der Variationsformulierungen . . . . .	25
2.6.1	Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts . . . . .	25
2.6.2	Die Linearisierung der Variationsformulierung für Inkompressibilität . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Spannungs- und Materialtensoren</b>	<b>27</b>
3.1	Prinzipieller Ablauf der Berechnung der Spannungs- und Materialtensoren	28
3.1.1	Grundlagen . . . . .	28
3.1.2	Lösungsstrategien aus der Literatur . . . . .	29
3.1.3	Wahl der Betrachtungsweise und der Basistensoren . . . . .	30
3.1.4	Die Formänderungsenergiefunktion in Abhängigkeit der Invarianten . . . . .	30
3.1.5	Die Formänderungsenergiefunktion in Abhängigkeit der Eigenwerte	32
3.1.6	Erläuterung der eigenen Vorgehensweise . . . . .	33
3.2	Formänderungsenergie der Invarianten bei Kompressibilität . . . . .	34
3.2.1	Basistensoren $\mathbf{Z}_i$ und deren Ableitung nach $\mathbf{C}$ . . . . .	34
3.2.2	Ableitung der Invarianten nach $\mathbf{C}$ . . . . .	34
3.2.3	Berechnung der Ableitung der Formänderungsenergie nach den Invarianten . . . . .	35
3.2.4	Darstellung der Spannungs- und Materialtensoren . . . . .	36
3.2.5	Zusammenfassung der Berechnung . . . . .	37
3.3	Formänderungsenergie der Invarianten bei Inkompressibilität . . . . .	38
3.3.1	Problemstellung . . . . .	38
3.3.2	Basistensoren $\bar{\mathbf{Z}}_i$ und deren Ableitung nach $\mathbf{C}$ . . . . .	38
3.3.3	Ableitung der modifizierten Invarianten nach $\mathbf{C}$ . . . . .	39
3.3.4	Darstellung der deviatorischen Anteile der Spannungs- und Materialtensoren . . . . .	40
3.3.5	Darstellung der volumetrischen Anteile der Spannungs- und Materialtensoren . . . . .	41
3.3.6	Zusammenfassung der Berechnung . . . . .	42
3.4	Der ebene Spannungszustand bei kompressiblen Materialien . . . . .	44
3.4.1	Grundlage der Berechnung . . . . .	44
3.4.2	Die Berechnung der Dickenänderung . . . . .	44
3.4.3	Spannungs- und Materialtensoren für kompressible Materialien im ebenen Spannungszustand . . . . .	45

3.5	Der ebene Spannungszustand bei inkompressiblen Materialien . . . . .	47
3.5.1	Die Berechnung der Dickenänderung . . . . .	47
3.5.2	Spannungs- und Materialtensoren für inkompressible Materialien im ebenen Spannungszustand . . . . .	47
3.6	Formänderungsenergie in Eigenwerten für $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ . . . . .	49
3.6.1	Ableitungen der Eigenwerte nach den Invarianten . . . . .	49
3.6.2	Erste Ableitung der Formänderungsenergie nach den Invarianten für $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ . . . . .	50
3.6.3	Zweite Ableitung der Formänderungsenergie nach den Invarian- ten für $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ . . . . .	50
3.7	Formänderungsenergie in Eigenwerten für $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ . . . . .	53
3.7.1	Spannungs- und Materialtensoren für den Sonderfall $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$	53
3.7.2	Betrachtung der Grenzwerte $\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} W_{,i}$ . . . . .	53
3.7.3	Betrachtung der Grenzwerte $\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} W_{,ij}$ . . . . .	55
3.8	Formänderungsenergie in Eigenwerten für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Finite Element Formulierung</b>	<b>59</b>
4.1	Die Verschiebungsmethode . . . . .	59
4.2	Die Gemischte Methode . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Sensitivitätsanalyse</b>	<b>63</b>
5.1	Die kontinuumsmechanischen Grundlagen der Strukturoptimierung . .	65
5.1.1	Die Abhängigkeit des materiellen Körpers und der Konfiguratio- nen vom Design . . . . .	65
5.1.2	Ein Vergleich mit dem Konzept der Materialableitung . . . . .	71
5.1.3	Festlegung funktionaler Abhängigkeiten für die Sensitivitätsana- lyse hyperelastischer Materialien . . . . .	72
5.1.4	Bemerkungen zur Berechnung partieller Ableitungen kontinu- umsmechanischer Größen nach der Designvariablen . . . . .	72
5.2	Die variationelle Sensitivitätsanalyse . . . . .	74
5.2.1	Grundlagen der variationellen Sensitivitätsanalyse . . . . .	74
5.2.2	Die partielle Ableitung des materiellen Deformationsgradienten nach der Designvariablen . . . . .	75
5.2.3	Die partielle Ableitung der Spannungen nach der Designvariablen	78
5.2.4	Die partielle Ableitung der schwachen Form des Gleichgewichts nach der Designvariablen . . . . .	80
5.2.5	Die Diskretisierung der variationellen Sensitivitätsaussage . . . .	81
5.3	Die diskrete Sensitivitätsanalyse . . . . .	83



5.3.1	Grundlagen der diskreten Sensitivitätsanalyse . . . . .	83
5.3.2	Der Aufbau der diskreten Sensitivitätsberechnung . . . . .	86
5.3.3	Die diskrete Sensitivität der Spannungen . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Ein Gesamtkonzept der Optimalen Formgebung</b>	<b>93</b>
6.1	Mathematische Formulierung und Algorithmus . . . . .	93
6.1.1	Überblick über die Optimierungsverfahren . . . . .	94
6.1.2	Das mathematische Optimierungsproblem . . . . .	95
6.1.3	Die Kuhn-Tucker-Bedingungen . . . . .	95
6.1.4	Anmerkungen zur Wahl der Optimierungsalgorithmen . . . . .	96
6.2	Die Prozeßkette Optimale Formgebung . . . . .	98
6.2.1	Übersicht . . . . .	98
6.2.2	Zielsetzung der softwaretechnischen Bearbeitung . . . . .	100
6.3	Das Geometriemodell innerhalb der Prozeßkette . . . . .	103
6.3.1	Das Topologiemodell der Geometrie . . . . .	103
6.3.2	Das Entwurfsvariablenmodell der Geometrie . . . . .	104
6.3.3	Das parametrische Modell der Geometrie . . . . .	105
6.4	Die Strategie der Netzveränderung innerhalb der Prozeßkette . . . . .	107
6.5	Die Finite-Elemente-Strukturanalyse und die zugehörige Sensitivität . . . . .	109
<b>7</b>	<b>Beispiele</b>	<b>111</b>
7.1	Eine Formoptimierung der Scheibe mit Loch . . . . .	112
7.1.1	Die Problemstellung . . . . .	112
7.1.2	Das Optimierungsmodell . . . . .	113
7.1.3	Die Modelle innerhalb der Prozeßkette . . . . .	113
7.1.4	Bemerkungen zur Durchführung der Strukturanalyse . . . . .	122
7.1.5	Ergebnisse der Optimierungsaufgabe . . . . .	124
7.2	Identifikation der Materialparameter und der Geometrie . . . . .	128
7.2.1	Problemstellung . . . . .	128
7.2.2	Wiedererkennung der Materialparameter . . . . .	130
7.2.3	Wiedererkennung der Geometrie . . . . .	133
7.3	Formoptimierung einer Normprobe . . . . .	137
7.3.1	Problemstellung . . . . .	137
7.3.2	Die Definition des Optimierungsproblems . . . . .	139
7.3.3	Die Ermittlung einer optimaler Form für die Normprobe . . . . .	140
7.3.4	Die Ermittlung einer optimaler Form für eine modifizierte Optimierungsaufgabe . . . . .	142

---

7.4	Ein Anwendungsbeispiel der Formoptimierung in der Reifenkonstruktion	144
7.4.1	Problemstellung . . . . .	144
7.4.2	Optimierungsaufgabe . . . . .	146
7.4.3	Einsatzmöglichkeiten der Formoptimierung in der industriellen Reifenentwicklung . . . . .	147
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>149</b>
8.1	Zusammenfassung . . . . .	149
8.2	Ausblick . . . . .	153
<b>A</b>	<b>Spannungs- und Materialtensoren der Momentankonfiguration</b>	<b>155</b>
A.1	Grundlagen . . . . .	155
A.2	Spannungs- und Materialtensoren für kompressible Materialien . . . . .	156
A.3	Spannungs- und Materialtensoren für inkompressible Materialien . . . . .	157
A.4	Der ebene Spannungszustand bei kompressiblen Materialien . . . . .	158
A.5	Der ebene Spannungszustand bei inkompressiblen Materialien . . . . .	159
<b>B</b>	<b>Hinweise zur Implementation der geometrischen Größen</b>	<b>161</b>
B.1	Darstellung der Basistensoren . . . . .	161
B.2	Ableitung der Basistensoren . . . . .	162
B.3	Speicherdarstellung eines Tensors vierter Stufe . . . . .	164
<b>C</b>	<b>Bezeichnungen</b>	<b>167</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>174</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>184</b>
	<b>Forschungsberichte in der Schriftenreihe</b>	<b>185</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Abbildung $\chi$ des materiellen Körpers $\mathcal{B}$ auf die Referenz- und Momentankonfiguration $\mathbf{B}_o$ bzw. $\mathbf{B}_t$ . . . . .	8
2.2	Beschreibung der Lage des materiellen Körpers bei Einführung konvektiver Koordinaten $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$ . . . . .	10
4.1	Darstellung des isoparametrischen Konzepts . . . . .	60
5.1	Parametrische Beschreibung des materiellen Körpers durch die konvektiven Koordinaten und die Designvariable . . . . .	66
5.2	Beschreibung der Lage des materiellen Körpers durch die Parametrisierung des materiellen Körpers, der Zeit und der Designvariablen . . . . .	67
5.3	Beziehung zwischen den Referenz- und Momentankonfigurationen für unterschiedliche Designvariablen . . . . .	69
5.4	Zusammenstellung der eingeführten Konfigurationen und Abbildungen . . . . .	70
6.1	Baustein- und Datenflußschema der Prozeßkette Optimale Formgebung . . . . .	99
6.2	Beispiel für die unterschiedlichen Aspekte des Geometriemodells . . . . .	103
6.3	Das hierarchische Topologiemodell in INA–OPT . . . . .	104
7.1	Problemstellung und Berechnungsmodell . . . . .	112
7.2	Optimierungs–Modell der Scheibe mit Loch . . . . .	113
7.3	Das hierarchische Topologiemodell . . . . .	114
7.4	Das Entwurfsvariablenmodell der Scheibe mit Loch . . . . .	115
7.5	Darstellung einer Bézier–Kurve . . . . .	116
7.6	Approximation eines Kreisbogens durch eine Bézier–Kurve . . . . .	117
7.7	Kontrollpunkte im CAD–Modell der Scheibe mit Loch . . . . .	119
7.8	Technologiedaten der Scheibe mit Loch . . . . .	120
7.9	FEM–Modell der Scheibe mit Loch . . . . .	121
7.10	Empfindlichkeit der Berechnung für Elementdurchdringungen . . . . .	122
7.11	Darstellung des unverformten und verformten Netzes sowie der Hauptnormalspannungen über die verformte Konfiguration . . . . .	123

---

7.12	Definition des Optimierungsproblems . . . . .	124
7.13	Vergleich der Ausgangsgeometrie mit der optimalen Form . . . . .	125
7.14	Darstellung der Deformation und des Spannungszustands der optimalen Form . . . . .	126
7.15	Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus . . . . .	127
7.16	Lastverschiebungskurve für Messung und Berechnung . . . . .	128
7.17	Problem 1: Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus . . . . .	131
7.18	Problem 2: Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus . . . . .	131
7.19	Problem 3: Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus . . . . .	131
7.20	Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus für die Definition aller Ma- terialparameter als Designvariable . . . . .	132
7.21	Lösungspunkt bei der Wiedererkennung der Geometrie und zugehörige Diskretisierungsstufe . . . . .	133
7.22	FE-Netze für die Start- und Lösungsgeometrie . . . . .	134
7.23	Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus . . . . .	134
7.24	FE-Netze für die Start- und Lösungsgeometrie . . . . .	135
7.25	FE-Netze der Lösungsgeometrie für eine Bézier- bzw. COONS-Flächen- beschreibung . . . . .	136
7.26	S2-Normprobe nach DIN 53504 . . . . .	137
7.27	FE-Netz der Normprobe und Angabe des Spannungszustandes . . . . .	138
7.28	Kontrollpunkte für die Randlinienbeschreibung der S2-Normprobe . . . . .	139
7.29	Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus . . . . .	140
7.30	FE-Netz und Spannungszustand der ersten optimierten Form . . . . .	141
7.31	Koordinaten der Kontrollpunkte . . . . .	142
7.32	FE-Netz und Spannungszustand der zweiten optimierten Form . . . . .	143
7.33	Reifenquerschnitt . . . . .	145
7.34	Vereinfachtes Modell eines Reifenquerschnitts . . . . .	146

# Tafelverzeichnis

3.1	Umfang der Behandlung hyperelastischer Materialien . . . . .	27
3.2	Konzept der numerischen Berechnung hyperelastischer Materialien . . .	33
3.3	Ableitung der Formänderungsenergie $W$ nach den Invarianten I, II, III . .	35
3.4	Spannungs- und Materialtensoren kompressibler Materialien . . . . .	37
3.5	Deviatorischer Anteil der Spannungs- und Materialtensoren inkompressibler Materialien . . . . .	42
3.6	Vollständige Spannungs- und Materialtensoren inkompressibler Materialien . . . . .	42
3.7	Der Verzerrungszustand des ebenen Spannungszustandes . . . . .	46
3.8	Spannungs- und Materialtensoren für inkompressible Materialien im ebenen Spannungszustand . . . . .	48
3.9	Ableitung der Formänderungsenergie der Eigenwerte nach den Invarianten für $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ . . . . .	52
3.10	Ableitung der Formänderungsenergie des Ogden-Materials nach den Invarianten für $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ . . . . .	57
3.11	Ableitung der Formänderungsenergie des Ogden-Materials nach den Invarianten für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ . . . . .	58
5.1	Sensitivitätsanalyse eines strukturmechanischen Problems . . . . .	63
5.2	Eine kontinuumsmechanisch geprägte Sichtweise der Formoptimierung .	65
5.3	Partielle Ableitung des materiellen Deformationsgradienten $\mathbf{F}$ nach der Designvariablen $s$ . . . . .	76
6.1	Die Bausteine der Prozeßkette Optimale Formgebung . . . . .	93
6.2	Das mathematische Optimierungsproblem . . . . .	95
6.3	Die Kuhn-Tucker-Bedingungen . . . . .	95
6.4	Strategievorschlag für die Softwareentwicklung innerhalb des FE-Berechnungsmoduls . . . . .	110
A.1	Spannungs- und Materialtensoren kompressibler Materialien für die Beschreibung in den Größen der Momentankonfiguration . . . . .	156
A.2	Deviatorischer Anteil der Spannungs- und Materialtensoren inkompressibler Materialien für die Beschreibung in den Größen der Momentankonfiguration . . . . .	157

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Problemstellung

Die Konstruktion von Bauwerken zur sinnvollen Nutzung bei möglichst optimaler Erfüllung selbstgestellter Ziele und unter Beachtung zahlreicher Vorgaben und Zwangsbedingungen stellt die ureigenste Aufgabenstellung im Ingenieurwesen dar. In der Geschichte des Bauwesens wurden die zur optimalen Gestaltung eines Bauwerkes notwendigen Eigenschaften und Fähigkeiten in der Erfahrung der Baumeister vereinigt.

Durch die Entwicklung der numerischen Methoden, die zunächst die Berechnung des Strukturverhaltens wesentlich vereinfachte, ergab sich auch die Möglichkeit einer mathematischen Beschreibung und algorithmischen Umsetzung der komplexen Ingenieuraufgabe durch eine Optimierungsaufgabe und die zugehörigen Algorithmen.

Zur mathematischen Darstellung sind die gewünschten Ziele durch die sogenannte *Zielfunktion*  $f$  und die vorhandenen Beschränkungen durch die *Nebenbedingungen*  $g_j$  zu beschreiben. Als wesentliche veränderbare Größen der Konstruktion sind die *Designvariablen*  $s_i$  festzulegen.

In der algorithmischen Umsetzung des Arbeitsablaufes sind den Tätigkeiten

*Konstruieren – Berechnen – Bewerten – Verbessern*

die folgenden numerischen Hilfsmittel zugeordnet.

Die Konstruktion eines Bauteils erfolgt heutzutage in effizienter Form mit den numerischen Werkzeugen des *Computer Aided Geometric Design* (CAGD), die bei richtigem Einsatz und strukturierter Organisation die Grundlage jedes weiteren Arbeitsschrittes bis zur Fertigung darstellen sollte.

Hieran schließt sich die numerische Berechnung mit der *Finite-Elemente-Methode* (FEM) bzw. der *Rand-Elemente-Methode* (BEM) an. Einen wesentlichen Aspekt stellt beim Einsatz der numerischen Näherungsverfahren die problemgerechte Diskretisierung der realen Struktur dar, die durch den Einsatz von Verfeinerungsstrategien auf der Grundlage von A-priori-Kriterien und A-posteriori-Kriterien unterstützt wird. Weiterhin ist durch den Fortschritt insbesondere der numerischen Methoden in der Mechanik die Erfassung komplexer Phänomene z.B. beim globalen und lokalen Stabilitätsverhalten,

beim Materialverhalten und in der Kopplung mechanisch-thermomechanischen Verhaltens möglich.

Die berechneten Ergebnisse der Strukturanalyse sind einer kritischen Bewertung zu unterziehen, wobei vor allem die Aussagekraft des gewählten Modells zu beurteilen ist. Innerhalb des numerischen Modells ist die Güte der Berechnung mit den oben erwähnten Adaptionkriterien zu gewährleisten.

Für die Verbesserung der Konstruktion hinsichtlich der gesetzten Ziele und unter Beachtung der vorgegebenen Beschränkungen ist die Empfindlichkeit der Struktur (Sensitivität) bei Veränderungen zu beurteilen. Hierfür steht dem Ingenieur im Rahmen einer numerischen Behandlung das Hilfsmittel der *Sensitivitätsanalyse* zur Verfügung, die auf der Grundlage der geometrischen Beschreibung der Struktur (CAGD) und der numerischen Berechnung (FEM) das Änderungsverhalten quantifiziert.

Nach der Beurteilung des Änderungsverhaltens und seiner quantitativen Angabe durch die Sensitivitätsanalyse ist die sinnvolle Änderung der Struktur zu ermitteln, die innerhalb der durch die Problemstellung gegebenen Freiheiten die optimale Lösung liefert. Zur Behandlung dieser Teilaufgabe werden die Algorithmen der *mathematischen Optimierung* eingesetzt, die aus den Werten der Zielfunktion und den Nebenbedingungen sowie der Angabe der Gradienten und der zweiten Ableitungen (Sensitivität) einen verbesserten Lösungsvorschlag liefern.

Der Einsatz von *Expertensystemen* für die Gesamtaufgabe bzw. für Teilbereiche kann den Ingenieur weiterhin von der Bearbeitung zahlreicher standardisierter Entscheidungsprozesse entlasten.

Die dargestellten Algorithmen für die

- *Konstruktion: Computer Aided Geometric Design*
- *Berechnung: Finite-Elemente-Methode*
- *Bewertung: Sensitivitätsanalyse*
- *Verbesserung: Mathematische Optimierung*

sowie der Einsatz von Expertensystemen sollen und können den Ingenieur bei der Lösung der Ingenieuraufgabe durch die schnelle und effiziente Bearbeitung letztlich trivialer Arbeitsschritte behilflich sein, so daß er sich intensiver den eigentlichen, nicht algorithmierbaren Aufgaben widmen kann. Hierbei ist insbesondere die Modellbildung (auch der Teilmodelle für die einzelnen Algorithmen) und die kritische Kontrolle der durch den Algorithmus gelieferten Ergebnisse zu erwähnen.

In dem Maße, wie der Ingenieur triviale Aufgaben zur Arbeitsentlastung an den Algorithmus abtreten möchte, steigt die Menge der im Algorithmus zu verarbeitenden Informationen und damit die Komplexität eines *Gesamtalgorithmus Optimale Formgebung*.

Die sich zwangsläufig ergebene Notwendigkeit der Berücksichtigung und Kopplung mehrerer, bisher nicht miteinander in Beziehung stehender Einzelmodelle führte dazu,



daß sich zahlreiche Philosophien zur algorithmischen Behandlung und softwaretechnischen Umsetzung der Strukturoptimierung entwickelten. Die Standpunkte sind wesentlich durch die unterschiedlichen Zielsetzungen, Arbeitsbedingungen und der Struktur vorhandener Softwarelösungen bei den Teilaufgaben geprägt. Für die Entscheidungsfindung ist dabei der finanzielle und zeitliche Aufwand einer exakten Abbildung theoretischer Beziehungen für die eigene Optimierungsaufgabe mit der erforderlichen Genauigkeit und der Notwendigkeit einer schnellen und effektiven Problemlösung innerhalb der bestehenden Struktur in Beziehung zu setzen.

Für die Behandlung der Strukturoptimierung in Teilbereichen der Industrie ist der Einsatz numerischer und semianalytischer Verfahren zur Ermittlung der Sensitivitäten weit fortgeschritten. Der wesentliche Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, daß vorhandene Softwarepakete für die Geometriebeschreibung und die Strukturanalyse ohne genaue Kenntnis der internen Arbeitsweisen verwendet werden können. Durch den Einsatz numerischer Differentiationstechniken werden hierbei bezüglich der Genauigkeit der Sensitivitätsanalyse und der effektiven numerischen Behandlung Einschränkungen gemacht. Der Einsatz dieser Methoden erfordert eine erhöhte Rechenzeit, die in der Regel in der industriellen Anwendung zur Verfügung gestellt werden kann.

Demgegenüber wird in der Forschung vermehrt auf die exakte Abbildung der theoretischen Zusammenhänge in einer eigenen für die Optimierungsaufgabe zusammengestellten Softwareumgebung Wert gelegt. Den sich hieraus ergebenden Vorteilen steht der enorme Aufwand einer völlig neu zu erstellenden, modular strukturierten softwaretechnischen Lösung gegenüber. Aus diesem Grund sind zur Zeit noch Abstriche bei der Funktionalität der Einzelbausteine und bei der Einsatzfähigkeit auf große praxisrelevante Problemstellungen der Industrie zu machen. Es ist zu erwarten, daß sich aus der Entwicklungsarbeit der Forschungsinstitute auf dem Gebiet integrierter Softwarelösungen, die auf der Grundlage einer exakten Abbildung der Theorie basieren, in Zukunft Daten- und Programmkonzeptionen entstehen, die von der Industrie und den kommerziellen Softwareherstellern in den nächsten (Software-) Generationen berücksichtigt werden.

## 1.2 Aufgabenstellung und Ziele dieser Arbeit

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung und Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien, deren bedeutendsten Vertreter das „Neo-Hooke-Material“, das „Mooney-Rivlin-Material“ und die Klasse der „Ogden-Materialien“ sind. Diese Materialien werden insbesondere zur Modellierung gummiartigen Materialverhaltens z.B. in der Reifenmechanik und bei der Untersuchung technischer Gummiprodukte eingesetzt, wobei vielfach Dehnungen von 200% bis 300% auftreten. Eine Darstellung des Stands der Forschung auf dem Gebiet der numerischen Modellierung gummiartigen Materialverhaltens wird in Abschnitt 3.1.4 gegeben.

Das Verhalten einer Struktur aus hyperelastischem Material wird neben der Geometrie der unbelasteten Ausgangsform auch von den Materialparametern beeinflusst, die für den großen Dehnungsbereich eine realistische, gleich gute Beschreibung der Materialeigenschaften des Gummis liefern müssen. Um den Einfluß sowohl unterschiedlicher geometrischer Formen als auch unterschiedlichen Materialverhaltens beschreiben

zu können, ist die Sensitivität bezüglich einer Änderung der Geometrie als auch der Änderung der Materialparameter anzugeben.

Die Problematik der Aufgabenstellung „Berechnung und Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien“ und damit die Zielsetzung dieser Arbeit besteht in der

- Herleitung einer numerisch effizienten Methodik zur strukturmechanischen Berechnung der Materialien,
- der Herleitung der Sensitivitäten bezüglich Änderung der Geometrie und der Materialparameter sowie der
- Konzeption und Implementation eines effizienten Gesamtalgorithmus zur numerischen Behandlung der Optimierungsaufgaben.

Bei der Behandlung soll besonderer Wert auf die Herleitung der Strukturanalyse als auch der Sensitivitätsanalyse aus den kontinuumsmechanischen Beziehungen Wert gelegt werden. Die sich hieraus ergebenden Resultate sollen in vollständig analytischer Form in ein integriertes Programmkonzept eingebunden und softwaretechnisch realisiert werden.

### 1.3 Umfang dieser Arbeit

In Kapitel 2 werden die **kontinuumsmechanischen Grundlagen** für den späteren Gebrauch bei der Herleitung der Spannungs- und Materialtensoren in Kapitel 3 und für die Sensitivitätsanalyse in Kapitel 5 aufbereitet. Hierbei ist besonders die Beschreibung der materiellen Körper und ihrer Konfigurationen durch die konvektiven Koordinaten, d.h. die Darstellung als differenzierbare Mannigfaltigkeiten, wesentliche Voraussetzung für die in Kapitel 5 eingeführte Parametrisierung der Optimierungsaufgabe.

Die Berechnung der Sensitivität des Strukturverhaltens erfordert zunächst eine eingehende Analyse und Problembeschreibung des zugrundeliegenden Materialverhaltens. Hierzu werden in Kapitel 3 für eine Beschreibung in den Größen der Referenzkonfiguration die **Spannungs- und Materialtensoren** isotroper, hyperelastischer Materialien angegeben.

Als Ausgangspunkt der Betrachtung wird das isotrope, hyperelastische Materialgesetz in der allgemeingültigen Darstellung der Formänderungsenergiefunktion  $W$  als Funktion der Invarianten I, II, III bzw. der Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , d.h.

$$W = \hat{W}(I, II, III) = \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

vorausgesetzt. Es sollen für die Beschreibungsmöglichkeiten keine Einschränkungen vorgenommen werden, so daß zur erfolgreichen Behandlung der Vielfalt möglicher Erscheinungsformen ein Konzept zur strukturierten, modularen Beschreibung erarbeitet werden muß. Als Eingangsgröße ist dabei nur die Angabe der Formänderungsenergiefunktion  $W$  und der zugehörigen Ableitungen nach den Invarianten für die funktionale

Abhängigkeit  $W = \hat{W}(I, II, III)$  bzw. nach den Eigenwerten für die funktionale Abhängigkeit  $W = \check{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  vorzusehen. Wesentlich ist bei dem vorgeschlagenen Vorgehen der vollständige Verzicht auf die Berechnung der Eigenvektoren der Verzerrungs- und Spannungstensoren.

Neben der Darstellung kompressibler, quasi-inkompressibler und exakt-inkompressibler Materialien im allgemeinen dreidimensionalen Spannungs- und Verzerrungszustand (mit den Sonderfällen des ebenen und rotationssymmetrischen Verzerrungszustandes) erfolgt die Angabe der Spannungs- und Materialtensoren für den ebenen Spannungszustand. Die Sonderfälle zweifach bzw. dreifach zusammenfallender Eigenwerte für das in den Eigenwerten formulierte Ogden-Materialgesetz werden nach Durchführung eines Grenzwertprozesses explizit angegeben. Die entsprechenden Gleichungen für die Darstellung der Spannungs- und Materialtensoren in den Größen der Momentankonfiguration finden sich im Anhang.

In Kapitel 4 wird die **Finite-Elemente-Formulierung** zur numerischen Beschreibung hyperelastischer Materialien kurz dargestellt. Die Grundlagen der Finite-Elemente-Methode werden vorausgesetzt, so daß nur einige Angaben zur Bereitstellung des Residuums und der tangentialen Steifigkeitsmatrix für die Verschiebungsmethode bzw. eine gemischte Variationsformulierung zur Behandlung quasi-inkompressibler Materialien gemacht werden.

Nach der Darstellung der Grundlagen der Strukturanalyse, der Angabe der Spannungs- und Materialtensoren und der schwachen Form des Gleichgewichts sowie der notwendigen Diskretisierung wird in Kapitel 5 die **Sensitivitätsanalyse** beschrieben.

Den Ausgangspunkt der weiteren Untersuchungen bildet dabei die in Abschnitt 5.1 dargestellten **kontinuumsmechanischen Grundlagen der Strukturoptimierung**. Hierbei ist zunächst die Beschreibung der Geometrie um die Abhängigkeit von der Designvariablen zu erweitern, aus der sich die Folgerungen für die Deformation und die Spannungen ergeben.

Die Abhängigkeit einer strukturmechanischen Größe von der Designvariablen ist sowohl durch die variationelle als auch durch die diskrete Sensitivitätsanalyse zu beschreiben. Bei der Anwendung der **variationellen Sensitivitätsanalyse** (Abschnitt 5.2) auf das hyperelastische Materialverhalten werden die Spannungs- und Verzerrungstensoren nach der Designvariablen abgeleitet, so daß sich kontinuierliche Aussagen für die Empfindlichkeit der Struktur bei Änderung der Designvariablen ergeben. Diese kontinuierlichen Aussagen müssen anschließend konsistent zum numerischen Näherungsverfahren diskretisiert werden.

Demgegenüber erfolgt in der **diskreten Sensitivitätsanalyse** (Abschnitt 5.3) die Berechnung der Empfindlichkeit für die bereits diskretisierten algebraischen Gleichungen der Finite-Elemente-Methode. Hierbei ist die erfolgreiche Strukturierung des Problems und die Umsetzung in modulare Bausteine wesentlich für die Durchführbarkeit dieser Vorgehensweise.

Beide Methoden der Sensitivitätsanalyse sind für die beschriebenen Darstellungsarten hyperelastischen Materialverhaltens implementiert worden, wobei die Angabe der Sensitivität der Formänderungsenergie sowie die Sensitivität der ersten Ableitung als Schnittstelle zur Implementation weiterer Materialgesetze für die Optimierung genügt.

Die Aufgabenstellung „Strukturoptimierung“ erfordert in der softwaretechnischen Realisation die Kopplung von Algorithmen zur Geometriebeschreibung (CAGD), Finite-Elemente-Berechnung (FEM), der Sensitivitätsanalyse und der Mathematischen Optimierung. Die Komplexität der Bearbeitung wird durch den Anspruch einer vollständig analytischen Bereitstellung der Sensitivitäten noch erhöht. Ein **Gesamtkonzept Optimale Formgebung**, das wesentlich auf den bisher dargestellten kontinuumsmechanischen Grundlagen basiert, wird in Kapitel 6 angegeben und ist im Forschungsprogrammpaket INA–OPT (INelastic Analysis and OPTimization) realisiert worden.

Die **Beispiele** (Kapitel 7) zeigen an einigen ausgewählten Problemstellungen die Leistungsfähigkeit der auf den theoretischen Beziehungen basierenden und vollständig analytisch vorgenommenen Sensitivitätsanalyse für isotrope, hyperelastische Materialien sowie der softwaretechnisch umgesetzten Gesamtkonzeption Optimale Formgebung. Zunächst wurde die **Gewichtsm minimierung** einer Scheibe mit Loch unter großen elastischen Deformationen und einzuhaltenden Nebenbedingungen für die deformierte Struktur durchgeführt. Darüberhinaus konnte der entwickelte Gesamtalgorithmus zur Lösung **inverser Probleme** eingesetzt werden, wie sie die Identifikation von Materialparameter und Geometrie aus dem Deformationsverhalten der Struktur darstellt. Anschließend zeigt die **praxisrelevante Formoptimierung** einer S2-Normprobe nach DIN die Einsatzmöglichkeiten zur Beschränkung auftretender Spannungsspitzen. Die Lösung dieser Aufgabe ist für die Konstruktion geeigneter Proben zum Nachweis der Materialeigenschaften in der Materialprüfung interessant. Zum Abschluß wurde am Beispiel der **Reifenkonstruktion** exemplarisch aufgezeigt, wie in der industriellen Praxis ein Konstruktionsprozeß durch den Einsatz von Optimierungssoftware geeignet unterstützt werden kann.

Im Anhang wird zum einen die Darstellung der **Spannungs- und Materialtensoren** durch die Angabe der Beziehungen bzgl. der Größen der **Momentankonfiguration** vervollständigt (Anhang A). Weiterhin finden sich Angaben zur Struktur der Implementation der Spannungs- und Materialtensoren (Anhang B). Eine Zusammenstellung der eingeführten Notation in Anhang C soll dem Leser die Beschäftigung mit der vorliegenden Arbeit erleichtern.

# Kapitel 2

## Kontinuumsmechanische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die für die kontinuumsmechanische Theorie isotroper, hyperelastischer Materialien relevanten Begriffe und Beziehungen kurz angegeben. Ausführliche Darstellungen finden sich z.B. in *Truesdell, Noll* [103], *Malvern* [58] und *Marsden, Hughes* [59]. Die Grundlagen der Elastizitätstheorie sind u. a. in *Stein, Barthold* [95] aufbereitet worden. Die Beschreibung der Abhängigkeit kontinuumsmechanischer Größen von der gewählten Geometrie eines betrachteten Körpers, d.h. von den Designvariablen, wird in Kapitel 5 vorgenommen.

### 2.1 Kinematik

#### 2.1.1 Der materielle Körper und seine Lage im Raum

Der materielle Körper  $\mathcal{B}$  unserer Betrachtung besteht aus einer zusammenhängenden Menge materieller Punkte  $\mathcal{M}$ . Die Raum aller möglichen materiellen Körper  $\mathcal{B}$  wird mit  $B$  bezeichnet, d.h.  $\mathcal{B} \in B$ . Zu jedem Zeitpunkt  $t$  aus dem Raum der betrachteten Zeitpunkte  $T_t$  werden die materiellen Punkte mittels der Abbildung  $\chi$  bijektiv und stetig auf die Raumpunkte  $\mathcal{P}$  des dreidimensionalen euklidischen Punktraumes  $\mathbb{E}^3$  abgebildet. Bezüglich einer raumfesten kartesischen Basis  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  zum Zeitpunkt  $t$  erhalten wir die Darstellung der Lage des materiellen Punktes  $\mathcal{M}$  über den Ortsvektor  $\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k$  zum Raumpunkt  $\mathcal{P} \in \mathbb{E}^3$ , d.h. es gilt

$$\chi : \begin{cases} \mathcal{B} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{E}^3 \\ (\mathcal{M}, t) & \mapsto & \mathbf{x} = \chi(\mathcal{M}, t). \end{cases} \quad (2.1)$$

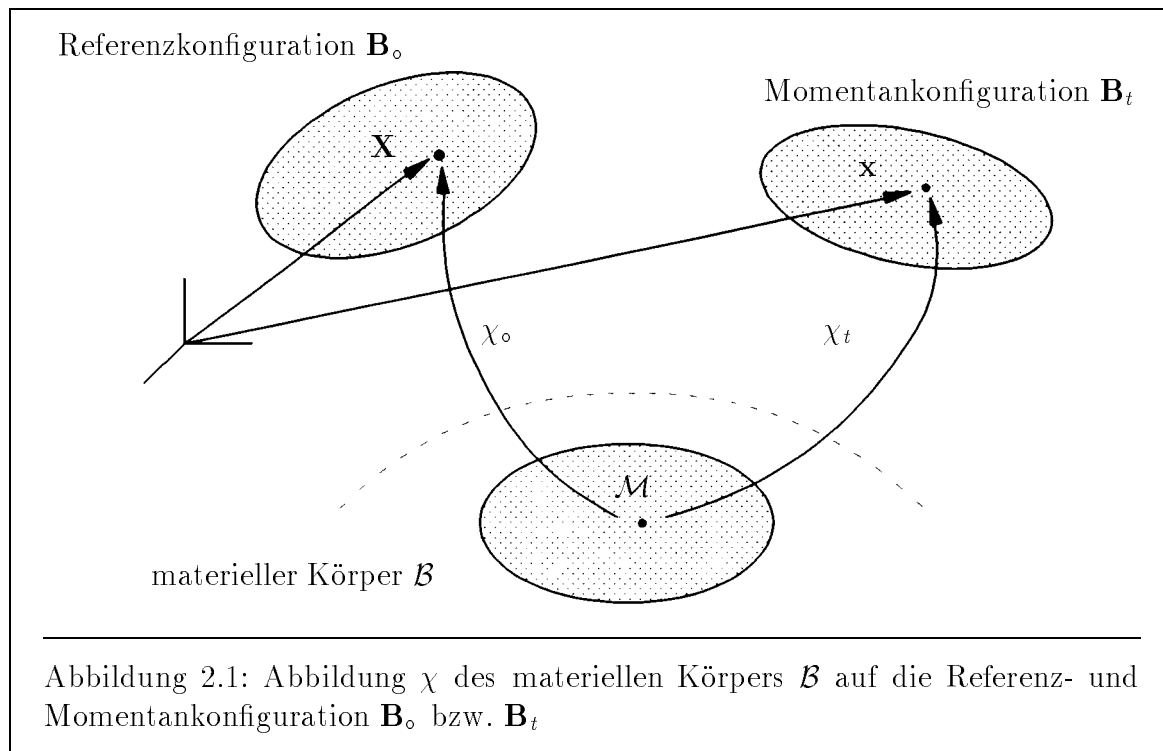
Zu der Referenzzeit  $t = t_0$  nimmt der unverformte, unbelastete und spannungsfreie materielle Körper dabei die Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_0 = \chi(\mathcal{B}, t_0) =: \chi_0(\mathcal{B})$  ein. Bezüglich der raumfesten kartesischen Basis  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$  zur Referenzzeit  $t_0$  gilt für die Lage des materiellen Punktes  $\mathbf{X} = X^A \mathbf{E}_A$ . Die Koordinaten  $X^A$  heißen materielle oder Lagrange'sche Koordinaten. Die Größen der Referenzkonfiguration werden im weiteren mit Großbuchstaben bezeichnet.

Zur aktuellen Zeit  $t > t_0$  nimmt der verformte materielle Körper die Momentankonfiguration  $\mathbf{B}_t = \chi(\mathcal{B}, t) =: \chi_t(\mathcal{B})$  ein. Für die materiellen Punkte gilt dann bzgl. der gewählten Basis die Darstellung über den Ortsvektor  $\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k$ . Die Koordinaten  $x^k$  heißen räumliche oder Eulersche Koordinaten. Die Größen der Momentankonfiguration werden mit Kleinbuchstaben bezeichnet.

Die Bewegung des materiellen Körpers von der Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_0$  zum Referenzzeitpunkt  $t_0$  zur Momentankonfiguration  $\mathbf{B}_t$  der aktuellen Zeit  $t$  kann durch die Abbildung

$$\Phi_{t,t_0} : \begin{cases} \mathbf{B}_0 & \rightarrow & \mathbf{B}_t \\ \mathbf{X} & \mapsto & \mathbf{x} = \Phi_{t,t_0}(\mathbf{X}) := [\chi_t \circ \{\chi_0\}^{-1}](\mathbf{X}) \end{cases} \quad (2.2)$$

dargestellt werden. Dabei ist die Abbildung  $\Phi_{t,t_0}$  stetig differenzierbar und für jeden beliebigen und dann festgewählten Zeitpunkt  $t$  bijektiv. Zur Vereinfachung der Notation wird  $\Phi$  stets ohne Indizes geschrieben. Weiterhin wird die Übereinstimmung der kartesischen Basisvektoren der Referenz- und Momentankonfiguration vorausgesetzt, d.h.  $\mathbf{E}_i = \mathbf{e}_i$ .



Die Beschreibung des kontinuumsmechanischen Problems kann vollständig in der Referenzbeschreibung, d.h. in Abhängigkeit der Lage  $\mathbf{X}$  des materiellen Punktes  $\mathcal{M}$  zur Referenzzeit  $t_0$  erfolgen. Für die theoretische und numerische Behandlung der Abhängigkeit des materiellen Körpers und damit der Konfigurationen von einer Designvariablen  $s$  ist die Beschränkung der Betrachtung auf die Deformation eines gegebenen Körpers zwischen Referenz- und Momentankonfiguration nicht ausreichend. Vielmehr ist die eindeutige Beschreibung der materiellen Punkte  $\mathcal{M}$  und des materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  für die weitere Untersuchung in Kapitel 5 wichtig.

Zu diesem Zweck erfolgt die Einführung konvektiver Koordinaten  $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$  mit denen der materielle Punkt  $\mathcal{M}$  eindeutig beschrieben werden kann. Somit wird eine von der Designvariable  $s$  unabhängige Parametrisierung des materiellen Körpers vorgenommen. Dabei wird der Parameterraum

$$T_\Theta := [0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3 \quad (2.3)$$

der konvektiven Koordinaten  $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$  mit Hilfe der Abbildung

$$\omega : \begin{cases} T_\Theta & \rightarrow B \\ (\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) & \mapsto \mathcal{M} = \omega(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \end{cases} \quad (2.4)$$

in den Raum  $B := \{\mathcal{B} | \mathcal{B} = \omega(T_\Theta)\}$  der materiellen Körper  $\mathcal{B} = \omega(T_\Theta)$  abgebildet.

Mit der Abbildung  $\chi$  der materiellen Punkte auf die Raumpunkte ergibt sich durch Abbildungskomposition die Darstellung der Raumpunkte durch die konvektiven Koordinaten  $(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \in T_\Theta$  und der Zeit  $t \in T_t = \mathbb{R}$

$$\psi : \begin{cases} T_\Theta \times T_t & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t) & \mapsto \mathbf{x} = \psi(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t). \end{cases} \quad (2.5)$$

Damit können die kartesischen Koordinaten  $X^A$  bzw.  $x^i$  über die Abbildung  $\psi$  durch die konvektiven Koordinaten beschrieben werden, d.h. es gilt

$$X^A = \hat{X}^A(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \quad \text{bzw.} \quad x^i = \hat{x}^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t). \quad (2.6)$$

Die Beziehung zwischen den Koordinaten  $\{X^A\}$  bzw.  $\{x^i\}$  und  $\{\Theta^B\}$  sei bei festgehaltener Zeit  $t$  bijektiv und beliebig oft stetig differenzierbar.

Den konvektiven Koordinaten  $\Theta^B$  sind die kovarianten, konvektiven Basisvektoren

$$\mathbf{G}_B := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Theta^B} = \frac{\partial X^A}{\partial \Theta^B} \mathbf{E}_A \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_j := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta^j} = \frac{\partial x^i}{\partial \Theta^j} \mathbf{e}_i \quad (2.7)$$

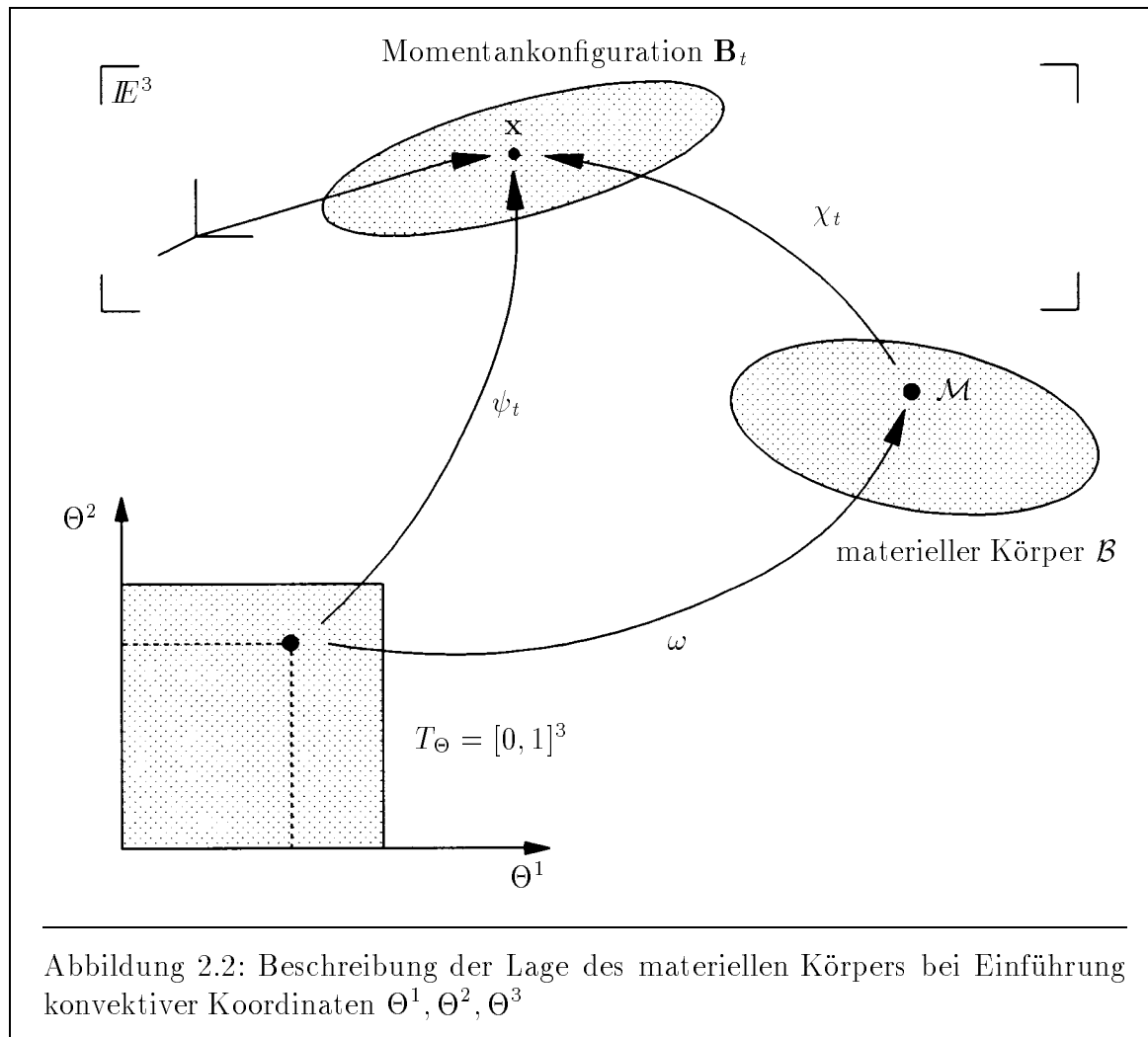
der Referenz- bzw. der Momentankonfiguration zugeordnet. Weiterhin treten die kontravarianten Basisvektoren  $\{\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3\}$  bzw.  $\{\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3\}$  auf, die z.B. für die Referenzkonfiguration über die ko- bzw. kontravarianten Metrikoeffizienten  $G_{AB} = \mathbf{G}_A \cdot \mathbf{G}_B$  mit  $G_{AB} G^{BC} = \delta_A^C$  und  $\mathbf{G}^A = G^{AB} \mathbf{G}_B$  berechnet werden können. Man beachte, daß die Metriktensoren mit  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{g}$ , d.h. mit dem gleichen Buchstaben, jedoch ohne Indizes, bezeichnet werden, d.h. es gilt

$$\mathbf{1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{G} = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad \text{und} \quad \mathbf{G}^{-1} = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{1} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad \text{und} \quad \mathbf{g}^{-1} = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j. \quad (2.9)$$

Für die numerische Berechnung ist die Darstellung der Bewegung eines deformierbaren Körpers über das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u} := \mathbf{x} - \mathbf{X}$  mit der funktionalen Abhängigkeit

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t) \quad (2.10)$$



zwischen der verformten und unverformten Konfiguration bedeutsam.

Als weitere Möglichkeit zur Beschreibung der Lage materieller Körper im Raum wird z.B. in Marsden, Hughes [59] das Konzept der *differenzierbaren Mannigfaltigkeit* benutzt, das die Grundlage für genauere theoretische Untersuchungen bildet. Hierbei wird die Konfiguration des Körpers stückweise, d.h. durch eine endliche Anzahl hinreichend oft stetig differenzierbarer lokaler Abbildungen eines Koordinatensystems  $\{Z^B\}$  auf die kartesischen Koordinaten  $\{X^A\}$ , beschrieben. Diese Tatsache wird in Kapitel 6 nochmals aufgegriffen.

Die Abhängigkeit der geometrischen und damit aller weiteren kontinuumsmechanischen Größen von der gewählten Geometrie, d.h. von der Designvariablen  $s$ , wird in Kapitel 5 dargestellt. Dabei werden die oben definierten Abbildungen  $\omega, \psi$  und  $\Phi$  um die Abhängigkeit von der Designvariablen erweitert. Zur Vermeidung unnötiger zusätzlicher Bezeichnungen werden diese modifizierten Abbildungen wieder mit den hier gewohnten griechischen Buchstaben benannt. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels und der Kapitel 3 und 4 ist die Berücksichtigung der Abhängigkeit von der Designvariablen  $s$  nicht erforderlich.



## 2.1.2 Der materielle Deformationsgradient und die Verzerrungsmaße

Die Beschreibung der bei der Abbildung  $\Phi$  auftretenden Deformation und Veränderung des materiellen Körpers erfolgt mit Hilfe des materiellen Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} := \text{Grad } \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^A} \otimes \mathbf{E}^A = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad (2.11)$$

dessen Determinante  $J := \det \mathbf{F}$  aus physikalischen Gründen stets positiv sein muß. Mit dem materiellen Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H} := \text{Grad } \mathbf{u}$  ergibt sich die Beziehung  $\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{x} = \text{Grad}(\mathbf{X} + \mathbf{u}) = \mathbf{1} + \mathbf{H}$ .

Wichtig für die Analyse des Deformationszustandes ist die polare Zerlegung des materiellen Deformationsgradienten in den eigentlich orthogonalen Drehtensor  $\mathbf{R}$  und die positiv definiten, symmetrischen Strecktensoren  $\mathbf{U}$  bzw.  $\mathbf{V}$  in der Form

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}. \quad (2.12)$$

Aus der Beobachtung, daß der materielle Deformationsgradient für Starrkörperbewegungen nicht verschwindet und zudem noch richtungsabhängig ist, wird die Wahl geeigneterer Verzerrungsmaße erforderlich. Zunächst wird durch die Definition des materiellen Rechts-Cauchy-Green-Tensors  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$  bzw. des räumlichen Links-Cauchy-Green-Tensors  $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$  der Anteil der orthogonalen Transformation eliminiert. Die Spektralzerlegung von  $\mathbf{C}$  (und  $\mathbf{b}$ ) ist aufgrund der Symmetrie möglich und kann mit Hilfe der Invarianten

$$\begin{aligned} \text{I}_{\mathbf{C}} &= \text{tr } \mathbf{C} = C_{AA} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ \text{II}_{\mathbf{C}} &= \frac{1}{2} [(\text{tr } \mathbf{C})^2 - \text{tr } \mathbf{C}^2] \\ &= \frac{1}{2} [C_{AA} C_{BB} - C_{AB} C_{AB}] \\ &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ \text{und } \text{III}_{\mathbf{C}} &= \det \mathbf{C} = \epsilon_{ABC} C_{A1} C_{B2} C_{C3} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

über die Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\det(\mathbf{C} - \lambda^2 \mathbf{1}) = 0 \quad (2.14)$$

bestimmt werden. Die Invarianten von  $\mathbf{C}$  werden künftig mit  $\text{I}, \text{II}, \text{III}$  bzw. mit  $\text{I}_1, \text{I}_2, \text{I}_3$  bezeichnet. Weiterhin wird die Notation  $i_{\mathbf{C}} := \{\text{I}_{\mathbf{C}}, \text{II}_{\mathbf{C}}, \text{III}_{\mathbf{C}}\}$  benutzt. Aus dem zugehörigen charakteristischen Polynom

$$\lambda^6 - \text{I}_{\mathbf{C}} \lambda^4 + \text{II}_{\mathbf{C}} \lambda^2 - \text{III}_{\mathbf{C}} = 0 \quad (2.15)$$

können die reellen Eigenwerte  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$  von  $\mathbf{C}$  und damit auch die reellen Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  von  $\mathbf{U}$  bestimmt werden. Die Hauptachsenrichtungen  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$  von  $\mathbf{U}$  bzw.

von  $\mathbf{C}$  sind paarweise orthogonal. Hieraus ergeben sich somit die wichtigen Spektral-  
darstellungen

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i. \quad (2.16)$$

Analog erhalten wir die Spektraldarstellung des Links-Streck-Tensors  $\mathbf{V}$  bzw. des Links-  
Cauchy-Green-Tensors  $\mathbf{b}$  in der Form

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i. \quad (2.17)$$

Hierbei bezeichnen  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  die paarweise orthogonalen Eigenvektoren von  $\mathbf{V}$  bzw.  
von  $\mathbf{b}$ . Man beachte, daß die Invarianten des Rechts- und Links-Cauchy-Green-Tensors  
 $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{b}$  gleich sind, d.h. es gilt  $\text{I}_{\mathbf{C}} = \text{I}_{\mathbf{b}}$ ,  $\text{II}_{\mathbf{C}} = \text{II}_{\mathbf{b}}$  und  $\text{III}_{\mathbf{C}} = \text{III}_{\mathbf{b}}$ .

Eine ganze Klasse von materiellen Verzerrungstensen kann mit Hilfe der Spektral-  
zerlegung in der Form

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{U}) := \begin{cases} \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{1}) & \text{für } m \neq 0 \\ \ln \mathbf{U} & \text{für } m = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

konstruiert werden, siehe z.B. *Ogden* [69, Ch. 2.2.7]. Den bedeutendsten Vertreter  
erhalten wir hieraus für  $m = 2$  mit dem Greenschen Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} := \mathbf{E}_2 = \frac{1}{2} \{ \mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1} \} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{C} - \mathbf{1} \} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H} \}, \quad (2.19)$$

der sich auch aus der Differenz der Quadrate der Linienelemente zwischen der verform-  
ten Momentankonfiguration und der unverformten Referenzkonfiguration ergibt.

Für die Behandlung inkompressibler Ogden-Materialien ist die multiplikative Zerlegung  
des materiellen Deformationsgradienten in volumetrische und isochore Anteile in der  
Form

$$\mathbf{F} = J^{\frac{1}{3}} \bar{\mathbf{F}} = (J^{\frac{1}{3}} \mathbf{1}) \bar{\mathbf{F}} \quad (2.20)$$

wichtig. Hierin ist  $\bar{\mathbf{F}} := J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}$  der materielle Deformationsgradient einer isochoren  
Deformation und  $J^{\frac{1}{3}} \mathbf{1}$  stellt eine reine Volumendehnung dar. Betrachten wir die zu  $\bar{\mathbf{F}}$   
zugehörige polare Zerlegung  $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{U}}$ , so gilt für die Eigenwerte  $\bar{\lambda}_i$  die Beziehung

$$\bar{\lambda}_i = J^{-\frac{1}{3}} \lambda_i, \quad (2.21)$$

wobei  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die aus Gleichung (2.15) berechneten Eigenwerte von  $\mathbf{U}$  sind.  
Damit erhalten wir die Inkompressibilitätsbeziehung

$$\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 = 1. \quad (2.22)$$

Für die Untersuchung inkompressibler Materialien werden die zugehörigen geometri-  
schen Größen, welche die obige Inkompressibilitätsbedingung erfüllen, mit dem überge-  
setzten Querstrich bezeichnet. Weitere kinematische Beziehungen werden nach Bedarf  
eingeführt.

## 2.2 Bilanzgleichungen

Die globalen und lokalen Formulierungen der Erhaltungssätze der Masse, der Bewegungsgröße und des Drehimpulses sollen an dieser Stelle kurz eingeführt werden. Die Aussagen der Erhaltungssätze gelten für jeden beliebigen materiellen Körper bzw. Teilkörper  $\mathbf{B}_t$  mit zugehöriger Oberfläche  $\partial\mathbf{B}_t$ .

### 2.2.1 Massenbilanz

Unter Voraussetzung der Existenz einer Massendichte  $\rho = \hat{\rho}(\mathbf{x})$  ist die Gesamtmasse eines materiellen Körpers durch

$$m := \int_{\mathbf{B}_t} dm = \int_{\mathbf{B}_t} \rho \, dv \quad (2.23)$$

gegeben. Der Satz von der Erhaltung der Masse besagt, daß sich die Masse  $m$  des materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  während des Deformationsprozesses nicht ändert. Hieraus ergeben sich für jeden Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_t$  die lokalen Aussagen

$$\rho_o = \rho \det \mathbf{F} \quad \text{und} \quad \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0. \quad (2.24)$$

### 2.2.2 Impulsbilanz

Die globale Kräftegleichgewichtsbedingung ist mit dem Erhaltungssatz von der Bewegungsgröße

$$\mathbf{I} := \int_{\mathbf{B}_t} \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv \quad (2.25)$$

eines materiellen Körpers gegeben, der besagt, daß die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße  $\mathbf{I}$  gleich der resultierenden Kraft der von außen auf den Körper einwirkenden Kräfte ist. Mit der auf den Körper einwirkenden massenbezogenen Beschleunigung  $\bar{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$  und den flächenhaft verteilten eingepprägten Spannungen  $\bar{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$  ergibt sich mit Berücksichtigung der Massenerhaltung die Aussage

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathbf{B}_t} \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv = \int_{\mathbf{B}_t} \rho \ddot{\mathbf{x}} \, dv = \int_{\mathbf{B}_t} \rho \bar{\mathbf{k}} \, dv + \int_{\partial\mathbf{B}_t} \bar{\mathbf{t}} \, da. \quad (2.26)$$

Diese Beziehung kann auch bezüglich der Referenzkonfiguration und für den statischen Fall hergeleitet werden. Der Übergang von der globalen Kräftegleichgewichtsbedingung zu den zugehörigen lokalen Gleichgewichtsbedingungen ist erst nach Einführung der Spannungstensoren möglich.

### 2.2.3 Spannungstensoren

Der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  in einem Punkt  $\mathbf{x}$  der Oberfläche  $\partial\mathbf{B}_t$  der Momentankonfiguration  $\mathbf{B}_t$  ist durch den Grenzwert

$$\mathbf{t} := \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a} = \frac{d\mathbf{f}}{da} \quad (2.27)$$

einer Kraft  $\Delta \mathbf{f}$  bezogen auf ein Flächenelement  $\Delta a$  definiert. Mit den Aussagen des Cauchy-Postulats, des Cauchy-Fundamentallemmas und des Cauchy-Theorems, die sich alle auf die globalen Kräftegleichgewichtsbedingungen stützen (siehe z.B. [95]), kann die Abhängigkeit des Spannungsvektors  $\mathbf{t}$  an einem Ort  $\mathbf{x}$  zu einer Zeit  $t$  genauer in der Form

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} \quad (2.28)$$

beschrieben werden. Hierbei stellt  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  den Cauchyschen Spannungstensor und  $\mathbf{n}$  den äußeren Normalenvektor an die Oberfläche  $\partial \mathbf{B}_t$  im Punkt  $\mathbf{x}$  dar. Für die numerische Umsetzung der kontinuumsmechanischen Grundlagen ist der 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor, definiert durch

$$\mathbf{P} := \det \mathbf{F} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}, \quad (2.29)$$

und der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor, definiert durch

$$\mathbf{S} := \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}, \quad (2.30)$$

von zentraler Bedeutung. Weiterhin wird der Kirchhoff-Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$  in der Form

$$\boldsymbol{\tau} := J \mathbf{T} = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (2.31)$$

eingeführt. Während der 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor  $\mathbf{P}$  die Normale  $\mathbf{N}$  an die Referenzkonfiguration im Punkt  $\mathbf{X}$  auf den Spannungsvektor  $\mathbf{t}_\circ$  der Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_\circ$  gemäß der linearen Beziehung

$$\mathbf{t}_\circ(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)\mathbf{N} \quad (2.32)$$

abbildet und somit eine eindeutige physikalische Bedeutung besitzt, ist der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor eine reine Rechengröße ohne physikalische Interpretation. Die Bedeutung des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors liegt in seiner Symmetrieeigenschaft (siehe unten), in seinem vollständigen Bezug auf die Größen der Referenzkonfiguration und in der Tatsache, daß er mit der zeitlichen Ableitung des Greenschen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  eine arbeitskonforme Paarung zur Bestimmung der inneren Spannungsleistung bildet.

## 2.2.4 Die dynamischen Feldgleichungen

Nach Einführung des Cauchyschen Spannungstensors  $\mathbf{T}$  kann mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes aus der globalen Kräftegleichgewichtsbedingung (2.26) die 1. Cauchysche Bewegungsgleichung oder auch dynamische Feldgleichung in räumlicher Darstellung

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho (\bar{\mathbf{k}} - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

hergeleitet werden, die für jeden Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_t$  erfüllt sein muß. Die Transformation auf Größen der Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_\circ$  liefert für jeden Punkt  $\mathbf{X} \in \mathbf{B}_\circ$  die dynamischen Feldgleichungen in der materieller Form

$$\operatorname{Div} \mathbf{P} + \rho_\circ (\bar{\mathbf{k}}_\circ - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Div}(\mathbf{F}\mathbf{S}) + \rho_\circ (\bar{\mathbf{k}}_\circ - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

für die Piola-Kirchhoff-Spannungstensoren  $\mathbf{P}$  bzw.  $\mathbf{S}$ .

### 2.2.5 Drehimpulsbilanz

Die globale Momentengleichgewichtsbedingung ist mit dem Erhaltungssatz des Drehimpulses

$$\mathbf{L} := \int_{\mathbf{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv. \quad (2.35)$$

eines materiellen Körpers gegeben, der besagt, daß die zeitliche Änderung des Drehimpulses  $\mathbf{L}$  gleich dem resultierenden Moment der von außen auf den Körper einwirkenden Kräfte ist. Mit den oben benannten äußeren Kräften auf den materiellen Körper und der Definition  $\mathbf{r} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_o$ , wobei  $\mathbf{x}_o$  den Bezugspunkt des Momentengleichgewichtes bezeichnet, erhalten wir

$$\frac{D\mathbf{L}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\mathbf{B}_t} \rho \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{x}} \, dv = \int_{\mathbf{B}_t} \mathbf{r} \times \rho \bar{\mathbf{k}} \, dv + \int_{\partial\mathbf{B}_t} \mathbf{r} \times \bar{\mathbf{t}} \, da. \quad (2.36)$$

Mit Berücksichtigung der Massenerhaltung und der lokalen Form des Kräftegleichgewichtes ergibt sich aus der lokalen Momentengleichgewichtsbedingung  $\mathbf{1} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$  für jeden Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_t$  die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (2.37)$$

Hieraus folgt mit der Definition (2.30) des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors  $\mathbf{S}$  die Symmetrieeigenschaft

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T, \quad (2.38)$$

während für den 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor die Darstellung

$$\mathbf{P} \mathbf{F}^T = \left\{ \mathbf{P} \mathbf{F}^T \right\}^T \quad (2.39)$$

gilt.

## 2.3 Zeitableitung kontinuumsmechanischer Größen

Die materielle Zeitableitung kontinuumsmechanischer Größen wird zur Beschreibung der Zuwächse der Spannung in einem materiellen Punkt benötigt.

### 2.3.1 Die Pull-Back- und Push-Forward-Operation

Für die Behandlung physikalischer Größen spielen die Transformationsbeziehungen zwischen den dualen Darstellungsweisen bzgl. der Größen der Referenz- bzw. Momentankonfiguration eine wesentliche Rolle. Eine umfassende Darstellung der sogenannten *Pull-Back-* und *Push-Forward-Operation* findet man in *Marsden, Hughes* [59] sowie ausführliche Darlegungen und Beispiele in *Wriggers* [108] und *Miehe* [60].

Mit Hilfe der Darstellung des materiellen Deformationsgradienten in den konvektiven Basisvektoren der Referenz- bzw. Momentankonfiguration nach

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i \quad \text{und} \quad \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i \quad (2.40)$$

sowie der Transformationsbeziehungen der Basisvektoren

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \mathbf{G}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{g}^i = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{G}^i \quad (2.41)$$

sind die obigen Operationen wie folgt definiert:

- Pull-Back-Operation  $\Phi^*$ :

Zurückziehen des Bezugs von Vektor- und Tensorcomponenten von Basen der Momentankonfiguration  $\mathbf{B}_t$  auf Basen der Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_o$ , z.B. gilt für einen kontravarianten Tensor  $\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i$  der Momentankonfiguration

$$\mathbf{A} = \Phi^*(\mathbf{a}) = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{a} = (\mathbf{G}_l \otimes \mathbf{g}^l) (a^i \mathbf{g}_i) = a^i \mathbf{G}_i.$$

- Push-Forward-Operation  $\Phi_*$ :

Vorschieben des Komponentenbezugs von Basen der Referenzkonfiguration auf Basen der Momentankonfiguration, z.B. gilt für einen kovarianten Tensor mit  $\mathbf{B} = B_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j$  die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = \Phi_*(\mathbf{B}) &= \mathbf{F}^{-T} \mathbf{B} \mathbf{F}^{-1} \\ &= (\mathbf{g}^l \otimes \mathbf{G}_l) (B_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j) (\mathbf{G}_m \otimes \mathbf{g}^m) \\ &= B_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j. \end{aligned}$$

Die Pull-Back- und Push-Forward-Operationen bewirken somit einen Wechsel der Tensorbasen bei gleichbleibenden Tensorcomponenten.  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{a}$  bzw.  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{b}$  sind duale Vektoren und Tensoren bezüglich der Referenz- und Momentankonfiguration, die durch geometrisch sinnvolle Transformationen verknüpft sind. Als Beispiel sei die Beziehung zwischen dem Rechts-Cauchy-Green-Tensor  $\mathbf{C}$  und dem Metriktensor  $\mathbf{g}$  der Momentankonfiguration

$$\mathbf{C} = \Phi^*(\mathbf{g}) \quad \text{und} \quad \mathbf{g} = \Phi_*(\mathbf{C})$$

angegeben.

### 2.3.2 Die Lie-Ableitung

Der räumliche Geschwindigkeitsgradient  $\mathbf{l}$  sowie die räumliche Verzerrungsgeschwindigkeit  $\mathbf{d}$ , definiert durch

$$\mathbf{l} := \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{d} := \frac{1}{2} \{ \mathbf{l} + \mathbf{l}^T \} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{C}} \mathbf{F}^{-1}, \quad (2.42)$$

bilden die geometrische Grundlage der materiellen Zeitableitung.

Wesentlicher Bestandteil der materiellen Zeitableitung räumlicher Größen ist die *Lie-Ableitung*, die als relative Zeitableitung räumlicher Größen interpretiert werden kann. Eine Darstellung der Grundlagen findet sich bei *Marsden, Hughes* [59], Erläuterungen und Beispiele z.B. bei *Wriggers* [108] und *Miehe* [60]. Auf der Grundlage der Formulierung

$$L_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}) = \Phi_* \left[ \frac{d}{dt} \Phi^*(\mathbf{t}) \right] \quad (2.43)$$

der Lie-Ableitung eines räumlichen Vektorfeldes  $\mathbf{t}$  mit Hilfe der Pull-Back- und Push-Forward-Operationen ergeben sich die folgenden Berechnungsschritte (siehe z.B. *Miehe* [60]):

1. Pull-Back der räumlichen Größe von der Momentankonfiguration auf die Referenzkonfiguration.
2. Zeitableitung der so erzeugten dualen materiellen Größe.
3. Push-Forward der abgeleiteten materiellen Größe von der Referenzkonfiguration auf die Momentankonfiguration.

Hierbei ist  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$  die zeitliche Ableitung der Deformation  $\Phi$ . Als wichtige, im weiteren benutzte Beziehungen, ergeben sich

$$L_{\mathbf{v}}(\mathbf{g}) = 2 \mathbf{d} \mathbf{g}, \quad (2.44)$$

$$L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\tau}) = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{l} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{l} = \mathbf{F} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T. \quad (2.45)$$

$$L_{\mathbf{v}}(\mathbf{T}) = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{l} \mathbf{T} - \mathbf{T} \mathbf{l} + \text{tr} \mathbf{d} \mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T. \quad (2.46)$$

### 2.3.3 Die Doyle-Ericksen Formeln

Es wird die Existenz einer Formänderungsenergiefunktion

$$W = \rho_o \Psi \quad (2.47)$$

mit der freien Helmholtzenergie  $\Psi$ , wie sie für die im folgenden Abschnitt eingeführten isotropen, hyperelastischen Materialien gegeben ist, vorausgesetzt. Die Dichte  $\rho_o$  ist von der Deformation unabhängig. In diesem Fall lassen sich die Spannungen und die Spannungszuwächse in materieller und räumlicher Darstellung mit Hilfe der Doyle-Ericksen-Formeln leicht berechnen, siehe *Doyle, Ericksen* [33], *Simo, Marsden* [89], [90]

und die Zusammenstellung der Beziehungen in *Müller-Hoeppe* [64]. Für die Spannungstensoren erhält man somit

$$\mathbf{T} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T = \frac{1}{J} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T = \frac{2}{J} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{g}} = 2\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{g}}, \quad (2.48)$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{g}} = 2\rho_\circ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{g}}, \quad (2.49)$$

$$\mathbf{P} = \rho_\circ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad (2.50)$$

$$\mathbf{S} = \rho_\circ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = 2\rho_\circ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}. \quad (2.51)$$

Für die Spannungszuwächse in der materiellen Darstellung gilt dann

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbb{C} : \dot{\mathbf{C}} \quad (2.52)$$

mit dem Materialtensor  $\mathbb{C}$  der Referenzkonfiguration

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}}. \quad (2.53)$$

Analog ergibt sich für die Momentankonfiguration

$$L_v(\boldsymbol{\tau}) = J \boldsymbol{\epsilon} : \frac{1}{2} L_v(\mathbf{g}) = J \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{d} \quad (2.54)$$

mit dem räumlichen Materialtensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  nach

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{2}{J} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{g}} = 4 \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{g} \partial \mathbf{g}} = \frac{4}{J} \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{g} \partial \mathbf{g}}. \quad (2.55)$$

Damit können die Spannungs- und Materialtensoren der Momentankonfiguration ohne Rückgriff auf die komplexen Umrechnungen der materiellen Beziehungen mit Hilfe der Pull-Back- und Push-Forward-Operationen angegeben werden.

Der Materialtensor  $\mathbb{C}$  der Referenzkonfiguration besitzt bezüglich des kartesischen Koordinatensystems  $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$  die Darstellung

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^{IKLM} \mathbf{E}_I \otimes \mathbf{E}_K \otimes \mathbf{E}_L \otimes \mathbf{E}_M, \quad (2.56)$$

wobei die Koeffizienten  $\mathbb{C}^{IKLM}$  durch die Beziehung

$$\mathbb{C}^{IKLM} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial C_{IK} \partial C_{LM}} \quad (2.57)$$

berechnet werden. Der räumliche Materialtensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  besitzt bezüglich des kartesischen Koordinatensystems  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  die Darstellung

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon^{iklm} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m. \quad (2.58)$$

Die Beziehung zwischen den Materialtensoren  $\mathbb{C}$  der Referenzkonfiguration und  $\boldsymbol{\epsilon}$  der Momentankonfiguration ist durch die Rücktransformation der Anwendung des räumlichen Materialtensors  $\boldsymbol{\epsilon}$  auf einen beliebigen räumlichen Tensors  $\mathbf{a}$  gegeben (siehe z.B. *Truesdell, Noll* [103]), d.h. es gilt

$$\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{a} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \left[ \mathbb{C} : (\mathbf{F}^T \mathbf{a} \mathbf{F}) \right] \mathbf{F}^T. \quad (2.59)$$

In Indexschreibweise bezogen auf die obigen kartesischen Basen gilt

$$\epsilon^{iklm} = \frac{1}{J} F_I^i F_K^k F_L^l F_M^m \mathbb{C}^{IKLM}. \quad (2.60)$$



## 2.4 Materialgesetze

Im Rahmen dieser Arbeit werden homogene, isotrope, hyperelastische Materialien betrachtet, deren Darstellungsformen im weiteren kurz angegeben werden.

### 2.4.1 Darstellung isotroper, hyperelastischer Materialien

Die konstitutive Beziehung homogener, elastischer Materialien ist in der Form

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \quad (2.61)$$

gegeben. Der schrittweise Übergang von der allgemeinen Materialtheorie zum elastischen Werkstoffgesetz, das nur vom aktuellen Deformationszustand des Körpers und nicht von der Geschichte der Deformation bzw. der Temperatur oder der Zeit abhängt, ist z.B. in *Stein, Barthold* [95] dargelegt worden.

Weiterhin existiere eine Formänderungsenergiefunktion

$$W_{ges} = \int_{\mathbf{B}_o} \hat{W}(\mathbf{F}) dV = \int_{\mathbf{B}_o} \rho_o \hat{\Psi}(\mathbf{F}) dV = \int_{\mathbf{B}_t} \rho_o \hat{\Psi}(\mathbf{F}) J^{-1} dv = \int_{\mathbf{B}_t} \rho \hat{\Psi}(\mathbf{F}) dv \quad (2.62)$$

mit der Beziehung

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) = \rho_o \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \quad (2.63)$$

nach *Doyle, Ericksen* [33], deren physikalische Bedeutung aus der Betrachtung des elastischen Materials im Rahmen der thermodynamischen Materialtheorie erklärt werden kann, siehe *Truesdell, Noll* [103]. An dieser Stelle soll ausschließlich ein isothermer Prozeßverlauf vorausgesetzt werden, wobei dann die sogenannte Helmholtzenergie bzw. freie Energie  $\Psi$  mit  $W = \rho_o \Psi$  eine Potentialfunktion ist.

Die angegebenen Formen des Werkstoffgesetzes bzw. der zugehörigen Formänderungsenergiefunktion können durch die wichtigen Prinzipien der materiellen Objektivität und der materiellen Symmetrie, d.h. in diesem Fall der Isotropie, weiter eingeschränkt werden, siehe z.B. *Truesdell, Noll* [103], *Ciarlet* [28]. Demnach gilt mit dem Darstellungssatz von *Rivlin* und *Ericksen* [78] die Aussage:

*Die konstitutive Gleichung für den Cauchyschen Spannungstensor eines isotropen, elastischen Materials genügt dem Prinzip der materiellen Objektivität, d.h. es gilt*

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \mathbf{Q} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \mathbf{Q}^T \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}\mathbf{Q}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F}, \forall \mathbf{Q},$$

*dann und nur dann, wenn die konstitutive Beziehung für den Cauchyschen Spannungstensor die Form*

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) = \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T) \quad \forall \mathbf{F} \quad (2.64)$$

*mit*

$$\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{b}) = \beta_o(i_{\mathbf{b}})\mathbf{1} + \beta_1(i_{\mathbf{b}})\mathbf{b} + \beta_2(i_{\mathbf{b}})\mathbf{b}^2 \quad (2.65)$$

*besitzt. Hierin stellen  $i_{\mathbf{b}}$  die Invarianten  $I_{\mathbf{b}}, II_{\mathbf{b}}, III_{\mathbf{b}}$  des Links-Cauchy-Green-Tensor  $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$  dar und  $\beta_o, \beta_1, \beta_2$  seien stetige Funktionen der Invarianten.*

Diese Aussage kann ebenfalls für den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor formuliert werden, d.h. es gilt:

*Die konstitutive Gleichung für den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor eines isotropen, elastischen Materials genügt dem Prinzip der materiellen Objektivität dann und nur dann, wenn die konstitutive Beziehung für den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor die Form*

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \check{\mathbf{S}}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \check{\mathbf{S}}(\mathbf{C}) \quad (2.66)$$

*mit*

$$\check{\mathbf{S}}(\mathbf{C}) = \gamma_0(i_{\mathbf{C}}) \mathbf{1} + \gamma_1(i_{\mathbf{C}}) \mathbf{C} + \gamma_2(i_{\mathbf{C}}) \mathbf{C}^2 \quad (2.67)$$

*besitzt.*

In analoger Form gilt für die Formänderungsenergiefunktion  $W$ , siehe *Ciarlet* [28, Theorem 4.4-1]:

*Die (spezifische) Formänderungsenergiefunktion  $W = \hat{W}(\mathbf{F})$  eines isotropen, hyperelastischen Materials genügt dem Prinzip der materiellen Objektivität genau dann, wenn eine Funktion  $\check{W}(i_{\mathbf{C}}) = \check{W}(i_{\mathbf{b}})$  der Invarianten existiert, so daß*

$$W = \hat{W}(\mathbf{F}) = \check{W}(i_{\mathbf{C}}) = \check{W}(i_{\mathbf{b}}) \quad (2.68)$$

*für alle materiellen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  gilt.*

## 2.4.2 Die vollständige Form der Formänderungsenergiefunktion

Im weiteren sei die Formänderungsenergiefunktion unendlich oft stetig differenzierbar, so daß sie sich als Potenzreihenentwicklung nach  $\text{I} - 3$ ,  $\text{II} - 3$  und  $\text{III} - 1$  in der Form

$$W = \check{W}(\text{I}, \text{II}, \text{III}) = \sum_{p,q,r=0}^{\infty} c_{p,q,r} (\text{I} - 3)^p (\text{II} - 3)^q (\text{III} - 1)^r \quad (2.69)$$

ergibt, siehe z.B. *Ogden* [69]. Mit dem Zusammenhang zwischen den Invarianten  $\text{I}$ ,  $\text{II}$ ,  $\text{III}$  und den Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  des Links- bzw. Rechts-Streck-Tensors  $\mathbf{V}$  bzw.  $\mathbf{U}$  nach Gleichung (2.13) kann durch Ausmultiplikation hierfür die Form

$$\begin{aligned} W &= \check{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\ &= \sum_{p,q,r=0}^{\infty} a_{p,q,r} \{ [\lambda_1^p (\lambda_2^q + \lambda_3^q) + \lambda_2^p (\lambda_3^q + \lambda_1^q) + \lambda_3^p (\lambda_1^q + \lambda_2^q)] (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^r - 6 \} \end{aligned} \quad (2.70)$$

angegeben werden. Die Konstanten  $c_{p,q,r}$  bzw.  $a_{p,q,r}$  sind dabei von der Deformation unabhängig.

Für inkompressible Materialien, deren geometrische Größen vereinbarungsgemäß mit einem Querstrich versehen werden, gilt die Inkompressibilitätsbedingung  $\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 = 1$  bzw.  $\bar{\text{III}} = 1$ . Damit können die obigen Formen vereinfacht werden, d.h. es gilt

$$\bar{W} = \check{W}(\bar{\text{I}}, \bar{\text{II}}) = \sum_{p,q=0}^{\infty} c_{p,q} (\bar{\text{I}} - 3)^p (\bar{\text{II}} - 3)^q \quad (2.71)$$

bzw. in Abhängigkeit der Eigenwerte

$$\bar{W} = \check{W}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) = \sum_{p,q=0}^{\infty} a_{p,q} \left[ \bar{\lambda}_1^p (\bar{\lambda}_2^q + \bar{\lambda}_3^q) + \bar{\lambda}_2^p (\bar{\lambda}_3^q + \bar{\lambda}_1^q) + \bar{\lambda}_3^p (\bar{\lambda}_1^q + \bar{\lambda}_2^q) - 6 \right]. \quad (2.72)$$

Die allgemeingültige Darstellung isotroper, hyperelastischer Materialien muß im Punkt  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 1, 1)$  bzw.  $(\text{I}, \text{II}, \text{III}) = (3, 3, 1)$  konsistent zur klassischen, linearisierten Form des Werkstoffgesetzes, d.h. dem Hookeschen Gesetz und der zugehörigen Formänderungsenergie

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \mu \boldsymbol{\epsilon} + \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{1} \quad \text{und} \quad W = \mu \left( \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon}^2 \right) + \frac{1}{2} \lambda \left( \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \right)^2$$

sein. Hierin stellen  $\boldsymbol{\sigma}$  den linearisierten Spannungstensor,  $\boldsymbol{\epsilon}$  den linearisierten Green'schen Verzerrungstensor und  $\lambda, \mu$  die Lamé-Konstanten dar. Die Anforderungen an die Formänderungsenergiefunktion sind in *Ogden* [69, S. 348f] zusammengefaßt.

### 2.4.3 Das Ogden–Material

Aus der oben angegebenen exakten Darstellungsform einer unendlich oft differenzierbaren Formänderungsenergiefunktion  $W = \check{W}(\text{I}, \text{II}, \text{III}) = \check{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  kann die Klasse der Ogden–Materialien eingeführt werden, siehe z.B. *Ogden* [66], [67] und [69]. Die zentrale Annahme spielt dabei die Valanis–Landel–Hypothese, *Valanis, Landel* [104], nach der, durch hinreichend genaue Versuche an gummiartigen Materialien verifiziert, die Separabilität der Formänderungsenergiefunktion in der Form

$$\check{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \check{w}(\lambda_1) + \check{w}(\lambda_2) + \check{w}(\lambda_3) \quad (2.73)$$

vorausgesetzt wird. Mit dieser Annahme können die Beziehungen (2.69) bis (2.72) modifiziert werden. Für kompressible Materialien gilt demnach

$$W = \check{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left\{ \lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} \right\} + g(J), \quad (2.74)$$

während für inkompressible Materialien mit  $\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 = 1$  die Form

$$\bar{W} = \check{W}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left\{ \bar{\lambda}_1^{\alpha_p} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_p} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_p} \right\} \quad (2.75)$$

gilt. Aus dem Übergang zur klassischen Theorie ergibt sich mit dem Schubmodul  $\mu$  für die Materialparameter  $\mu_p$  und  $\alpha_p$  die Bedingung

$$\sum_{p=1}^N \mu_p \alpha_p = 2\mu. \quad (2.76)$$

### 2.4.4 Einige Modelle für gummiartige Materialien in Abhängigkeit der Invarianten

Neben dem Ogden-Material sind im Verlauf der Entwicklung von Materialgesetzen für gummiartige Werkstoffe etliche Modelle für kompressibles bzw. inkompressibles Verhalten entwickelt worden, von denen einige kurz vorgestellt werden sollen:

- inkompressibles *Neo-Hooke* Material nach *Treloar* [102]

$$W = \check{W}(\mathbf{I}) = \frac{1}{2}\mu (\mathbf{I} - 3),$$

- inkompressibles *Mooney–Rivlin* Material, siehe *Mooney* [62], *Rivlin* [77] und *Rivlin, Saunders* [79]

$$W = \check{W}(\mathbf{I}) = C_{01} (\mathbf{I} - 3) + C_{01} (\mathbf{II} - 3),$$

- kompressibles *Neo-Hooke* Material nach *Blatz, Ko* [18]

$$W = \check{W}(\mathbf{I}) = \frac{1}{2}\mu (\mathbf{I} - 3) + U(J) \quad \text{mit} \quad U(J) = \frac{\mu}{\beta}(J^{-\beta} - 1) \quad \text{und} \quad \beta = \frac{2\nu}{1 - 2\nu},$$

- kompressibles *Neo-Hooke* Material nach *Simo, Pister* [92]

$$W = \check{W}(\mathbf{I}) = \frac{1}{2}\mu (\mathbf{I} - 3) + U(J) \quad \text{mit} \quad U(J) = \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2 - \mu \ln J,$$

- kompressibles *Mooney–Rivlin* Material nach *Ciarlet, Geymonat* [27]

$$W = \check{W}(\mathbf{I}) = a (\mathbf{I} - 3) + b (\mathbf{II} - 3) + U(J)$$

mit  $U(J) = c J^2 - d \ln J$  und den positiven Konstanten  $a, b, c, d > 0$ .

### 2.4.5 Formulierung der Formänderungsenergiefunktion für die numerische Berechnung

In den Abschnitten 2.4.2 bis 2.4.4 sind Formänderungsenergiefunktionen sowohl der Invarianten als auch der Eigenwerte für kompressible und inkompressible Materialien vorgestellt worden. Für die numerische Behandlung wird dabei im folgenden stets der funktionale Zusammenhang der Formänderungsenergie von den Invarianten in der Form

$$W = \check{W}(\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III}) = \check{\bar{W}}(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{II}}) + U(J) \quad (2.77)$$

bzw. in Abhängigkeit von den Eigenwerten in der Form

$$W = \check{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \check{\bar{W}}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) + U(J) \quad (2.78)$$

vorausgesetzt. Für die Behandlung inkompressibler und quasi-inkompressibler Materialien ist die Aufspaltung der Formänderungsenergie in den Anteil  $\check{\bar{W}} = \check{\bar{W}}(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{II}})$  der Invarianten  $\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{II}}$  des modifizierten Rechts- bzw. Links-Cauchy-Green-Tensors  $\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3}\mathbf{C}$  (bzw.  $\bar{\mathbf{b}} = J^{-2/3}\mathbf{b}$ ) für den deviatorischen Anteil der Formänderungsenergie und  $U = \hat{U}(J)$  für den volumetrischen Anteil sinnvoll.

## 2.5 Energie- und Variationsformulierungen

### 2.5.1 Die schwache Form des Gleichgewichts

Die materielle Darstellung der schwachen Form des Gleichgewichts wird aus der materiellen Form (2.34) der dynamischen Feldgleichungen durch Skalarmultiplikation mit einer vektorwertigen Testfunktion  $\boldsymbol{\eta}$  und anschließender Integration über die Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_0$  gewonnen und lautet

$$G = \int_{\mathbf{B}_0} \text{Div } \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV + \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0 (\bar{\mathbf{k}} - \ddot{\mathbf{x}}) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV = 0. \quad (2.79)$$

Mit Berücksichtigung der Spannungsrandbedingungen  $\mathbf{P}\mathbf{N} = \bar{\mathbf{t}}_0$  auf dem Randbereich  $\partial\mathbf{B}_{0\sigma}$ , der Verschiebungsrandbedingungen  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  auf  $\partial\mathbf{B}_{0u}$  und dem Gaußschen Integralsatz ergibt sich bei Vernachlässigung der dynamischen Anteile die schwache Form des (statischen) Gleichgewichts in der Darstellung

$$G = \int_{\mathbf{B}_0} \mathbf{P} : \text{Grad } \boldsymbol{\eta} \, dV - \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0 \bar{\mathbf{k}}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV - \int_{\partial\mathbf{B}_{0\sigma}} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} \, dA = 0. \quad (2.80)$$

Eine analoge Aussage bezogen auf die Momentankonfiguration lautet

$$g = \int_{\mathbf{B}_t} \mathbf{T} : \text{grad } \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\mathbf{B}_t} \rho \bar{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\partial\mathbf{B}_{t\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, da = 0. \quad (2.81)$$

Im weiteren wird neben der Existenz einer Formänderungsenergiefunktion  $W = \hat{W}(\Phi)$  der Deformation  $\Phi$  auch die Existenz eines Potentials der äußeren Belastungen

$$\Pi_a = \hat{\Pi}_a(\Phi) = - \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0 \bar{\mathbf{k}}_0 \cdot \Phi \, dV - \int_{\partial\mathbf{B}_{0\sigma}} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \Phi \, dA \quad (2.82)$$

angenommen, deren 1. Variation sich zu

$$\overline{D\Pi_a} \cdot \boldsymbol{\eta} = - \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0 \bar{\mathbf{k}}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV - \int_{\partial\mathbf{B}_{0\sigma}} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} \, dA \quad (2.83)$$

ergibt. Damit erhält man für das Gesamtpotential der Deformation  $\Phi$  das Stationaritätsproblem

$$\Pi = \hat{\Pi}(\Phi) = \int_{\mathbf{B}_0} \hat{W}(\Phi) \, dV + \hat{\Pi}_a(\Phi) \rightarrow \underset{\Phi}{\text{stat}} \quad (2.84)$$

und die 1. Variation von  $\Pi$  führt wieder auf die Aussage der schwachen Form des Gleichgewichts nach Gleichung (2.80).

## 2.5.2 Berücksichtigung der Inkompressibilitätsbedingung

Für die Berechnung quasi-inkompressibler Materialien ist es sinnvoll, die in Abschnitt 2.1 eingeführte multiplikative Zerlegung (2.20) des materiellen Deformationsgradienten in einen volumetrischen und einen isochoren Anteil vorzunehmen. Damit kann die Formänderungsenergie  $W$  nach (2.77) additiv in einen isochoren Anteil  $\bar{W}$  und einen volumetrischen Anteil  $U$  zerlegt werden. Wird dabei für den volumetrischen Anteil der Deformation eine zweite unabhängige Feldgröße  $\theta$  eingeführt, so gilt

$$\mathbf{F} = \theta^{\frac{1}{3}} \bar{\mathbf{F}}. \quad (2.85)$$

Dabei muß die Nebenbedingung

$$J - \theta = 0 \quad (2.86)$$

zwischen den unabhängigen Feldgrößen  $\Phi$  (mit  $J = \det \mathbf{F} = \det \text{Grad } \Phi$ ) und  $\theta$  für alle materiellen Punkte erfüllt sein. Zur Berücksichtigung der Nebenbedingung wird diese mit einem Lagrange-Parameter  $p$  multipliziert und dem Energiefunktional (2.83) hinzugefügt. Der zusätzlich eingeführte Lagrange-Parameter  $p$  für jeden materiellen Punkt stellt den konstanten hydrostatischen Druck dar und ist die dritte unabhängige Feldgröße.

Für das resultierende Lagrangefunktional  $\Pi_L$ , das einen Spezialfall des 3-Feld Hu-Washizu-Funktional darstellt, gilt mit dem Potential  $\Pi_a$  der äußeren Kräfte nach (2.82)

$$\Pi_L = \hat{\Pi}_L(\Phi, \theta, p) = \int_{\mathbf{B}_o} \hat{\bar{W}}(\Phi, \theta) dV + \int_{\mathbf{B}_o} p(J - \theta) dV + \Pi_a. \quad (2.87)$$

Das Lagrangefunktional  $\Pi_L$  nimmt damit einen stationären Wert nur bei Erfüllung der Nebenbedingung (2.86) an.

Die notwendigen Bedingungen für die Stationarität des erweiterten Funktional  $\Pi_L$  können mit den Testfunktionen  $\boldsymbol{\eta}$  für die Verschiebungen in der Form

$$g_1 = \int_{\mathbf{B}_o} \text{dev } \boldsymbol{\tau} : \text{grad } \boldsymbol{\eta} + p J \text{div } \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\mathbf{B}_o} \rho_o \bar{\mathbf{k}}_o \cdot \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\partial \mathbf{B}_{o\sigma}} \bar{\mathbf{t}}_o \cdot \boldsymbol{\eta} dA = 0 \quad (2.88)$$

sowie  $\kappa$  für die Volumenänderung und  $\zeta$  für den Druck in der Form

$$g_2 = \int_{\mathbf{B}_o} \left( -p + \frac{1}{3} \theta^{-1} \text{tr } \boldsymbol{\tau} \right) \cdot \kappa dV = 0 \quad (2.89)$$

$$g_3 = \int_{\mathbf{B}_o} (J - \theta) \cdot \zeta dV = 0. \quad (2.90)$$

angegeben werden.

Die Ableitung dieser Beziehungen und eine Erläuterung der Bedeutung des vorliegenden Lagrangefunktional ist in *Simo, Taylor, Pister* [91] vorgenommen worden. Für die Anwendung auf hyperelastische Materialien siehe auch *Simo, Taylor* [88], *Wriggers* [108] und *Müller-Hoeppe* [64].

## 2.6 Linearisierung der Variationsformulierungen

### 2.6.1 Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts

Mit der schwachen Form des Gleichgewichts (2.80) bzw. den Gleichungen (2.88) bis (2.90) sind die notwendigen Bedingungen für die Stationarität des Energiefunktionals  $\Pi$  bzw. des Lagrangefunktionals  $\Pi_L$  gegeben. Für die numerische Berechnung mit Hilfe des Newton-Verfahrens und für weitergehende theoretische Untersuchungen, z.B. die Sensitivitätsanalyse, ist die Kenntnis der exakten Linearisierung der obigen Beziehungen von großer Bedeutung. Die Grundlagen der Linearisierung kontinuumsmechanischer Größen finden sich z.B. in den Arbeiten von *Marsden, Hughes* [59, Ch. 4], *Hughes, Pister* [53], *Wriggers* [108], *Miehe* [60] und sind vom Autor in *Stein, Barthold* [95] aufbereitet worden.

Für die Linearisierung einer vektor- oder tensorwertigen Größe  $\mathbf{A}$  gilt die Beziehung

$$\text{Lin}[\mathbf{A}]_{\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}} = \bar{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{D}\mathbf{A}} \cdot \mathbf{u} = \bar{\mathbf{A}} + \frac{d}{d\varepsilon} [\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}} + \varepsilon \mathbf{u})]_{\varepsilon=0}, \quad (2.91)$$

wobei die Berechnung über die Richtungsableitung der Funktion  $\mathbf{A}$  an der Stelle  $\bar{\mathbf{x}}$  in Richtung  $\mathbf{u}$  vorgenommen wird. In diesem Abschnitt werden die Werte der kontinuumsmechanischen Größen an der Stelle  $\bar{\mathbf{x}}$ , an der die Linearisierung vorgenommen wird, durch einen Querstrich gekennzeichnet.

Damit kann die Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts in der Darstellung in den Größen der Referenzkonfiguration nach (2.80) in der Form

$$\text{Lin}[G]_{\mathbf{u}} = \bar{G} + \overline{\mathbf{D}G} \cdot \mathbf{u}$$

mit

$$\overline{\mathbf{D}G} \cdot \mathbf{u} = \int_{\mathbf{B}_0} \left\{ \text{Grad } \mathbf{u} \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbb{C}} \left[ \bar{\mathbf{F}}^T \text{Grad } \mathbf{u} + \text{Grad}^T \mathbf{u} \bar{\mathbf{F}} \right] \right\} : \text{Grad } \boldsymbol{\eta} \, dV. \quad (2.92)$$

angegeben werden. Dabei werden deformationsunabhängige äußere Kräfte vorausgesetzt. Analog ergibt sich bei einer Transformation auf die Größen der Momentankonfiguration bzw. durch Linearisierung der Beziehung (2.81) die Aussage

$$\text{Lin}[g]_{\mathbf{u}} = \bar{g} + \overline{\mathbf{D}g} \cdot \mathbf{u}$$

mit

$$\overline{\mathbf{D}g} \cdot \mathbf{u} = \int_{\mathbf{B}_t} \left\{ \text{grad}^T \boldsymbol{\eta} : \bar{\mathbf{T}} \text{grad}^T \mathbf{u} + \text{grad}^T \boldsymbol{\eta} : \bar{\boldsymbol{\tau}} : \text{grad}^s \mathbf{u} \right\} \, dv. \quad (2.93)$$

Hierin stellt  $\text{grad}^s \mathbf{u}$  den symmetrischen Anteil des räumlichen Verschiebungsgradienten dar. Ein Beweis dieser Darstellung findet sich z.B. in *Müller-Hoeppe* [64].

## 2.6.2 Die Linearisierung der Variationsformulierung für Inkompressibilität

Ebenfalls wird bei der Betrachtung inkompressibler Materialien, für die das Lagrange-funktional  $\Pi_L$  eingeführt wurde, die Linearisierung der Beziehungen (2.88) bis (2.90) angegeben. Hierzu sind in diesem Fall die Richtungsableitungen an der Stelle  $(\bar{\Phi}, \bar{\vartheta}, \bar{p})$  in Richtung von  $(\mathbf{u}, d, \vartheta)$  zu berechnen, die zu einem symmetrischen Tangenteoperator führen. Auf den Beweis sei verzichtet, siehe z.B. *Müller-Hoeppe* [64].

Für die Richtungsableitung der Bedingung  $g_1$  gilt dann

$$\begin{aligned} \overline{Dg_1} \cdot \mathbf{u} &= \int_{\mathbf{B}_0} \text{tr} \left[ \text{grad } \boldsymbol{\eta} \left( \text{dev } \boldsymbol{\tau} + J p \mathbf{g}^{-1} \right) \text{grad } \mathbf{u} \right] dV \\ &+ \int_{\mathbf{B}_0} \left( \text{grad}^T \boldsymbol{\eta} : J \boldsymbol{\alpha}^D : \text{grad}^s \mathbf{u} + \text{div } \boldsymbol{\eta} p J \text{div } \mathbf{u} \right) dV, \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\overline{Dg_1} \cdot d = \int_{\mathbf{B}_0} \text{div } \boldsymbol{\eta} J d dV, \quad (2.95)$$

$$\overline{Dg_1} \cdot \vartheta = 0, \quad (2.96)$$

wobei  $\boldsymbol{\alpha}^D$  den deviatorischen Anteil des räumlichen Materialtensors  $\boldsymbol{\alpha}$  bezeichnet. In analoger Weise ergibt sich für die Richtungsableitung der Bedingung  $g_2$  mit der Notation  $p'$  für die Ableitung des hydrostatischen Drucks  $p$  aus dem Kugeltensoranteil der Spannungen die Darstellung

$$\overline{Dg_2} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.97)$$

$$\overline{Dg_2} \cdot d = - \int_{\mathbf{B}_0} \zeta d dV, \quad (2.98)$$

$$\overline{Dg_2} \cdot \vartheta = \int_{\mathbf{B}_0} \zeta p' \vartheta dV; \quad (2.99)$$

bzw. für die Bedingung  $g_3$

$$\overline{Dg_3} \cdot \mathbf{u} = \int_{\mathbf{B}_0} \kappa (J \text{div } \mathbf{u}) dV, \quad (2.100)$$

$$\overline{Dg_3} \cdot d = 0, \quad (2.101)$$

$$\overline{Dg_3} \cdot \vartheta = - \int_{\mathbf{B}_0} \kappa \vartheta dV. \quad (2.102)$$

Die Umsetzung dieser kontinuumsmechanischen Formulierung in die diskrete Form der Finite-Elemente-Methode erfolgt in Kapitel 4.



# Kapitel 3

## Spannungs- und Materialtensoren isotroper, hyperelastischer Materialien

Die Spannungs- und Materialtensoren hyperelastischer Materialien sollen in diesem Kapitel in einheitlicher Darstellungsweise für die in Kapitel 5 folgende Sensitivitätsanalyse aufbereitet werden. Dabei werden die folgenden Punkte behandelt.

**Tafel 3.1:** Umfang der Behandlung hyperelastischer Materialien

- Wahl unterschiedlicher Betrachtungsweisen
  - Beschreibung in den Größen der Referenzkonfiguration,
  - Beschreibung in den Größen der Momentankonfiguration.
- Wahl unterschiedlicher geometrischer Größen zur Darstellung.
- Betrachtung unterschiedlicher Verzerrungs- und Spannungszustände
  - allgemeiner dreidimensionaler Verzerrungszustand,
  - ebener Spannungszustand.
- Behandlung homogener, isotroper, hyperelastischer Materialien mit und ohne Nebenbedingungen, d.h. von
  - kompressiblen Materialien,
  - quasi-inkompressiblen Materialien und
  - inkompressiblen Materialien.
- Darstellung der Formänderungsenergie als Funktion
  - der Invarianten, d.h.  $W = \check{W}(I, II, III)$ ,
  - der Eigenwerte, d.h.  $W = \check{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

## 3.1 Prinzipieller Ablauf der Berechnung der Spannungs- und Materialtensoren

### 3.1.1 Grundlagen

Die (volumenspezifische) Formänderungsenergiefunktion  $W = \rho_0 \Psi$  nach Gleichung (2.62) erfüllt die Voraussetzungen der Doyle-Ericksen-Formeln (siehe Abschnitt 2.3), nach der sich bei isothermen Prozessen die Spannungs- und Materialtensoren aus der Ableitung der Formänderungsenergie  $W$  nach den Verzerrungstensoren herleiten lassen. Im Abschnitt 2.3 sind einige Beziehungen für unterschiedliche geometrischen Größen angegeben worden. Für die weiteren Untersuchungen wird die Berechnung des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors  $\mathbf{S}$  und des zugehörigen Materialtensors  $\mathbb{C}$  in der Form

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{und} \quad \mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (3.1)$$

vorgenommen. Für den Cauchyschen Spannungstensor  $\mathbf{T}$  und den räumlichen Materialtensor  $\mathfrak{c}$  gelten mit dem Metriktensor  $\mathbf{g}$  der deformierten Konfiguration die Beziehungen

$$\mathbf{T} = \frac{2}{J} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{g}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{c} = \frac{4}{J} \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{g} \partial \mathbf{g}}. \quad (3.2)$$

Für den Fall isotroper, hyperelastischer Materialien hat *Miche* [61] neben der bereits bekannten Darstellung des Cauchyschen Spannungstensors über die Ableitung der Formänderungsenergie  $W$  nach dem Links-Cauchy-Green-Tensor  $\mathbf{b}$  auch eine analoge Darstellung für den räumlichen Materialtensor  $\mathfrak{c}$  angegeben, d.h. es gilt

$$\mathbf{T} = \frac{2}{J} \mathbf{b} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{b}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{c} = \frac{4}{J} \mathbf{b} \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{b} \partial \mathbf{b}} \mathbf{b}. \quad (3.3)$$

Die angegebenen Beziehungen für die Spannungs- und die Materialtensoren müssen für die Darstellung hyperelastischer, isotroper Materialien nach Abschnitt 2.4.2, für die Klasse der Ogden-Materialien nach Abschnitt 2.4.3 bzw. für die Materialmodelle nach Abschnitt 2.4.4 aufbereitet werden. Der Umfang der Behandlung ist in der Tafel 3.1 aufgeführt.

Wesentlich hierbei ist die Wahl einer Darstellungsweise, die sowohl für die Abhängigkeit der Formänderungsenergie von den Invarianten nach (2.77) als auch für die Abhängigkeit von den Eigenwerten nach (2.78) geeignet ist. Dabei ist die Wahl der funktionalen Abhängigkeit der Formänderungsenergie (von den Invarianten bzw. von den Eigenwerten) strikt von der Wahl der geometrischen Größen zu trennen. Diese Unabhängigkeit spiegelt sich in dem modularen Aufbau der Berechnung wieder, der wesentlich für die spätere Sensitivitätsanalyse ist.

Zur Verdeutlichung der eigenen Vorgehensweise in Abschnitt 3.1.6 sollen zunächst Bemerkungen zur Wahl der Betrachtungsweise und zu den Besonderheiten der funktionalen Abhängigkeit der Formänderungsenergie von den Invarianten bzw. von den Eigenwerten gemacht werden. Hierzu wird beispielhaft der Ablauf der Berechnung zur Herleitung des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors  $\mathbf{S}$  und des zugehörigen Materialtensors  $\mathbb{C}$  eines kompressiblen, homogenen, isotropen, hyperelastischen Materials aufgezeigt. Die Spannungs- und Verzerrungstensoren werden in diesem Fall gemäß (3.1) durch die Ableitungen der Formänderungsenergie  $W$  nach dem Rechts-Cauchy-Green-Tensor  $\mathbf{C}$  ermittelt. Die Berechnung in den Größen der Momentankonfiguration wird in analoger Weise ohne prinzipielle Änderungen durchgeführt und in Anhang A zusammengefaßt.

### 3.1.2 Lösungsstrategien aus der Literatur

In der Literatur sind zahlreiche Lösungsstrategien für unterschiedliche Aspekte der Berechnung hyperelastischer Materialien vorgeschlagen worden. Hierbei sind neben den klassischen Arbeiten von *Mooney* [62], *Rivlin* [77] insbesondere die grundlegenden Darstellungen von *Ogden* in [66], [67], [68] zu nennen.

Für die numerische Umsetzung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (siehe Kapitel 4) und die Wahl einer geeigneten Elementformulierung insbesondere für quasi-inkompressible Materialien sei auf die Arbeiten von *van den Bogert* [106], [105], [107], *Sussmann, Bathe* [97] und insbesondere auf *Simo, Taylor* [88] verwiesen. In der Arbeit von *Duffett, Reddy* [34] wird die numerische Berechnung der Spannungs- und Materialtensoren entsprechend der theoretischen Darstellung auf der Grundlage der Eigenvektoren beschrieben, siehe die Arbeiten von *Ogden*. Für die Herleitung der Materialmatrizen eines inkompressiblen Ogden-Materials für den ebenen Spannungszustand bei einer Beschreibung in den Größen der Referenzkonfiguration siehe *Gruttmann, Taylor* [46].

### 3.1.3 Wahl der Betrachtungsweise und der Basistensoren

Bei der Untersuchung kontinuumsmechanischer Probleme ist zunächst die Wahl der angemessenen Betrachtungsweise, d.h. Darstellung bezogen auf die Größen der Referenzkonfiguration bzw. auf Größen der Momentankonfiguration, zu treffen. Darüberhinaus ist durch die unterschiedliche Wahl der Verzerrungstensoren innerhalb der gewählten Betrachtungsweise eine große Vielfalt der Darstellung der Ergebnisse möglich.

Betrachten wir die zum charakteristischen Polynom (2.15) zugehörige Aussage des Cayley-Hamilton-Theorems, nach dem ein Tensor seiner eigenen charakteristischen Gleichung genügt, d.h. in diesem Fall

$$\mathbf{C}^3 - \mathbb{I}_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^2 + \mathbb{II}_{\mathbf{C}} \mathbf{C} - \mathbb{III}_{\mathbf{C}} \mathbf{1} = \mathbf{0},$$

so ergibt sich die Folgerung, daß infolge der Isotropie sämtliche Spannungen sich in einer dreidimensionalen tensoriellen Basis  $\underline{\mathbf{Z}}$  der Referenzkonfiguration, z.B.

$$\underline{\mathbf{Z}}^T := \{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3\} := \{\mathbf{1}, \mathbf{C}, \mathbf{C}^{-1}\},$$

ausdrücken lassen. Nach der Wahl dieser Basis  $\underline{\mathbf{Z}}$  ergeben sich die Folgerungen für die Darstellung des Materialtensors und für den Fall eines inkompressiblen Materials automatisch. Für die Berechnung des Materialtensors  $\mathbb{C}$  z.B. nach (3.1) sind weiterhin die vierstufigen Tensoren der Ableitung der gewählten Basistensoren  $\mathbf{Z}_i$  nach  $\mathbf{C}$  bereitzustellen, d.h. von

$$\mathbf{Z}_{i,j} := \frac{\partial \mathbf{Z}_i}{\partial \mathbf{C}_j}.$$

### 3.1.4 Die Formänderungsenergiefunktion in Abhängigkeit der Invarianten

Als Ausgangspunkt der Betrachtungen in diesem Abschnitt sei die Formänderungsenergie, z.B. nach Gleichung (2.77), als Funktion der Invarianten des Rechts-Cauchy-Green-Tensors  $\mathbf{C}$  gegeben, d.h.

$$W = \check{W}(\mathbb{I}_{\mathbf{C}}, \mathbb{II}_{\mathbf{C}}, \mathbb{III}_{\mathbf{C}}). \quad (3.4)$$

Da voraussetzungsgemäß die funktionale Beziehung bekannt und beliebig oft differenzierbar ist, ist eine sofortige Ermittlung der ersten und zweiten partiellen Ableitung von  $W$  nach den Invarianten möglich. Im weiteren wird in den Formeln zur Vereinfachung der Schreibarbeit nicht mehr zwischen dem Wert  $W$  und der Abbildungsvorschrift  $\check{W}$  der Formänderungsenergie unterschieden. Weiterhin soll vereinfachend die Schreibweise

$$W_{,i} := \frac{\partial W}{\partial I_i} \quad \text{bzw.} \quad W_{,ij} := \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j} \quad (3.5)$$

eingeführt werden, die ausschließlich für die Ableitung der Formänderungsenergie nach den Invarianten benutzt wird.

Dann ergibt sich der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor  $\mathbf{S}$  nach (3.1) zu

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial I_i} \cdot \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}}, \quad (3.6)$$

während durch eine weitere Ableitung dieser Beziehung der Materialtensor berechnet wird, d.h.

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial I_i} \cdot \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \right]. \quad (3.7)$$

Mit der Rechenregel

$$\frac{\partial(\alpha \mathbf{A})}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{A} \otimes \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{C}} + \alpha \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{C}}, \quad (3.8)$$

siehe z.B. *de Boer* [29], erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= 4 \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \otimes \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{\partial W}{\partial I_i} \right) \right\} + \frac{\partial W}{\partial I_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \right) \right] \\ &= 4 \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \otimes \left\{ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial I_j} \left( \frac{\partial W}{\partial I_i} \right) \cdot \frac{\partial I_j}{\partial \mathbf{C}} \right\} + \frac{\partial W}{\partial I_i} \cdot \frac{\partial^2 I_i}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \right] \end{aligned}$$

und damit

$$\mathbb{C} = 4 \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j} \cdot \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_j}{\partial \mathbf{C}} \right\} + \frac{\partial W}{\partial I_i} \cdot \frac{\partial^2 I_i}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \right]. \quad (3.9)$$

Der Vorteil der Beschreibung der Formänderungsenergie als Funktion der Invarianten liegt darin, daß die auftretenden Ableitungen der Invarianten nach den Verzerrungstensoren, in diesem Fall  $\frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}}$  und  $\frac{\partial^2 I_i}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}}$ , für alle Werte der Invarianten bekannt sind, siehe z.B. *Truesdell, Noll* [103] und die Abschnitte 3.2.2 und 3.2.3. Weiterhin kann diese Formulierung einfach für die Berechnung inkompressibler Materialien mit  $\bar{\mathbb{I}} = 1$  erweitert werden. Nachteilig ist jedoch, daß die Entwicklung und Darstellung einer geeigneten Formänderungsenergiefunktion für ein vorliegendes Material einfacher als Funktion der physikalisch als Hauptdehnungen interpretierbaren Eigenwerte aufzustellen ist.

Für die Darstellung des Cauchyschen Spannungstensors  $\mathbf{T}$  bezüglich der Größen der Momentankonfiguration gilt mit Gleichung (3.2)

$$\mathbf{T} = \frac{2}{J} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{g}} = \frac{2}{J} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial I_i} \cdot \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{g}} \quad (3.10)$$

und für den räumlichen Materialtensor  $\mathfrak{c}$  folgt

$$\mathfrak{c} = \frac{4}{J} \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j} \cdot \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{g}} \otimes \frac{\partial I_j}{\partial \mathbf{g}} \right\} + \frac{\partial W}{\partial I_i} \cdot \frac{\partial^2 I_i}{\partial \mathbf{g} \partial \mathbf{g}} \right]. \quad (3.11)$$

### 3.1.5 Die Formänderungsenergiefunktion in Abhängigkeit der Eigenwerte

Als Ausgangspunkt der Betrachtungen in diesem Abschnitt sei die Formänderungsenergie, z.B. nach Gleichung (2.78), als Funktion der Eigenwerte des Rechts-Streck-Tensors  $\mathbf{U}$  gegeben, d.h.

$$W = \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (3.12)$$

Da voraussetzungsgemäß die funktionale Beziehung bekannt und beliebig oft differenzierbar ist, ist eine sofortige Ermittlung der ersten und zweiten partiellen Ableitung von  $W$  nach den Eigenwerten möglich.

Damit folgt für den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor  $\mathbf{S}$  nach (3.1) die Darstellung

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{C}}. \quad (3.13)$$

Weiterhin ergibt sich für den Materialtensor  $\mathbb{C}$  die Beziehung

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{C}} \right], \quad (3.14)$$

die sich mit der Rechenregel (3.8) in die Form

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= 4 \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{C}} \otimes \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \right) \right\} + \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{C}} \right) \right] \\ &= 4 \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{C}} \otimes \left\{ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \right) \cdot \frac{\partial \lambda_j}{\partial \mathbf{C}} \right\} + \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \right] \end{aligned}$$

und damit in

$$\mathbb{C} = 4 \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \lambda_j}{\partial \mathbf{C}} \right\} + \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \right] \quad (3.15)$$

überführen läßt. Analoge Darstellungsformen gelten ebenfalls für den Cauchyschen Spannungstensor  $\mathbf{T}$  und den zugehörigen räumlichen Materialtensor  $\mathfrak{c}$ .

Der wesentliche Nachteil, der mit der Formulierung der Formänderungsenergiefunktion in Abhängigkeit der Eigenwerte, z.B. der Klasse der Ogden-Materialien, gegeben ist, besteht in der Berechnung der Ableitung der Eigenwerte nach den Invarianten, d.h. von  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial I_k}$ , die für die Bereitstellung der Ableitungen  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{C}}$  und  $\frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}}$  benötigt wird. Insbesondere ergeben sich Schwierigkeiten für die Formulierung der Spannungs- und Materialtensoren für biaxiale und hydrostatische Spannungszustände. Diese Schwierigkeiten übertragen sich auch auf die Formulierung inkompressibler Materialien mit  $\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 = 1$ .

### 3.1.6 Erläuterung der eigenen Vorgehensweise

Die Betrachtung der Vor- und Nachteile der geschilderten Berechnungsstrategien, verbunden mit dem Zwang der Erstellung eines übersichtlich strukturierten, modularen und flexiblen Berechnungsverfahrens für die Spannungs- und Materialtensoren für beliebige Materialien der Form (2.77) bzw. (2.78) führen zu dem folgenden Lösungskonzept.

**Tafel 3.2:** Konzept der numerischen Berechnung hyperelastischer Materialien

1. Festlegung der Betrachtungsweise, d.h. in diesem Fall die Beschreibung mittels der Größen der Referenzkonfiguration.

2. Wahl der tensoriellen Basis  $\underline{\mathbf{Z}}$  zur Darstellung der Ergebnisse, z.B.

$$\underline{\mathbf{Z}}^T := \{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3\} := \{\mathbf{1}, \mathbf{C}, \mathbf{C}^{-1}\} \quad \text{in der Referenzkonfiguration.}$$

3. Berechnung der Ableitung der tensoriellen Basis  $\underline{\mathbf{Z}}$  nach  $\mathbf{C}$ .

4. Berechnung der Ableitung der Formänderungsenergie nach den Invarianten.

(a) Formänderungsenergie als Funktion der Invarianten nach (2.77)

- Direkte Ableitung der funktionalen Beziehung nach den Invarianten.

(b) Formänderungsenergie als Funktion der Eigenwerte nach (2.78)

- Ableitung der Formänderungsenergie durch Berücksichtigung der impliziten Abhängigkeit von den Invarianten (siehe Abschnitt 3.4), d.h.

$$\frac{\partial \tilde{W}(\hat{\lambda}_s(I_t))}{\partial I_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \tilde{W}(\hat{\lambda}_s(I_t))}{\partial I_i \partial I_j}.$$

- Bei Formänderungsenergiefunktionen der Eigenwerte werden für die Sonderfälle der biaxialen und hydrostatischen Spannungszustände die Ableitungen nach den Invarianten in expliziter Form angegeben, siehe die Abschnitte 3.5 und 3.6.

5. Bestimmung der Koeffizienten  $\alpha_i$  und  $\beta_{ij}$  für die Darstellung der Spannungs- und Materialtensoren aus den Gleichungen (3.6) und (3.9), d.h. mittels der Ableitungen der Formänderungsenergie nach den Invarianten.

6. Zusammenbau der Spannungs- und Materialtensoren aus den Koeffizienten  $\alpha_i$  und  $\beta_{ij}$  und der tensoriellen Basis in der Form

$$\mathbf{S} = 2 \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{Z}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{C} = 4 \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^3 \{\beta_{ij} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j\} + \alpha_i \frac{\partial \mathbf{Z}_i}{\partial \mathbf{C}} \right].$$

Die Besonderheit des eigenen Vorgehens wird zunächst in Abschnitt 3.2 am Beispiel der materiellen Formulierung in den Größen der Referenzkonfiguration erläutert.

## 3.2 Spannungs- und Materialtensoren für kompressible Materialien

In diesem Abschnitt wird für kompressible Materialien unter der Voraussetzung eines beliebigen dreidimensionalen Verzerrungszustandes die gewählte Vorgehensweise am Beispiel der Beschreibung in den Größen der Referenzkonfiguration, d.h. des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors  $\mathbf{S}$  und des zugehörigen Materialtensors  $\mathbb{C}$ , erläutert. Die Formulierungen für den ebenen und den axialsymmetrischen Verzerrungszustand sind hierin als Sonderfälle enthalten. Die Darstellung der Spannungs- und Materialtensoren bei kompressiblen Materialien für den ebenen Spannungszustand geschieht in Abschnitt 3.4. Für die entsprechende Formulierung in den Größen der Momentankonfiguration siehe Anhang A.

### 3.2.1 Basistensoren $\mathbf{Z}_i$ und deren Ableitung nach $\mathbf{C}$

Nach den Bemerkungen des Abschnittes 3.1.3 wird der Raum der möglichen Spannungstensoren von einer dreidimensionalen Basis aufgespannt. Für die Beschreibung bezüglich der Referenzkonfiguration gilt z.B.

$$\underline{\mathbf{Z}}^T := \{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3\} := \{\mathbf{1}, \mathbf{C}, \mathbf{C}^{-1}\}. \quad (3.16)$$

Für die Bestimmung der zweiten Ableitung der Invarianten nach dem Verzerrungstensor (hier  $\mathbf{C}$ ) sind die Ableitungen der Basistensoren  $\mathbf{Z}_m$  nach dem Verzerrungstensor erforderlich, siehe auch Gleichung (3.23). Mit der obigen Wahl der Basis  $\underline{\mathbf{Z}}_1$  ergibt sich durch Ausführung der Differentiation

$$\mathbf{Z}_1 := \frac{\partial \mathbf{Z}_1}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{1}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{Z}_2 := \frac{\partial \mathbf{Z}_2}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{I}_{\mathbf{G}^{-1}}, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{Z}_3 := \frac{\partial \mathbf{Z}_3}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} = -\mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}}. \quad (3.19)$$

Die Ableitungen der Basistensoren  $\mathbf{Z}_m$  sind dabei Tensoren vierter Stufe. Hierbei stellen  $\mathbb{I}$  bzw.  $\mathbf{0}$  den vierstufigen Einheits- bzw. Nulltensor dar. Die genauere Herleitung ist im Anhang B zu finden.

### 3.2.2 Ableitung der Invarianten nach $\mathbf{C}$

Für die Berechnung der Spannungs- und Materialtensoren nach (3.6) bzw. (3.9) werden die Ableitungen der Invarianten nach den Verzerrungstensoren benötigt, siehe *Truesdell, Noll* [103], d.h. es gilt z.B. für die Ableitung der Invarianten des Rechts-Cauchy-Green-Tensors  $\mathbb{I}_{\mathbf{C}}, \mathbb{II}_{\mathbf{C}}, \mathbb{III}_{\mathbf{C}}$  nach dem Rechts-Cauchy-Green-Tensor  $\mathbf{C}$  für eine Darstellung mittels der in Gleichung (3.16) definierten Basis  $\underline{\mathbf{Z}}$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbb{I}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{1}, \quad \frac{\partial \mathbb{II}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{I} \mathbf{1} - \mathbf{C} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbb{III}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{III} \mathbf{C}^{-1}.} \quad (3.20)$$



Dieser Zusammenhang kann mit der Matrix

$$\underline{\mathbf{A}} = (A_{im}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{I} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \text{III} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

in der Form

$$\frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} = \sum_{m=1}^3 A_{im} \mathbf{Z}_m. \quad (3.22)$$

bzgl. der freigewählten tensoriellen Basis  $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3$  dargestellt werden.

Für die Bestimmung des Materialtensors  $\mathbb{C}$  nach Gleichung (3.9) ist die zweite Ableitung der Invarianten nach  $\mathbf{C}$  zu berechnen. Nachdem die erste Ableitung der Invarianten in Gleichung (3.22) angegeben wurde, ergibt sich durch erneute Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_i}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left[ \sum_{m=1}^3 A_{im} \mathbf{Z}_m \right] = \sum_{m=1}^3 \left[ \frac{\partial A_{im}}{\partial \mathbf{C}} \otimes \mathbf{Z}_m + A_{im} \frac{\partial \mathbf{Z}_m}{\partial \mathbf{C}} \right] \\ &= \sum_{m=1}^3 \left[ \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_{im}}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial \mathbf{C}} \right\} \otimes \mathbf{Z}_m + A_{im} \frac{\partial \mathbf{Z}_m}{\partial \mathbf{C}} \right] \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{\partial^2 I_i}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = \sum_{m=1}^3 \left[ \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left\{ \frac{\partial A_{im}}{\partial I_k} A_{kl} \mathbf{Z}_l \otimes \mathbf{Z}_m \right\} + A_{im} \frac{\partial \mathbf{Z}_m}{\partial \mathbf{C}} \right]. \quad (3.23)$$

### 3.2.3 Berechnung der Ableitung der Formänderungsenergie nach den Invarianten

Die mit dieser Darstellung vorgeschlagene Berechnung hyperelastischer Materialien basiert wesentlich auf der Berechnung der Ableitungen der gegebenen Formänderungsenergie nach den Invarianten. Ist die Formänderungsenergie als Funktion der Invarianten nach (2.77) bekannt, d.h. gilt

$$W = \check{W}(\text{I}, \text{II}, \text{III}),$$

so ergeben sich die benötigten Ableitungen durch direktes Differenzieren der funktionalen Beziehung.

Ist dagegen die Formänderungsenergie als Funktion der Eigenwerte gegeben, d.h. gilt nach (2.78)

$$W = \check{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

so ist zur Berechnung der Ableitungen der implizite Zusammenhang der Eigenwerte von den Invarianten über die charakteristische Gleichung zu verwenden. Für kompressible Materialien sind die unterschiedlichen Fälle in der folgenden Tafel aufgeführt.

**Tafel 3.3:** Ableitung der Formänderungsenergie  $W$  nach den Invarianten I, II, III

**Eingang:** Gegeben seien die Invarianten I, II, III und die Genauigkeit  $\epsilon$  für die Fallunterscheidung der Eigenwerte.

1. Berechnung der Eigenwerte  $\lambda_i$  durch Lösung der charakteristischen Gleichung (2.14)

$$\lambda^6 - \text{I}\lambda^4 + \text{II}\lambda^2 - \text{III} = 0.$$

2. Fallunterscheidung für die weitere Behandlung:

- (a) Allgemein: Für  $|\lambda_i - \lambda_k| > \epsilon$  für alle  $i, k \in \{1, 2, 3\}$  mit  $i \neq k$  weiter mit Tafel 3.9 auf Seite 52.
- (b) Equi-biaxial: Für  $|\lambda_i - \lambda_k| \leq \epsilon$  für ein  $i, k \in \{1, 2, 3\}$  mit  $i \neq k$  weiter mit Tafel 3.10 auf Seite 57.
- (c) Hydrostatisch: Für  $|\lambda_i - \lambda_k| \leq \epsilon$  für alle  $i, k \in \{1, 2, 3\}$  mit  $i \neq k$  weiter mit Tafel 3.11 auf Seite 58.

**Ausgang:** Ableitung der Formänderungsenergiefunktion der Eigenwerte nach den Invarianten.

### 3.2.4 Darstellung der Spannungs- und Materialtensoren

Für den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor eines kompressiblen, hyperelastischen Materials gilt die Gleichung (3.6), die unter Benutzung der Summenkonvention, der Schreibweise (3.5) und der Darstellung (3.22) der Ableitung der Invarianten nach  $\mathbf{C}$  bezüglich der in Gleichung (3.16) definierten tensoriellen Basis  $\mathbf{Z}_m$  durch Einführung der Koeffizienten  $\alpha_m$  gemäß

$$\alpha_m := W_{,i} A_{im} \quad (3.24)$$

in der Form

$$\mathbf{S} = 2 \alpha_m \mathbf{Z}_m \quad (3.25)$$

dargestellt werden kann.

Entsprechend ergibt sich für den Materialtensor  $\mathbb{C}$  nach Gleichung (3.9) durch Einführung der Koeffizienten  $\beta_{lm}$  des Anteils der dyadischen Produkte  $\mathbf{Z}_l \otimes \mathbf{Z}_m$  der Basistensoren am Materialtensor  $\mathbb{C}$  gemäß

$$\beta_{lm} := A_{il} W_{,ij} A_{jm} + W_{,i} \frac{\partial A_{im}}{\partial I_k} A_{kl}. \quad (3.26)$$

und den obigen Ergebnissen die Darstellung

$$\mathbb{C} = 4 \beta_{lm} \mathbf{Z}_l \otimes \mathbf{Z}_m + 4 \alpha_m \frac{\partial \mathbf{Z}_m}{\partial \mathbf{C}}. \quad (3.27)$$

### 3.2.5 Zusammenfassung der Berechnung

Die Ergebnisse für die Berechnung kompressibler, hyperelastischer Materialien sind in der nachfolgenden Tafel zusammengefaßt.

**Tafel 3.4:** Spannungs- und Materialtensoren kompressibler Materialien

1. Bestimme die tensorielle Basis

$$\underline{\mathbf{Z}}^T := \{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3\} := \{\mathbf{1}, \mathbf{C}, \mathbf{C}^{-1}\}$$

isotroper, hyperelastischer Materialien in der Referenzkonfiguration und bilde die Ableitung der Basis nach  $\mathbf{C}$  in der Form

$$\frac{\partial \mathbf{1}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{I}_{\mathbf{G}^{-1}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} = -\mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}}.$$

2. Bestimme die Koeffizientenmatrix  $\underline{\mathbf{A}}$  für die Darstellung der Ableitung der Invarianten nach  $\mathbf{C}$  bezüglich der gewählten Basis, d.h.

$$\underline{\mathbf{A}} = (A_{im}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{I} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \text{III} \end{pmatrix}.$$

3. Berechne die Ableitungen der Formänderungsenergie nach den Invarianten

$$W_{,i} = \frac{\partial W}{\partial I_i} \quad \text{und} \quad W_{,ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j}$$

für die unterschiedlichen Formen der Formänderungsenergiefunktion. Für weitere Bemerkungen siehe hierzu Tafel 3.3.

4. Berechne die Koeffizienten  $\alpha_i$  und  $\beta_{ij}$  in der Form

$$\alpha_m = W_{,i} A_{im} \quad \text{und} \quad \beta_{lm} = A_{il} W_{,ij} A_{jm} + W_{,i} \frac{\partial A_{im}}{\partial I_k} A_{kl}$$

5. Bestimme den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor  $\mathbf{S}$  und den zugehörigen Materialtensor  $\mathbb{C}$  in der Form

$$\mathbf{S} = 2 \alpha_m \mathbf{Z}_m \quad \text{und} \quad \mathbb{C} = 4 \beta_{lm} \mathbf{Z}_l \otimes \mathbf{Z}_m + 4 \alpha_m \frac{\partial \mathbf{Z}_m}{\partial \mathbf{C}}.$$

### 3.3 Spannungs- und Materialtensoren für inkompressible Materialien

In diesem Abschnitt wird entsprechend dem vorangegangenen Abschnitt die Vorgehensweise für inkompressible Materialien erläutert. Die Darstellung der Spannungs- und Materialtensoren für den ebenen Spannungszustand geschieht in Abschnitt 3.5.

#### 3.3.1 Problemstellung

Für inkompressible Materialien nach (2.77), d.h. es gilt

$$W = \check{W}(I, II, III) = \check{\bar{W}}(\bar{I}, \bar{II}) + U(J),$$

ist der isochore Anteil  $\bar{W}$  der Formänderungsenergiefunktion  $W$  nur von den Invarianten  $\bar{I}$  und  $\bar{II}$  abhängig. Der volumetrische Anteil ist durch den Anteil  $U = \hat{U}(J)$  gegeben. Analog zur Definition (3.5) wird die Schreibweise

$$\bar{W}_{,i} := \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_i} \quad \text{bzw.} \quad \bar{W}_{,ij} := \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_i \partial \bar{I}_j} \quad (3.28)$$

eingeführt. Aus der obigen Darstellung der Formänderungsenergie ergibt sich für die Herleitung der Spannungen nach Gleichung (3.1) die Aufteilung

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \check{\bar{W}}(\bar{I}, \bar{II})}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \hat{U}(J)}{\partial \mathbf{C}} =: \mathbf{S}^D + \mathbf{S}^K \quad (3.29)$$

des Spannungstensors in einen deviatorischen und einen volumetrischen Anteil. Analog ergibt sich für den Materialtensor  $\mathbb{C}$  die Beziehung

$$\mathbb{C} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 \check{\bar{W}}(\bar{I}, \bar{II})}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} + 4 \frac{\partial^2 \hat{U}(J)}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} =: \mathbb{C}^D + \mathbb{C}^K. \quad (3.30)$$

Für inkompressible Materialien (bzw. für eine Formulierung mit Hilfe der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten nach (2.20)) sind die Ableitungen der modifizierten Invarianten  $\bar{I}$  und  $\bar{II}$  nach  $\mathbf{C}$  bereitzustellen. In diesem Fall sind die modifizierten Größen  $\bar{I}$  bzw.  $\bar{II}$  die Invarianten des modifizierten Tensors  $\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbf{C}$ , d.h. mit Hilfe der Kettenregel folgt nunmehr

$$\boxed{\frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}}.} \quad (3.31)$$

#### 3.3.2 Basistensoren $\bar{\mathbf{Z}}_i$ und deren Ableitung nach $\mathbf{C}$

Für die Betrachtung inkompressibler Materialien werden zunächst in Anlehnung an die Berechnung kompressibler Materialien und unter Berücksichtigung der multiplikativen Zerlegung die Basistensoren

$$\bar{\mathbf{Z}}^T := \{\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{Z}}_2, \bar{\mathbf{Z}}_3\} := \{\mathbf{1}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{C}}^{-1}\} \quad (3.32)$$

eingeführt. Aus dem zweiten Faktor der Gleichung (3.31) ergibt sich mit  $\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3}\mathbf{C}$  und

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} [J^{-2/3}\mathbf{C}] = J^{-2/3} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} + \mathbf{C} \otimes \frac{\partial J^{-2/3}}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbb{I}_{\mathbf{G}^{-1}} + \mathbf{C} \otimes \left( -\frac{1}{3} J^{-2/3} \mathbf{C}^{-1} \right)$$

der vierstufige deviatorische Projektionstensor  $\mathbb{P}$  in der Form

$$\mathbb{P} := \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3} \left( \mathbb{I}_{\mathbf{G}^{-1}} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right). \quad (3.33)$$

Aus der Anwendung von  $\mathbb{P}$  auf die Tensoren  $\mathbf{1}$  und  $\bar{\mathbf{C}}$  berechnen sich die modifizierten Basistensoren  $\bar{\mathbf{Z}}_1$  und  $\bar{\mathbf{Z}}_2$  zu

$$\bar{\mathbf{Z}}_1 := \mathbf{1} : \mathbb{P} = \text{dev } \bar{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{Z}}_2 := \bar{\mathbf{C}} : \mathbb{P} = \text{dev } \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbf{C}^{-1}, \quad (3.34)$$

während sich aus der Anwendung von  $\mathbb{P}$  auf  $\bar{\mathbf{C}}^{-1}$  der Nulltensor ergibt, d.h.

$$\bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbb{P} = \bar{\mathbf{C}}^{-1} \left\{ J^{-2/3} \left( \mathbb{I}_{\mathbf{G}^{-1}} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) \right\} = \mathbf{0}. \quad (3.35)$$

In den obigen Formeln bezeichnet  $\text{dev } \bar{\mathbf{C}}$  den deviatorischen Anteil von  $\bar{\mathbf{C}}$ , d.h. es gilt

$$\text{dev } \mathbf{C} = \mathbf{C} - \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{C} \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \text{dev } \bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \text{dev } \mathbf{C}. \quad (3.36)$$

Für die noch herzuleitende Gleichung (3.41) zur Bestimmung der zweiten Ableitung der Invarianten nach dem Verzerrungstensor (hier  $\mathbf{C}$ ) wird die Ableitung der Basistensoren  $\bar{\mathbf{Z}}_m$  nach dem Verzerrungstensor erforderlich. Mit der Wahl der Basis nach (3.34) ergibt sich durch Ausführung der Differentiation

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}_1 := \frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}_1}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{3} \bar{\mathbb{I}} \left\{ \mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{3} \left\{ (\text{dev } \bar{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1}) \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes (\text{dev } \bar{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1}) \right\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}_2 := \frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}_2}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{3} \text{tr } \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}} + J^{-4/3} \mathbb{I}_{\mathbf{G}^{-1}} - \frac{2}{9} \text{tr } \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \\ &\quad - \frac{2}{3} \left\{ (\text{dev } \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbf{C}^{-1}) \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes (\text{dev } \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbf{C}^{-1}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Die genauere Herleitung ist im Anhang B zu finden.

### 3.3.3 Ableitung der modifizierten Invarianten nach $\mathbf{C}$

Die Ableitung der modifizierten Invarianten  $\bar{\mathbb{I}}, \bar{\mathbb{II}}$  nach dem modifizierten Verzerrungstensor  $\bar{\mathbf{C}}$  ergibt analog zur Gleichung (3.20) die Beziehungen

$$\frac{\partial \bar{\mathbb{I}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \bar{\mathbb{II}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \bar{\mathbb{I}} \mathbf{1} - \bar{\mathbf{C}}. \quad (3.39)$$

Durch die oben beschriebene Anwendung des Projektionstensors  $\mathbb{P}$  auf die Basistensoren kann zusammenfassend für Gleichung (3.31) die Beziehung

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbb{I}}}{\partial \mathbf{C}} \\ \frac{\partial \bar{\mathbb{II}}}{\partial \mathbf{C}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{\mathbb{I}} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{dev } \bar{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \\ \text{dev } \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix},$$

bzw. in der Form

$$\boxed{\frac{\partial \bar{\mathbb{I}}_i}{\partial \mathbf{C}} = \sum_{m=1}^2 \bar{A}_{im} \bar{\mathbf{Z}}_m,} \quad (3.40)$$

hergeleitet werden, wobei hieraus die Definition der Matrix  $\bar{\mathbf{A}} := (\bar{A}_{im})$  und der Matrix  $\bar{\mathbf{Z}}$  der modifizierten Basistensoren deutlich wird. Bemerkenswert ist, daß sich beim Übergang vom kompressiblen Material zum deviatorischen Anteil  $\bar{W}$  des inkompressiblen Material durch die zusätzlich wirksame Inkompressibilitätsbedingung  $\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 = 1$  die Dimension des betrachteten Raumes der Verzerrungstensoren reduziert wird. Somit spannen im Fall eines inkompressiblen, hyperelastischen Materials die beiden modifizierten Basistensoren  $\bar{\mathbf{Z}}_1 = \text{dev } \bar{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1}$  und  $\bar{\mathbf{Z}}_2 = \text{dev } \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbf{C}^{-1}$  den betrachteten Raum des Anteils von  $\bar{W}$  auf. Für die numerische Realisation bedeutet dies, daß die Summationsschleifen nur noch über zwei (modifizierte) Summanden laufen.

Für die zweite Ableitung der Invarianten  $\bar{\mathbb{I}}_i$  nach  $\mathbf{C}$  ergibt sich entsprechend aus (3.23) die modifizierte Beziehung

$$\boxed{\frac{\partial^2 \bar{\mathbb{I}}_i}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = \sum_{m=1}^2 \left[ \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left\{ \frac{\partial \bar{A}_{im}}{\partial \bar{\mathbb{I}}_k} \bar{A}_{kl} \bar{\mathbf{Z}}_l \otimes \bar{\mathbf{Z}}_m \right\} + \bar{A}_{im} \frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}_m}{\partial \mathbf{C}} \right].} \quad (3.41)$$

### 3.3.4 Darstellung der deviatorischen Anteile der Spannungs- und Materialtensoren

Die deviatorischen Anteile  $\mathbf{S}^D$  am Spannungstensor ergeben sich nach (3.29) zu

$$\mathbf{S}^D = 2 \frac{\partial \bar{W}(\bar{\mathbb{I}}, \bar{\mathbb{II}})}{\partial \mathbf{C}} = 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\mathbb{I}}_i} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbb{I}}_i}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.42)$$

und können mit der Notation (3.28), den Basistensoren  $\bar{\mathbf{Z}}_i$  nach (3.34) und der Ableitung der Invarianten  $\bar{\mathbb{I}}_i$  nach  $\mathbf{C}$  gemäß Gleichung (3.40) durch Einführung der Koeffizienten

$$\boxed{\bar{\alpha}_m := \bar{W}_{,i} \bar{A}_{im}} \quad (3.43)$$

in der Form

$$\boxed{\mathbf{S}^D = 2 \bar{\alpha}_m \bar{\mathbf{Z}}_m} \quad (3.44)$$

dargestellt werden.

Für den deviatorischen Anteil  $\Phi^D$  am Materialtensor gilt mit (3.30) und den oben ermittelten Teilergebnissen die Beziehung

$$\begin{aligned}\Phi^D &= 4 \frac{\partial^2 \check{W}(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{II}})}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = 4 \sum_{i=1}^2 \left[ \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_i \partial \bar{\mathbf{I}}_j} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{I}}_i}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{\mathbf{I}}_j}{\partial \mathbf{C}} \right\} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_i} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{I}}_i}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \right] \\ &= 4 \left\{ \bar{A}_{il} \bar{W}_{,ij} \bar{A}_{jm} + \bar{W}_{,i} \frac{\partial \bar{A}_{im}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_k} \bar{A}_{kl} \right\} \bar{\mathbf{Z}}_l \otimes \bar{\mathbf{Z}}_m + 4 \bar{W}_{,i} \bar{A}_{im} \frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}_m}{\partial \mathbf{C}},\end{aligned}$$

die durch Einführung der Koeffizienten

$$\boxed{\bar{\beta}_{lm} = \bar{A}_{il} \bar{W}_{,ij} \bar{A}_{jm} + \bar{W}_{,i} \frac{\partial \bar{A}_{im}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_k} \bar{A}_{kl}} \quad (3.45)$$

in der Form

$$\boxed{\Phi^D = 4 \bar{\beta}_{lm} \bar{\mathbf{Z}}_l \otimes \bar{\mathbf{Z}}_m + 4 \bar{\alpha}_m \frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}_m}{\partial \mathbf{C}}} \quad (3.46)$$

dargestellt werden kann.

### 3.3.5 Darstellung der volumetrischen Anteile der Spannung- und Materialtensoren

Für die erste Ableitung der Funktion  $U = \hat{U}(J)$  nach  $\mathbf{C}$  ergibt sich mit

$$J^2 = \mathbb{III}_{\mathbf{C}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbb{III}} \frac{\partial \mathbb{III}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2J} \mathbb{III}_{\mathbf{C}^{-1}} = \frac{1}{2} J \mathbf{C}^{-1}$$

durch Anwendung der Kettenregel und mit der Schreibweise  $U' = \frac{\partial U}{\partial J}$  die Beziehung

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} J U' \mathbf{C}^{-1}.$$

Für die zweite Ableitung folgt hieraus

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = -\frac{1}{2} J U' \mathbb{1}_{\mathbf{C}^{-1}} + \frac{1}{4} J [J U']' \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}.$$

Damit folgt für den volumetrischen Anteil des Spannungstensors

$$\boxed{\mathbf{s}^K = 2 \frac{\partial \hat{U}(J)}{\partial \mathbf{C}} = J U' \mathbf{C}} \quad (3.47)$$

und für den Anteil am Materialtensor gilt

$$\boxed{\Phi^K = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = -2 J U' \mathbb{1}_{\mathbf{C}^{-1}} + J [J U']' \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}} \quad (3.48)$$

### 3.3.6 Zusammenfassung der Berechnung

Die Ergebnisse für die Berechnung inkompressibler hyperelastischer Materialien sind in den nachfolgenden Tafeln zusammengefaßt.

**Tafel 3.5:** Deviatorischer Anteil der Spannungs- und Materialtensoren inkompressibler Materialien

1. Bestimme die tensorielle Basis

$$\bar{\mathbf{Z}}_1 = \text{dev } \bar{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{Z}}_2 = \text{dev } \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbf{C}^{-1}$$

und bilde die Ableitung der Basis nach  $\mathbf{C}$  in der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}_1}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{3} \bar{\mathbf{I}} \left\{ \mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{3} \left\{ \bar{\mathbf{Z}}_1 \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{Z}}_1 \right\} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}_2}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{3} \text{tr } \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}} + J^{-4/3} \mathbb{I}_{\mathbf{G}^{-1}} - \frac{2}{9} \text{tr } \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \\ &\quad - \frac{2}{3} \left\{ \bar{\mathbf{Z}}_2 \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{Z}}_2 \right\} \end{aligned}$$

2. Bestimme die Koeffizientenmatrix  $\bar{\mathbf{A}}$  für die Darstellung der Ableitung der modifizierten Invarianten nach  $\mathbf{C}$  bezüglich der gewählten Basis, d.h.

$$\bar{\mathbf{A}} = (\bar{A}_{im}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{\mathbf{I}} & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Berechne die Ableitungen des deviatorischen Anteils  $\bar{W}$  an der Formänderungsenergie  $W$  nach den modifizierten Invarianten

$$\bar{W}_{,i} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_i} \quad \text{und} \quad \bar{W}_{,ij} = \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_i \partial \bar{\mathbf{I}}_j}$$

für die unterschiedlichen Formen der Formänderungsenergiefunktion. Für weitere Bemerkungen siehe hierzu Tafel 3.3.

4. Berechne die Koeffizienten  $\bar{\alpha}_i$  und  $\bar{\beta}_{ij}$  in der Form

$$\bar{\alpha}_m = \bar{W}_{,i} \bar{A}_{im} \quad \text{und} \quad \bar{\beta}_{lm} = \bar{A}_{il} \bar{W}_{,ij} \bar{A}_{jm} + \bar{W}_{,i} \frac{\partial \bar{A}_{im}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_k} \bar{A}_{kl}$$

5. Bestimme die deviatorischen Anteile  $\mathbf{S}^D$  und  $\mathbb{C}^D$  in der Form

$$\mathbf{S}^D = 2 \bar{\alpha}_m \bar{\mathbf{Z}}_m \quad \text{und} \quad \mathbb{C}^D = 4 \bar{\beta}_{lm} \bar{\mathbf{Z}}_l \otimes \bar{\mathbf{Z}}_m + 4 \bar{\alpha}_m \frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}_m}{\partial \mathbf{C}}.$$



**Tafel 3.6:** Vollständige Spannungs- und Materialtensoren inkompressibler Materialien

1. Bestimme die volumetrischen Anteile  $\mathbf{S}^K$  am 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor und  $\mathbb{C}^K$  am zugehörigen Materialtensor in der Form

$$\mathbf{S}^K = 2 \frac{\partial \hat{U}(J)}{\partial \mathbf{C}} = J U' \mathbf{C}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbb{C}^K = -2 J U' \mathbb{1}_{\mathbf{C}^{-1}} + [J U']' \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}$$

2. Bestimme die deviatorischen Anteile  $\mathbf{S}^D$  am 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor und  $\mathbb{C}^D$  am zugehörigen Materialtensor gemäß Tafel 3.5 in der Form

$$\mathbf{S}^D = 2 \bar{\alpha}_m \bar{\mathbf{Z}}_m \quad \text{und} \quad \mathbb{C}^D = 4 \bar{\beta}_{lm} \bar{\mathbf{Z}}_l \otimes \bar{\mathbf{Z}}_m + 4 \bar{\alpha}_m \frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}_m}{\partial \mathbf{C}}.$$

3. Bestimme die vollständigen Spannungs- und Materialtensoren durch Addition der volumetrischen und deviatorischen Anteile, d.h.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^K + \mathbf{S}^D \quad \text{und} \quad \mathbb{C} = \mathbb{C}^K + \mathbb{C}^D.$$

## 3.4 Der ebene Spannungszustand bei kompressiblen Materialien

### 3.4.1 Grundlage der Berechnung

Für den ebenen Spannungszustand gelten gegenüber dem allgemeinen dreidimensionalen Spannungs- und Verzerrungszustand die Beziehungen

$$S_{13} = S_{23} = S_{33} = 0 \quad \text{und} \quad C_{13} = C_{23} = 0 \quad \text{jedoch} \quad C_{33} \neq 0 \quad (3.49)$$

für die Komponenten des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors  $\mathbf{S}$  bzw. des Rechts-Cauchy-Green-Tensors  $\mathbf{C}$ . Für die Anteile der Tensoren in der von den Vektoren  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  des kartesischen Koordinatensystems aufgespannten Scheibenmittelfläche wird die Notation

$$\mathbf{S}_{esz} := \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 S_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{C}_{esz} := \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 C_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (3.50)$$

eingeführt. Die Komponenten  $C_{11}$ ,  $C_{22}$  und  $C_{12}$  von  $\mathbf{C}_{esz}$  werden für den Fall des ebenen Spannungszustandes aus dem zweidimensionalen Verschiebungszustand

$$\mathbf{u}_{esz} := \sum_{i=1}^2 u_i \mathbf{e}_i \quad (3.51)$$

berechnet. Die Verzerrung  $C_{33}$  senkrecht zur Scheibenmittelfläche kann aus der Bedingung  $S_{33} = 0$  ermittelt werden und ist eine nichtlineare Funktion der Anteile  $C_{11}$ ,  $C_{22}$  und  $C_{12}$  von  $\mathbf{C}_{esz}$ , d.h.

$$C_{33} = \hat{C}_{33}(\mathbf{C}_{esz}), \quad (3.52)$$

die nur in ausgewählten Sonderfällen explizit nach  $C_{33}$  aufgelöst werden kann. Die Berechnung basiert wesentlich auf der Entkopplung der Verzerrung  $C_{33}$  senkrecht zur Scheibenmittelfläche vom Verzerrungsanteil  $\mathbf{C}_{esz}$  in der Scheibenmittelfläche. Für die Behandlung gekrümmter Flächentragwerke ergibt sich die gewünschte Entkopplung bei Einführung eines kartesischen Koordinatensystems, dessen ersten zwei Basisvektoren die Tangentialebene an die Scheibenmittelfläche im betrachteten Punkt aufspannen.

Die Berechnung kompressibler Materialien im ebenen Spannungszustand basiert auf den Ergebnissen des Abschnitts 3.2 für kompressible Materialien im allgemeinen dreidimensionalen Verzerrungszustand, die in der Tafel 3.3 zusammengefaßt sind.

### 3.4.2 Die Berechnung der Dickenänderung

Für kompressible, hyperelastische Materialien mit  $0 \leq \nu < 0.5$ , wobei  $\nu$  die Querkontraktionszahl der linearisierten Theorie darstellt, muß die Dickenänderung und damit  $C_{33}$  nach Berechnung der Anteile  $\mathbf{C}_{esz}$  aus dem Verschiebungszustand  $\mathbf{u}_{esz}$  aus der nichtlinearen Gleichung

$$S_{33} = \hat{S}_{33}(C_{33}) = 0 \quad (3.53)$$

iterativ bestimmt werden. Hierfür bietet sich eine lokale Iteration mit Hilfe des quadratisch konvergenten Newton-Raphson-Verfahrens an, wobei die Linearisierung der Spannung  $S_{33}$  an der Stelle  $C_{33}^k$  vorzunehmen ist, d.h. es gilt mit der Taylorreihenentwicklung von  $S_{33}$  und Abbruch nach dem linearen Glied

$$S_{33}^{k+1} = 0 = S_{33}^k + \left. \frac{\partial S_{33}}{\partial C_{33}} \right|_{C_{33}^k} (C_{33}^{k+1} - C_{33}^k). \quad (3.54)$$

Mit der Komponente  $\mathbb{C}_{3333}$  der materiellen Form des Werkstoffensors aus der Beziehung (2.57) bzw. (3.27) gilt dann

$$C_{33}^{k+1} = C_{33}^k - \left\{ \left. \frac{\partial S_{33}}{\partial C_{33}} \right|_{C_{33}^k} \right\}^{-1} S_{33}^k = C_{33}^k - 2 \frac{S_{33}^k}{\mathbb{C}_{3333}^k}. \quad (3.55)$$

### 3.4.3 Spannungs- und Materialtensoren für kompressible Materialien im ebenen Spannungszustand

Nach der Berechnung der Komponente  $C_{33}$  kann der Spannungstensor aus der Beziehung des allgemeinen dreidimensionalen Verzerrungszustandes berechnet werden, d.h.

$$\mathbf{S}_{esz} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}. \quad (3.56)$$

Der Materialtensor  $\mathbb{C}_{esz}$  des ebenen Spannungszustands kann im weiteren durch eine Kondensation aus dem Materialtensor  $\mathbb{C}$  des allgemeinen dreidimensionalen Verzerrungszustandes hergeleitet werden. Hierzu wird das vollständige Differential des Spannungstensors  $\mathbf{S}$  in der Form

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}_{esz}} : d\mathbf{C}_{esz} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial C_{33}} \cdot dC_{33}. \quad (3.57)$$

betrachtet und  $dC_{33}$  aus der Bedingung  $dS_{33} = 0$  berechnet, d.h. es gilt

$$0 = dS_{33} = \frac{\partial S_{33}}{\partial \mathbf{C}_{esz}} : d\mathbf{C}_{esz} + \frac{\partial S_{33}}{\partial C_{33}} \cdot dC_{33} \quad (3.58)$$

und damit

$$dC_{33} = \left[ - \left\{ \frac{\partial S_{33}}{\partial \mathbf{C}_{esz}} \right\}^{-1} \frac{\partial S_{33}}{\partial C_{33}} \right] : d\mathbf{C}_{esz}. \quad (3.59)$$

Für die Ableitung der Spannungen  $\mathbf{S}_{esz}$  nach  $\mathbf{C}_{esz}$  folgt der Materialtensor

$$\mathbb{C}_{esz} = 2 \left\{ \frac{\partial \mathbf{S}_{esz}}{\partial \mathbf{C}_{esz}} - \left\{ \frac{\partial S_{33}}{\partial \mathbf{C}_{esz}} \right\}^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_{esz}}{\partial C_{33}} \otimes \frac{\partial S_{33}}{\partial \mathbf{C}_{esz}} \right\}, \quad (3.60)$$

und mit (3.56) ergibt sich die Darstellung

$$\mathbb{C}_{esz} = 4 \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}_{esz} \partial \mathbf{C}_{esz}} - \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial C_{33} \partial C_{33}} \right\}^{-1} \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}_{esz} \partial C_{33}} \otimes \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}_{esz} \partial C_{33}} \right\}. \quad (3.61)$$

Die lokale Iteration zur Bestimmung der Dickenänderung  $C_{33}$  kompressibler Materialien im ebenen Spannungszustand ist in der nachfolgenden Tafel zusammengestellt.

**Tafel 3.7:** Der Verzerrungszustand des ebenen Spannungszustandes

**Eingang:** Gegeben sei der ebene Anteil  $\mathbf{C}_{esz}$  des Verzerrungstensors  $\mathbf{C}$  und die Abbruchgenauigkeit  $\epsilon$  zur Erfüllung der Bedingung  $S_{33} = 0$ .

1. Berechne die ebenen Anteile der tensoriellen Basis  $\underline{\mathbf{Z}}$  sowie die ebenen Anteile der Ableitung der tensoriellen Basis nach  $\mathbf{C}$ .
2. Wähle den Startwert  $C_{33}^0$  für die lokale Iteration:
  - der ungestörte Zustand  $C_{33} = 1$  oder
  - der Lösungspunkt der vorhergehenden lokalen Iteration.
3. Lokale Iteration zur Bestimmung der Dickenänderung  $C_{33}$ :
  - (a) Berechne die Anteile von  $C_{33}^k$  an der Tensorbasis  $\underline{\mathbf{Z}}$  und an den Ableitungen der Basistensoren nach  $\mathbf{C}$ .
  - (b) Berechne die Invarianten  $\mathbb{I}_{\mathbf{C}^k}$ ,  $\mathbb{II}_{\mathbf{C}^k}$ ,  $\mathbb{III}_{\mathbf{C}^k}$  des vollständigen Verzerrungstensors  $\mathbf{C}^k$ .
  - (c) Bestimme die Matrix  $\underline{\mathbf{A}}$ , sowie die Koeffizienten  $\alpha_m^k$  und  $\beta_{lm}^k$  zur Bestimmung der Spannungs- und Materialtensoren.
  - (d) Berechne die Komponenten  $S_{33}^k$  des Spannungs- und  $\mathbb{C}_{3333}^k$  des Materialtensors aus (3.25) bzw. (3.27).
  - (e) Abbruch der Berechnung:  
Für  $|S_{33}^k| < \epsilon$  setze  $C_{33}^* = C_{33}^k$  und gehe zum Schritt 4.
  - (f) Berechne die Verbesserung der Dickenänderung gemäß

$$C_{33}^{k+1} = C_{33}^k - 2 \frac{S_{33}^k}{\mathbb{C}_{3333}^k}.$$

- (g) Setze  $k = k + 1$  und gehe zu Schritt 3a.
4. Berechne mit der Lösung  $C_{33}^*$  den vollständigen Verzerrungszustand  $\mathbf{C}$ , die Basistensoren, die Ableitung der Basistensoren, die Invarianten und bestimme damit den aktuellen Spannungszustand  $\mathbf{S}$  sowie die Materialmatrix  $\mathbb{C}$  des allgemeinen räumlichen Verzerrungszustandes gemäß Tafel 3.4.
5. Berechnung der Materialmatrix  $\mathbb{C}_{esz}$  des ebenen Spannungszustandes nach (3.61), d.h.

$$\mathbb{C}_{esz} = 4 \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}_{esz} \partial \mathbf{C}_{esz}} - \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial C_{33} \partial C_{33}} \right\}^{-1} \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}_{esz} \partial C_{33}} \otimes \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}_{esz} \partial C_{33}} \right\}.$$

## 3.5 Der ebene Spannungszustand bei inkompressiblen Materialien

Für die Grundlagen der Berechnung, insbesondere für die Einführung der ebenen Spannungs- und Verzerrungstensoren  $\mathbf{S}_{esz}$  und  $\mathbf{C}_{esz}$ , siehe Abschnitt 3.4.1. Die Berechnung inkompressibler Materialien im ebenen Spannungszustand basiert auf den Ergebnissen des Abschnitts 3.3 für inkompressible Materialien im allgemeinen dreidimensionalen Verzerrungszustand, die in der Tafel 3.5 zusammengefaßt sind. Die Ergebnisse sind in anderer Notation schon in *Gruttmann, Taylor* [46] enthalten.

### 3.5.1 Die Berechnung der Dickenänderung

Mit der Inkompressibilitätsbedingung nach (2.22), die in diesem Fall in der Form

$$\bar{\text{III}}_{\mathbf{C}} = C_{33} \cdot \det \mathbf{C}_{esz} = C_{33} \cdot \{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{12}\} = 1 \quad (3.62)$$

geschrieben werden kann, ist die direkte Berechnung der Dickenveränderung

$$C_{33} = \hat{C}_{33}(\mathbf{C}_{esz}) = \frac{1}{\det \mathbf{C}_{esz}} = \frac{1}{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{12}} \quad (3.63)$$

möglich. Die Ableitung dieser Beziehung nach  $\mathbf{C}_{esz}$  ergibt

$$\frac{\partial C_{33}}{\partial \mathbf{C}_{esz}} = -C_{33}^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{esz}} [\det \mathbf{C}_{esz}] = -C_{33}^2 \det \mathbf{C}_{esz} \mathbf{C}_{esz}^{-1} = -C_{33} \mathbf{C}_e^{-1}. \quad (3.64)$$

### 3.5.2 Spannungs- und Materialtensoren für inkompressible Materialien im ebenen Spannungszustand

Der Ausgangspunkt für die Berechnung inkompressibler Materialien im ebenen Spannungszustand ist die Formänderungsenergie nach Gleichung (2.77), d.h. in der Form

$$W = \check{W}(I, II, III) = \bar{W}(\bar{I}, \bar{II}) + U(J).$$

Der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor ergibt sich nach Abschnitt 3.3 zu

$$\mathbf{S} = J U' \mathbf{C}^{-1} + 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}},$$

so daß mit der Beziehung  $[C_{33}]^{-1} = [C^{-1}]_{33}$  aus der Bedingung  $S_{33} = 0$ , d.h. aus

$$S_{33} = J U' C_{33}^{-1} + 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial C_{33}} = 0, \quad (3.65)$$

der hydrostatische Druck  $p = U'$  zu

$$p = U' = -\frac{2}{J} C_{33} \frac{\partial \bar{W}}{\partial C_{33}} \quad (3.66)$$

berechnet werden kann. Damit können die restlichen Spannungen  $\mathbf{S}_{esz}$  in der Form

$$\mathbf{S}_{esz} = 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \left\{ \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}_{esz}} - C_{33} \frac{\partial \bar{W}}{\partial C_{33}} \mathbf{C}_{esz}^{-1} \right\} \quad (3.67)$$

dargestellt werden. Hieraus kann der Materialtensor  $\mathbb{C}_{esz}$  direkt berechnet werden, d.h. es gilt

$$\mathbb{C}_{esz} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{esz}}{\partial \mathbf{C}_{esz}} + 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{esz}}{\partial C_{33}} \otimes \frac{\partial C_{33}}{\partial \mathbf{C}_{esz}} = 2 \left\{ \frac{\partial \mathbf{S}_{esz}}{\partial \mathbf{C}_{esz}} - C_{33} \frac{\partial \mathbf{S}_{esz}}{\partial C_{33}} \otimes \mathbf{C}_{esz}^{-1} \right\}. \quad (3.68)$$

Eine weitere Form ergibt sich durch Einsetzen des Ausdrucks (3.67) des Spannungstensors in die obige Beziehung und die Ausführung der auftretenden Ableitungen, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \mathbb{C}_{esz} &= \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \mathbf{C}_{esz} \partial \mathbf{C}_{esz}} - C_{33} \frac{\partial \bar{W}}{\partial C_{33}} \frac{\partial \mathbf{C}_{esz}^{-1}}{\partial \mathbf{C}_{esz}} \\ &- \left\{ \mathbf{C}_{esz}^{-1} \otimes \left( C_{33} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \mathbf{C}_{esz} \partial C_{33}} \right) + \left( C_{33} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \mathbf{C}_{esz} \partial C_{33}} \right) \otimes \mathbf{C}_{esz}^{-1} \right\} \\ &+ \left\{ C_{33} \frac{\partial}{\partial C_{33}} \left( C_{33} \frac{\partial \bar{W}}{\partial C_{33}} \right) \right\} \mathbf{C}_{esz}^{-1} \otimes \mathbf{C}_{esz}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Der Ablauf der Berechnung des Spannungs- und des Materialtensors eines inkompressiblen Materials im ebenen Spannungszustand ist in der folgenden Tafel zusammengefaßt.

**Tafel 3.8:** Spannungs- und Materialtensoren für inkompressible Materialien im ebenen Spannungszustand

**Eingang:** Ebener Anteil  $\mathbf{C}_{esz}$  des Verzerrungszustandes.

1. Berechne die Dickenveränderung  $C_{33}$  gemäß

$$C_{33} = \hat{C}_{33}(\mathbf{C}_{esz}) = \frac{1}{\det \mathbf{C}_{esz}} = \frac{1}{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}}$$

2. Berechne mit dem vollständigen dreidimensionalen Verzerrungstensor  $\mathbf{C}$  die deviatorischen Anteile der Formänderungsenergie nach Abschnitt 3.3, d.h. von

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}}.$$

3. Berechne den Spannungstensor  $\mathbf{S}_{esz}$  eines inkompressiblen Materials im ebenen Spannungszustand nach (3.67).
4. Berechne den Materialtensor  $\mathbb{C}_{esz}$  eines inkompressiblen Materials im ebenen Spannungszustand nach (3.69).

### 3.6 Ableitung der Formänderungsenergie in den Eigenwerten nach den Invarianten für den allgemeinen Fall $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

In diesem Abschnitt wird für eine Formänderungsenergiefunktion in den Eigenwerten nach (2.78), d.h.  $W = \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , die gewählte Vorgehensweise am Beispiel des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors  $\mathbf{S}$  und des zugehörigen Materialtensors  $\mathbb{C}$  erläutert. Zur Verwendung der in den Abschnitten 3.2 bzw. 3.5 beschriebenen Algorithmen sind die Ableitungen nach den Invarianten zu berechnen.

#### 3.6.1 Ableitungen der Eigenwerte nach den Invarianten

Die Beziehung zwischen den Invarianten  $I_k, k = 1, 2, 3$ , und den Eigenwerten  $\lambda_i^2, i = 1, 2, 3$ , des Rechts-Cauchy-Green-Tensors  $\mathbf{C}$  lautet

$$I_{\mathbf{C}} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad (3.70)$$

$$II_{\mathbf{C}} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2, \quad (3.71)$$

$$III_{\mathbf{C}} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \quad (3.72)$$

Für die Ableitung dieser Beziehungen nach den Eigenwerten gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial I}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial I}{\partial \lambda_3} \\ \frac{\partial II}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial II}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial II}{\partial \lambda_3} \\ \frac{\partial III}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial III}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial III}{\partial \lambda_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 2\lambda_2 & 2\lambda_3 \\ 2\lambda_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) & 2\lambda_2(\lambda_3^2 + \lambda_1^2) & 2\lambda_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \\ 2\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3^2 & 2\lambda_2\lambda_1^2\lambda_3^2 & 2\lambda_3\lambda_1^2\lambda_2^2 \end{pmatrix}. \quad (3.73)$$

Durch eine Matrizeninversion erhält man die Ableitungen der Eigenwerte nach den Invarianten in der Form

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial I} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial II} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial III} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial I} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial II} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial III} \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial I} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial II} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^4}{N_1} & \frac{-\lambda_1^2}{N_1} & \frac{1}{N_1} \\ \frac{\lambda_2^4}{N_2} & \frac{-\lambda_2^2}{N_2} & \frac{1}{N_2} \\ \frac{\lambda_3^4}{N_3} & \frac{-\lambda_3^2}{N_3} & \frac{1}{N_3} \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

mit den Abkürzungen

$$N_i := 2\lambda_i(2\lambda_i^4 - I\lambda_i^2 + III\lambda_i^{-2}) = 2\lambda_i(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)(\lambda_i^2 - \lambda_k^2), \quad (3.75)$$

wobei die Indizes  $i, j, k$  eine gerade Permutation der Zahlen 1, 2, 3 darstellen, siehe auch *Ting* [101], *Morman* [63]. Die Ableitung des  $i$ -ten Eigenwertes nach der  $k$ -ten Invarianten kann auch in der Form

$$\boxed{\frac{\partial \lambda_i}{\partial I_k} = \frac{(-1)^{k+1}}{N_i} \lambda_i^{6-2k}} \quad (3.76)$$

geschrieben werden.

Bedeutsam für die gesamte Vorgehensweise ist die Tatsache, daß die Ausdrücke  $N_i$  nur für den Fall  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$  ungleich Null sind, d.h. daß die Inversion nur für diesen Fall überhaupt möglich ist. Damit sind die Beziehungen (3.74) und (3.76) für die Sonderfälle des biaxialen Verzerrungszustandes  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$  (entspricht wegen der Isotropie dem biaxialen Spannungszustand) und  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  (hydrostatischer Spannungszustand) nicht definiert. Dies wird insbesondere daran deutlich, daß in (3.76) die Nenner  $N_i$  für zusammenfallende Eigenwerte zu Null werden.

### 3.6.2 Erste Ableitung der Formänderungsenergie nach den Invarianten für $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

Für den Fall  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$  können die Beziehungen (3.70) bis (3.72) nach den Eigenwerten  $\lambda_i$  aufgelöst werden. Unter Berücksichtigung der Ableitung der Eigenwerte nach den Invarianten gemäß (3.76) ergibt sich die Ableitung der Formänderungsenergie nach den Invarianten aus der Kettenregel zu

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{W}(\lambda_s(I_t))}{\partial I_k} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial I_k} = (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\lambda_i^{6-2k}}{N_i}.} \quad (3.77)$$

### 3.6.3 Zweite Ableitung der Formänderungsenergie nach den Invarianten für $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

Zur Vereinfachung der Notation wird die Einsteinsche Summenkonvention über doppelt auftretende Indizes benutzt. Die zweite Ableitung der Formänderungsenergie  $W$  nach den Invarianten  $\frac{\partial^2 W}{\partial I_s \partial I_t}$  kann auf zweierlei Wegen berechnet werden. Zunächst sei die Darstellung des Materialtensors nach (3.15) betrachtet, die durch Anwendung der Kettenregel mit Hilfe der partiellen Ableitungen der Eigenwerte nach den Invarianten in die Form

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= 4 \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \lambda_j}{\partial \mathbf{C}} \right\} + \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \right] \\ &= 4 \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^3 \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial I_s} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \cdot \frac{\partial \lambda_j}{\partial I_t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial I_s \partial I_t} \right\} \frac{\partial I_s}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial I_t}{\partial \mathbf{C}} \\ &+ 4 \sum_{i=1}^3 \sum_{s=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial I_s} \cdot \frac{\partial^2 I_s}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \end{aligned}$$

überführt werden kann. Ein Vergleich mit Gleichung (3.9) liefert dann für die zweite Ableitung der Formänderungsenergie nach den Invarianten die Beziehung

$$\frac{\partial^2 W}{\partial I_s \partial I_t} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \lambda_i}{\partial I_s} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \cdot \frac{\partial \lambda_j}{\partial I_t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial I_s \partial I_t}. \quad (3.78)$$



Diese Beziehung ist für die weitere Herleitung ungünstig, da hierfür die zweite partielle Ableitung der Eigenwerte nach den Invarianten, d.h.  $\frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial I_s \partial I_t}$ , zu berechnen ist, was für den Fall zusammenfallender Eigenwerte nicht trivial ist, siehe auch Abschnitt 3.6.1.

Ein besserer Zugang ergibt sich aus der Betrachtung der Ableitung von

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial W}{\partial I_k} \cdot \frac{\partial I_k}{\partial \lambda_i} \quad (3.79)$$

nach  $\lambda_j$ , d.h. von

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left( \frac{\partial W}{\partial I_k} \cdot \frac{\partial I_k}{\partial \lambda_i} \right) \\ &= \frac{\partial W}{\partial I_k} \cdot \frac{\partial^2 I_k}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} + \frac{\partial I_k}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial I_k \partial I_m} \cdot \frac{\partial I_m}{\partial \lambda_j}. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial I_s}$  und  $\frac{\partial \lambda_j}{\partial I_t}$  ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_i}{\partial I_s} \cdot \frac{\partial I_k}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial I_k \partial I_m} \cdot \frac{\partial I_m}{\partial \lambda_j} \cdot \frac{\partial \lambda_j}{\partial I_t} &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial I_s} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \cdot \frac{\partial \lambda_j}{\partial I_t} \\ &\quad - \frac{\partial \lambda_i}{\partial I_s} \cdot \frac{\partial W}{\partial I_k} \cdot \frac{\partial^2 I_k}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \cdot \frac{\partial \lambda_j}{\partial I_t}, \end{aligned}$$

die mit den Beziehungen

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial I_s} \cdot \frac{\partial I_k}{\partial \lambda_i} = \delta_{sk} \quad \text{und} \quad \frac{\partial I_m}{\partial \lambda_j} \cdot \frac{\partial \lambda_j}{\partial I_t} = \delta_{mt} \quad (3.80)$$

in die endgültige Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial I_s \partial I_t} &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial I_s} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \cdot \frac{\partial \lambda_j}{\partial I_t} - \frac{\partial W}{\partial I_k} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial I_s} \cdot \frac{\partial^2 I_k}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \cdot \frac{\partial \lambda_j}{\partial I_t} \\ &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial I_s} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} - \frac{\partial W}{\partial I_k} \cdot \frac{\partial^2 I_k}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right\} \cdot \frac{\partial \lambda_j}{\partial I_t} \\ &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial I_s} \cdot A_{ij} \cdot \frac{\partial \lambda_j}{\partial I_t} \end{aligned} \quad (3.81)$$

der zweiten Ableitung der Formänderungsenergie nach den Invarianten überführt werden kann. Dabei wurde die Matrix  $\underline{A}$  mit den Elementen  $A_{ij}$  gemäß

$$A_{ij} := \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} - \frac{\partial W}{\partial I_k} \cdot \frac{\partial^2 I_k}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \quad (3.82)$$

eingeführt. Hierbei treten die zweiten Ableitungen der Invarianten nach den Eigenwerten auf, die direkt aus den Beziehungen (3.70) bis (3.72) durch zweimalige Differentiation nach den Eigenwerten in der Form

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} = 2\delta_{ij}, \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial^2 II}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} = 2 \left\{ (I - 3\lambda_i^2) \delta_{ij} + 2\lambda_i \lambda_j \right\}, \quad (3.84)$$

$$\frac{\partial^2 III}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} = 2III \left\{ 2\lambda_i^{-1} \lambda_j^{-1} - \lambda_i^{-2} \delta_{ij} \right\} \quad (3.85)$$

hergeleitet werden können. Durch Einsetzen der Beziehungen für die erste Ableitung der Formänderungsenergie nach den Invarianten (3.77), für die zweiten Ableitungen der Invarianten nach den Eigenwerten (3.83) – (3.85) und unter Berücksichtigung der Definition der Werte  $N_i$  nach (3.75) ergibt sich für die Diagonalelemente  $A_{ii}$  die Beziehung

$$A_{ii} = \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_i} - \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}. \quad (3.86)$$

Analog hierzu folgt für die Nebendiagonalelemente  $A_{ij}$  für  $i \neq j$

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} + \frac{2\lambda_j}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - \frac{2\lambda_i}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \frac{\partial W}{\partial \lambda_j}. \quad (3.87)$$

Damit erhält Gleichung (3.81) die Form

$$\frac{\partial^2 W}{\partial I_s \partial I_t} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial I_s} \cdot A_{ij} \cdot \frac{\partial \lambda_j}{\partial I_t} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} \frac{(-1)^{s+t}}{N_i N_j} \lambda_i^{2(3-s)} \lambda_j^{2(3-t)}. \quad (3.88)$$

Der Ablauf der Berechnung der Ableitungen einer Formänderungsenergiefunktion der Eigenwerte nach den Invarianten ist in der nachfolgenden Tafel zusammengestellt.

**Tafel 3.9:** Ableitung der Formänderungsenergie der Eigenwerte nach den Invarianten für  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

1. Berechne die Ableitungen der Formänderungsenergie  $W = \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  nach den Eigenwerten, d.h. von

$$\frac{\partial \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}.$$

2. Berechne die Beziehungen

$$N_i := 2\lambda_i(2\lambda_i^4 - \text{I}\lambda_i^2 + \text{III}\lambda_i^{-2}) = 2\lambda_i(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)(\lambda_i^2 - \lambda_k^2).$$

3. Berechne die ersten partiellen Ableitungen nach den Invarianten in der Form

$$\frac{\partial \tilde{W}(\lambda_s(I_t))}{\partial I_k} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial I_k} = (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\lambda_i^{6-2k}}{N_i}$$

4. Berechne die zweiten partiellen Ableitungen nach den Invarianten durch

- (a) Berechnung der Werte  $A_{ij}$  für  $i = j$  nach Gleichung (3.86).
- (b) Berechnung der Werte  $A_{ij}$  für  $i \neq j$  nach Gleichung (3.87).
- (c) Auswertung der Gleichung (3.88).

### 3.7 Ableitung der Formänderungsenergie in den Eigenwerten nach den Invarianten für den Sonderfall $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

Das in Tafel 3.9 angegebene Verfahren zur Berechnung der partiellen Ableitung der Formänderungsenergie  $W = \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  nach den Invarianten ist auf den Sonderfall  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$  nicht direkt anzuwenden, da die Nenner  $N_i = 2\lambda_i(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)(\lambda_i^2 - \lambda_k^2)$  dann zu Null werden. Somit ist für den Sonderfall die Angabe der gewünschten partiellen Ableitungen auf dem Weg der Grenzwertbetrachtung zu erarbeiten.

#### 3.7.1 Spannungs- und Materialtensoren für den Sonderfall $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

Der Spannungstensor  $\mathbf{S}$  lautet nach Gleichung (3.24) und (3.25)

$$\mathbf{S} = 2 \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_i} \sum_{m=1}^3 (A_{im} \mathbf{Z}_m) \right]. \quad (3.89)$$

Für den Sonderfall  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$  ergeben sich die Spannungen aus dem Grenzübergang

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \mathbf{S} &= \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \left\{ 2 \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_i} \sum_{m=1}^3 (A_{im} \mathbf{Z}_m) \right] \right\} \\ &= 2 \sum_{i=1}^3 \left\{ \left( \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{\partial W}{\partial I_i} \right) \left( \sum_{m=1}^3 A_{im} \mathbf{Z}_m \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

da die Größen  $A_{im}$  und  $\mathbf{Z}_m$  im Punkt  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$  stetig sind. Entsprechende Beziehungen gelten für den Materialtensor  $\mathbb{C}$ , so daß für die Berechnung nur die Grenzwerte

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{\partial W}{\partial I_i} \quad \text{und} \quad \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j}$$

für  $i, j = 1, 2, 3$  bereitzustellen sind.

#### 3.7.2 Betrachtung der Grenzwerte $\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} W_{,i}$

##### 3.7.2.1 Grenzwertbetrachtung für beliebige hyperelastische Materialien

Die partielle Ableitung der Formänderungsenergie nach den Invarianten für  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$  ergibt die Beziehung der Gleichung (3.77). Für den Grenzwertübergang  $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$  gilt somit

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{\partial W}{\partial I_k} &= \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \left\{ (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \frac{\lambda_i^{2(3-k)}}{N_i} \right\} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} \bigg|_{\lambda_2=\lambda_1} \frac{\lambda_3^{2(3-k)}}{2\lambda_3(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)^2} \\ &+ (-1)^{k+1} \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \left\{ \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \frac{\lambda_1^{2(3-k)}}{N_1} + \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \frac{\lambda_2^{2(3-k)}}{N_2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.91)$$

da  $N_3$  stetig für  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$  ist. Damit ist nur noch der Ausdruck

$$A := \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \left\{ \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \frac{\lambda_1^{2(3-k)}}{N_1} + \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \frac{\lambda_2^{2(3-k)}}{N_2} \right\} \quad (3.92)$$

zu untersuchen. Hierzu ist die Kenntnis der Formänderungsenergie  $W$  und deren Ableitung nach den Eigenwerten erforderlich. Somit ist die obige Gleichung der weitestgehende Punkt, der ohne Kenntnis des speziellen Materials erreicht werden kann.

### 3.7.2.2 Grenzwertbetrachtung für Ogden-Materialien

Im weiteren wird die Wahl eines Materials aus der Klasse der Ogden-Materialien nach (2.74) vorausgesetzt. Der volumetrische Anteil  $g(J)$  der Formänderungsenergie kann direkt nach den Invarianten abgeleitet, d.h. es gilt mit  $\text{III} = J^2$

$$\frac{\partial g(J)}{\partial \text{III}} = \frac{\partial g}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \text{III}} = \frac{1}{2J} \frac{\partial g}{\partial J}. \quad (3.93)$$

Somit wird im weiteren nur noch der Anteil

$$W = \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left\{ \lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} \right\} \quad (3.94)$$

mit der ersten Ableitung nach den Eigenwerten

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_i} = \sum_{p=1}^N \mu_p \lambda_i^{\alpha_p - 1} \quad (3.95)$$

betrachtet. Damit gilt mit (3.92)

$$A = \sum_{p=1}^N \mu_p \left\{ \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \left[ \frac{\lambda_1^{\alpha_p + 5 - 2k}}{N_1} + \frac{\lambda_2^{\alpha_p + 5 - 2k}}{N_2} \right] \right\}, \quad (3.96)$$

und für die weitere Untersuchungen ist nur noch der Ausdruck

$$B := \left[ \frac{\lambda_1^\beta}{N_1} + \frac{\lambda_2^\beta}{N_2} \right] = \frac{\lambda_1^{\beta-1} (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) - \lambda_2^{\beta-1} (\lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} \quad (3.97)$$

mit  $\beta := \alpha_p + 5 - 2k$  zu betrachten. Mit dem Ansatz  $\lambda_2 = \lambda_1 + \epsilon$  folgt nach Einsetzen in den Ausdruck für  $B = \hat{B}(\epsilon)$  die Grenzwertbetrachtung für  $\epsilon \rightarrow 0$ , die nach Ausführung und Anwendung der Regel von l' Hospital die Beziehung

$$B(0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \hat{B}(\epsilon) = \frac{(\beta - 3)\lambda_1^{\beta-1} + (1 - \beta)\lambda_1^{\beta-3}\lambda_3^2}{4(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)^2} \quad (3.98)$$

liefert.

Mit diesem Ergebnis kann der Grenzwert gemäß (3.90) berechnet werden.

Die partiellen Ableitungen der Formänderungsenergie nach den Eigenwerten ergeben sich zu

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{\partial W}{\partial I_k} = \frac{(-1)^{k+1}}{4(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)^2} \sum_{p=1}^N \mu_p R(\alpha_p, k) \quad (3.99)$$

mit dem Summanden

$$R(\alpha_p, k) := (\delta - 2)\lambda_1^\delta - \delta\lambda_1^{\delta-2}\lambda_3^2 + 2\lambda_3^\delta \quad (3.100)$$

und der Schreibweise  $\delta = \hat{\delta}(\alpha_p, k) := \alpha_p + 4 - 2k$ .

### 3.7.3 Betrachtung der Grenzwerte $\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} W_{,ij}$

#### 3.7.3.1 Grenzwertbetrachtung für beliebige hyperelastische Materialien

Für die zweiten partiellen Ableitungen der Formänderungsenergie  $W$  nach den Eigenwerten gilt für  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$  die Gleichung (3.88), so daß für den Grenzübergang  $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$  folgt

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{\partial^2 W}{\partial I_s \partial I_t} = \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} \frac{(-1)^{s+t}}{N_i N_j} \lambda_i^{2(3-s)} \lambda_j^{2(3-t)} \right\}. \quad (3.101)$$

Für die Grenzwertbetrachtung sind somit die Ausdrücke

$$\begin{aligned} E_1 &:= A_{11} \frac{\lambda_1^{12-2(s+t)}}{N_1^2} + A_{22} \frac{\lambda_2^{12-2(s+t)}}{N_2^2} + A_{12} \frac{\lambda_1^{2(3-s)} \lambda_2^{2(3-t)}}{N_1 N_2} + A_{21} \frac{\lambda_2^{2(3-s)} \lambda_1^{2(3-t)}}{N_2 N_1}, \\ E_2 &:= A_{13} \frac{\lambda_1^{2(3-s)} \lambda_3^{2(3-t)}}{N_1 N_3} + A_{23} \frac{\lambda_2^{2(3-s)} \lambda_3^{2(3-t)}}{N_2 N_3}, \\ E_3 &:= A_{31} \frac{\lambda_3^{2(3-s)} \lambda_1^{2(3-t)}}{N_3 N_1} + A_{32} \frac{\lambda_3^{2(3-s)} \lambda_2^{2(3-t)}}{N_3 N_2}, \\ E_4 &:= A_{33} \frac{\lambda_3^{2(3-s)} \lambda_3^{2(3-t)}}{N_3 N_3} \end{aligned}$$

zu betrachten, die jeweils einzeln einen endlichen Grenzwert besitzen, so daß die Aufteilung

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{\partial^2 W}{\partial I_s \partial I_t} &= (-1)^{s+t} \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \{E_1 + E_2 + E_3 + E_4\} \\ &= (-1)^{s+t} \left\{ \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} E_1 + \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} E_2 + \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} E_3 + \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} E_4 \right\} \end{aligned}$$

nach den Rechenregeln der Grenzwertbildung erlaubt ist.

Entsprechend dem Vorgehen bei der ersten partiellen Ableitung nach den Eigenwerten kann erst durch das Einsetzen des speziell gewählten Materials der Grenzübergang durchgeführt werden.

### 3.7.3.2 Grenzwertbetrachtung für Ogden-Materialien

Für die Klasse der Ogden-Materialien ergeben sich die Diagonalelemente  $A_{ii}$  der Matrix  $\underline{A}$  aus (3.87) zu

$$A_{ii} = \sum_{p=1}^N \mu_p (\alpha_p - 2) \lambda_i^{\alpha_p - 2}, \quad (3.102)$$

während für die Nebendiagonalelemente  $i \neq j$  die Beziehung

$$A_{ij} = 2 \sum_{p=1}^N \mu_p \left\{ \frac{\lambda_j \lambda_i^{\alpha_p - 1} - \lambda_i \lambda_j^{\alpha_p - 1}}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \right\} \quad (3.103)$$

folgt.

Zur Berechnung der Grenzwerte ist eine umfangreiche algebraische Berechnung erforderlich, bei der ebenfalls mehrfach die Regel von l' Hospital eingesetzt werden muß. Auf eine genauere Darstellung der Herleitung wird an dieser Stelle verzichtet.

Als Ergebnis der Grenzwertbetrachtung für  $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$  erhält man die zweiten partiellen Ableitungen der Formänderungsenergie  $W$  nach den Eigenwerten

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{\partial^2 W}{\partial I_s \partial I_t} = \frac{(-1)^{s+t}}{96(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)^5} \sum_{p=1}^N \mu_p P(\alpha_p, s, t) \quad (3.104)$$

mit dem Summanden

$$\begin{aligned} P(\alpha_p, s, t) &:= 24\lambda_3^{\gamma-2} \cdot \left\{ \lambda_1^2 \gamma - \lambda_3^2 (\gamma - 12) \right\} \\ &+ \lambda_1^\gamma (\gamma - 8)(\gamma - 6)(\gamma - 4) - 3\lambda_1^{\gamma-2} \lambda_3^2 (\gamma - 8)(\gamma - 6)\gamma \\ &+ 3\lambda_1^{\gamma-4} \lambda_3^4 (\gamma - 8)(\gamma - 2)\gamma - \lambda_1^{\gamma-6} \lambda_3^6 (\gamma - 4)(\gamma - 2)\gamma, \end{aligned} \quad (3.105)$$

wobei die Schreibweise  $\gamma = \hat{\gamma}(\alpha_p, s, t) := \alpha_p + 10 - 2(s + t)$  benutzt wurde.

Den Ablauf der Berechnung faßt die folgende Tafel zusammen.

**Tafel 3.10:** Ableitung der Formänderungsenergie des Ogden-Materials nach den Invarianten für  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

1. Berechnung des Grenzwertes für die ersten Ableitungen:

(a) Berechne die Faktoren

$$\delta = \hat{\delta}(\alpha_p, k) := \alpha_p + 4 - 2k.$$

(b) Berechne den Summanden

$$R(\alpha_p, k) := (\delta - 2)\lambda_1^\delta - \delta\lambda_1^{\delta-2}\lambda_3^2 + 2\lambda_3^\delta.$$

(c) Berechne die ersten Ableitungen nach den Invarianten gemäß

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{\partial W}{\partial I_k} = \frac{(-1)^{k+1}}{4(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)^2} \sum_{p=1}^N \mu_p R(\alpha_p, k).$$

2. Berechnung des Grenzwertes für die zweiten Ableitungen:

(a) Berechne die Faktoren

$$\gamma = \hat{\gamma}(\alpha_p, s, t) := \alpha_p + 10 - 2(s + t).$$

(b) Berechne den Summanden

$$\begin{aligned} P(\alpha_p, s, t) := & 24\lambda_3^{\gamma-2} \cdot \{ \lambda_1^2 \gamma - \lambda_3^2 (\gamma - 12) \} \\ & + \lambda_1^\gamma (\gamma - 8)(\gamma - 6)(\gamma - 4) - 3\lambda_1^{\gamma-2} \lambda_3^2 (\gamma - 8)(\gamma - 6)\gamma \\ & + 3\lambda_1^{\gamma-4} \lambda_3^4 (\gamma - 8)(\gamma - 2)\gamma - \lambda_1^{\gamma-6} \lambda_3^6 (\gamma - 4)(\gamma - 2)\gamma. \end{aligned}$$

(c) Berechne die zweiten Ableitungen nach den Invarianten gemäß

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{\partial^2 W}{\partial I_s \partial I_t} = \frac{(-1)^{s+t}}{96(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)^5} \sum_{p=1}^N \mu_p P(\alpha_p, s, t).$$

### 3.8 Ableitung der Formänderungsenergie in den Eigenwerten nach den Invarianten für den Sonderfall $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

Der Übergang vom allgemeinen Fall zum Sonderfall  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$  ist im Abschnitt 3.7 vorgenommen worden. Aufbauend auf diesem Teilergebnis ist der weitere Übergang zum Grenzwert für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  durchzuführen. Analog dem obigen Vorgehen erhält man die im folgenden dargestellten Ergebnisse für die partiellen Ableitungen der Formänderungsenergie nach den Eigenwerten. Hierbei wird darauf hingewiesen, daß die unten angegebenen Ergebnisse nur für das Ogden-Material gültig sind.

Die Ableitungen der Formänderungsenergiefunktion nach den Invarianten für den Sonderfall identischer Eigenwerte  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  ergeben sich aus dem Grenzübergang  $\lambda_3 \rightarrow \lambda_1$  der Beziehungen (3.99) und (3.104) nach umfangreicher algebraischer Rechnung und mehrmaliger Anwendung der Regel von l' Hospital. Auf eine ausführliche Darstellung der Herleitung wird verzichtet. Die folgende Tafel faßt die Ergebnisse zusammen.

**Tafel 3.11:** Ableitung der Formänderungsenergie des Ogden-Materials nach den Invarianten für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

1. Berechnung des Grenzwertes für die ersten Ableitungen:

- (a) Berechne die Faktoren  $\delta = \hat{\delta}(\alpha_p, k) := \alpha_p + 4 - 2k$ .
- (b) Berechne den Summanden  $R(\alpha_p, k) := (\delta - 2) \delta \lambda_1^{\delta-4}$ .
- (c) Berechne die ersten Ableitungen nach den Invarianten gemäß

$$\lim_{\lambda_2, \lambda_3 \rightarrow \lambda_1} \frac{\partial W}{\partial I_k} = \frac{(-1)^{k+1}}{16} \sum_{p=1}^N \mu_p R(\alpha_p, k)$$

2. Berechnung des Grenzwertes für die zweiten Ableitungen:

- (a) Berechne den Summanden

$$P(\alpha_p, s, t) := \left\{ \prod_{i=1}^5 (\alpha_p + 12 - 2(s + t + i)) \right\} \lambda_1^{\alpha_p - 2(s+t)}$$

- (b) Berechne die zweiten Ableitungen nach den Invarianten gemäß

$$\lim_{\lambda_2, \lambda_3 \rightarrow \lambda_1} \frac{\partial^2 W}{\partial I_s \partial I_t} = \frac{(-1)^{s+t}}{7680} \sum_{p=1}^N \mu_p P(\alpha_p, s, t)$$



# Kapitel 4

## Finite Element Formulierung

Die Finite-Elemente-Methode stellt ein numerisches Näherungsverfahren zur Lösung von (Anfangs-) und Randwertaufgaben dar. Die Grundlagen dieses Verfahrens sind in vielfältiger Form in der Literatur dargestellt worden, siehe z.B. *Bathe* [9], *Hughes*[52], *Zienkiewicz, Taylor* [111].

Für die numerische Berechnung inkompressibler Materialien sind die grundlegenden Ideen des in dieser Arbeit benutzten Vorgehens bei *Simo, Taylor, Pister* [91] zuerst vorgestellt worden. Für die Anwendung auf hyperelastische Materialien siehe auch *Simo, Taylor* [88], *Wriggers* [108], *Müller-Hoeppe* [64].

Aufgrund der umfangreichen Literatur zur Finiten-Elemente-Methode und deren weiten Verbreitung werden an dieser Stelle nur die Grundzüge des Vorgehens aufgezeigt und die Notation eingeführt.

### 4.1 Die Verschiebungsmethode

Im Rahmen dieser Arbeit wurden isoparametrische Scheibenelemente als Dreiecke bzw. Vierecke mit einer variablen Knotenanzahl von drei bis sechs bzw. vier bis neun Knoten sowie ein 8-Knoten isoparametrisches Volumenelement sowohl für eine Formulierung bezüglich der Referenzkonfiguration als auch bezüglich der Momentankonfiguration kodiert. Bei dieser Formulierung sind die Verschiebungen  $\underline{\mathbf{v}}$  der Knoten der finiten Elemente als Unbekannte eingeführt, so daß sich für die Approximation  $\mathbf{u}_h$  des Verschiebungszustandes  $\mathbf{u}$  für die Darstellung auf Elementebene die Beziehung

$$\underline{\mathbf{u}}_{(i)} = \underline{\mathbf{N}}_{(i)} \underline{\mathbf{v}}_{(i)} \quad (4.1)$$

ergibt. Hierbei ist  $\underline{\mathbf{N}}_{(i)}$  die Matrix der Ansatzfunktionen und  $\underline{\mathbf{v}}_{(i)}$  der Vektor der Knotenverschiebungen für das  $i$ -te Element.

Für die isoparametrische Beschreibung der finiten Elemente gilt für die Komponenten  $u_h^i$  des diskreten Verschiebungszustandes

$$u_h^i = \hat{u}_h^i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^{nkel} \hat{N}^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \hat{v}_k^i \quad (4.2)$$

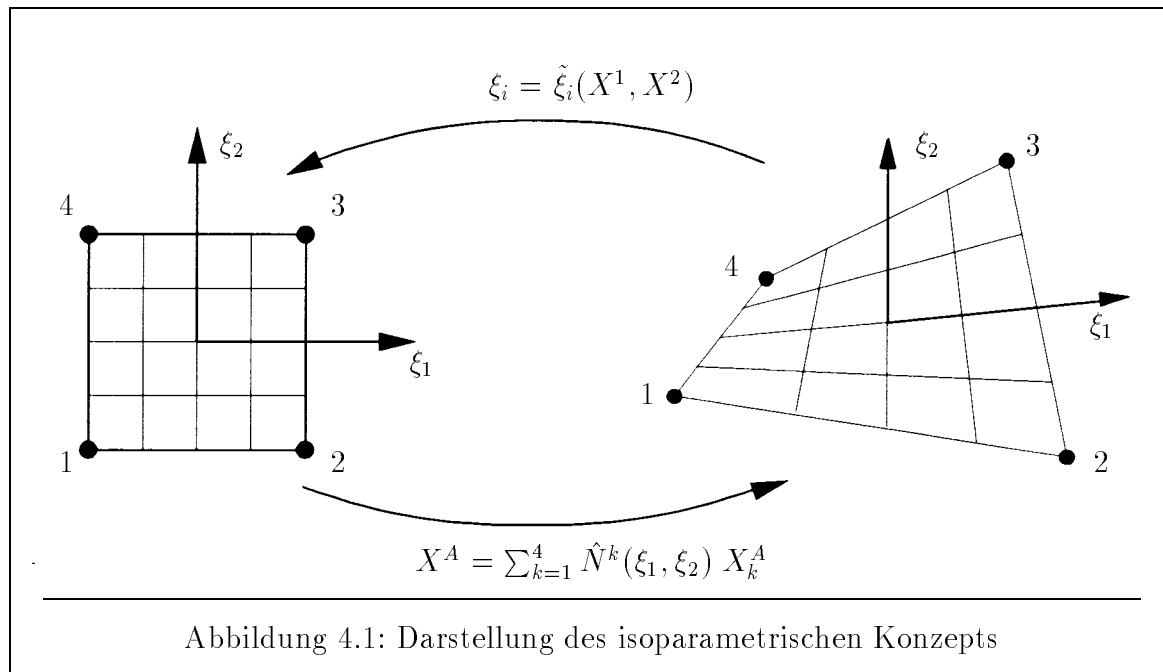
$$= \tilde{u}_h^i(X^1, X^2, X^3) = \sum_{k=1}^{nkel} \tilde{N}^k(X^1, X^2, X^3) v_k^i. \quad (4.3)$$

Dabei sind  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  die lokalen Koordinaten des isoparametrischen Konzeptes und  $X^1, X^2, X^3$  die kartesischen Koordinaten der Punkte der diskreten Referenzkonfiguration. Weiterhin stellen  $X_k^A$  die A-te Koordinate und  $v_k^i$  die i-te Verschiebungskomponente des k-ten Knotens dar.

Die Besonderheit des isoparametrischen Konzeptes besteht darin, daß die Geometrie und der Verschiebungszustand im Element in gleicher Form über die Knotenwerte approximiert werden, d.h. es gilt für die Geometrie des Elementes

$$X_h^A = \hat{X}_h^A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^{nkel} \hat{N}^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \hat{X}_k^A. \quad (4.4)$$

Das isoparametrische Konzept ist in der Abbildung 4.1 verdeutlicht.



Die Beziehung (4.1) gelte auch für die virtuelle Verschiebung  $\delta \mathbf{u}$ , die sich aus der Testfunktion  $\boldsymbol{\eta}$  zu  $\epsilon \boldsymbol{\eta} = \delta \mathbf{u}$  ergibt. In der Matrixschreibweise gilt dann mit den virtuellen Knotenverschiebungen  $\delta \underline{v}_{(i)}$

$$\delta \underline{u}_{(i)} = \underline{N}_{(i)} \delta \underline{v}_{(i)}. \quad (4.5)$$

Mit der Einführung der B-Matrizen in der Form

$$(\text{grad}^s \underline{u})_{(i)} = \underline{B}_{(i)} \underline{v}_{(i)} \quad \text{bzw.} \quad (\text{grad}^s \delta \underline{u})_{(i)} = \underline{B}_{(i)} \delta \underline{v}_{(i)} \quad (4.6)$$

und der geeigneten Wahl der Matrix  $\underline{R}_{(i)}$  der Ansatzfunktionen ergibt sich für den Anteil des i-ten Elementes an der schwachen Form des Gleichgewichts z.B. in der Momentankonfiguration aus (2.81) die Beziehung

$$g_{h(i)} = \delta \underline{v}_{(i)}^T \left\{ \int_{\mathbf{B}_{t(i)}} \underline{R}_{(i)}^T \underline{T}_{(i)} dv - \int_{\mathbf{B}_{t(i)}} \underline{N}_{(i)}^T \rho \bar{\underline{k}}_{(i)} dv - \int_{\partial \mathbf{B}_{t\sigma(i)}} \underline{N}_{(i)}^T \bar{\underline{l}}_{(i)} da. \right\} \quad (4.7)$$

Hieraus folgt durch Assemblierung aller Elementanteile die Matrizendarstellung

$$g_h = \delta \underline{V}^T \underline{g} = 0 \quad \text{und damit} \quad \underline{g} = \underline{0} \quad (4.8)$$

mit dem Fehlkraftvektor  $\underline{g}$  der Momentankonfiguration. Analog kann somit die Bedingung

$$G_h = \delta \underline{V}^T \underline{G} = 0 \quad \text{und damit} \quad \underline{G} = \underline{0} \quad (4.9)$$

für den Fehlkraftvektor  $\underline{G}$  der Referenzkonfiguration hergeleitet werden. Diese Beziehungen werden für die Behandlung der diskreten Sensitivitätsanalyse in Abschnitt 5.3 benötigt.

Weiterhin ergibt sich für die Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts aus (2.93) die matrizielle Darstellung

$$A_{(i)} := \delta \underline{v}_{(i)}^T \left\{ \int_{\mathbf{B}_{t(i)}} \underline{B}_{(i)}^T \underline{q}_{(i)} \underline{B}_{(i)} dv + \int_{\mathbf{B}_{t(i)}} \underline{R}_{(i)}^T \underline{T}_{(i)} \underline{R}_{(i)} dv \right\} \underline{v}_{(i)} \\ + g_{(i)}(\bar{\Phi}).$$

Durch Assemblierung aller Elementanteile folgt dann die Matrizendarstellung der Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts.

## 4.2 Die Gemischte Methode

Im Gegensatz zur Verschiebungsmethode, bei der die Spannungen über die Verzerungen und das Werkstoffgesetz und damit durch die Ableitung der Ansätze für die Verschiebungen ermittelt werden, werden bei der gemischten Methode für die Spannungen bzw. andere kontinuumsmechanische Größen eigene Ansätze eingeführt. Für die Betrachtung quasi-inkompressibler Materialien führt dies zur Einführung von unabhängigen Ansätzen für den Druck  $p$  in der Form

$$\underline{p}_{(i)} = \underline{M}_{(i)} \underline{q}_{(i)} \quad \text{bzw.} \quad \delta \underline{p}_{(i)} = \underline{M}_{(i)} \delta \underline{q}_{(i)}, \quad (4.10)$$

sowie für die Jacobi-Determinante des Deformationsgradienten

$$\underline{\theta}_{(i)} = \underline{L}_{(i)} \underline{\phi}_{(i)} \quad \text{bzw.} \quad \delta \underline{\theta}_{(i)} = \underline{L}_{(i)} \delta \underline{\phi}_{(i)} \quad (4.11)$$

entsprechend der Darstellung in Abschnitt 2.5.

Wesentlich für das Vorgehen ist, daß die zusätzlich eingeführten Knotenvariablen durch Manipulationen auf Elementebene eliminiert werden können. Dieser Vorgang ist in *Simo, Taylor, Pister* [91] zuerst vorgestellt worden, siehe auch *Müller-Hoeppe* [64].

Entsprechend dem obigen Vorgehen ergibt sich für den Elementanteil die Darstellung

$$\begin{aligned}
A_{(i)} &:= \delta \underline{\underline{v}}_{(i)}^T \left\{ \int_{\mathbf{B}_{t(i)}} \underline{\underline{B}}_{(i)}^T \underline{\underline{\mathbf{q}}}_{(i)} \underline{\underline{B}}_{(i)} dv \right\} \underline{\underline{v}}_{(i)} \\
&+ \delta \underline{\underline{v}}_{(i)}^T \left\{ \int_{\mathbf{B}_{t(i)}} \underline{\underline{G}}_{(i)}^T \left( \text{dev } \underline{\underline{T}}_{(i)} + p_{(i)} \underline{\underline{I}} \right) \underline{\underline{G}}_{(i)} dv \right\} \underline{\underline{v}}_{(i)} \\
&+ \delta \underline{\underline{v}}_{(i)}^T \left\{ \frac{p'_{(i)}}{V_{(i)}} \int_{\mathbf{B}_{t(i)}} \underline{\underline{H}}_{(i)}^T dv \int_{\mathbf{B}_{t(i)}} \underline{\underline{H}}_{(i)} dv \right\} \underline{\underline{v}}_{(i)} \\
&+ g_{(i)}(\overline{\Phi}).
\end{aligned}$$

Hierbei ist  $\underline{\underline{H}}_{(i)}^T$  eine Matrix, welche die Ableitungen der Ansatzfunktionen enthält und den Divergenzoperator darstellt. Somit kann der Elementanteil wieder gemäß der reinen Verschiebungsmethode zum Gesamtanteil der Linearisierung der Variationsformulierung zusammengefügt werden.

# Kapitel 5

## Sensitivitätsanalyse

Die Grundlage der Strukturoptimierung ist die *Sensitivitätsanalyse*, d.h. die Beschreibung der Veränderung einer Problemfunktion  $\varphi$  im System, z.B. der Zielfunktion  $f$  oder einer Nebenbedingung  $g_j$ , infolge der Modifikation einer gewählten Designvariablen  $s$ . Die in der Sensitivitätsanalyse berechneten vollständigen Ableitungen nach den Designvariablen sowie die Werte der Problemfunktionen sind Eingangsgrößen für die Formulierung der Problemstellung der Strukturoptimierung als mathematisches Optimierungsproblem und für die damit verbundenden numerischen Algorithmen, siehe Kapitel 6.

Die komplexen Aufgaben z.B. der Strukturmechanik werden überwiegend durch die Verwendung numerischer Näherungsverfahren wie z.B. der Finite-Elemente-Methode oder Rand-Elemente-Methode behandelt. Somit ist der auf die Strukturanalyse aufbauenden Strukturoptimierung das numerische Näherungsverfahren vorgegeben, für das aus der Sensitivitätsanalyse die zugehörigen, zum numerischen Näherungsverfahren konsistenten, algebraischen Gleichungen bereitgestellt werden müssen. Die Bereitstellung der algebraischen Gleichungen der Sensitivitätsanalyse kann mittels unterschiedlicher Vorgehensweisen vorgenommen werden.

**Tafel 5.1:** Sensitivitätsanalyse eines strukturmechanischen Problems

### 1. Variationelle Sensitivitätsanalyse

- (a) Berechnung der Gradienten des kontinuierlichen Problems nach den Designvariablen.
- (b) Diskretisierung der kontinuierlichen Sensitivitätsaussagen in Raum und Zeit entsprechend dem zugrunde liegenden Näherungsverfahren.

### 2. Diskrete Sensitivitätsanalyse

- (a) Diskretisierung des strukturmechanischen Problems in Raum und Zeit entsprechend dem numerischen Näherungsverfahren.
- (b) Berechnung der Gradienten der erhaltenen diskreten, algebraischen Beziehungen nach den Designvariablen.

Für die variationelle Sensitivitätsanalyse wurde von *Céa* (siehe [23], [24], [25]) und *Zolesio* (siehe [114], [113]) das aus der Kontinuumsmechanik bekannte Konzept der Materialableitung für die Behandlung der Strukturoptimierung eingeführt, siehe auch *Haug, Choi, Komkov* [51].

Eine Erweiterung der variationellen Methoden auf geometrisch nichtlineare Probleme in der Total und Updated Lagrange Formulierung sind bei *Choi, Santos, Yao* [26], [81], [109] und *Arora, Cardoso* [3], [2] zu finden. Außerhalb eines bestehenden Programmpaketes (ADINA) wurde die Sensitivitätsanalyse mittels Postprozessing-Daten durchgeführt.

Ein variationeller Zugang zur Sensitivitätsanalyse, jedoch ohne numerische Verifikation, ist in *Dems, Mróz* [30], [31], [32] zu finden.

Für die numerische Realisation wird vorwiegend die diskrete Sensitivitätsanalyse, d.h. die Ableitung der diskreten, algebraischen Beziehungen nach den Designvariablen, aufbereitet und in die Sensitivitätsmodule der Optimierungsprogrammsystems implementiert. Dieses Vorgehen ist z.B. in *Neittaanmäki et al.* [65, 4, 49] beschrieben. Für die vollständige Implementation der analytischen Gradienten dieser Vorgehensweise in ein bestehendes Programmsystem siehe *Bletzinger* [19], *Kimmich* [54] (CARAT) sowie *Becker* [10], *Becker, Barthold* [11], *Stein, Becker, Barthold* [96] für die Verwendung im Forschungsprogrammpaket INA-OPT.

Die diskrete Sensitivitätsanalyse mit der semianalytischer Herleitung der Sensitivitäten wird von *Adelmann, Haftka* [1], *Haftka, Grandhi* [47] und *Eschenauer* [35], *Eschenauer, Post, Bremicker* [37] empfohlen.

Für eine übersichtliche Zusammenfassung dieser Methoden siehe z.B. *Haslinger, Neittaanmäki* [49], die auch auf die Äquivalenz der beiden Vorgehensweisen hinweisen.

In dieser Arbeit werden zunächst im Abschnitt 5.1 die kontinuumsmechanischen Grundlagen aufgezeigt, die für die variationelle Formulierung der Sensitivitäten kontinuumsmechanischer Größen benötigt werden. Dabei zeigt sich, daß das Konzept der Materialableitung und insbesondere die oft angeführte dynamische Interpretation der Formänderung (siehe z.B. *Haug, Choi, Komkov* [51]) aus kontinuumsmechanischer Sicht nicht ohne Einwand akzeptiert werden kann.

In Kapitel 5.2 wird die variationelle Sensitivitätsanalyse am Beispiel des materiellen Deformationsgradienten und der Spannungen, d.h. der zentralen kontinuumsmechanischen Größen der Analyse isotroper, hyperelastischer Materialien, durchgeführt. Für die Sensitivität der Spannungen ergeben sich sowohl in der materiellen als auch der räumlichen Formulierung grundlegende, neue Einsichten, die für die vollständige analytische Durchführung der variationellen Sensitivitätsanalyse von großer Bedeutung sind. Diese Beziehungen sind in vollständig analytischer Form in das Finite-Element-Programmpaket INA-OPT implementiert worden.

Darüberhinaus wird im Abschnitt 5.3 die Sensitivität der diskreten Formulierung angegeben, die mit der vorhergehenden Formulierung übereinstimmt, und in vollständiger analytischer Form in das Finite-Elemente-Programmpaket INA-OPT implementiert wurde, siehe hierzu auch *Becker* [10].

## 5.1 Die kontinuumsmechanischen Grundlagen der Strukturoptimierung

In diesem Abschnitt wird die Abhängigkeit der kontinuumsmechanischen Größen von der Ausgangsgeometrie und somit von den Designvariablen  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) aufgezeigt. Die Designvariablen stellen dabei skalare Variablen dar, die zur Spaltenmatrix  $\underline{s} \in \mathbb{R}^n$  zusammengefaßt werden. Zur Vereinfachung der Notation wird eine beliebige Designvariable ausgewählt und ohne Index, d.h. als  $s \in \mathbb{R}$ , geschrieben. Der ursprüngliche Startentwurf der Geometrie korrespondiert dabei mit dem Startwert  $s_0 = 0$ .

Um die Abhängigkeit einer kontinuumsmechanischen Größe von der Designvariablen  $s$  anzuzeigen, wird die Größe mit einem Index  $s$  versehen. Für den Startentwurf der Geometrie mit der Designvariablen  $s_0$  entfällt dieser Index.

### 5.1.1 Die Abhängigkeit des materiellen Körpers und der Konfigurationen vom Design

Bei der Strukturoptimierung werden strenggenommen unterschiedliche materielle Körper betrachtet und in ihren Eigenschaften (z.B. Gewicht) und dem Deformationsverhalten beurteilt. Damit ist das in Kapitel 2 eingeführte Konzept der Beschreibung der Lage und der Bewegung eines materiellen Körpers im Raum nicht mehr ausreichend.

Um die Eigenschaften zweier unterschiedlicher materieller Körper vergleichen zu können, ist es zunächst erforderlich, den Übergang eines materiellen Körpers in einen anderen bei Veränderung der Designvariable  $s$  zu beschreiben. Dabei sei der Übergang bezüglich der Designvariablen hinreichend oft stetig differenzierbar, d.h. die materiellen Körper gehen kontinuierlich ineinander über.

Die für diese Arbeit wesentliche Sichtweise der Formoptimierung kann folgendermaßen beschrieben werden.

**Tafel 5.2:** Eine kontinuumsmechanisch geprägte Sichtweise der Formoptimierung

1. In der Strukturoptimierung werden die Eigenschaften (Zielfunktion, Nebenbedingungen) unterschiedlicher materieller Körper betrachtet und verglichen.
2. Der Vergleich unterschiedlicher materieller Körper und deren Eigenschaften ist durch die Beschreibung der Transformation der verschiedenen materiellen Körper ineinander möglich.
3. Die Transformation wird dabei durch Einführung von Designvariablen parametrisch beschrieben und sei bzgl. der Veränderung der Designvariablen hinreichend oft stetig differenzierbar.

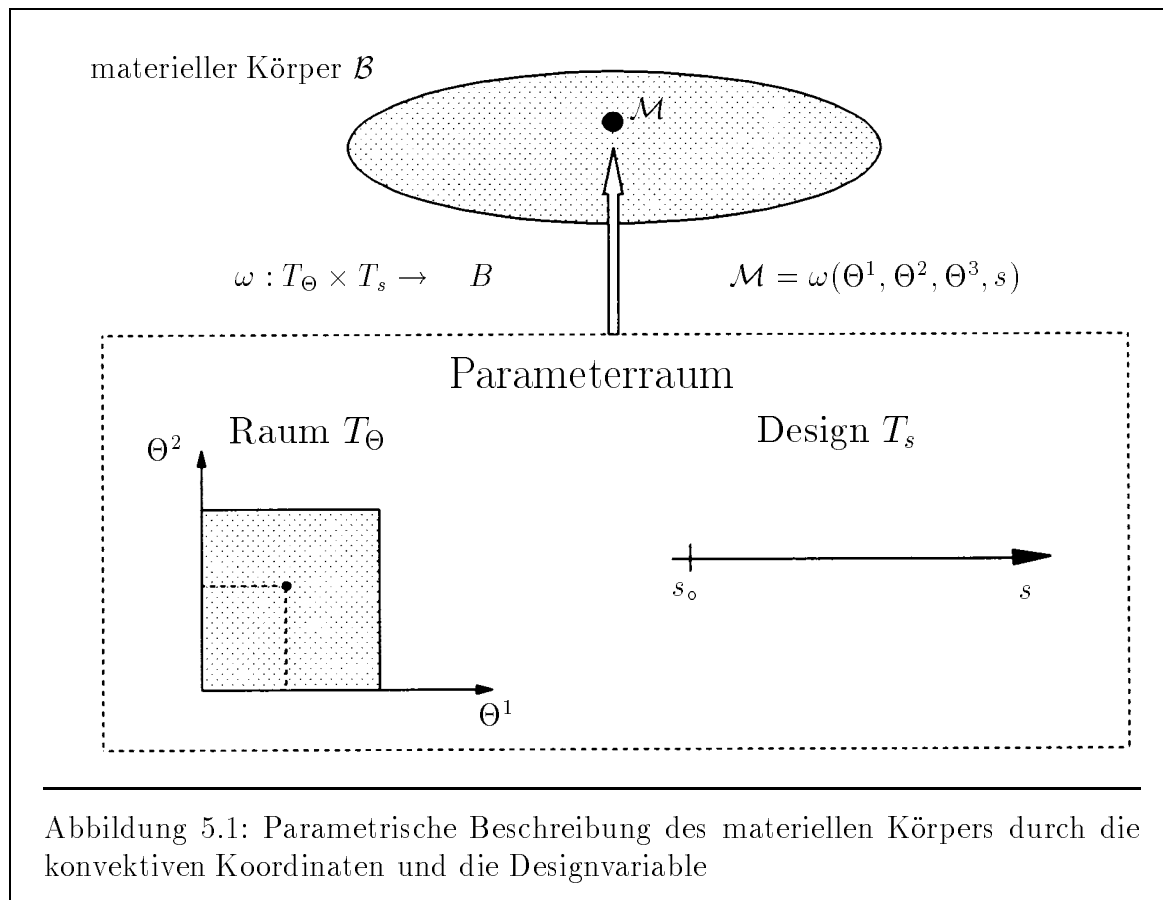
Ein Vergleich dieser Sichtweise mit dem bereits genannten Konzept der Materialableitung findet sich in Abschnitt 5.1.2.

Zur Beschreibung eines materiellen Körpers in Abhängigkeit der Designvariable  $s$  ist der Bezug auf die in Abschnitt 2.1 eingeführten konvektiven Koordinaten  $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$  nützlich, da der Parameterraum  $T_\Theta = [0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3$  für jeden beliebigen materiellen Körper eingeführt wurde und somit von der Designvariablen  $s$  unabhängig ist.

Mit diesen Bemerkungen soll die Abbildung  $\omega$  nach (2.4) um die Abhängigkeit von der Designvariablen  $s$  erweitert werden, wofür wieder die Bezeichnung  $\omega$  gewählt wird. Mit dem Parameterraum  $T_s := \mathbb{R}$  der Designvariablen gilt für die Darstellung eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  in Abhängigkeit der Designvariablen die Abbildung

$$\omega : \begin{cases} T_\Theta \times T_s & \rightarrow B \\ (\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, s) & \mapsto \mathcal{M} = \omega(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, s). \end{cases} \quad (5.1)$$

Die Abbildung  $\omega$  sei hinreichend oft bezüglich der konvektiven Koordinaten und der Designvariable stetig differenzierbar und für festgehaltene Designvariable  $s$  bijektiv. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 5.1 dargestellt.



Mit der in Abschnitt 2.1 definierten Abbildung  $\chi$  der materiellen Punkte  $\mathcal{M}$  auf die Raumpunkte kann durch Abbildungskomposition die in Gleichung (2.5) definierte Abbildung  $\psi$  um die Abhängigkeit von der Designvariablen  $s$  erweitert werden, d.h. es gilt



mit  $\psi = \xi \circ \omega$

$$\psi : \begin{cases} T_\Theta \times T_t \times T_s & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t, s) & \mapsto \mathbf{x} = \psi(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t, s) \end{cases} \quad (5.2)$$

Für festgehaltene Zeit und festgehaltene Designvariable wird auch die Bezeichnung  $\psi_t^s$  benutzt. Damit können die kartesischen Koordinaten  $X^A$  bzw.  $x^i$  über die Abbildung  $\psi$  durch die konvektiven Koordinaten, die Zeit und die Designvariable beschrieben werden, d.h. es gilt

$$X^A = \hat{X}^A(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, s) \quad \text{bzw.} \quad x^i = \hat{x}^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t, s). \quad (5.3)$$

Die Darstellung der Lage des materiellen Körpers im Raum über die Parametrisierung des materiellen Körpers, der Zeit und der Designvariablen ist in Abbildung 5.2 angegeben.

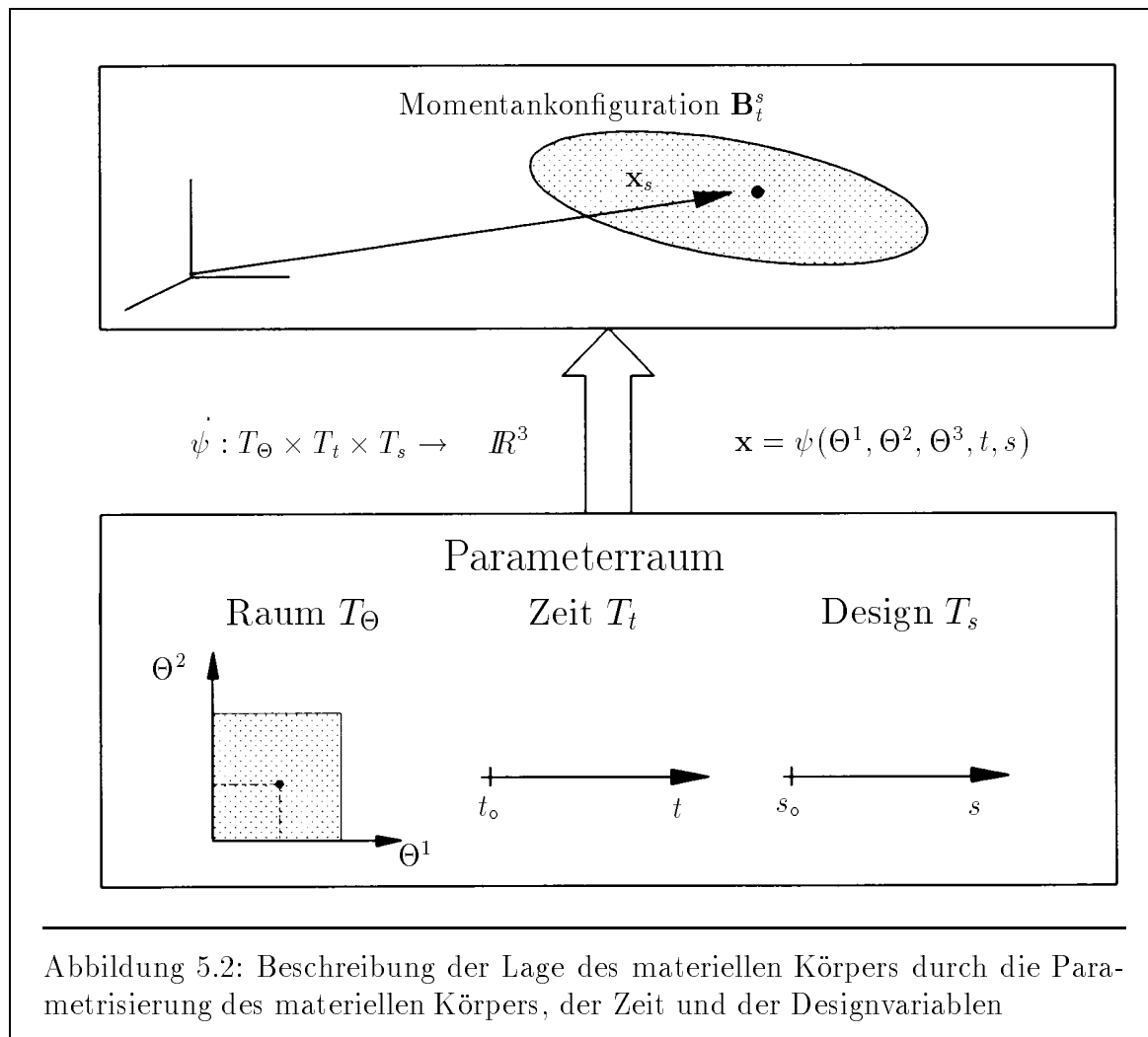


Abbildung 5.2: Beschreibung der Lage des materiellen Körpers durch die Parametrisierung des materiellen Körpers, der Zeit und der Designvariablen

Zum Referenzzeitpunkt  $t_0$  und für den Startwert  $s_0$  der Designvariablen kann die zugehörige Referenzkonfiguration in Abhängigkeit der konvektiven Koordinaten in der Form

$$\mathbf{B}_0 = \psi(T_\Theta, t_0, s_0) \quad \text{mit} \quad \mathbf{X} = \psi(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t_0, s_0) \quad (5.4)$$

dargestellt werden. Für eine Veränderung der Designvariablen  $s > s_0$  ergibt sich ein modifizierter materieller Körper mit zugehöriger Referenzkonfiguration, d.h. es gilt

$$\mathbf{B}_0^s = \psi(T_\Theta, t_0, s) \quad \text{mit} \quad \mathbf{X}_s := \psi(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t_0, s). \quad (5.5)$$

Analog gilt dies für die zugehörigen Momentankonfigurationen  $\mathbf{B}_t$  und  $\mathbf{B}_t^s$ . Damit kann die Deformation eines materiellen Körpers für eine feste Designvariable  $s$  von der Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_0^s$  in die Momentankonfiguration  $\mathbf{B}_t^s$  durch die Abbildung

$$\Phi_{t,t_0}^s : \begin{cases} \mathbf{B}_0^s & \rightarrow \mathbf{B}_t^s \\ \mathbf{X} & \mapsto \mathbf{x} = \Phi_{t,t_0}^s(\mathbf{X}) := [\psi_t^s \circ \{\psi_0^s\}^{-1}](\mathbf{X}) \end{cases} \quad (5.6)$$

dargestellt werden. Dabei ist die Abbildung  $\Phi_{t,t_0}^s$  stetig differenzierbar und für jeden beliebigen und dann festgewählten Zeitpunkt  $t$  sowie für jede beliebige und dann festgehaltene Designvariable bijektiv.

Für die weitere Untersuchung ist der Übergang zwischen den Referenz- und Momentankonfigurationen unterschiedlicher materieller Körper zu beschreiben. Die Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_0$  für die Designvariable  $s_0$  wird durch

$$\Psi_0 : \begin{cases} \mathbf{B}_0 \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbf{B}_0^s \\ (\mathbf{X}, s) & \mapsto \mathbf{X}_s = \Psi_0(\mathbf{X}, s) := [\psi_0^s \circ \psi_0^{-1}](\mathbf{x}, s) \end{cases} \quad (5.7)$$

auf die Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_0^s$  zur Designvariable  $s$  abgebildet.

Für die zugehörigen Momentankonfigurationen  $\mathbf{B}_t$  und  $\mathbf{B}_t^s$  wird die Abbildung

$$\Psi_t : \begin{cases} \mathbf{B}_t \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbf{B}_t^s \\ (\mathbf{x}, s) & \mapsto \mathbf{x}_s = \Psi_t(\mathbf{x}, s) := [\Phi_{t,t_0}^s \circ \Psi_0 \circ \Phi_{t,t_0}^{-1}](\mathbf{x}, s) \end{cases} \quad (5.8)$$

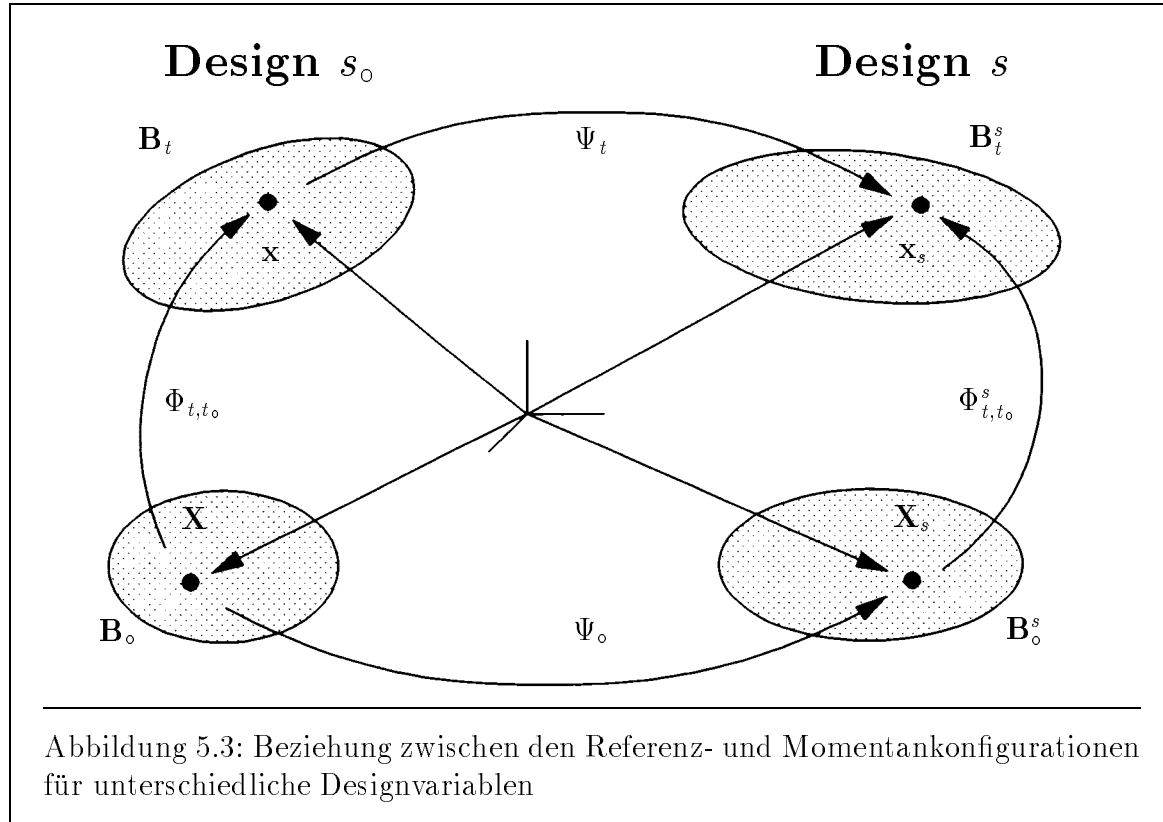
eingeführt. Damit wird für jeden Zeitpunkt  $t$  die Veränderung der Konfiguration  $\mathbf{B}_t$  des Ausgangsdesigns (mit  $s = s_0$ ) zu der Konfiguration  $\mathbf{B}_t^s$  des modifizierten Designs (mit  $s > s_0$ ) beschrieben. Diese Situation ist in der Abbildung 5.3 dargestellt.

Der Erhaltungssatz der Masse (siehe Abschnitt 2.2.1) ist für die Abbildungen  $\Psi_0$  und  $\Psi_t$  nicht erfüllt. Dies ist auch verständlich, da es sich dabei um den Übergang der Konfigurationen zweier unterschiedlicher Körper handelt und z.B. für die Optimierungsaufgabe „Gewichtsminimierung“ die Abnahme der Gesamtmasse des Körpers erwünscht ist.

Die Veränderung der Konfiguration  $\mathbf{B}_0$  des materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  in die Konfiguration  $\mathbf{B}_0^s$  des materiellen Körpers  $\mathcal{B}^s$  kann für kleine Änderungen gegenüber dem Referenzwert  $s_0$  mit Hilfe der Abbildung vom  $\Psi_0$  in erster Näherung als

$$\mathbf{X}_s = \Psi_0(\mathbf{X}, s) = \Psi_0(\mathbf{X}, s_0) + (s - s_0) \frac{d\Psi_0}{ds}(\mathbf{X}, s_0) = \mathbf{X} + (s - s_0) \mathbf{V}(\mathbf{X}) \quad (5.9)$$

geschrieben werden. Dabei stellt  $\mathbf{V}$  die sogenannte *Formänderungsgeschwindigkeit* dar, siehe *Haug, Choi, Konkov* [51].



Wird weiterhin die Konfiguration  $\mathbf{B}_0$  zur Designvariablen  $s_0$  als Referenzkonfiguration bzgl. einer Gestaltsänderung angesehen, gilt

$$\mathbf{V} = \frac{d\Psi_0}{ds}(\mathbf{X}, s_0) = \frac{\partial\Psi_0}{\partial s}(\mathbf{X}, s_0), \quad (5.10)$$

da in diesem Fall  $\mathbf{X} \in \mathbf{B}_0$  unabhängig von  $s$  ist. Die obige Darstellung wird in Abschnitt 5.1.2 erläutert, in dieser Arbeit jedoch nicht weiter verwendet.

Demgegenüber gilt für die Veränderung der Momentankonfiguration  $\mathbf{B}_t^s$  zum Zeitpunkt  $t$  bei Änderung der Designvariablen  $s$  die Beziehung

$$\mathbf{q}_t = \hat{\mathbf{q}}_t(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, s) := \frac{d\psi_t}{ds} = \frac{\partial\psi_t}{\partial s}, \quad (5.11)$$

da die konvektiven Koordinaten definitionsgemäß unabhängig vom Design sind. Für die Referenzkonfiguration ist die Auswertung für  $t = t_0$  einfach, da es sich in diesem Fall ausschließlich um eine geometrische Beziehung handelt. Für die Momentankonfiguration ist jedoch die implizite Abhängigkeit des Verschiebungszustandes von der Designvariablen zu berücksichtigen. Diese Zusammenhänge werden im Abschnitt 5.2 näher erläutert.

Abschließend werden die zentralen Abbildungen im Überblick dargestellt.

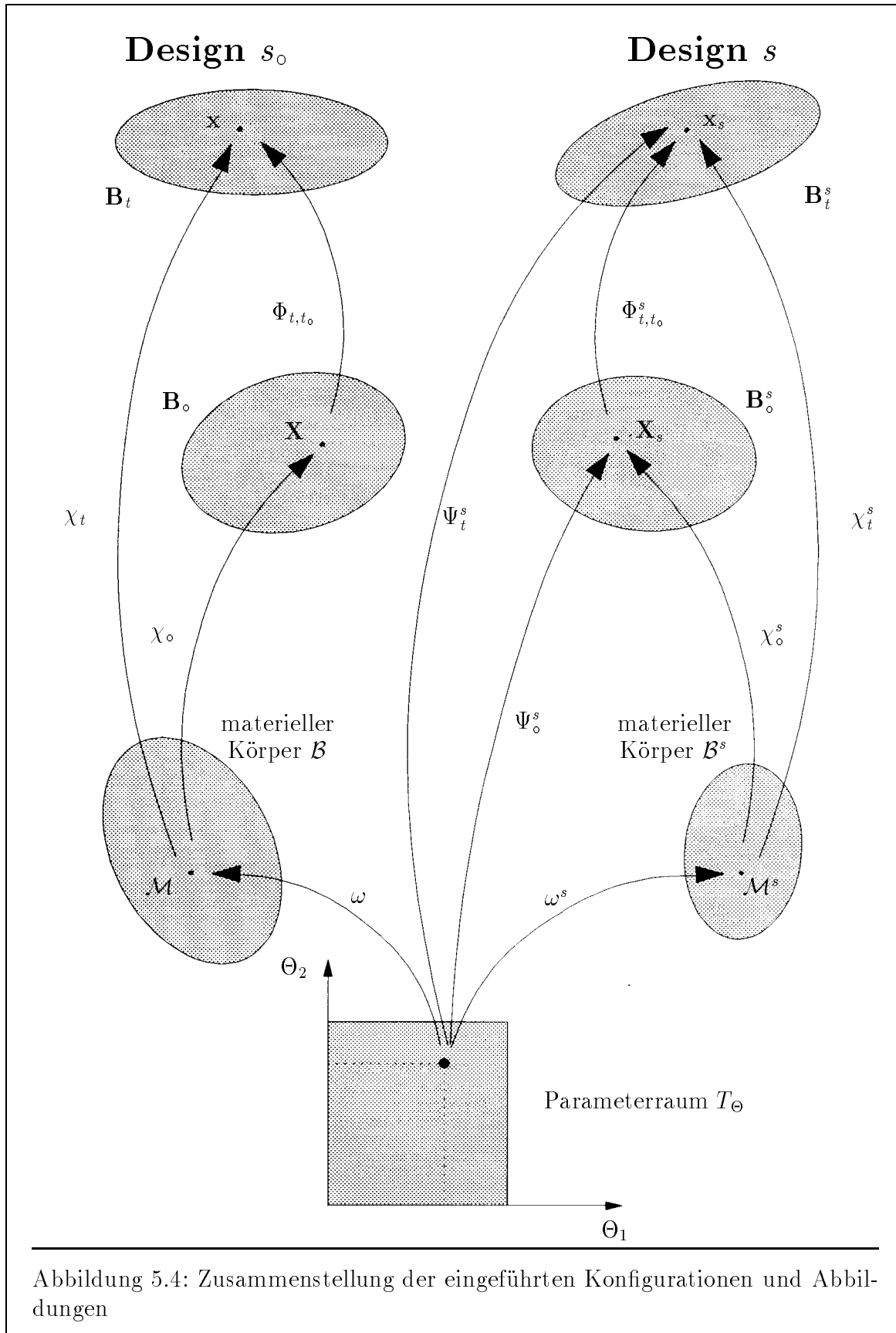


Abbildung 5.4: Zusammenstellung der eingeführten Konfigurationen und Abbildungen

### 5.1.2 Ein Vergleich mit dem Konzept der Materialableitung

In diesem Abschnitt wird die eigene Darstellung der kontinuumsmechanischen Grundlagen der Formoptimierung mit dem von *Céa* und *Zolesio* eingeführten Konzept der Materialableitung verglichen. Als Grundlage dient dabei die Darstellung in *Haug, Choi, Komkov* [51, S. 190ff].

Hierin wird die Formänderung eines Körpers als „dynamic process of deforming a continuum, with  $\tau$  (Anm.: in dieser Arbeit  $s$ ) playing the role of time“ interpretiert.

Diese Interpretation der Vorgänge bei der Strukturoptimierung als eine zwangsläufig spannungs- und verzerrungsfreie „Deformation“ eines Körpers ist aus meiner kontinuumsmechanischen Sicht nicht akzeptabel, da zusätzlich bei der „Deformation“ der Erhaltungssatz der Masse nicht erfüllt wird. Auf diese Tatsache wird in der obigen Interpretation nicht eingegangen.

Demgegenüber ist durch die Darstellung in Abschnitt 5.1.1 eine eindeutige Trennung der physikalischen Vorgänge

1. Änderung des materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  mit der Änderung der Designvariablen  $s$  noch vor der Einbettung in den Euklidischen Vektorraum sowie
2. der Deformation eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  von der Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_0$  in die Momentankonfiguration  $\mathbf{B}_t$  mit der Zeit  $t$

vorgenommen worden.

Weiterhin wird in *Haug, Choi, Komkov* [51] bei der Herleitung der Formänderungsgeschwindigkeit implizit eine Referenzkonfiguration bzgl. der Designvariablen durch die Adaption der kontinuumsmechanischen Zusammenhänge eingeführt. Dies ist aus theoretischer und numerischer Sicht nicht erforderlich, da bei Verwendung konvektiver Koordinaten, d.h. der Darstellung des materiellen Körpers als differenzierbare Mannigfaltigkeit, die Veränderung der kartesischen Koordinaten aus der Abbildung

$$X^A = \hat{X}^A(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, s)$$

nach (5.2) beschrieben werden kann, d.h. nach Gleichung (5.11) gilt

$$\mathbf{q}_t = \hat{\mathbf{q}}_t(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, s) := \frac{d\psi_t}{ds} = \frac{\partial\psi_t}{\partial s}.$$

Entsprechend zur Beschreibung kontinuumsmechanischer Beziehungen in den Größen der Momentankonfiguration (Fluidmechanik, große Deformationen) kann auch in der Formoptimierung der Bezug ausschließlich auf den aktuellen Körper und dessen Konfiguration erfolgen.

Der Vorteil der Darstellung nach Gleichung (5.2) besteht in der natürlichen Umsetzung in ein numerisches Konzept mit Hilfe der CAGD-Beschreibung der Geometrie, das in Kapitel 6 vorgestellt wird.

### 5.1.3 Festlegung funktionaler Abhängigkeiten für die Sensitivitätsanalyse hyperelastischer Materialien

Im obigen Abschnitt ist die Abhängigkeit der Referenz- und Momentankonfiguration von der Designvariablen  $s$  dargestellt worden. In der Strukturanalyse wird üblicherweise die Deformation über das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$  mit der funktionalen Abhängigkeit (2.6)

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t, s) = \tilde{\mathbf{u}}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t, s),$$

dargestellt. Für die Berechnung der Sensitivität einer exemplarischen kontinuumsmechanischen Größe  $\varphi$ , die skalar-, vektor- oder tensorwertig sein kann, wird die funktionale Abhängigkeit

$$\boxed{\varphi = \hat{\varphi}(s, \hat{\mathbf{u}}(s))} \quad (5.12)$$

vorausgesetzt. Damit ist für diese Problemfunktion, z.B. die Zielfunktion  $f$  oder eine Nebenbedingung  $g_j$ , neben der direkten Abhängigkeit auch die implizite Abhängigkeit von der Designvariablen über das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  im Gleichgewichtszustand gegeben.

Diese hier aufgezeigte Abhängigkeit beinhaltet nur die Abhängigkeit vom Verschiebungsfeld im Lösungszustand. Dies ist für den Rahmen der hyperelastischen Materialien ausreichend. Für weitergehende Betrachtungen, z.B. geschichtsabhängiger Materialien in Form der Elastoplastizität, ist die funktionale Abhängigkeit der Problemfunktion  $\varphi$  auf die Geschichte der Deformation zu erweitern.

### 5.1.4 Bemerkungen zur Berechnung partieller Ableitungen kontinuumsmechanischer Größen nach der Designvariablen

Für die Sensitivitätsanalyse sind die partiellen Ableitungen kontinuumsmechanischer Größen nach der Designvariablen  $s$  bereitzustellen, siehe auch Abschnitt 5.2.1. Für die in der grundlegenden Beziehung (5.2) für die Abbildung eines materiellen Körpers auf die Raumpunkte eingeführte Abhängigkeit von den konvektiven Koordinaten  $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$ , der Zeit  $t$  und der Designvariablen  $s$  gelten die folgenden Zusammenhänge.

1. Sowohl die physikalische Größe Zeit  $t$  als auch die physikalische Größe Designvariable  $s$  sind skalare Parameter, die voneinander unabhängig sind. Die Abbildung (5.2) sowie jede hierauf aufbauende Aussage besitzt bzgl.  $t$  und  $s$  die gleiche mathematische Struktur.
2. Die Gleichungen, die sich auf die zeitliche Veränderung der Konfiguration eines Körpers beziehen (Zeitableitungen), können unmittelbar aufgrund der identischen mathematischen Struktur ohne besonderen Beweis auf die entsprechenden Beziehungen bei Änderung der Designvariablen übertragen werden.

3. Zur Vereinfachung der Schreibarbeit wird für die partielle Ableitung einer kontinuumsmechanischen Größe nach der Designvariablen  $s$  die Notation

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial s} \{\bullet\} =: \{\overset{\Delta}{\bullet}\}} \quad (5.13)$$

eingeführt.

4. Als Beispiel für die materielle Zeitableitung sei die Ableitung des Cauchy-Spannungstensors nach (2.46), d.h.

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathfrak{c} : \mathbf{d} + \mathbf{l} \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{l}^T - \text{tr} \mathbf{l} \mathbf{T}$$

mit den Beziehungen

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2} \{\mathbf{l} + \mathbf{l}^T\}$$

nach (2.42), betrachtet. Analog gilt dann aufgrund der identischen mathematischen Struktur für die vollständige Ableitung des Cauchy-Spannungstensors nach der Designvariablen  $s$  mit den Definitionen

$$\mathbf{l}_s := \frac{d\mathbf{F}}{ds} \mathbf{F}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{d}_s := \frac{1}{2} \{\mathbf{l}_s + \mathbf{l}_s^T\} \quad (5.14)$$

die Beziehung

$$\boxed{\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \mathfrak{c} : \mathbf{d}_s + \mathbf{l}_s \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{l}_s^T - \text{tr} \mathbf{l}_s \mathbf{T}.} \quad (5.15)$$

Hierbei wird die totale Ableitung des materiellen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  nach der Designvariablen auf der Grundlage der funktionalen Beziehung (5.12) zu

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{ds}$$

berechnet. Durch Einsetzen dieser Beziehung in Gleichung (5.15) kann die partielle Ableitung des Cauchy-Spannungstensors nach der Designvariablen  $s$  unter Benutzung der partiellen Ableitung des materiellen Deformationsgradienten nach der Designvariablen und der Definitionen

$$\mathbf{l}_\Delta := \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} \mathbf{F}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{d}_\Delta := \frac{1}{2} \{\mathbf{l}_\Delta + \mathbf{l}_\Delta^T\}$$

in der Form

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} = \mathfrak{c} : \mathbf{d}_\Delta + \mathbf{l}_\Delta \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{l}_\Delta^T - \text{tr} \mathbf{l}_\Delta \mathbf{T}} \quad (5.16)$$

dargestellt werden.

## 5.2 Die variationelle Sensitivitätsanalyse

Bei der variationellen Sensitivitätsanalyse wird die vollständige Ableitung der kontinuumsmechanischen, kontinuierlichen Problemfunktionen nach den Designvariablen hergeleitet. Durch die sich hieran anschließende, zum Näherungsverfahren konsistente Diskretisierung in Raum und Zeit ergeben sich die der numerischen Berechnung zugänglichen algebraischen Gleichungen der Sensitivitätsanalyse.

### 5.2.1 Grundlagen der variationellen Sensitivitätsanalyse

In der Strukturanalyse wird für ein gegebenes Problem die unbekannte Deformation bzw. das unbekannte Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  ermittelt. Im Rahmen der Formoptimierung ist, wie im Abschnitt 5.1.3 gezeigt, die funktionale Abhängigkeit der kontinuumsmechanischen Größen um die Abhängigkeit von der Designvariablen  $s$  zu erweitern. Für eine exemplarische kontinuierliche kontinuumsmechanische Größe  $\varphi$ , die skalar-, vektor- oder tensorwertig sein kann, wird mit den Ergebnissen des obigen Abschnittes die funktionale Abhängigkeit

$$\varphi = \hat{\varphi}(s, \hat{\mathbf{u}}(s)) \quad (5.17)$$

vorausgesetzt. Analog gilt damit für die Gleichgewichtsaussage der schwachen Form des Gleichgewichts nach Gleichung (2.80) die Beziehung

$$G = \hat{G}(s, \hat{\mathbf{u}}(s)) = \int_{\mathbf{B}_\circ^s} \mathbf{P} : \text{Grad } \boldsymbol{\eta} \, dV_s - \int_{\mathbf{B}_\circ^s} \rho_\circ \bar{\mathbf{k}}_\circ \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV_s - \int_{\partial \mathbf{B}_\circ^s} \bar{\mathbf{t}}_\circ \cdot \boldsymbol{\eta} \, dA_s = 0 \quad (5.18)$$

für die Formulierung in den Größen der Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_\circ^s$  bzw. mit (2.81)

$$g = \hat{g}(s, \hat{\mathbf{u}}(s)) = \int_{\mathbf{B}_i^s} \mathbf{T} : \text{grad } \boldsymbol{\eta} \, dv_s - \int_{\mathbf{B}_i^s} \rho \bar{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv_s - \int_{\partial \mathbf{B}_i^s} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, da_s = 0 \quad (5.19)$$

für die Formulierung in den Größen der Momentankonfiguration  $\mathbf{B}_i^s$ .

Für die variationelle Sensitivitätsanalyse ist die totale Ableitung der kontinuierlichen Problemfunktion  $\varphi$ , d.h. der Zielfunktion  $f$  oder einer Nebenbedingung  $g_j$ , bereitzustellen. Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{ds}. \quad (5.20)$$

Im Rahmen der Formoptimierung strukturmechanischer Probleme muß für jede Wahl der Designvariablen der Körper selbstverständlich in einem Gleichgewichtszustand sein, d.h. die Aussage der schwachen Form des Gleichgewichts muß für jede Wahl der Designvariablen erfüllt werden. Diese wesentliche Nebenbedingung führt mit der Formulierung (5.18) der schwachen Form des Gleichgewichts in den Größen der Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_\circ^s$  zu der Aussage

$$\frac{dG}{ds} = \frac{\partial G}{\partial s} + \frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{ds} = 0, \quad (5.21)$$



während sich für die Darstellung in den Größen der Momentankonfiguration  $\mathbf{B}_i^s$  die Beziehung

$$\boxed{\frac{dg}{ds} = \frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{ds} = 0} \quad (5.22)$$

ergibt. Hieraus kann die totale Ableitung des Verschiebungszustandes nach der Designvariablen ermittelt und somit Gleichung (5.20) ausgewertet werden. Die explizite Auflösung der Beziehungen und ihre numerisch effiziente Berechnung kann erst nach Durchführung der Diskretisierung in Raum und Zeit erfolgen, siehe hierzu auch Abschnitt 5.2.4.

Nach der Elimination der Ableitung des Verschiebungsfeldes nach der Designvariablen in Gleichung (5.20) durch Ausnutzung der stets zu erfüllenden Gleichgewichtsbedingung, d.h. durch Gleichung (5.21), sind für die variationelle Sensitivitätsanalyse die Größen

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}}, \quad \frac{\partial G}{\partial s} \quad \text{und} \quad \frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}}}$$

zu berechnen.

Die partielle Ableitung der kontinuumsmechanischen Größen  $\varphi$  sowie der schwachen Form des Gleichgewichts  $G = 0$  bzw.  $g = 0$  nach dem unbekanntem Verschiebungszustand  $\mathbf{u}$  (bei unveränderter Designvariablen) ist in der Strukturanalyse bereits für die Ermittlung sogenannter konsistenter Formulierungen, Materialtensoren und Algorithmen und im diskreten Fall für die sogenannten konsistenten Steifigkeitsmatrizen durchgeführt worden. Im weiteren werden deshalb diese Anteile an der Sensitivität, sowohl in der kontinuierlichen als auch der diskreten Form, als bekannt vorausgesetzt und nicht weiter behandelt.

Damit ist für die Sensitivitätsanalyse noch die partielle Ableitung der kontinuumsmechanischen Größe  $\varphi$ , z.B. des materiellen Deformationsgradienten in Abschnitt 5.2.2, der Spannungen in Abschnitt 5.2.3 sowie der schwachen Form des Gleichgewichts in Abschnitt 5.2.4 nach der Designvariablen  $s$  bereitzustellen. Im Rahmen dieser Arbeit seien die äußeren Lasten dabei unabhängig von der Designvariablen  $s$ .

## 5.2.2 Die partielle Ableitung des materiellen Deformationsgradienten nach der Designvariablen

Der materielle Deformationsgradient ist die zentrale Größe für die Definition weiterer geometrischer Größen, so daß an dieser Stelle beispielhaft die kontinuierliche partielle Ableitung von  $\mathbf{F}$  nach der Designvariablen angegeben werden soll. Dazu eignet sich besonders die Darstellung in konvektiven Koordinaten nach (2.11)

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta^i} \otimes \mathbf{G}^i = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i.$$

Für die konvektiven Basisvektoren der Momentankonfiguration gilt mit  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$  die Beziehung

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta^i} = \frac{\partial}{\partial \Theta^i} (\mathbf{X} + \mathbf{u}) = \mathbf{G}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \Theta^i}. \quad (5.23)$$

Nach Abschnitt 5.1.4 sind die Designvariable  $s$  und der Verschiebungszustand  $\mathbf{u}$  für die Sensitivitätsanalyse unabhängige Variablen, d.h. aus der partiellen Ableitung der kovarianten Basisvektoren der Momentankonfiguration  $\mathbf{g}_i = \hat{\mathbf{g}}_i(s, \mathbf{u})$  ergibt sich

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta^i} \right) = \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial s}. \quad (5.24)$$

Hiermit und analog aus der partiellen Ableitung des materiellen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  in der Form  $\mathbf{F} = \mathbf{1} + \text{Grad } \mathbf{u}$  nach der Designvariablen  $s$  folgt mit der Unabhängigkeit des Einheitstensors von  $s$

$$\Delta \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s} = \frac{\partial \text{Grad } \mathbf{u}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial u^i}{\partial X^A} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}^A = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \Theta^i} \otimes \frac{\partial \mathbf{G}^i}{\partial s}. \quad (5.25)$$

Bei der Verwendung konvektiver Koordinaten führt dies auf die Berechnung der partiellen Ableitung der kontravarianten Basisvektoren  $\mathbf{G}^i = \hat{\mathbf{G}}^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, s)$  nach der Designvariablen  $s$ . Die kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{G}_j$  sind durch die kontinuumsmechanische Beschreibung der Referenzkonfiguration in der Form

$$X^i = \hat{X}^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, s) \quad \text{und} \quad \mathbf{G}_j = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Theta^j} = \frac{\partial X^i}{\partial \Theta^j} \mathbf{E}_i.$$

gegeben, d.h. für die Ableitung nach der Designvariablen  $s$  gilt

$$\Delta \mathbf{G}_j = \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial X^i}{\partial \Theta^j} \right) \mathbf{E}_i = \frac{\partial^2 X^i}{\partial \Theta^j \partial s} \mathbf{E}_i. \quad (5.26)$$

Die Ableitung der kovarianten Metrikkoeffizienten  $G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j$  ergibt sich somit zu

$$\Delta G_{ij} = \Delta \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j + \mathbf{G}_i \cdot \Delta \mathbf{G}_j = \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\partial^2 X^k}{\partial \Theta^i \partial s} \frac{\partial X^k}{\partial \Theta^j} + \frac{\partial X^k}{\partial \Theta^i} \frac{\partial^2 X^k}{\partial \Theta^j \partial s} \right].$$

Damit kann aus der Beziehung  $G_{ij} G^{jk} = \delta_i^k$  die Ableitung der kontravarianten Metrikkoeffizienten in der Form

$$\Delta G^{sk} = -G^{si} \Delta G_{ij} G^{jk}$$

hergeleitet werden. Abschließend folgt aus der Beziehung  $\mathbf{G}^k = G^{ks} \mathbf{G}_s$  mit den obigen Formeln die partielle Ableitung der kontravarianten Basisvektoren der Referenzkonfiguration nach der Designvariablen  $s$  in der Form

$$\Delta \mathbf{G}^k = -G^{kj} \Delta G_{ji} G^{is} \mathbf{G}_s + G^{ks} \Delta \mathbf{G}_s. \quad (5.27)$$

Damit kann die kontinuierliche partielle Ableitung des materiellen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  nach der Designvariablen  $s$  aus den obigen Teilergebnissen berechnet werden. Zentral ist dabei die Berechnung der partiellen Ableitung des kovarianten Basisvektors  $\mathbf{G}_i$  nach der Designvariablen  $s$  gemäß Gleichung (5.26).

Die Ergebnisse bei der Berechnung der partiellen Ableitung des materiellen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  nach der Designvariablen  $s$  sind in der nachfolgenden Tafel zusammengefasst.

**Tafel 5.3:** Partielle Ableitung des materiellen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  nach der Designvariablen  $s$

Die partielle Ableitung des materiellen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  nach der Designvariablen ist durch Gleichung (5.25) gegeben, d.h.

$$\overset{\Delta}{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s} = \frac{\partial \text{Grad } \mathbf{u}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial u^i}{\partial X^A} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}^A = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \Theta^i} \otimes \frac{\partial \mathbf{G}^i}{\partial s}.$$

Für die Verwendung kartesischer bzw. konvektiver Koordinaten ergeben sich unterschiedliche Darstellungen.

**1. Berechnung in konvektiven Koordinaten:**

Zusätzlich zur bereits für die Strukturanalyse zu berechnenden Ableitung des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}$  nach der konvektiven Koordinate  $\Theta^i$ , ist die analytische Bestimmung der gemischten zweiten Ableitung der Koordinaten der Referenzkonfiguration nach der konvektiven Koordinate  $\Theta^j$  und der Designvariablen  $s$  auf der Grundlage der gegebenen funktionalen Beziehung  $X^i = \hat{X}^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, s)$  durchzuführen, d.h. es ist

$$\frac{\partial^2 \hat{X}^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, s)}{\partial \Theta^j \partial s}$$

zu berechnen.

**2. Berechnung in kartesischen Koordinaten:**

Für die Verwendung kartesischer Koordinatensysteme, z.B. im Rahmen der numerischen Berechnung, ist die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial u^i}{\partial X^A} \right)$$

auszuwerten. Zur Berechnung der Ableitung nach der Designvariablen ist der Zusammenhang der kartesischen Koordinaten von der Designvariablen unter Benutzung einer Parametrisierung der Geometrie erforderlich. Werden hierzu wieder die konvektiven Koordinaten  $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$  herangezogen, so handelt es sich um die oben diskutierte Formulierung.

Die Verwendung einer weiteren lokalen Parametrisierung der Geometrie wird in Abschnitt 5.2.5 und 5.3.3 im Rahmen der Diskretisierung der kontinuierlichen partiellen Ableitung des materiellen Deformationsgradienten untersucht.

Mit Hilfe der oben berechneten Ableitung  $\overset{\Delta}{\mathbf{F}}$  des materiellen Deformationsgradienten ergibt sich sofort die partielle Ableitung des Rechts-Cauchy-Green-Tensors in der Form

$$\overset{\Delta}{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^T \overset{\Delta}{\mathbf{F}} + \left( \mathbf{F}^T \overset{\Delta}{\mathbf{F}} \right)^T =: C_{ij}^{\Delta} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (5.28)$$

sowie in analoger Form die partielle Ableitung für den Links-Cauchy-Green-Tensor  $\mathbf{b}$ .

### 5.2.3 Die partielle Ableitung der Spannungen nach der Designvariablen

Die Spannungstensoren des in dieser Arbeit betrachteten isotropen, hyperelastischen Materials sind Funktionen der Verzerrungstensoren  $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{C}}(s)$  bzw.  $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}}(s)$  und der Materialparameter  $z_i = \hat{z}_i(s)$  für  $i = 1, 2, \dots, p$  (siehe auch Kapitel 3), d.h. es gilt

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\hat{z}_1(s), \dots, \hat{z}_p(s), \hat{\mathbf{C}}(s)) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\hat{z}_1(s), \dots, \hat{z}_p(s), \hat{\mathbf{b}}(s)). \quad (5.29)$$

Damit liefert die partielle Ableitung nach der Designvariablen  $s$  die Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial s} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial s} \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{b}} : \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}. \quad (5.31)$$

Aus dieser allgemeinen Darstellung ergeben sich zwei wichtige Sonderfälle.

1. Berechnung der Materialparameter aus Versuchsergebnissen.

Für konstante Geometrie gelten die funktionalen Abhängigkeiten

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\hat{z}_1(s), \dots, \hat{z}_p(s)) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\hat{z}_1(s), \dots, \hat{z}_p(s)). \quad (5.32)$$

und die partiellen Ableitungen ergeben sich zu

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial s} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial s} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial s}. \quad (5.33)$$

2. Formoptimierung bei bekanntem Materialverhalten.

In diesem Fall sind die Spannungstensoren ausschließlich implizit über die Verzerrungstensoren von der Designvariablen abhängig, d.h. es gilt

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\hat{\mathbf{C}}(s)) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\hat{\mathbf{b}}(s)). \quad (5.34)$$

Damit ergeben sich die partiellen Ableitungen der Spannungen zu

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial s} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{b}} : \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}. \quad (5.35)$$

Für den wichtigen zweiten Sonderfall werden im weiteren die partiellen Ableitungen mit Hilfe der bereits aus der Strukturanalyse bekannten Materialtensoren berechnet. Die partiellen Ableitungen der Verzerrungstensoren nach der Designvariablen sind im vorhergehenden Abschnitt behandelt worden.

Für den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor der Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_0^s$  ergibt sich mit (3.1) und (5.35) die Darstellung

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial s} = \mathbb{C} : \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial s} = \mathbb{C} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial s}.} \quad (5.36)$$

Die Berechnung der partiellen Ableitung des Cauchy-Spannungstensors  $\mathbf{T}$  der Momentankonfiguration  $\mathbf{B}_t^s$  kann mit dem Argument der vergleichbaren mathematischer Struktur durch Analogieschluß aus der entsprechenden Beziehung der Zeitableitung ermittelt werden. Dieser Weg ist beispielhaft in Abschnitt 5.1.4 bei der Herleitung der Gleichung (5.15) aufgezeigt worden.

An dieser Stelle soll eine direkte Herleitung einer Darstellung der partiellen Ableitung des Cauchy-Spannungstensors unter Benutzung des Materialtensors  $\mathfrak{c}$  nach (3.2) angegeben werden. Ein Vergleich der Gleichungen (5.35) und (3.3) zeigt, daß bei der Berechnung der partiellen Ableitung von  $\mathbf{T}$  nach  $s$  über Gleichung (5.35) diese direkt ausgewertet werden muß und der Materialtensor  $\mathfrak{c}$  nicht eingesetzt werden kann.

Mit dem Kirchhoff-Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$  nach (2.31), d.h.  $\boldsymbol{\tau} = J \mathbf{T} = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T$ , ergibt sich die partielle Ableitung des Cauchy-Spannungstensors  $\mathbf{T}$  zu

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{J} \boldsymbol{\tau} \right) = \frac{-1}{J^2} \frac{\partial J}{\partial s} \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{J} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial s}.$$

Hierbei gilt für die Ableitung der Determinante des materiellen Deformationsgradienten

$$\frac{\partial J}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} (\det \mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} (\det \mathbf{F}) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} = J \mathbf{F}^{-T} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} = J \operatorname{tr} \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} \mathbf{F}^{-1} \right) = J \operatorname{tr} \mathbf{l}_\Delta,$$

wobei die Bezeichnungen

$$\mathbf{l}_\Delta := \overset{\Delta}{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{d}_\Delta := \frac{1}{2} \{ \mathbf{l}_\Delta + \mathbf{l}_\Delta^T \} \quad (5.37)$$

hier und im weiteren benutzt werden. Die partielle Ableitung des Kirchhoff-Spannungstensors  $\boldsymbol{\tau}$  wird über die Transformationsbeziehung  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T$  berechnet, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial s} &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} \mathbf{S} \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial s} + \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial s} \mathbf{F}^T \\ &= \mathbf{l}_\Delta \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{l}_\Delta + \mathbf{F} \left[ \mathbb{C} : \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial s} \right] \mathbf{F}^T. \end{aligned}$$

Der Materialtensor der Momentankonfiguration  $\mathfrak{c}$  nach (3.2) und der Materialtensor  $\mathbb{C}$  der Referenzkonfiguration nach (3.1) sind durch den Zusammenhang

$$\mathfrak{c} : \mathbf{a} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \left[ \mathbb{C} : (\mathbf{F}^T \mathbf{a} \mathbf{F}) \right] \mathbf{F}^T$$

für jeden räumlichen Tensor  $\mathbf{a}$  verbunden, siehe Abschnitt 2.3 Gleichung (2.59). Mit der Beziehung

$$\frac{1}{2} \overset{\Delta}{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^T \mathbf{d}_\Delta \mathbf{F} \quad (5.38)$$

gilt mit der obigen Beziehung

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial s} = \mathfrak{c} : \mathbf{d}_\Delta = \frac{1}{J} \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial s} \mathbf{F}^T.} \quad (5.39)$$

Zusammenfassend ergibt sich damit die partielle Ableitung des Cauchy-Spannungstensors  $\mathbf{T}$  der Momentankonfiguration  $\mathbf{B}_t^s$  nach der Designvariablen  $s$  in der Form

$$\boxed{\hat{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}_\Delta + \mathbf{l}_\Delta \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{l}_\Delta^T - \text{tr} \mathbf{l}_\Delta \mathbf{T}.} \quad (5.40)$$

Damit ist gezeigt, daß (zumindest für isotrope, hyperelastische Materialien) die Berechnung der partiellen Ableitung der Spannungen nach der Designvariablen wesentlich auf die Ermittlung der konsistenten Materialmatrizen, die bereits aus der Strukturanalyse bekannt sind, zurückgeführt werden kann.

### 5.2.4 Die partielle Ableitung der schwachen Form des Gleichgewichts nach der Designvariablen

Die schwache Form des Gleichgewichts ist eine integrale Formulierung der Gleichgewichtsbedingung, bei der sowohl in der Formulierung bzgl. der Größen der Momentankonfiguration  $\mathbf{B}_t^s$  als auch der Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_\circ^s$  die Integrationsgrenzen von der Designvariablen  $s$  abhängen. Aus diesem Grund ist für die Berechnung der partiellen Ableitung der schwachen Form des Gleichgewichts nach der Designvariablen eine Rücktransformation auf eine bzgl. der Designvariablen unabhängige Beschreibung erforderlich.

Hierzu eignet sich die Parametrisierung des materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  durch die konvektiven Koordinaten  $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$ , wie sie in Abschnitt 5.1 angegeben wurde. Hierbei sind die kartesischen Koordinaten  $X^A$  bzw.  $x^i$  durch

$$X^A = \hat{X}^A(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, s) \quad \text{bzw.} \quad x^i = \hat{x}^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t, s)$$

gegeben, d.h. durch die Abbildung

$$\psi : \begin{cases} T_\Theta \times T_t \times T_s & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t, s) & \mapsto \mathbf{x} = \psi(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t, s) = [\chi \circ \omega](\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t, s) \end{cases}$$

nach (5.2). Damit kann eine Koordinatentransformation der kartesischen Koordinaten  $X^A$  der Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_\circ^s$  auf die konvektiven Koordinaten vorgenommen werden. Aus der Darstellung (5.18) der schwachen Form des Gleichgewichts in den Größen der Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_\circ^s$  ergibt sich somit

$$\begin{aligned} G &= \int_{\mathbf{B}_\circ^s} \mathbf{P} : \text{Grad } \boldsymbol{\eta} \, dV_s - \int_{\mathbf{B}_\circ^s} \rho_\circ \bar{\mathbf{k}}_\circ \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV_s - \int_{\partial \mathbf{B}_\circ^s} \bar{\mathbf{t}}_\circ \cdot \boldsymbol{\eta} \, dA_s \\ &= \int_{T_\Theta} \mathbf{P} : \text{Grad } \boldsymbol{\eta} \, J_\Theta^s \, dV_\Theta - \int_{T_\Theta} \rho_\circ \bar{\mathbf{k}}_\circ \cdot \boldsymbol{\eta} \, J_\Theta^s \, dV_\Theta - \int_{\partial T_\Theta} \bar{\mathbf{t}}_\Theta \cdot \boldsymbol{\eta} \, dA_\Theta = 0, \end{aligned}$$

worin  $T_\Theta = [0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3$  den Parameterraum der konvektiven Koordinaten,  $\partial T_\Theta$  die zugehörige belastete Oberfläche und  $\bar{\mathbf{t}}_\Theta$  die hierauf bezogene äußere Belastung darstellt. Die Jacobische Funktionalmatrix der Koordinatentransformation wird mit

$$\underline{F}_\Theta^s := \left[ \frac{\partial \psi_\circ^{si}}{\partial \Theta^j} \right] \quad (5.41)$$

und die zugehörige Determinante mit  $J_{\Theta}^s$  bezeichnet.

Damit kann die partielle Ableitung nach der Designvariablen durch Anwendung der Kettenregel berechnet werden und wieder zurück in die Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_{\circ}^s$  transformiert werden. Auf eine Ausformulierung dieser Berechnung wird verzichtet, da sich die auftretenden Ableitungen stets auf die bereits dargestellten Beziehungen der Abschnitte 5.2.2 und 5.2.3 zurückführen lassen.

### 5.2.5 Die Diskretisierung der variationellen Sensitivitätsaussage

Für die numerische Umsetzung der Sensitivitätsaussagen ist die Diskretisierung in Raum und Zeit entsprechend des gewählten Näherungsverfahrens, hier der Finite-Elemente-Methode, vorzunehmen. Hierbei sei an dieser Stelle ausschließlich das isoparametrische Konzept betrachtet, bei dem die Geometrie und der Verschiebungszustand im Element in gleicher Form über die Knotenwerte approximiert werden, siehe Kapitel 4. Die Geometrie des Elementes wird somit bei zusätzlicher Berücksichtigung der Abhängigkeit durch die Designvariable  $s$  durch zwei Gesichtspunkte kennzeichnet:

1. Die Knoten des Finite-Elemente-Netzes liegen auf der exakten Geometrie und für die Knotenkoordinaten ergibt sich als funktionale Abhängigkeit die Darstellung der Gleichung (5.3). Da die konvektiven Koordinaten  $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$  der Knoten des Finite-Elemente-Netzes festgehalten werden, wird hier nur die funktionale Abhängigkeit von der Designvariablen  $s$  betrachtet, d.h.

$$X_k^A = \hat{X}_k^A(s). \quad (5.42)$$

2. Die Angabe der Koordinaten von Punkten im Element erfolgt über die Ansatzfunktionen  $N^k = \hat{N}^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  der Knoten, die Funktionen der zusätzlich eingeführten lokalen Koordinaten der isoparametrischen Formulierung und damit unabhängig von der Designvariablen sind. Genauer gilt

$$X_h^A = \hat{X}_h^A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, s) = \sum_{k=1}^{n_{kel}} \hat{N}^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \hat{X}_k^A(s). \quad (5.43)$$

Für die Beziehungen zwischen den konvektiven Koordinaten  $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$  im Element erhält man analog die Darstellung

$$\Theta_h^A = \hat{\Theta}_h^A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^{n_{kel}} \hat{N}^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \hat{\Theta}_k^A, \quad (5.44)$$

wobei  $\Theta_k^A$  die Werte der konvektiven Koordinaten an den Knoten des Finite-Elemente-Netzes angeben.

Für den Verschiebungszustand im Element gilt für das isoparametrische Konzept

$$\begin{aligned} u_h^i &= \hat{u}_h^i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, s) = \sum_{k=1}^{n_{kel}} \hat{N}^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \hat{v}_k^i(s) \\ &= \tilde{u}_h^i(X_h^1, X_h^2, X_h^3) = \sum_{k=1}^{n_{kel}} \tilde{N}^k(X_h^1, X_h^2, X_h^3) v_k^i(s). \end{aligned}$$

Dabei sind  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  die lokalen Koordinaten des isoparametrischen Konzeptes und  $X_h^1, X_h^2, X_h^3$  die kartesischen Koordinaten der Punkte der diskreten Referenzkonfiguration. Weiterhin stellen  $X_k^A$  die A-te Koordinate und  $v_k^i$  die i-te Verschiebungskomponente des k-ten Knotens dar.

Der materielle Deformationsgradient spielt sowohl für die Strukturanalyse hyperelastischer Materialien als auch für deren Sensitivitätsanalyse eine wesentliche Rolle. Als exemplarisches Beispiel wurde in Abschnitt 5.2.3 die Darstellung der partiellen Ableitung der Spannungstensoren nach der Designvariablen, Gleichungen (5.31) und (5.40), auf die partielle Ableitung des materiellen Deformationsgradienten zurückgeführt. Damit ist die Diskretisierung der partiellen Ableitung des materiellen Deformationsgradienten nach der Designvariablen zentral für den Übergang von den kontinuierlichen Beziehungen zur algebraischen Formulierung nach Abschnitt 5.3.3.

Für die partielle Ableitung von  $\mathbf{F}$  nach den Designvariablen gilt mit (5.25) die kontinuierliche Beziehung

$$\frac{\Delta}{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial s} = \frac{\partial \text{Grad } \mathbf{u}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial u^i}{\partial X^A} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}^A = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \Theta^i} \otimes \frac{\partial \mathbf{G}^i}{\partial s}.$$

Dies führt bei der Verwendung kartesischer bzw. konvektiver Koordinatensysteme auf die Berechnung der partiellen Ableitungen

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial u^i}{\partial X^A} \right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 \hat{X}^k(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, s)}{\partial \Theta^j \partial s}}.$$

Diese Beziehungen sind konsistent zum numerischen Näherungsverfahren zu diskretisieren.

Für die Darstellung in kartesischen Koordinaten sei auf die Abschnitte 5.3.3.7 und 5.3.3.8 verwiesen, wo die oben angegebene Gleichung durch Einführung der Ansätze für die kartesischen Koordinaten und den Verschiebungszustand diskretisiert wird.

Für die Darstellung in konvektiven Koordinaten gilt dann mit der Darstellung (5.43) der kartesischen Koordinaten als Funktion der lokalen Koordinaten und der Designvariable sowie mit der Beziehung (5.44) zwischen lokalen und konvektiven Koordinaten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{X}_h^k(\xi^1, \xi^2, \xi^3, s)}{\partial \Theta^j \partial s} &= \frac{\partial^2}{\partial \Theta^j \partial s} \left[ \sum_{k=1}^{nkel} \hat{N}^k(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \hat{X}_k^A(s) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{nkel} \left[ \frac{\partial \hat{N}^k(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial \Theta^j} \frac{\partial \hat{X}_k^A(s)}{\partial s} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{nkel} \left[ \frac{\partial \hat{N}^k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \hat{\xi}_i}{\partial \Theta^j} \frac{\partial \hat{X}_k^A}{\partial s} \right]. \end{aligned}$$

Damit sind zur Berechnung innerhalb des isoparametrischen Konzeptes die konvektiven Koordinaten  $\Theta_k^A$  der Knoten bereitzustellen.



## 5.3 Die diskrete Sensitivitätsanalyse

Der Ausgangspunkt der diskreten Sensitivitätsanalyse ist, wie bereits oben erläutert, das durch den Diskretisierungsprozeß in Raum und Zeit aus dem kontinuierlichen strukturmechanischen Problem hergeleitete diskrete Näherungsproblem. In der diskreten Sensitivitätsanalyse sind die Ableitungen der algebraischen Gleichungen des diskreten Näherungsproblems, zumeist auf der Basis der programmierten Beziehungen der Strukturanalyse, zu ermitteln.

### 5.3.1 Grundlagen der diskreten Sensitivitätsanalyse

Grundsätzlich sollen keine Unterschiede zwischen der funktionalen Abhängigkeit der diskret formulierten Zielfunktion  $f_h$  und den Nebenbedingungen  $g_{h_j}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) von den diskreten Größen des Näherungsproblems gemacht werden. Damit reicht es aus, exemplarisch die diskrete Problemfunktion  $\varphi_h$  zu untersuchen. Die veränderbaren Größen innerhalb der Strukturoptimierung werden als Designvariablen  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) bezeichnet und zur  $n$ -dimensionalen Spaltenmatrix der Designvariablen  $\underline{s}$  zusammengefaßt. Zur Vereinfachung der Notation wird eine beliebige Designvariable ausgewählt und ohne Index, d.h. als  $s \in \mathbb{R}$  geschrieben. Die Designvariablen werden für die Formoptimierung insbesondere aus den Größen des Geometriemodells ausgewählt und sind somit von der Diskretisierung unabhängig.

Die funktionale Abhängigkeit der (diskreten) Problemfunktion  $\varphi_h$  von den Designvariablen besteht zum einen aus der expliziten Abhängigkeit von den Designvariablen und zum anderen aus der schwieriger handhabbaren Abhängigkeit des diskreten Gleichgewichtszustandes von den Designvariablen. Wird der diskrete Lösungszustand über das approximierende Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}_h = \hat{\mathbf{u}}_h(s)$  beschrieben, so ergibt sich in Anlehnung an Gleichung (5.17) der funktionale Zusammenhang

$$\boxed{\varphi_h = \check{\varphi}_h(s, \hat{\mathbf{u}}_h(s))} \quad (5.45)$$

Analog zu den Beziehungen (5.18) und (5.25) der variationellen Sensitivitätsanalyse gilt damit für die diskreten Formulierungen der schwachen Form des Gleichgewichts die funktionale Abhängigkeit

$$G_h = \check{G}_h(s, \hat{\mathbf{u}}_h(s)) = 0 \quad (5.46)$$

für die Formulierung in den Größen der Referenzkonfiguration bzw.

$$g_h = \check{g}_h(s, \hat{\mathbf{u}}_h(s)) = 0 \quad (5.47)$$

für die Formulierung in den Größen der Momentankonfiguration. Aus diesen Beziehungen können formal die diskreten Sensitivitätsaussagen analog zur kontinuierlichen Formulierung in Abschnitt 5.2.1 aufgestellt werden.

Für die numerische Berechnung sind die obigen Beziehungen erst durch Auswertung der Beziehungen der Finite-Elemente-Methode zugänglich. Im Rahmen dieser Arbeit

wird einschränkend vorausgesetzt, daß sich der Gleichgewichtszustand durch die Angabe des globalen Knotenverschiebungsvektors  $\underline{V}$  des FE-Netzes beschreiben läßt, d.h. daß es sich um eine Verschiebungsmethode bzw. um eine verallgemeinerte Verschiebungsmethode handelt, siehe auch Kapitel 4. Nach Einsetzen des Näherungsansatzes gilt für den Verschiebungszustand die Form

$$u_h^i = \hat{u}_h^i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^{nkel} \hat{N}^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) v_k^i. \quad (5.48)$$

Hierin sind  $\hat{N}^k$  die Ansatzfunktionen des k-ten Knotens als Funktion der lokalen Koordinaten  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ,  $v_k^i$  die i-te Verschiebungskomponente des k-ten Knotens und  $nkel$  die Anzahl der Knoten am Element. In den obigen Beziehungen tritt anstelle der Abhängigkeit vom approximierenden Verschiebungszustand  $\mathbf{u}_h = \hat{\mathbf{u}}_h(s)$  die Abhängigkeit vom Verschiebungsvektor  $\underline{V} = \hat{\underline{V}}(s)$  auf, d.h. für die Sensitivitätsanalyse wird der funktionale Zusammenhang

$$\varphi_h = \hat{\varphi}_h(s, \hat{\underline{V}}(s)) \quad (5.49)$$

vorausgesetzt. Die Beschränkung auf die ausschließliche Abhängigkeit der diskreten Problemfunktion vom Knotenverschiebungsvektor des betrachteten Gleichgewichtszustandes entspricht den Eigenschaften des vorliegenden hyperelastischen Materials. Für die Sensitivitätsanalyse geschichtsabhängiger Prozesse ist eine Modifikation dieser Abhängigkeit auf die Berücksichtigung aller eingenommenen Gleichgewichtszustände vorzunehmen.

Analog werden die diskreten Formulierungen der schwachen Form des Gleichgewichtes behandelt, wobei zusätzlich durch Elimination des Vektors der virtuellen Knotenverschiebungen (siehe Kapitel 4) aus den skalaren Gleichungen  $G_h = 0$  bzw.  $g_h = 0$  vektorwertige Beziehungen entstehen, d.h. es gelte für die diskrete Gleichgewichtsaussage in den Größen der Referenzkonfiguration die Beziehung

$$\underline{G} = \hat{\underline{G}}(s, \hat{\underline{V}}(s)) = \underline{0}. \quad (5.50)$$

Analog gilt für die Beschreibung in den Größen der Momentankonfiguration die Aussage

$$\underline{g} = \hat{\underline{g}}(s, \hat{\underline{V}}(s)) = \underline{0}. \quad (5.51)$$

Aus der funktionalen Abhängigkeit der Problemfunktion  $\varphi_h$  von der Designvariablen nach (5.49) kann durch Anwendung der Kettenregel die totale Ableitung in der Form

$$\frac{d\varphi_h}{ds} = \frac{\partial\varphi_h}{\partial s} + \frac{\partial\varphi_h}{\partial \underline{V}} \frac{d\underline{V}}{ds}. \quad (5.52)$$

angegeben werden. Nach der Wahl der diskreten Problemfunktion  $\varphi_h$  sind deren partielle Ableitungen nach der Designvariablen  $s$  und den Knotenverschiebungen  $V_k$  leicht zu ermitteln. Die Schwierigkeit besteht in der Berechnung der totalen Ableitung des Verschiebungszustandes nach den Designvariablen.

Hierzu ist festzustellen, daß bei der Optimierung stets die Gleichgewichtsbedingung, z.B. die schwache Form des Gleichgewichts nach (2.80), erfüllt sein muß. Für die Finite-Elemente-Methode in Form der Verschiebungsmethode bzw. einer modifizierten Verschiebungsmethode ergibt sich aus dieser Forderung für die Beschreibung in den Größen

der Referenzkonfiguration die Gleichung (5.50), woraus sich mit Hilfe der Kettenregel die Aussage

$$\frac{d\underline{\mathbf{G}}}{ds} = \frac{\partial \underline{\mathbf{G}}}{\partial s} + \frac{\partial \underline{\mathbf{G}}}{\partial \underline{\mathbf{V}}} \frac{d\underline{\mathbf{V}}}{ds} = \underline{\mathbf{0}} \quad (5.53)$$

ergibt. Durch Auflösen dieser Gleichung erhält man die gesuchte totale Ableitung des Verschiebungszustandes von den Designvariablen

$$\frac{d\underline{\mathbf{V}}}{ds} = \left\{ \frac{\partial \underline{\mathbf{G}}}{\partial \underline{\mathbf{V}}} \right\}^{-1} \left\{ -\frac{\partial \underline{\mathbf{G}}}{\partial s} \right\}, \quad (5.54)$$

die eingesetzt in Gleichung (5.52) die Darstellung

$$\boxed{\frac{d\varphi_h}{ds} = \frac{\partial \varphi_h}{\partial s} + \frac{\partial \varphi_h}{\partial \underline{\mathbf{V}}} \left\{ \frac{\partial \underline{\mathbf{G}}}{\partial \underline{\mathbf{V}}} \right\}^{-1} \left\{ -\frac{\partial \underline{\mathbf{G}}}{\partial s} \right\}} \quad (5.55)$$

der totalen Ableitung der diskreten Problemfunktion nach den Designvariablen ergibt. Die Bedeutung der Strukturanalyse für die Sensitivitätsanalyse besteht zunächst in der Notwendigkeit, zu den aktuellen Werten der Designvariablen den zugehörigen Gleichgewichtszustand zu ermitteln. Darüberhinaus werden die Informationen der Strukturanalyse für die Ermittlung der Sensitivitäten direkt benötigt. In der Strukturanalyse, die für eine feste Wahl der Designvariablen durchgeführt wird, muß für das Newton-Verfahren die exakte Linearisierung der notwendigen Gleichgewichtsbedingungen, z.B. die Formulierung der schwachen Form des Gleichgewichts nach (2.80), durchgeführt werden. Dies ergibt die sogenannte „konsistente tangentielle Steifigkeitsmatrix“ als

$$\underline{\mathbf{K}}_T = \frac{\partial \underline{\mathbf{G}}}{\partial \underline{\mathbf{V}}}, \quad (5.56)$$

die aus der Strukturanalyse für den Lösungspunkt ermittelt und bereits faktorisiert wurde. Damit kann Gleichung (5.55) in der Form

$$\boxed{\frac{d\varphi_h}{ds} = \frac{\partial \varphi_h}{\partial s} + \frac{\partial \varphi_h}{\partial \underline{\mathbf{V}}} \{ \underline{\mathbf{K}}_T \}^{-1} \left\{ -\frac{\partial \underline{\mathbf{G}}}{\partial s} \right\}} \quad (5.57)$$

geschrieben werden.

Über diesen wichtigen Aspekt hinaus können die in der Strukturanalyse zur Berechnung der tangentialen Steifigkeitsmatrix ermittelten konsistenten Ableitungen wichtiger Größen, z.B. der Materialtensor, für die Berechnung der partiellen Ableitungen der Problemfunktion nach den Designvariablen benutzt werden.

### 5.3.2 Der Aufbau der diskreten Sensitivitätsberechnung

Zur Berechnung der Sensitivität der diskreten Problemfunktion  $\varphi_h$  muß die totale Ableitung nach den Designvariablen bestimmt werden. Hierzu sind gemäß Gleichung (5.55) die partiellen Ableitungen der Problemfunktion  $\varphi_h$  und der schwachen Form des Gleichgewichts  $\underline{G}$  nach den Designvariablen  $\underline{s}$  und den Verschiebungen  $\underline{V}$  bereitzustellen. Die Berechnung der partiellen Ableitungen ist dabei von der Programmstruktur so allgemeingültig zu halten, daß eine Veränderung der Designvariablen bzw. der Art und Anzahl der Verschiebungen nicht zur Änderung des Quellcodes der Software führt.

Zur Erläuterung des Vorgehens sei exemplarisch eine Problemfunktion  $\varphi_h$ , beispielsweise die Vergleichsspannung in einem Gaußpunkt eines ausgewählten Elementes, als Funktion von  $n_o$  Variablen  $\alpha_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n_o$  gegeben, d.h.

$$\varphi_h = \hat{\varphi}_h(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{n_o}). \quad (5.58)$$

Die Variablen  $\alpha_i$  sind dabei selbst wieder Funktionen von  $n_i$  Variablen  $\alpha_{ij}$  mit  $j = 1, 2, \dots, n_{ij}$ , d.h.

$$\alpha_i = \hat{\alpha}_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ij}, \dots, \alpha_{in_i}). \quad (5.59)$$

Diese Abhängigkeit setzt sich beliebig fort, bis in der letzten Stufe die tatsächlich unabhängigen Variablen erreicht werden. Für die Funktion  $\alpha_{ij\dots y}$  gilt damit

$$\alpha_{ij\dots y} = \hat{\alpha}_{ij\dots y}(\alpha_{ij\dots y1}, \alpha_{ij\dots y2}, \dots, \alpha_{ij\dots yz}, \dots, \alpha_{ij\dots yn_y}), \quad (5.60)$$

wobei die Variablen  $\alpha_{ij\dots yz}$  für  $z = 1, 2, \dots, n_{ij\dots y}$ , d.h. die möglichen Designvariablen und die Verschiebungskomponenten, unabhängig voneinander sind und selbst nicht mehr von weiteren Variablen abhängen sollen. Die Abhängigkeit der Verschiebungen des Gleichgewichtszustandes von den Designvariablen wird gemäß (5.54) über die Ableitung der schwachen Form des Gleichgewichts berücksichtigt, so daß für die Berechnung der partiellen Ableitungen die Designvariablen und Verschiebungen unabhängig voneinander sind. Damit ist die diskrete Problemfunktion  $\varphi_h$  letztlich von den Variablen  $\alpha_{ij\dots yz}$  abhängig.

Für eine flexible Behandlung einer großen Breite möglicher Designvariablen ist die Tiefe der Schachtelung variabel und unterschiedlich. Zudem wird in den meisten Fällen für die Problemfunktion die Abhängigkeit von der gewählten Designvariablen über mehrere unterschiedliche Variablen mit unterschiedlicher Schachtelungstiefe gegeben sein.

Für eine spezielle Wahl der Designvariablen  $s_\alpha$  ist eine der unabhängigen Variablen  $\alpha_{ij\dots yz}$  als Designvariable definiert und veränderbar, während alle anderen für diese Situation fest bleiben. Damit erhält man für die Ableitung der Variablen  $\alpha_{ij\dots yz}$  nach der definierten Designvariable  $s_\alpha$  die Beziehung

$$\frac{\partial \alpha_{ij\dots yz}}{\partial s_\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha_{ij\dots yz} \text{ die Designvariable } s_\alpha \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.61)$$

Für die partielle Ableitung der Problemfunktion  $\varphi_h$  nach der Designvariablen  $s_\alpha$  gilt somit die Beziehung

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial s_\alpha} = \sum_{i=1}^{n_o} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial s_\alpha} = \sum_{i=1}^{n_o} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha_i} \left[ \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_{ij}} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial s_\alpha} \right] = \dots$$

$$\dots = \sum_{i=1}^{n_o} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha_i} \left[ \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_{ij}} \left( \dots \left\{ \sum_{z=1}^{n_{ij\dots y}} \frac{\partial \alpha_{ij\dots y}}{\partial \alpha_{ij\dots yz}} \frac{\partial \alpha_{ij\dots yz}}{\partial s_\alpha} \right\} \dots \right) \right]. \quad (5.62)$$

Analog zur obigen Struktur ist die Abhängigkeit der schwachen Form des Gleichgewichts von den Designvariablen gegeben, so daß die Gleichung (5.62) auch für die Komponenten des Vektors  $\underline{G}$  gilt. Die partiellen Ableitungen der Komponenten des Vektors  $\underline{G}$  nach den Designvariablen werden zu einem Vektor zusammengefaßt.

Wird dagegen die partielle Ableitung der Problemfunktion  $\varphi_h$  bzw. einer Komponente der schwachen Form nach den Verschiebungskomponenten  $V_\alpha$  abgeleitet, so gilt beispielhaft für die Problemfunktion der Zusammenhang

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial V_\alpha} = \sum_{i=1}^{n_o} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha_i} \left[ \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_{ij}} \left( \dots \left\{ \sum_{z=1}^{n_{ij\dots y}} \frac{\partial \alpha_{ij\dots y}}{\partial \alpha_{ij\dots yz}} \frac{\partial \alpha_{ij\dots yz}}{\partial V_\alpha} \right\} \dots \right) \right], \quad (5.63)$$

mit der Beziehung

$$\frac{\partial \alpha_{ij\dots yz}}{\partial V_\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha_{ij\dots yz} \text{ die Verschiebungskomponente } V_\alpha \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.64)$$

Die partiellen Ableitungen von  $\varphi_h$  nach  $V_\alpha$  werden zu einem Vektor zusammengefaßt.

Die Sensitivitätsanalyse von allgemeinen Problemfunktionen mit den oben beschriebenen komplexen Abhängigkeiten kann nur bei einem modularen Aufbau der Berechnung erfolgen. Hierbei wird aus der Kette der Abhängigkeiten ein Segment herausgelöst und isoliert betrachtet. Zur Erläuterung wird beispielhaft die Variable  $\alpha_i$  der Problemfunktion  $\varphi_h$  betrachtet, die, wie in Gleichung (5.59) gezeigt, wiederum von mehreren Variablen anhängig ist. Für die Ableitung der Funktion  $\alpha_i$  nach der Designvariablen  $s_\alpha$  gilt

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial s_\alpha} = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_{ij}} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial s_\alpha}. \quad (5.65)$$

Die Programmablauf führt somit dazu, daß für die Berechnung der partiellen Ableitung der Funktion  $\alpha_i$  nach der Designvariablen  $s_\alpha$ , d.h. von  $\frac{\partial \alpha_i}{\partial s_\alpha}$ , dem ausführenden Unterprogramm die partiellen Ableitungen der (die Funktion  $\alpha_i$  definierenden) Variablen  $\alpha_{ij}$  nach der Designvariablen  $s_\alpha$ , d.h. die bereits berechneten Ableitungen  $\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial s_\alpha}$ , bereitgestellt werden. Damit ist auf der Ebene des parallel zur Berechnung vorhandenen Unterprogramms der Sensitivitätsanalyse nur die Gleichung (5.65) auszuwerten. Der Ausgabewert  $\frac{\partial \alpha_i}{\partial s_\alpha}$  stellt somit für das folgende Unterprogramm der Sensitivitätsanalyse die Eingangsdaten dar.

Für die weitere Untersuchung wird die Abhängigkeit der Problemfunktion  $\varphi_h$  nach den unabhängigen Variablen  $\alpha_{ij\dots yz}$  durch das totale Differential  $d\varphi_h$  der Problemfunktion  $\varphi_h$  ausgedrückt, d.h.

$$d\varphi_h = \sum_{i=1}^{n_o} \sum_{j=1}^{n_i} \dots \sum_{z=1}^{n_{ij\dots y}} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha_{ij\dots yz}} d\alpha_{ij\dots yz}. \quad (5.66)$$

### 5.3.3 Die diskrete Sensitivität der Spannungen

Die Untersuchung isotroper, hyperelastischer Materialien lieferte mit Gleichung (3.23) die allgemeingültige Darstellungsform für den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial \mathbf{C}} = 2 W_{,k} A_{km} \mathbf{Z}_m. \quad (5.67)$$

Für die Betrachtung inkompressibler Materialien kann diese Darstellung in die Form

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_k} \frac{\partial \bar{I}_k}{\partial \mathbf{C}} = 2 \bar{W}_{,k} \bar{A}_{km} \bar{\mathbf{Z}}_m \quad (5.68)$$

modifiziert werden, wobei jetzt die Summation nur noch über 1 und 2 läuft.

Im weiteren wird die Sensitivität des kompressiblen Materials, d.h. die Bestimmung der partiellen Ableitung der Spannungen nach den Designvariablen, näher untersucht. Die Berechnung der partiellen Ableitung der Spannungen nach den Verschiebungen ist aus der Strukturanalyse bekannt und wird nicht angegeben. Die Sensitivität inkompressibler Materialien verläuft formal äquivalent zur dargestellten Behandlung kompressibler Materialien und wird ebenfalls nicht explizit dargestellt.

Die Sensitivitätsanalyse läßt sich, wie in Gleichung (5.66) dargelegt, über die vollständigen Differentiale der zu untersuchenden Größen formulieren, d.h. für die Spannungen nach (5.67) gilt

$$d\mathbf{S} = 2 [dW_{,k} A_{km} \mathbf{Z}_m + W_{,k} dA_{km} \mathbf{Z}_m + W_{,k} A_{km} d\mathbf{Z}_m]. \quad (5.69)$$

Damit ist das vollständige Differential der Spannungen auf die vollständigen Differentiale  $dW_{,k}$  der partiellen Ableitung der Formänderungsenergie nach den Invarianten,  $dA_{km}$  der Beziehung zwischen der Ableitung der Invarianten und der gewählten Basis und  $d\mathbf{Z}_m$  der gewählten Basis zurückzuführen. Diese sind im weiteren zu vereinfachen.

#### 5.3.3.1 Das vollständige Differential der partiellen Ableitung der Formänderungsenergie nach den Invarianten

Die Formänderungsenergie  $W$  ist nach den Untersuchungen im Kapitel 2 als Funktion der Invarianten I, II, III des Rechts- bzw. Links-Cauchy-Green-Tensors  $\mathbf{C}$  bzw.  $\mathbf{b}$  aufzufassen. Daneben sind bei der Sensitivitätsanalyse auch die nicht geometrischen Parameter der Formänderungsenergie als veränderliche Größen anzusehen, d.h. es wird im weiteren der funktionale Zusammenhang

$$W = \hat{W}(z_1, z_2, z_3, \dots, z_p, \text{I, II, III}) \quad (5.70)$$

vorausgesetzt. Dabei seien die Variablen  $z_1, z_2, \dots, z_p$  und die Invarianten I, II, III voneinander unabhängig. Bei Betrachtung der Formänderungsenergiefunktion  $W$ , z.B. des Ogden-Materials, handelt es sich bei den Variablen  $z_1, z_2, \dots, z_p$  um Materialparameter, die im folgenden stets unter diesem Namen angesprochen werden sollen.

Damit kann das vollständige Differential in der Form

$$dW_{,k} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 W}{\partial I_k \partial z_i} dz_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 W}{\partial I_k \partial I_j} dI_j \quad (5.71)$$

angegeben werden, wobei die zweite partielle Ableitung der Formänderungsenergie nach den Invarianten durch die Betrachtungen in Kapitel 3 gegeben ist. Da die Variablen  $z_1, z_2, \dots, z_p$  und  $I_k$  voneinander unabhängig sind, ist die gemischte Ableitung ohne weitere Schwierigkeiten auch für die Sonderfälle zusammenfallender Eigenwerte anzugeben. Damit ist zur Berechnung nur die weitere Kenntnis der vollständigen Differentiale der Variablen  $dz_i$  für  $i = 1, 2, \dots, p$  und  $dI_k$  für  $k = 1, 2, 3$  erforderlich.

### 5.3.3.2 Das vollständige Differential der Größen $A_{km}$

Die partiellen Ableitungen der Invarianten nach  $\mathbf{C}$  werden nach Abschnitt 3.2.1 bezüglich der gewählten Basis  $\mathbf{Z}_m$ , d.h. in der Form der Gleichung (3.21), angegeben. Damit ergibt sich das vollständige Differential zu

$$dA_{km} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_{km}}{\partial I_i} dI_i, \quad (5.72)$$

so daß das vollständige Differential der Invarianten zu berechnen ist.

### 5.3.3.3 Das vollständige Differential der Basis $\mathbf{Z}_m$

Die Basistensoren  $\mathbf{Z}_m$  für  $m = 1, 2, 3$  sind durch die Wahl der Betrachtungsweise im wesentlichen vorgegeben. Für das zugehörige vollständige Differential ergibt sich

$$d\mathbf{Z}_i = \frac{\partial \mathbf{Z}_i}{\partial \mathbf{C}} : d\mathbf{C}, \quad (5.73)$$

wobei die vierstufigen Tensoren  $\frac{\partial \mathbf{Z}_i}{\partial \mathbf{C}}$  aus der Berechnung des Materialtensors bereits bekannt sind. Damit wird die Bereitstellung des vollständigen Differentials des Rechts-Cauchy-Green-Tensors  $\mathbf{C}$  erforderlich.

### 5.3.3.4 Das vollständige Differential der Invarianten

Die Invarianten sind gemäß Gleichung (2.13) Funktionen des Rechts-Cauchy-Green-Tensors, d.h. für das vollständige Differential der Invarianten erhält man somit die Beziehungen

$$dI_k = \frac{\partial I_k}{\partial \mathbf{C}} : d\mathbf{C} = [A_{km} \mathbf{Z}_m] : d\mathbf{C}. \quad (5.74)$$

Aus dieser und den obigen Beziehungen wird deutlich, daß für die Berechnung des vollständigen Differentials der Spannungen nur die weitere Kenntnis des vollständigen Differentials der sonstigen Variablen in der Formänderungsenergie (außer den Invarianten), d.h.  $dz_i$  für  $i = 1, 2, \dots, p$ , und des vollständigen Differentials des Rechts-Cauchy-Green-Tensors, d.h.  $d\mathbf{C}$ , erforderlich ist.

### 5.3.3.5 Das vollständige Differential der Materialparameter

Das vollständige Differential eines Materialparameters  $z_j$  mit  $j \in \{1, 2, 3, \dots, p\}$  ist in der Regel in der Form

$$dz_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } z_j \text{ die aktuelle Designvariable ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.75)$$

gegeben. Sollen weitergehende Zusammenhänge betrachtet werden, so ist die Kette der Beziehungen natürlich weiter fortzusetzen und es werden auch Werte zwischen 0 und 1 möglich sein.

### 5.3.3.6 Das vollständige Differential des Rechts-Cauchy-Green-Tensors $\mathbf{C}$

Das vollständige Differential des Rechts-Cauchy-Green-Tensors kann mit Gleichung (2.19) aus dem vollständigen Differential des Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H} = \text{Grad } \mathbf{u}$  in der folgenden Form berechnet werden

$$d\mathbf{C} = 2 d\mathbf{E} = d\{\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}\} = d\mathbf{H} + d\mathbf{H}^T + d\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{H}^T d\mathbf{H}. \quad (5.76)$$

### 5.3.3.7 Das vollständige Differential des Verschiebungsgradienten $\mathbf{H}$

In der Kette der Abhängigkeiten ist mit dem Verschiebungsgradienten der Punkt erreicht, an dem für die Sensitivitätsanalyse das Vorgehen der Finite-Elemente-Methode zu berücksichtigen ist. Dies bedeutet, daß die bisher bereitgestellten Beziehungen sowohl für den kontinuierlichen als auch den diskreten Zugang zur Sensitivitätsanalyse gültig sind. Der Verschiebungsgradient ist durch

$$\mathbf{H} = \text{Grad } \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial u^i}{\partial X^A} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}^A \quad (5.77)$$

bezüglich einer kartesischen Basis gegeben.

Für den Verschiebungszustand wird im Rahmen der Finite-Elemente-Methode unter Berücksichtigung der Abhängigkeit von der Designvariablen für die  $i$ -te Verschiebungskomponente der Ansatz

$$u_h^i = \tilde{u}_h^i(X^1, X^2, X^3, s) = \sum_{k=1}^{n_{kel}} \tilde{N}^k(X^1, X^2, X^3) \hat{v}_k^i(s) \quad (5.78)$$

gemacht, wobei die obige Beziehung für die Darstellung der Verschiebung in einem Element gilt, siehe auch Gleichung (4.3). Hierbei stellt  $v_k^i = \hat{v}_k^i(s)$  die  $i$ -te Komponente der Verschiebung des  $k$ -ten Knotens dar und  $\tilde{N}^k = \hat{N}^k(X^1, X^2, X^3)$  ist die zugehörige Formfunktion in Abhängigkeit der globalen Koordinaten  $X^1, X^2, X^3$ , die bei Einführung der lokalen Koordinaten  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  des isoparametrischen Konzepts (siehe den nächsten Abschnitt) auch in der Form  $N^k = \tilde{N}^k(X^1, X^2, X^3) = \hat{N}^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$



geschrieben werden kann. Damit ergibt sich für die Koeffizienten des diskreten Verschiebungsgradienten bzgl. einer kartesischen Basis die Darstellung

$$\boxed{\frac{\partial u_h^i}{\partial X^A} = \sum_{k=1}^{nkel} \frac{\partial \tilde{N}^k(X^1, X^2, X^3)}{\partial X^A} v_k^i,} \quad (5.79)$$

woraus sich das vollständige Differential der Matrix  $\underline{H}$  der Ableitung der diskreten Verschiebungskomponenten nach den kartesischen Koordinaten

$$d\underline{H} = d \left[ \frac{\partial u_h^i}{\partial X^A} \right] = \sum_{k=1}^{nkel} \left\{ d \left[ \frac{\partial \tilde{N}^k}{\partial X^A} \right] v_k^i + \frac{\partial \tilde{N}^k}{\partial X^A} d v_k^i \right\} \quad (5.80)$$

ergibt. Damit ist die Sensitivität der Spannungen auf die Sensitivität der Knotenverschiebungen des FE-Netzes und die Sensitivität der kartesischen Ableitungen der zugehörigen Ansatzfunktionen zurückgeführt.

### 5.3.3.8 Das vollständige Differential der kartesischen Ableitungen der Ansatzfunktionen

Die zentrale Grundlage für die Bestimmung des vollständigen Differentials der kartesischen Ableitungen der Ansatzfunktionen ist in dieser Arbeit die isoparametrische Beschreibung der finiten Elemente, die aus der Literatur der Finiten-Elemente-Methode hinreichend bekannt ist, siehe z.B. *Bathe* [9], *Hughes* [52], *Zienkiewicz, Taylor* [111] und die Darstellung in Kapitel 4.

Die Abbildung der lokalen Koordinaten  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  auf die kartesischen Koordinaten  $(X^1, X^2, X^3)$  wird bei der isoparametrischen Vorgehensweise mit Hilfe der Formfunktionen  $N^k = \hat{N}^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  (siehe auch Gleichung (5.78)) durchgeführt, d.h. mit der A-ten Koordinate des k-ten Knotens gilt

$$\boxed{X^A = \hat{X}^A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^{nkel} \hat{N}^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \hat{X}_k^A(s).} \quad (5.81)$$

Das totale Differential dieser Beziehung liefert

$$d\hat{X}^A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, s) = \sum_{k=1}^{nkel} \hat{N}^k dX_k^A, \quad (5.82)$$

d.h. im weiteren ist das totale Differential der Knotenkoordinaten  $dX_k^A$  zu bestimmen.

Die Formfunktionen  $N^k$  sind üblicherweise als Funktionen der lokalen Variablen gegeben. Die benötigten partiellen Ableitungen der Formfunktionen nach den kartesischen Koordinaten werden durch Berechnung und Inversion der Funktionalmatrix der Beziehung (5.81)

$$\underline{J} := \left( \frac{\partial X^A}{\partial \xi_j} \right) \quad \text{und damit} \quad \underline{J}^{-1} = \left( \frac{\partial \xi_l}{\partial X^B} \right) \quad (5.83)$$

in der Form

$$\frac{\partial N^k}{\partial X^B} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial N^k}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial X^B}. \quad (5.84)$$

bereitgestellt. Für das totale Differential der kartesischen Ableitungen der Ansatzfunktionen ergibt sich somit die Beziehung

$$d \left\{ \frac{\partial N^k}{\partial X^B} \right\} = d \left\{ \sum_{l=1}^3 \frac{\partial N^k}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial X^B} \right\} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial N^k}{\partial \xi_l} d \left\{ \frac{\partial \xi_l}{\partial X^B} \right\}, \quad (5.85)$$

da die Ansatzfunktionen nur von den lokalen Koordinaten abhängen und somit bei einer Veränderung der vorgesehenen Designvariablen nicht modifiziert werden. Damit ist das totale Differential der inversen isoparametrischen Abbildung in der Form

$$d\underline{J}^{-1} = d \left[ \frac{\partial \xi_l}{\partial X^B} \right]$$

bereitzustellen. Mit den Beziehungen

$$\underline{J} \underline{J}^{-1} = \underline{1} \quad \text{und} \quad d \{ \underline{J} \underline{J}^{-1} \} = \{ d\underline{J} \} \underline{J}^{-1} + \underline{J} d \{ \underline{J}^{-1} \} = d \{ \underline{1} \} = \underline{0}$$

gilt somit

$$d \{ \underline{J}^{-1} \} = -\underline{J}^{-1} d\underline{J} \underline{J}^{-1} \quad (5.86)$$

und mit Gleichung (5.81) ergibt sich die totale Differential der Determinante der Funktionalmatrix zu

$$d\underline{J} = d \left[ \frac{\partial \hat{X}^A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, s)}{\partial \xi_j} \right] = \sum_{k=1}^{n_{kel}} \frac{\partial \hat{N}^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_j} dX_k^A. \quad (5.87)$$

Dies führt abschließend zu der Darstellung

$$d \left[ \frac{\partial N^k}{\partial X^A} \right] = - \sum_{B=1}^3 \frac{\partial N^k}{\partial X^B} \left( \sum_{r=1}^{n_{kel}} \frac{\partial N^r}{\partial X^A} dX_r^B \right). \quad (5.88)$$

### 5.3.3.9 Die Berechnung der partiellen Ableitungen der Spannungen

Die Berechnung des vollständigen Differentials der Spannungen ist, wie oben gezeigt, auf die Bereitstellung der totalen Differentiale der Knotenkoordinaten  $dX_k^A$  und der Knotenverschiebungen  $dv_k^i$  zurückzuführen. Bei einem modularen Aufbau der Programme sind diese Informationen dem berechnenden Unterprogramm zu übergeben.

Für die Sensitivitätsanalyse sind die partiellen Ableitungen der Problemfunktionen nach den Knotenverschiebungen und nach den Designvariablen bereitzustellen, siehe Gleichung (5.57), die aus dem oben berechneten totalen Differential der Spannungen herausgefiltert werden.

# Kapitel 6

## Ein Gesamtkonzept der Optimalen Formgebung

Die Problemstellung *Optimale Formgebung* wird in ihrer algorithmischen Umsetzung im wesentlichen von den in Tafel 6.1 zusammengefaßten Schwerpunkten geprägt.

**Tafel 6.1:** Die Bausteine der Prozeßkette Optimale Formgebung

**Mathematische Optimierung (MO):** Formulierung des ingenieurmäßigen Problems als ein Minimalproblem der mathematischen Optimierung und Auswahl eines geeigneten Algorithmus.

**Computer Aided Geometric Design (CAGD):** Beschreibung der Geometrie der Struktur in Abhängigkeit der gewählten Designvariablen.

**Finite-Elemente-Methode (FEM):** Durchführung der Strukturanalyse.

**Sensitivitätsanalyse (SA):** Ermittlung der Werte der Zielfunktion und Nebenbedingungen sowie deren Gradienten nach den Designvariablen.

Die Formulierung eines Gesamtkonzeptes zur Optimalen Formgebung muß die jeweils vorhandenen Möglichkeiten, insbesondere der softwaretechnischen Realisation, berücksichtigen. Eine Diskussion dieser Problematik und die Darlegung der eigenen Zielsetzung sowie des hieraus entstehenden Konzeptes erfolgt in Abschnitt 6.2. Im folgenden Abschnitt soll zunächst die Formulierung des Problems der Optimalen Formgebung als ein Minimalproblem der mathematischen Optimierung erfolgen.

### 6.1 Mathematische Formulierung und Algorithmus

Die Aufgabenstellung der Optimalen Formgebung, ein Bauteil bezüglich definierter Ziele und einzuhaltender Nebenbedingungen bei Veränderung signifikanter, die Struktur beschreibende, Systemvariablen zu optimieren, führt zur Formulierung der Ingenieur-aufgabe als ein Problem der mathematischen Optimierung und zum Einsatz der hierfür entwickelten Algorithmen.

### 6.1.1 Überblick über die Optimierungsverfahren

Bei der Auswahl eines geeigneten Algorithmus ist die grundlegende Unterscheidung in stochastische und deterministische Verfahren vorzunehmen. Die stochastischen Verfahren, z.B. genetische Algorithmen in Form der Evolutionsstrategie, eignen sich besonders bei geringen Kosten der Funktionsauswertungen, siehe z.B. *Rechenberg* [76]). Eine umfassende Darstellung dieser Klasse der Optimierungsverfahren und ein Vergleich zu den deterministischen Verfahren ist z.B. in *Schwefel* [87] vorgenommen worden.

In dieser Arbeit werden ausschließlich Gradientenverfahren oder gradientenähnliche Verfahren innerhalb der Klasse der deterministischen Verfahren betrachtet, deren theoretische Grundlagen und algorithmische Umsetzung z.B. in *Luenberger* [56] und *Gill, Murray, Wright* [44] behandelt werden. Dabei werden ausschließlich hinreichend oft stetig differenzierbare, reellwertige Zielfunktionen und Nebenbedingungen betrachtet. Für Problemformulierungen mit nichtdifferenzierbaren Zielfunktionen und Nebenbedingungen sei z.B. auf die Arbeiten von *Zowe*, z.B. [115], und die dort entwickelten „bundle trust“ Verfahren verwiesen.

Einen Überblick über den Einsatz der Gradientenverfahren im Rahmen der Strukturoptimierung geben z.B. *Arora* [2], *Atrek et. al* [5]. Auf die im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten Algorithmen wird in Abschnitt 6.1.4 näher eingegangen.

Sind für die veränderbaren Problemvariablen nur diskrete Lösungen erlaubt, können bei quasi-kontinuierlichen Problemen die im weiteren vorgestellten Verfahren benutzt werden, und der ermittelten kontinuierlichen Lösung ist in geeigneter Weise die zugehörige diskrete Lösung zuzuordnen. Diese Problematik tritt z.B. bei der Gewichtsminimierung von Stabtragwerken bei Verwendung von Profilen aus den Profiltabellen auf, siehe hierzu z.B. *Becker* [10], *Eschenauer, Schäfer* [38]. Dagegen ist z.B. die Ermittlung der hinsichtlich der globalen Stabilität optimalen Anzahl von Längssteifen einer ausgesteiften Kreiszyinderschale ein diskretes Optimierungsproblem. Eine Anwendung der Algorithmen der diskreten Optimierung auf Problemstellungen der Optimalen Formgebung ist bisher nur in Ausnahmen (z.B. *Grierson* [45]) vorgenommen worden.

Bei der Gestaltung von Ingenieurbauteilen sollen zumeist mehrere Ziele möglichst gut erreicht werden. Dieser Spannungskreis ist mit der Redewendung „so günstig wie möglich – so sicher wie nötig“ passend umschrieben. Für die numerische Umsetzung bedeutet dies, daß mehrere Zielfunktionen zur Beurteilung der Güte einer Konstruktion herangezogen werden, und man spricht in diesem Fall von „Mehrzieloptimierung“. Auf diese Problematik wird in der vorliegenden Arbeit nicht eingegangen, siehe hierzu z.B. *Stadler* [93], [94], *Osyczka* [70] und *Eschenauer et. al.* [36].

Ein wesentliches Interesse praktischer Ingenieurarbeit liegt in der Beurteilung qualitativer Veränderungen der Strukturen und Bauteile, wie z.B. das Hinzufügen von Bauelementen. Die theoretische Formulierung und die algorithmische Umsetzung dieser sogenannten *Topologieoptimierung* sind z. Zt. Gegenstand intensiver Forschung, siehe z.B. *Bremicker* [22].

### 6.1.2 Das mathematische Optimierungsproblem

Das im weiteren betrachtete Minimalproblem hinreichend oft stetig differenzierbarer, reellwertiger Zielfunktionen bzw. Nebenbedingungen wird in Tafel 6.2 zusammengefaßt.

**Tafel 6.2:** Das mathematische Optimierungsproblem

Gesucht wird ein lokales Minimum der skalarwertigen Zielfunktion (ZF)  $f$  für den Vektor  $\underline{s} \in \mathbb{R}^n$  der Designvariablen (DV)

$$\min_{\underline{s} \in \mathbb{R}^n} f(\underline{s})$$

unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen (NB)

$$\begin{array}{lll} \bar{s}_i^u \leq s_i \leq \bar{s}_i^o & \text{für } i = 1, \dots, n & \text{Schranken (US, OS)} \\ g_j(\underline{s}) \leq 0 & \text{für } j = 1, \dots, m_e & \text{Ungleichheitsnb. (UNB)} \\ g_j(\underline{s}) = 0 & \text{für } j = m_e + 1, \dots, m & \text{Gleichheitsnb. (GNB)} \end{array}$$

Die Zielfunktion  $f(\underline{s})$  wird somit in der Menge

$$M := \{\underline{s} \in \mathbb{R}^n \mid g_j(\underline{s}) = 0 \text{ für } j = 1, \dots, m_e, \quad g_j(\underline{s}) \leq 0 \text{ für } j = m_e + 1, \dots, m\}$$

minimiert.

### 6.1.3 Die Kuhn-Tucker-Bedingungen

Falls ein Vektor  $\underline{s}^* \in M$  existiert, wobei die Menge  $I^* := \{j \mid g_j(\underline{s}^*) = 0\}$  die Indizes der zu diesem Zeitpunkt *aktiven Nebenbedingungen* enthält und  $\{\nabla g_j(\underline{s}^*); j \in I^*\}$  eine linear unabhängige Menge von Vektoren darstellt (es können dann höchstens  $n$  Nebenbedingungen aktiv werden), dann ist  $\underline{s}^*$  ein *regulärer Punkt*. Stellt nun  $\underline{s}^* \in M$  ein lokales Minimum von  $f$  in  $M$  und außerdem einen regulären Punkt dar, so gibt es eindeutig bestimmte Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ , so daß von dem Lösungsvektor  $(\underline{s}^*, \lambda^*)$  die notwendigen Bedingungen nach *Kuhn, Tucker* erfüllt werden (siehe *Luenberger* [56]).

**Tafel 6.3:** Die Kuhn-Tucker-Bedingungen

Ist  $\underline{s}^* \in \mathbb{R}^n$  ein reguläres, lokales Minimum, dann existieren die eindeutig bestimmten Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$  und der Lösungsvektor  $(\underline{s}^*, \lambda^*)$  erfüllt die notwendigen Bedingungen

$$\begin{aligned} \nabla f(\underline{s}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \nabla g_j(\underline{s}^*) &= \underline{0} \\ g_j(\underline{s}^*) &= 0 \quad \text{für } 1 \leq j \leq m_e, \\ \lambda_j^* g_j(\underline{s}^*) &= 0 \quad \text{für } m_e + 1 \leq j \leq m, \\ \lambda_j^* &\geq 0 \quad \text{für } m_e + 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

### 6.1.4 Anmerkungen zur Wahl der Optimierungsalgorithmen

Im Rahmen der algorithmischen Umsetzung der Optimalen Formgebung sind in das Finite-Elemente-Forschungsprogrammpaket INA-OPT des Instituts die Sequentielle Quadratische Programmierung (SQP) durch die Unterstützung von *Schittkowski* (Bereitstellung der Fortran-Quelle seiner Programmentwicklung) (siehe [82] und auch *Bischoff* [16], *Barthold* [6], *Becker* [10]) und die Methode der mitbewegten Asymptoten (MMA) (siehe *Mahnken* [57]) implementiert worden.

Es ist stets zu beachten, daß sich durch die spezielle Problemstellung der Optimalen Formgebung, d.h. durch die Anzahl der Designvariablen, der Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen sowie deren mathematischen Struktur (linear, quadratisch, konvex, allgemein nichtlinear, separabel, etc.) ein mathematisches Optimierungsproblem ergibt, das mit einem ausgewählten Algorithmus, der nicht auf diese spezielle Situation ausgerichtet ist, nicht optimal behandelt wird, siehe hierzu z.B. die Problemklassifikation in *Gill, Murray, Wright*[44].

Der Einsatz dieser Algorithmen für die Problemstellungen der Optimalen Formgebung ist in den letzten Jahren vielfältig untersucht, und die Ergebnisse sind veröffentlicht worden, so daß an dieser Stelle nur einige wenige Literaturstellen angegeben werden.

#### Auswahl der Literatur zur Sequentiellen Quadratischen Optimierung (SQP):

- Theorie: *Han* [48], *Powell* [74], *Schittkowski* [82], [83]
- Anwendung Optimale Formgebung: *Bletzinger* [19], *Kimmich* [54], *Becker* [10], *Belegundu*, *Arora* [14], *Thanedar*, *Arora*, *Tseng et. al* [100]
- Weitere Anwendungsgebiete:
  - Kontaktprobleme: *Bischoff* [16], *Barthold* [6]
  - Einspielen plastischer Materialien: *Zhang* [110], *Mahnken* [57]

#### Auswahl der Literatur zur Methode der mitbewegten Asymptoten (MMA):

- Theorie: *Fleury* [40] [42], *Svanberg* [98] [99], *Mahnken* [57], *Bletzinger* [20]
- Anwendung Optimale Formgebung: *Bletzinger* [19], *Kimmich* [54], *Fleury*, *Sander* [43], *Fleury* [41]
- Weitere Anwendungsgebiete:
  - Einspielen plastischer Materialien: *Zhang* [110], *Mahnken* [57]

Für die Einordnung der Algorithmen der mathematischen Optimierung in den Gesamtprozeß der Optimalen Formgebung sind einige Bemerkungen hilfreich.

1. Das mathematische Optimierungsproblem ist der Kern der numerischen Behandlung der Optimalen Formgebung. Damit ist die zur mathematischen Formulierung führende Modellbildung wesentlich für den Erfolg der Berechnung. Insbesondere wirken sich eine Beschränkung der Größe des Optimierungsproblems, d.h. der Anzahl der Designvariablen und der Nebenbedingungen, vorteilhaft aus.
2. Der ausgewählte Algorithmus stellt den „Motor“ der gesamten numerischen Behandlung dar. Je besser der Algorithmus die im Optimierungsproblem vorhandene mathematische Struktur ausnutzt, desto schneller, d.h. in weniger Iterationsschritten, wird das Optimum erreicht.
3. Für ein vorliegendes mathematisches Optimierungsproblem sind nach der Auswahl eines geeigneten Optimierungsalgorithmus zunächst die den Verlauf der Iteration beeinflussenden Steuergrößen, d.h. Abbruchgenauigkeiten, Information zur Skalierung der Problemformulierung, Steuerung der Varianten des Algorithmus, bereitzustellen.
4. Für den Einsatz im Rahmen des Gesamtprozesses der Optimalen Formgebung ist jedoch die Einordnung des Algorithmus in die Gesamtprozeßkette von Bedeutung.
  - **Eingang in den Algorithmus der mathematischen Optimierung:** Werte, Gradienten und Hessematrizen der Zielfunktion und Nebenbedingungen für den aktuellen Vektor der Designvariablen.
  - **Ausgang aus dem Algorithmus der mathematischen Optimierung:** Vektor der verbesserten Designvariablen im Sinne eines Abstiegs der zu der Zielfunktion und Nebenbedingungen gehörenden Bewertungsfunktion des Optimierungsproblems.
5. Die Berechnung der zweiten Ableitungen der Zielfunktion und der Nebenbedingungen nach den Designvariablen, d.h. der Hessematrizen, ist eine äußerst komplexe Aufgabe, die üblicherweise in der Sensitivitätsanalyse nicht geleistet wird. Vielmehr wird in den Algorithmen der mathematischen Optimierung, z.B. dem SQP-Verfahren, eine positiv definite Approximation der Lagrangefunktion ermittelt. Aus diesem Grund versteht sich die Sensitivitätsanalyse als die Bestimmung der Werte und der Gradienten von Zielfunktion und Nebenbedingungen.

Die Bedeutung des Algorithmus der Mathematischen Optimierung für die erfolgreiche Behandlung des Strukturoptimierungsproblems sowie der zugehörige separate, modulare Baustein in der softwaretechnischen Realisation ist in der Abbildung 6.1 schematisch dargestellt.

## 6.2 Die Prozeßkette Optimale Formgebung

### 6.2.1 Übersicht

Die bei der Problemstellung Optimale Formgebung zu berücksichtigenden Bausteine (siehe Tafel 6.1) sind in geeigneter Weise zu verbinden. Aufgrund der Komplexität bereits der einzelnen Algorithmen, die sich noch durch die notwendige Interaktion erhöht, wird im weiteren von der *Prozeßkette Optimale Formgebung* gesprochen. Das Zusammenwirken der Module ist z.B. von *Eschenauer* [35] in dem *Drei-Säulen-Konzept* der Optimalen Formgebung dargelegt worden.

Für die Strukturierung der softwaretechnischen Arbeiten und der Entwicklung eigener Programmkonzepte ist zunächst die Analyse der Problemstellung und hieraus die Definition modularer Bausteine zentraler Aufgaben im Algorithmus sowie die Verdeutlichung der notwendigen Datenflüsse zwischen den Bauteilen erforderlich.

Mit den Bemerkungen des letzten Abschnittes ist die Bedeutung der richtigen Wahl eines leistungsfähigen mathematischen Optimierungsalgorithmus für den Optimierungsverlauf deutlich geworden. Im Rahmen der softwaretechnischen Konzeption bildet der Optimierungsalgorithmus ein separates Modul, das über eine (durch die mathematische Struktur vorgegebene) genau beschriebene Datenschnittstelle verfügt. Daher können unterschiedliche Algorithmen ohne Berücksichtigung der anderen Module eingesetzt werden, siehe hierzu auch *Mahnken* [57].

In Abbildung 6.1 sind die Bausteine und der Datenfluß innerhalb der Prozeßkette Optimale Formgebung dargestellt. Die Bedeutung der Algorithmen der mathematischen Optimierung und ihre separate, von den weiteren Modulen unabhängige Stellung ist dabei besonders hervorgehoben, so daß im weiteren nur noch die Interaktion zwischen Geometriemodell, Finite-Elemente-Berechnung und Sensitivitätsanalyse behandelt wird.

In dem Schema sind die Hauptbausteine und der primäre Datenfluß (in Form der eingezeichneten Pfeile) eingetragen. Dabei ist zum einen horizontal das Nebeneinander des Geometrie-, Technologie- und FE-Modells in der Beschreibung des Optimierungsproblems bedeutsam, zum anderen wird in vertikaler Richtung die Abfolge der Module und ihre gegenseitige Abhängigkeit beschrieben.

Der Optimierungsprozeß wird durch die Vorgabe eines Geometrieentwurfs gestartet und endet durch das Erreichen der geforderten Güte der Zielfunktion und Nebenbedingungen im mathematischen Optimierungsalgorithmus.



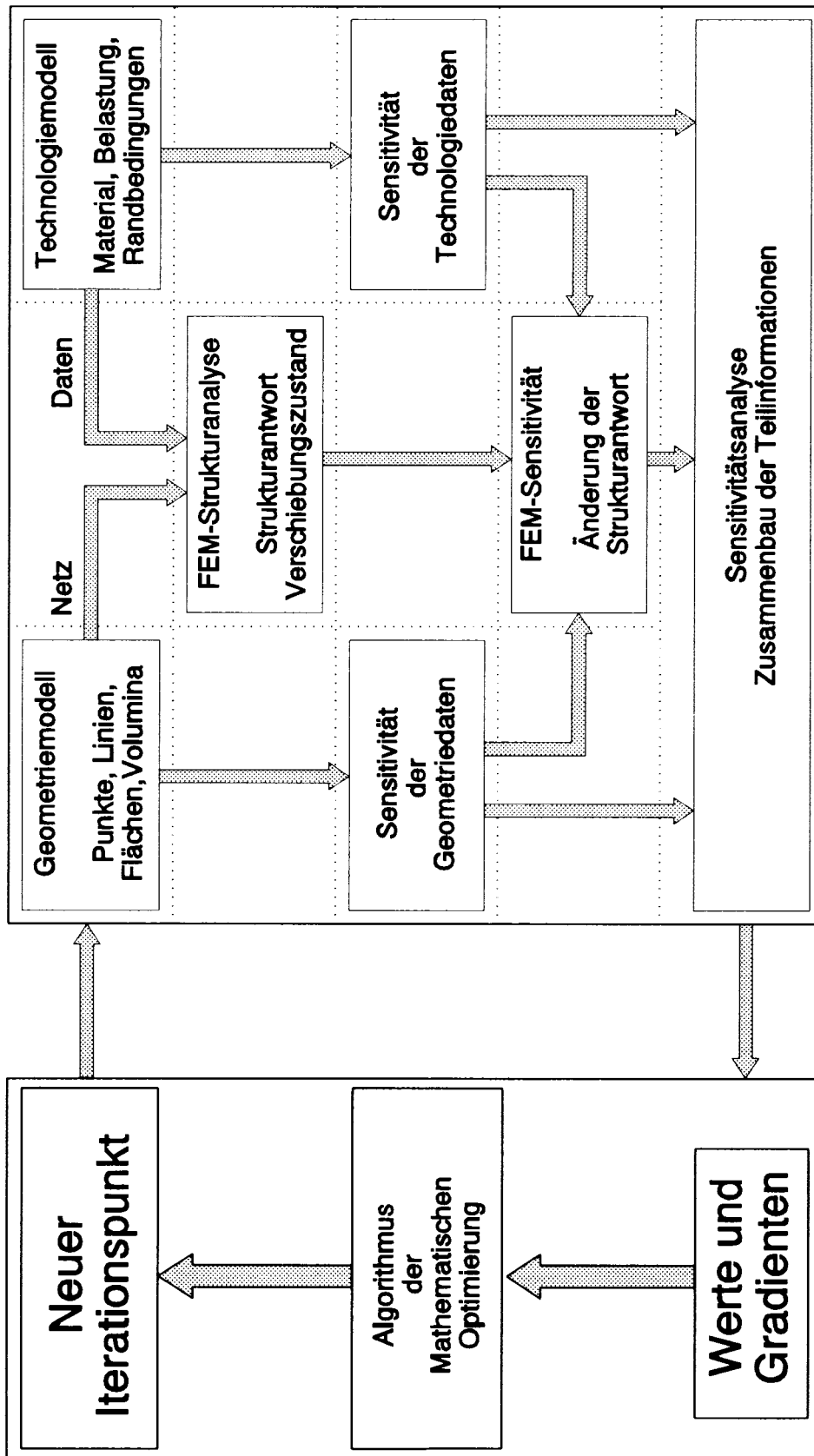


Abbildung 6.1: Baustein- und Datenflußschema der Prozeßkette Optimale Formgebung

## 6.2.2 Zielsetzung der softwaretechnischen Bearbeitung

Die numerische Behandlung der Strukturoptimierung erfordert aufgrund der Problemkomplexität neben der systematischen Strukturierung und Analyse der Problemstellung eine exakte Definition der eigenen Ziele unter Berücksichtigung der vorhandenen Möglichkeiten zur Umsetzung der Ziele. Dabei werden die objektiv auftretenden Vor- und Nachteile je nach Standpunkt unterschiedlich gewichtet, so daß sehr unterschiedliche Konzepte zur Behandlung entwickelt werden können, siehe hierzu auch die Diskussion in *Kimmich* [54].

Die eigene Zielsetzung sei im weiteren erläutert, wobei zunächst ausdrücklich auf den Grundlagencharakter einer Forschungsarbeit an der Universität hingewiesen wird. Die sich aus dieser Tatsache ergebende programmtechnische Konzeption muß sich in dem komplexen Arbeitsgebiet Optimale Formgebung wesentlich von den Verfahren der Industrie, die sich großer, leistungsfähiger, kommerzieller Programmpakete ohne Quellcodezugriff und Änderungsmöglichkeiten bedienen, unterscheiden.

### 1. Zielsetzung:

#### (a) Grobziele:

- Entwicklung einer Methodik zur numerischen Behandlung der Problemstellung „Optimale Formgebung“.
- Programmtechnische Realisation innerhalb des Forschungsprogrammpaketes INA–OPT des Instituts für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover, die die Weiterentwicklung und die Integration der Arbeiten benachbarter Forschungsgebiete unterstützt.

#### (b) Feinziele:

- Darlegung der theoretischen Grundlagen der Strukturoptimierung.
- Exakte Abbildung der theoretischen Beziehungen der variationellen Sensitivitätsanalyse (siehe Kapitel 5) im Programm.
- Exakte analytische Berechnung der Gradienten unter Verzicht auf numerische Approximationstechniken, siehe hierzu z.B. *Becker* [10], *Kimmich* [54].
- Definition von Optimierungsproblemen mit einer minimalen Anzahl von Designvariablen durch die Angabe signifikanter Entwurfsvariablen.
- Größtmögliche Flexibilität bei der Erweiterung des Katalogs der möglichen Zielfunktionen, Nebenbedingungen und Designvariablen sowie des Katalogs der vorhandenen Elementformulierungen.
- Berücksichtigung der Netzabhängigkeit der Strukturanalyse und der Sensitivitätsanalyse durch den Einsatz adaptiver FE–Verfahren, d.h. Netzverfeinerungsstrategien und -kriterien.
- Ständige Kontrolle des Optimierungsprozesses durch den Ingenieur sowie die Möglichkeit interaktiver Eingriffe.

**2. Strategie:**

- (a) Entwicklung hochwertiger Beschreibungsmodelle sowie der zugehörigen Programmbausteine mit eindeutigen Datenschnittstellen.
- (b) Vermeidung von redundanten Informationen innerhalb und zwischen den einzelnen Modellen.
- (c) Beschränkung der Aufgabe des Optimierungsmodells auf die Zusammenstellung der bereits in den einzelnen Modellen enthaltenen Informationen über die Zielfunktion, Nebenbedingungen und Designvariablen sowie der Sensitivitäten.
- (d) Durch das Optimierungsmodell dürfen keine qualitativ neuen Strukturen in die Problembeschreibung eingeführt werden.
- (e) Verzicht auf „ad-hoc-Lösungen“ zugunsten einer langfristigen Programmentwicklung.

**3. Voraussetzungen:**

- (a) Die Anwendung der hochwertigen Modelle erfordert von dem qualifizierten Benutzer Kenntnisse des strukturmechanischen Verhaltens sowie eine Beurteilung des Änderungsverhaltens bei Variation der Ausgangsdaten.
- (b) Diese Informationen müssen bereits in der Konstruktionsphase und bei der Modellbildung einfließen.
- (c) Kenntnisse und Zugriffsmöglichkeiten auf den Quellcode und die Datenbasis.
- (d) Die Auswirkungen von Veränderungen innerhalb der Module müssen lokal begrenzt sein und dürfen keinen globalen Charakter besitzen. Ist dies nicht der Fall, so müssen zuerst die Modelle bzw. deren Implementation verbessert werden.

**4. Einschränkungen:**

- (a) Die Implementation umfaßt die Formoptimierung ein-, zwei- und dreidimensionaler Strukturen. Die Formoptimierung dreidimensionaler Körper ist im wesentlichen durch die Notwendigkeit eines leistungsfähigen Volumenmodellierers sowie der zugehörigen Netzgeneratoren und -verfeinerer geprägt.

**5. Konsequenzen:**

- (a) Die Realisation wird innerhalb eines integrierten Programmkonzeptes mit gemeinsamer Datenbasis durchgeführt.
- (b) Die programmtechnische Arbeit ist geprägt von der Entwicklung klarer Programm- und Datenschnittstellen innerhalb und zwischen den einzelnen Modellen und Programmbausteinen.
- (c) Auf den Einsatz nicht einsehbarer und nicht veränderbarer „black box“ Programmbausteine an zentraler Stelle im Algorithmus wird verzichtet.

### 6. Programmtechnische Realisation:

- (a) Die Definition des Optimierungsproblems (Optimierungsmodell) greift auf die Datenbasis und Datenmenge der strukturmechanischen Problemdefinition (Geometrie, Technologiedaten, Elementtypen, usw.) zurück. Den Daten werden zusätzliche, optimierungsspezifische Attribute (Kennung als Zielfunktion, Nebenbedingung, Designvariable, Schranken, Wichtungsfunktionen, etc.) zugeordnet. Damit sind sämtliche Größen der Optimierung zugänglich.
- (b) Nach Abschluß der Definition des Optimierungsproblems werden die optimierungsspezifischen Daten geordnet und komprimiert ohne Verlust an Information zusammengefaßt.

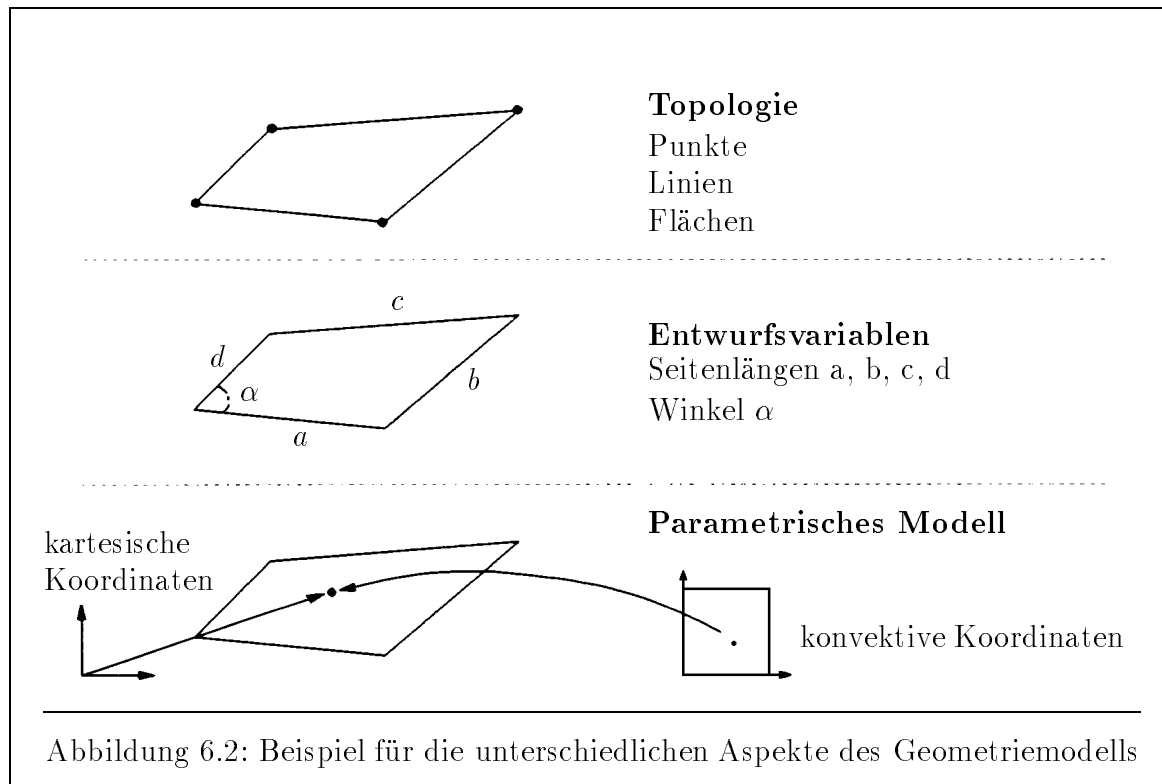
Die Konzeption und programmtechnische Realisation der numerischen Behandlung der Optimalen Formgebung basiert auf der Arbeit vieler Mitarbeiter am Institut. Die grundlegenden Strukturen des Programmpaketes INA-SP als Vorläufer zu INA-OPT wurden dabei von *Plank*, *Lambertz*, *Bischoff* siehe z.B. [72], [55], [16], [73], eingeführt. Die Anfänge der Formoptimierung am Institut gehen auf die Initiative von *Bischoff* [17] und Arbeiten von *Berkhahn* [15] und *Berkhahn*, *Becker* [12], [13] zurück. Die Konzeption und programmtechnische Realisation in der oben beschriebenen Form wurde auf der Grundlage der bereits von *Berkhahn* ausformulierten und realisierten Querschnittsoptimierung ab 1989 von *Becker* [10] und dem Autor entwickelt und implementiert. Hierauf aufbauend wird von *Falk*, siehe z.B. *Barthold et. al.* [8], der Einsatz von Adaptionenkriterien und -strategien für die Optimale Formgebung entwickelt.

## 6.3 Das Geometriemodell innerhalb der Prozeßkette

In dem Geometriemodell im Programmsystem INA–OPT, das durch die Vorgehensweise des Computer Aided Geometric Design (CAGD) gekennzeichnet ist, unterscheidet zwischen

1. der Topologie der unterschiedlichen geometrischen Strukturen,
2. den Entwurfsvariablen der Konstruktion und
3. der parametrischen Darstellung

der Geometrie. Die aufgeführten Modelle sind am Beispiel einer viereckigen Fläche schematisch in Abbildung 6.2 dargestellt und werden im weiteren näher beschrieben.



### 6.3.1 Das Topologiemodell der Geometrie

Das Topologiemodell innerhalb von INA–OPT ist ein hierarchisches Drahtmodell, bei dem die niederdimensionalen Strukturen zur Definition der höherdimensionalen Gebilde herangezogen werden. Die topologische Hierarchie des Drahtmodells ist anschaulich in Abbildung 6.3 dargestellt.

Zusätzlich ist noch die Definition von Attributen einzelner Geometrielemente und deren Relationen untereinander und die Verwaltung dieser Informationen innerhalb des Modells vorgesehen.

Hierarchisches Topologiemodell			
Dimension	Objekt	definiert durch	enthält Objekte niederer Dimension
0	<b>Punkte</b>		
1	<b>Linien</b>	Randpunkte	innere Punkte
2	<b>Flächen</b>	Randlinien	innere Linien
3	<b>Volumina</b>	Randflächen	innere Punkte (auf keiner Linie)
			innere Flächen
			innere Linien (auf keiner Fläche)
			innere Punkte (auf keiner Fläche)

Abbildung 6.3: Das hierarchische Topologiemodell in INA-OPT

Die Definition der Designvariablen sowie der Zielfunktionen und Nebenbedingungen erfolgt unter strenger Einhaltung der oben genannten Hierarchie. Damit ist sichergestellt, daß eine große Anzahl zusätzlicher redundanter Informationen vermieden wird. Dabei ist wesentlich, daß das Topologiemodell der Geometrie während der Strukturoptimierung nicht verändert wird. Insbesondere ist nicht vorgesehen, die Elemente des Topologiemodells als Designvariablen zu definieren bzw. sie zum Bestandteil von Zielfunktion und Nebenbedingung zu machen. In diesem Sinne besteht das Topologiemodell aus qualitativen Größen, die einer Optimierung nicht zugänglich sind.

Für die numerische Behandlung der sogenannten „Topologieoptimierung“, d.h. der durch Hinzufügen und Hinwegnahme topologischer Strukturen (Punkte, Linien, Flächen, Volumina) beabsichtigte Veränderung der Geometrie, ist eine Parametrisierung wesentliche Voraussetzung. Ein erfolgversprechender Ansatz stellt z.B. die Einführung einer Dichtefunktion und deren Veränderung dar. Hierbei bleibt das eingeführte topologische Modell erhalten, die „Bedeutung der Anwesenheit einzelner Geometrielemente“ wird jedoch mittels der kontinuierlichen Dichtefunktion gewichtet. Reduziert sich der Einfluß einzelner Bauteile, d.h. werden diese Strukturen nicht wesentlich zum Lastabtrag benötigt, so wird dies durch die Dichtefunktion angezeigt und in einem weiteren Schritt kann der optimierende Ingenieur bzw. ein Algorithmus innerhalb des Programmsystems diese Bauteile tatsächlich aus dem topologischen Modell entfernen.

Gemäß dem Grundsatz, durch das Optimierungsmodell keine zusätzlichen neue Strukturen einzuführen, sind auch im Optimierungsmodell nur die Effekte zu erzielen, die grundsätzlich durch die Geometriebeschreibung, in diesem Fall durch das Topologiemodell, ermöglicht sind.

### 6.3.2 Das Entwurfsvariablenmodell der Geometrie

Das Entwurfsvariablenmodell beschreibt nach der qualitativen Definition der Topologie die genaue Struktur des betrachteten Körpers. Die Beschreibung erfolgt dabei in den Größen, die dem Konstrukteur die Anschauung und damit die Arbeit wesentlich erleich-

tern. Dies sind insbesondere Längen, Winkel, Radien und Verhältnisse zwischen diesen Größen. Damit handelt es sich um quantitative Größen, die einer Veränderung und damit der Optimierung zugänglich sind. In diesem Sinne stellt das Entwurfsvariablenmodell den Raum der möglichen (geometrischen) Designvariablen dar. Die direkt von den Designvariablen abhängigen Entwurfsvariablen werden im weiteren mit  $\gamma = \hat{\gamma}(s)$  bezeichnet.

Auch hier ist wieder zu erwähnen, daß nur eine bereits durch den Entwurf eingeführte Größe als Designvariable definiert werden kann. Dies führt zu der Schlußfolgerung das nur ein hochwertiges Entwurfsvariablenmodell mit großen Beschreibungsmöglichkeiten bei minimaler Anzahl von Parametern (Entwurfsvariablen) eine erfolgreiche und numerisch effiziente Optimierung verspricht.

### 6.3.3 Das parametrische Modell der Geometrie

Das Entwurfsvariablenmodell stellt die Menge der möglichen Designvariablen dar, ist jedoch für den weiteren Verlauf der Behandlung, insbesondere für die Abbildung der theoretischen Überlegungen des Kapitels 5 in das numerische Modell, nicht ausreichend. Hierzu ist aus dem Entwurfsvariablenmodell durch Parametrisierung der Geometrie eine Beschreibung zu entwickeln, die sowohl für die Generierung bzw. Verfeinerung der Netze als auch für die notwendige Modifikation der Netze bei Veränderung der Entwurfsvariablen benötigt wird und die einfache Berechnung der Sensitivitäten zuläßt.

Diese Forderung führt zu der analogen parametrischen Beschreibung der Geometrie wie sie für die Konfiguration  $\mathbf{B}_s^g$  des materiellen Körpers vorgenommen wurde, d.h. für die Punkte der Geometrie gelte die Beziehung

$$\psi_{\circ} : \begin{cases} T_{\Theta} \times T_s & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, s) & \mapsto \mathbf{X} = \psi(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, s). \end{cases} \quad (6.1)$$

Dies ist ja auch natürlich, da es sich bei der Geometriebeschreibung innerhalb des CAGD-Modells um nichts anderes handelt als die softwaretechnische Umsetzung des Begriffes „Konfiguration eines materiellen Körpers“, siehe Kapitel 2. Insbesondere sei darauf verwiesen, daß sich die Darstellung der Konfiguration eines materiellen Körpers als differenzierbare Mannigfaltigkeit (im Riemannschen Sinne) in der Flächen- bzw. Volumenbeschreibung des CAGD-Programms in der Form des CAD-Patches als Karte im Atlas der Mannigfaltigkeit wiederfindet.

Damit werden geometrische Strukturen, die sich nicht als differenzierbare Mannigfaltigkeit darstellen lassen, zunächst nicht betrachtet. Für die hier betrachtete Optimierung von Flächenstrukturen stellt dies keine wesentliche Einschränkung dar.

Im Rahmen der programmtechnischen Realisation ist die Form der Abbildung  $\psi_{\circ}$  nach Gleichung (6.1) bzw. (5.7) noch genauer anzugeben. Hierzu eignet sich die Darstellung in der Form

$$\mathbf{X} = \psi_{\circ}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, s) = \sum_{i=1}^n \hat{M}_i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \mathbf{Y}_i, \quad (6.2)$$

in der die Funktionen  $M_i = \hat{M}_i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$  die Gestaltsfunktionen bezeichnen und  $\mathbf{Y}_i = \hat{\mathbf{Y}}_i(s)$  die sogenannten Kontrollpunkte darstellen. Während die Gestaltsfunktionen nur von den konvektiven Koordinaten  $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$  abhängen, wird die Form der geometrischen Struktur von den Werten der Kontrollpunkte  $\mathbf{Y}_i$  beeinflusst. Diese Kontrollpunkte verändern sich mit dem gewählten Design, d.h. sie sind abhängig von den Designvariablen, wobei die Abhängigkeit implizit über die Abhängigkeit der Kontrollpunkte  $\mathbf{Y}$  von den Entwurfsvariablen  $\gamma = \hat{\gamma}(s)$  besteht, d.h.

$$\mathbf{Y}_i = \hat{\mathbf{Y}}_i(s) = \tilde{\mathbf{Y}}_i(\hat{\gamma}(s)).$$



## 6.4 Die Strategie der Netzveränderung innerhalb der Prozeßkette

Die grundlegenden Überlegungen zur Erzeugung eines Finite-Elemente-Netzes und dessen Modifikation bei Veränderung der Designvariablen werden an dieser Stelle angesprochen. Für die Grundlagen der im Programmsystem INA–OPT eingesetzten Netzverfeinerungsstrategien siehe die Arbeiten von *Plank* [72], *Rust* [80].

1. Der im Programmpaket INA–OPT vorhandene Netzgenerierer und Netzverfeinerer greift auf die parametrische Geometriebeschreibung zurück, d.h. für die Geometriedarstellung nach (6.1) werden zunächst durch Indikation der a-priori und a-posteriori Adaptionskriterien die konvektiven Koordinaten  $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$  der neu-generierten Knoten berechnet. Dies ist der eigentliche Erzeugungs- bzw. Verfeinerungsschritt. Dabei sind die geometrischen Verfeinerungskriterien in den kartesischen Koordinaten formuliert, während die Verfeinerungsstrategie auf der Basis der konvektiven Koordinaten arbeitet. Die konvektiven Koordinaten der Knoten sind nach ihrer Erzeugung im Verlauf der weiteren Berechnung unveränderlich und werden in der Datenbasis abgelegt.
2. Die kartesischen Koordinaten der FE-Knoten werden anschließend durch Auswertung der obigen Beziehung ermittelt. Die kartesischen Koordinaten ändern sich mit der Veränderung der Designvariablen.
3. Für das Nachziehen des FE-Netzes muß zunächst die parametrische Geometriebeschreibung dem modifizierten Design angepaßt werden, d.h. aus den veränderten Designvariablen ergeben sich neue Entwurfsvariablen  $\gamma = \hat{\gamma}(s)$  die im Übergang zum parametrischen Modell modifizierte Werte der Kontrollpunkte und Kontrollvariablen  $\mathbf{Y}_i = \hat{\mathbf{Y}}_i(\hat{\gamma}_1(s), \hat{\gamma}_2(s), \dots)$  hervorrufen. Damit kann die Berechnung der neuen Lage der FE-Knoten wieder durch Auswertung der Gleichung (6.1) erfolgen.
4. Die Sensitivität der FE-Knoten wird aus der Sensitivität der Kontrollpunkte  $\mathbf{Y}_i$  in der Form

$$\boxed{\frac{d\mathbf{X}}{ds} = \sum_{i=1}^n \hat{M}_i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \frac{d\mathbf{Y}_i}{ds}} \quad (6.3)$$

ermittelt. Hierbei ist wesentlich, daß sich die Werte der Gestaltsfunktionen  $M_i = \hat{M}_i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$  nicht verändern.

5. Der oben beschriebene Ablauf der Netzmodifikation garantiert durchdringungsfreie Elementnetze solange der CAD-Patch der Geometrie selbst durchdringungsfrei ist. Bei großen Gestaltsänderungen können stark gestörte Elementformen entstehen. In diesem Fall sind folgende drei wesentliche Eingriffsmöglichkeiten vorhanden:
  - (a) Neuvernetzung der modifizierten Geometrie,
  - (b) Einsatz geometrischer Kriterien auf der Grundlage der modifizierten Geometrie,

(c) Netzvergrößerungsstrategien.

Für den Algorithmus der mathematischen Optimierung bedeuten alle Vorgehensweisen einen Restart im letzten Iterationspunkt, da durch die qualitative Änderung des FE-Netzes das Optimierungsproblem sich geändert hat.

## 6.5 Die Finite-Elemente-Strukturanalyse und die zugehörige Sensitivität innerhalb der Prozeßkette

Die Datenschnittstelle zwischen dem Geometriemodell und dem Netzgenerator bzw. -verfeinerer auf der einen Seite und dem FE-Strukturanalyse-Modul auf der anderen Seite überträgt zum FE-Modul im wesentlichen

1. die FE-Netz-Topologie,
2. die Koordinaten der FE-Knoten.

Darüberhinaus sind die Technologiedaten für die Berechnung erforderlich.

Für die Sensitivitätsberechnung der Größen der FE-Strukturanalyse (Verschiebungen, Verzerrungen, Spannungen) sind die Sensitivitäten der Eingangsgrößen des FE-Modells anzugeben, d.h. im Rahmen unserer Konzeptentwicklung und -implementation gelten die folgende Bemerkungen.

1. Die FE-Netz-Topologie ist im Rahmen der Prozeßkette Optimale Formgebung nicht durch die Wahl von Designvariablen veränderbar, d.h. zur Elementtopologie treten keine zugehörigen Sensitivitäten auf. Die Modifikation der FE-Netze durch den kontrollierenden Benutzer bzw. durch den Automatismus wiederholter Anwendung a-priori Kriterien stellt jeweils den Beginn einer neuen Berechnung mit modifizierter Problemstellung dar. Eine Modifikation der Elementtopologie durch eine Optimierungsaufgabe ist erst nach erfolgreicher Parametrisierung der FE-Netz-Topologie möglich.
2. Die Sensitivität der FE-Knotenkoordinaten ist im Rahmen der Anpassung des FE-Netzes an die modifizierte Geometrie berechnet worden. Die Weitergabe dieser Information stellt die wesentliche Erweiterung der bisherigen Datenschnittstelle zum FE-Modul für die Sensitivitätsberechnung dar.
3. Weiterhin sind die Sensitivitäten der Größen des Technologiemo­dells durch die modifizierte Datenschnittstelle in das FE-Modul zu übertragen.

Damit ist für die Sensitivitätsanalyse eine exakt definierte Datenschnittstelle beschrieben. Die Leistungsfähigkeit der FE-Sensitivitätsanalyse kann durch den Zugriff auf die Gesamtinformation des Optimierungsproblems in allen Teilmodellen noch erhöht werden. Grundsätzlich ist der Einfluß einer Designvariablen zunächst nur auf die Geometrieobjekte (Punkt, Linie, Fläche) begrenzt, deren Zweig ihr definierendes Objekt in der Geometrietopologiestruktur angehört. Der Einflußbereich kann sich z.B. durch die definierten Relationen unter den Objekten noch vergrößern, bleibt in den meisten Fällen jedoch auf Teilstrukturen der Geometrie begrenzt. Somit werden bei der FE-Sensitivitätsanalyse auch nur die finiten Elemente dieser Teilstrukturen von einer Änderung der betrachteten Designvariablen beeinflusst. Die Berücksichtigung dieser Information vermeidet die unnötige Berechnung überflüssiger Daten und verkürzt

somit die Rechenzeit. Eine effiziente Steuerung der FE-Sensitivitätsanalyse erfordert den Zugriff auf die Datenbasis des Geometrie- und Optimierungsmodells wie sie im Programmsystem INA-OPT implementiert ist.

In Kapitel 5 konnte für die Berechnung hyperelastischer Materialien gezeigt werden, wie sich die Sensitivität aller kontinuumsmechanischen Größen auf die Sensitivität der FE-Knotenkoordinaten und der Technologiedaten zurückführen läßt. Damit kann für die weitere Entwicklung der FE-Module auch im kommerziellen Bereich die folgende Konzeption aufgestellt werden.

**Tafel 6.4:** Strategievorschlag für die Softwareentwicklung innerhalb des FE-Berechnungsmoduls

- Eingang durch die bestehende Schnittstelle:
  - Netz-Topologie,
  - Netz-Koordinaten und
  - Technologiedaten.
- Zusätzlicher Eingang durch die Erweiterung der Schnittstelle:
  - Sensitivität der Netzkoordinaten und
  - Sensitivität der Technologiedaten
- Analytische Gradientenermittlung auf Elementebene als Erweiterung des Standards der Elementformulierung, d.h.
  - Zusätzlicher Eingang auf Elementebene:
    - \* Sensitivität der Knotenkoordinaten und
    - \* Sensitivität der Materialwerte des betrachteten Elementes
  - Zusätzlicher Ausgang auf Elementebene:
    - \* partielle Ableitung des Elementresiduums nach den Designvariablen und
    - \* die elementbezogenen Anteile der Zielfunktion und Nebenbedingungen sowie die partiellen Ableitungen nach der Designvariablen und den Verschiebungen.
- Ausgang durch die bestehende Schnittstelle:
  - Spannungen zur graphischen Darstellung.
- Zusätzlicher Ausgang durch die modifizierte Schnittstelle:
  - partielle Ableitung des Gesamtresiduums und
  - die Werte und Ableitungen der Zielfunktion und Nebenbedingung des FE-Modells.

# Kapitel 7

## Beispiele

Im Kapitel 3 sowie im Anhang A sind die Spannungs- und Materialtensoren isotroper, hyperelastischer Materialien für unterschiedliche Problemstellungen angegeben worden. Die Umsetzung in eine effektive Finite-Elemente-Formulierung basiert auf den Darstellungen der Abschnitte 2.5, 2.6 und des Kapitels 4.

Die dort angegebenen Formulierungen sind vollständig in das Forschungsprogrammpaket INA–OPT implementiert worden und zeigen die erwünschten guten, d.h. quadratischen Konvergenzeigenschaften. Weiterhin bilden sie die Grundlage einer erfolgreichen Sensitivitätsanalyse, die ebenfalls für die Gesamtheit der angegebenen Darstellungsarten sowohl in variationeller als auch in diskreter Form realisiert wurde. Die Vollständigkeit der Implementation wurde an repräsentativen Testbeispielen mit kleiner Elementanzahl sowohl durch Vergleich mit der vollständig numerischen Sensitivitätsanalyse als auch mit den Varianten der semi-analytischen Gradientenermittlung nachgewiesen.

Zur Darstellung der Leistungsfähigkeit des Gesamtalgorithmus ´ Optimale Formgebung und damit auch der hierin enthaltenen Strukturanalyse und Sensitivitätsanalyse isotroper, hyperelastischer Materialien wurden beispielhaft zwei geometrische Grundformen, die Scheibe mit Loch und der S2-Normzugstab, untersucht.

Die Auswahl der unterschiedlichen Optimierungsaufgaben für diese Geometrien berücksichtigt das nichtlineare Materialverhalten unter großen Verzerrungen und umfaßt

- die Gewichtsminimierung bei Veränderung der geometrischen Form (Abschnitt 7.1),
- die Identifikation von Materialparametern und geometrischer Form aus dem Deformationsverhalten einer Struktur (Abschnitt 7.2),
- die Anwendung der Formoptimierung auf die praxisrelevante Problemstellung der Verminderung von Spannungskonzentrationen (Abschnitt 7.4).

Darüberhinaus wird im Abschnitt 7.3 die Anwendungsmöglichkeit der entwickelten Methodik innerhalb der Reifenkonstruktion beispielhaft anhand einer praxisnahen Fragestellung dargestellt.

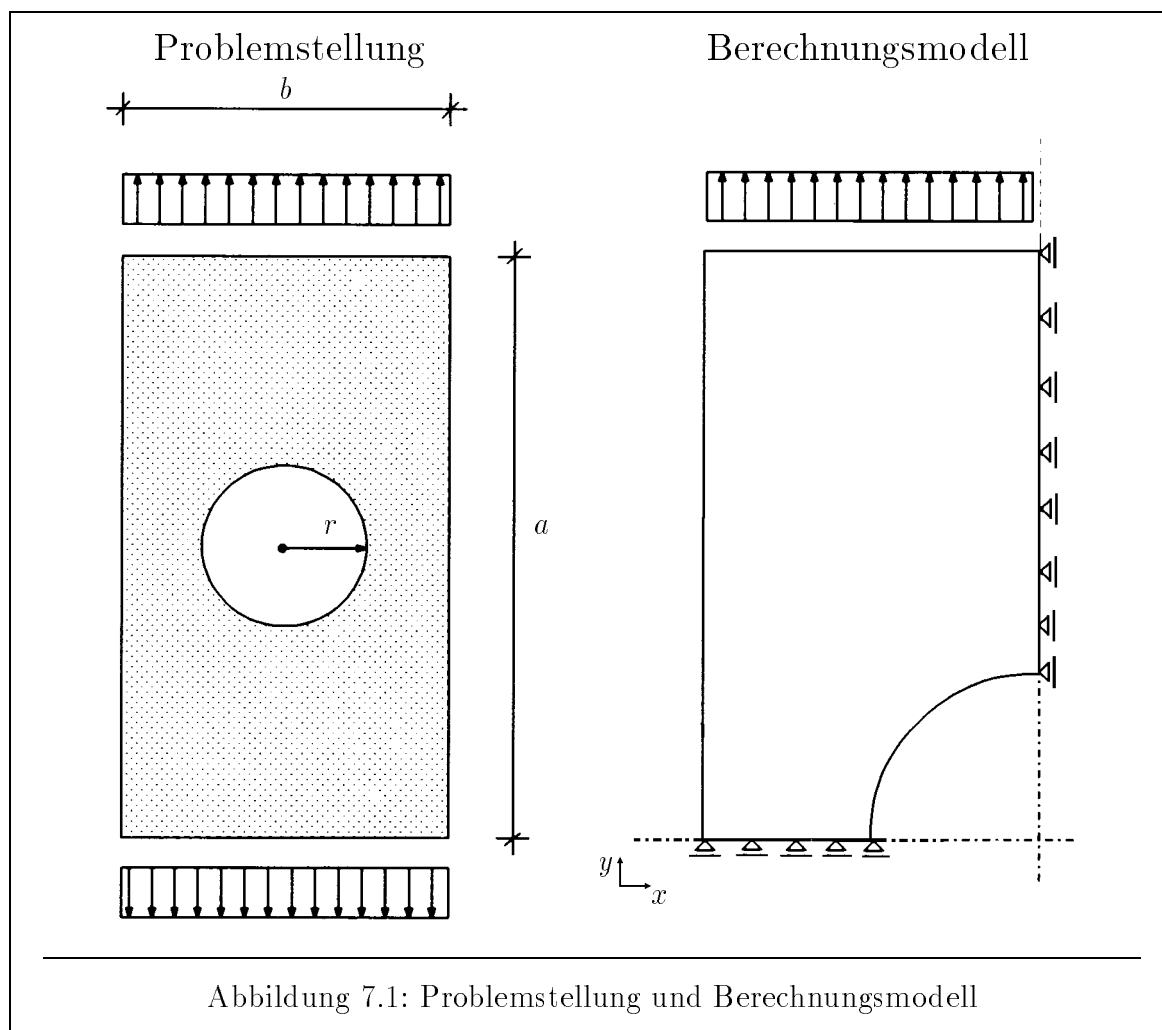
Die quantitativen Beispieldaten werden, soweit nicht explizit genannt, alle dimensionsbehaftet in Newton  $[N]$  und Millimeter  $[mm]$  angegeben.

## 7.1 Eine Formoptimierung der Scheibe mit Loch

Am Beispiel der Formoptimierung einer Scheibe mit Loch soll der Ablauf der Sensitivitätsanalyse verdeutlicht werden. Entsprechend der unterschiedlichen Modelle (siehe Kapitel 6) ergeben sich verschiedene Darstellungen des Problems, zwischen denen der Übergang sichergestellt werden muß. Die umfangreichen Darstellungen zu diesem Beispiel sollen das Verständnis der Erläuterungen der bisherigen Kapitel erleichtern.

### 7.1.1 Die Problemstellung

Betrachtet wird eine rechteckige Scheibe der Dicke  $d = 1\text{ mm}$  mit den Seitenlängen  $a = 36\text{ mm}$  und  $b = 20\text{ mm}$ , in deren Mitte sich ein kreisrundes Loch mit Radius  $r = 5\text{ mm}$  befindet.



Die Scheibe besteht aus einem inkompressiblen Synthekautschuk, dessen Materialverhalten durch das Ogden-Material-Gesetz beschrieben ist (siehe Abbildung 7.8). Aufgrund der Symmetriebedingungen wird nur ein Viertel des Systems verschiebungssteuert bis zu einer Gesamtverschiebung des Steuerknotens 4 (siehe Abbildung 7.3) von  $36\text{ mm}$  auf die dreifache Länge deformiert.

## 7.1.2 Das Optimierungsmodell

Für die Untersuchung der Problemstellung „Formoptimierung Scheibe mit Loch“ ist die Angabe des Optimierungsziels, der Nebenbedingungen und der veränderbaren Designvariablen notwendig.

Die Optimierungsaufgabe bestehe darin, mit der Veränderung der geometrischen Form, d.h. in diesem Fall wahlweise der Modifikation des Kreisradius  $r$  und der äußeren Kontur der Scheibe, das Gewicht der Scheibe zu minimieren. Maßgebend für die Beanspruchung ist die maximale Hauptnormalspannung, die unterhalb einer materialabhängigen Schranke bleiben soll. Weiterhin sind die Verschiebungen signifikanter Geometriepunkte beschränkt.

Die genaue quantitative Definition des hier nur verbal beschriebenen Optimierungsproblems wird im Abschnitt 7.1.5 angegeben. An dieser Stelle erfolgt zunächst nur die qualitative Zuordnung der genannten Zielfunktionen, Nebenbedingungen und Designvariablen, d.h. des Optimierungsmodells, auf die Teilmodelle gemäß der nachfolgenden Abbildung.

Modell der Optimalen Formgebung	
Entwurfsvariablenmodell:	Radius $r$ des Loches
CAD-Modell:	Darstellung der äußeren Linie als Freiformkurve
FEM-Modell:	Spannungen, Verschiebungen
Technologiedaten:	(Materialparameter, Lastfaktoren)

Abbildung 7.2: Optimierungs-Modell der Scheibe mit Loch

Es soll nochmals (siehe auch Kapitel 6) betont werden, daß sich das Optimierungsmodell nur aus der Auswahl geeigneter Informationen der einzelnen Modelle zusammensetzt und mit dem Optimierungsmodell keine neuen Strukturen definiert werden. Die gesamten Informationen zur Problembeschreibung werden für dieses Beispiel aufbereitet und den einzelnen Modellen zugeordnet.

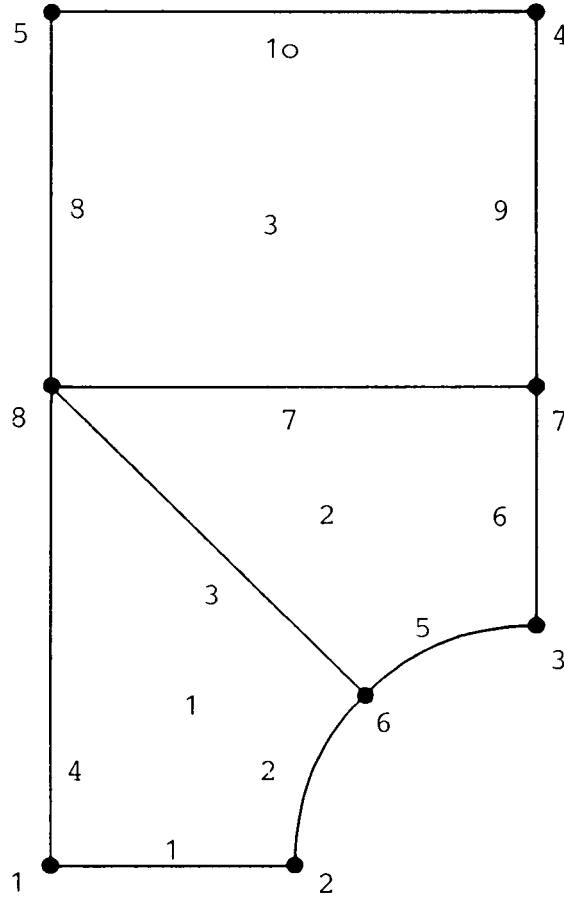
## 7.1.3 Die Modelle innerhalb der Prozeßkette

### 7.1.3.1 Das Topologiemodell

Für die Scheibe mit Loch werden die topologischen Elemente Punkte, Linien und Flächen eingeführt, deren topologischen Zusammenhänge in dem Topologiemodell nach Abbildung 7.3 zusammengefaßt sind.

Die Definition des Optimierungsmodells orientiert sich in der Eingabe und in der Problemdarstellung an der obigen Struktur.

### Hierarchisches Topologiemodell



Dimension	Objekte	Nummer des Objekts	definiert durch
0	<b>Punkte</b>	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	
1	<b>Linien</b>	1	Randpunkte: 1, 2
1	<b>Linien</b>	2	Randpunkte: 2, 6
1	<b>Linien</b>	3	Randpunkte: 8, 6
1	<b>Linien</b>	4	Randpunkte: 1, 8
1	<b>Linien</b>	5	Randpunkte: 6, 3
1	<b>Linien</b>	6	Randpunkte: 7, 3
1	<b>Linien</b>	7	Randpunkte: 8, 7
1	<b>Linien</b>	8	Randpunkte: 8, 5
1	<b>Linien</b>	9	Randpunkte: 7, 4
1	<b>Linien</b>	10	Randpunkte: 5, 4
2	<b>Flächen</b>	1	Randlinien: 1, 2, 3, 4
2	<b>Flächen</b>	2	Randlinien: 3, 5, 6, 7
2	<b>Flächen</b>	3	Randlinien: 7, 9, 10, 8

Abbildung 7.3: Das hierarchische Topologiemodell



### 7.1.3.2 Das Entwurfsvariablenmodell

Mit der obigen Beschreibung ist die Ausgangsgeometrie des Problems vollständig erfaßt, und das Modell der Scheibe mit Loch besteht in diesem Fall aus der Angabe der vier Entwurfsvariablen  $a, b, d$  und  $r$  sowie der zusätzlich definierten Attribute und Relationen. Für die äußere Linie wird dabei  $G^1$ -Stetigkeit gefordert (siehe hierzu z.B. *Bletzinger* [19]). Weiterhin sollen die Randlinien im gemeinsamen Knoten senkrecht aufeinander stehen.

Entwurfsvariablen	Attribute, Relationen
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Länge <math>a</math></li> <li>• Länge <math>b</math></li> <li>• Radius <math>r</math></li> <li>• Dicke <math>d</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Die äußere Linie <math>a</math> ist <math>G^1</math>-stetig.</li> <li>• Die Randlinien stehen im gemeinsamen Knoten senkrecht aufeinander</li> </ul>

---

Abbildung 7.4: Das Entwurfsvariablenmodell der Scheibe mit Loch

Wesentlich für die Problemformulierung ist die Tatsache, daß der genaue Verlauf der äußeren Linie als Freiformkurve nicht aus dem Entwurfsvariablenmodell beschrieben werden kann.

### 7.1.3.3 Das parametrische Geometriemodell

Zur weiteren Bearbeitung dieser Problemstellung sind die Angaben der Entwurfsvariablen nicht ausreichend, so daß ein parametrisches CAD-Modell eingeführt wird. Dies bedeutet, daß für die Linien und Flächen eine parametrische Darstellung in Form der Gleichung (6.2)

$$\mathbf{X} = \psi_{\circ}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, s) = \sum_{i=1}^n \hat{M}_i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \mathbf{Y}_i$$

aufgebaut und in der Datenbasis gespeichert werden muß.

In diesem Beispiel sind die Linien mit den Nummern 1, 3, 6, 7, 9 und 10 (siehe Abbildung 7.3) Geraden, deren Parametrisierung in der Form

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_a + t (\mathbf{X}_e - \mathbf{X}_a) \quad (7.1)$$

für  $\Theta^1 = t \in [0, 1]$  erfolgt. Die zu dieser Beschreibung notwendigen Informationen sind in der Datenbasis des Geometriemodells vorhanden. Die Nummern der Anfangs- und Endpunkte sind dem Topologiemodell zu entnehmen, womit zum einen der Durchlaufsinne definiert ist und zum anderen über die Koordinaten der Punkte auch die Werte  $\mathbf{X}_a$  und  $\mathbf{X}_e$  zur Verfügung stehen. Über eine Kennung bei der Geometrieingabe ist die Linie als Gerade zu definieren. Für die weiteren inneren Punkte (in diesem Fall nicht vorhanden) und die FE-Knoten auf der Linie sind bei der Netzerzeugung bzw. -verfeinerung die konvektiven Koordinaten (hier  $\Theta^1 = t$ ) zu speichern.

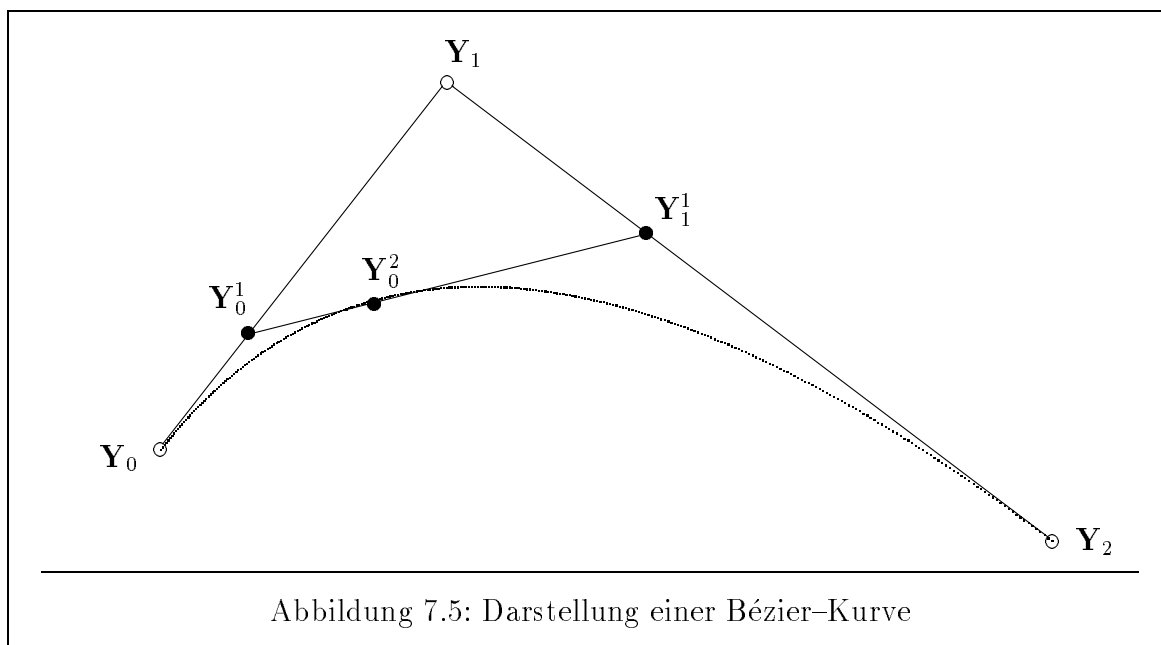
Die Linien 4 und 8 sind Freiformkurven. Der topologische Zusammenhang (Nummern der Endpunkte, Durchlaufsin, innere Punkte) sind dem Topologiemodell zu entnehmen. Eine Kennung bei der Eingabe definiert diese Linie als Freiformkurve, so daß anschließend die hierzu notwendige Definition erfolgen muß. Im Programmsystem INA-OPT ist die Darstellung dieser Linienart in der *Bernstein*-Form des Bézier-Polynoms

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}^n(t) = \sum_{i=0}^n \hat{M}_i^n(t) \mathbf{Y}_i \quad (7.2)$$

realisiert, siehe hierzu *Farin* [39]. Dabei gilt für die Gestaltsfunktionen der Zusammenhang

$$M_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}. \quad (7.3)$$

Diese Situation ist in der Darstellung 7.5 aufgezeigt.



Für die Freiformkurven ist die Angabe von Entwurfsvariablen nicht sinnvoll, und die Definition der Kurve erfolgt unmittelbar in den Größen des parametrischen Geometriemodells. Dieser Zusammenhang ist bei der Optimierung zu beachten.

Die Linien 2 und 5 stellen Kreissegmente dar, die aufbauend auf der topologischen Darstellung durch die Angabe der Entwurfsvariablen, d.h. in diesem Fall durch die Angabe der definierender Variablen

- 1.) Parameter der beschreibenden Gleichung 2. Ordnung oder
- 2.) Kreismittelpunkt und Radius oder
- 3.) Nummern von drei Punkten auf dem Kreis

exakt beschrieben werden kann. Die Eingabe kann in der jeweils einfachsten Form erfolgen, da intern zwischen den Darstellungsarten umgerechnet wird.

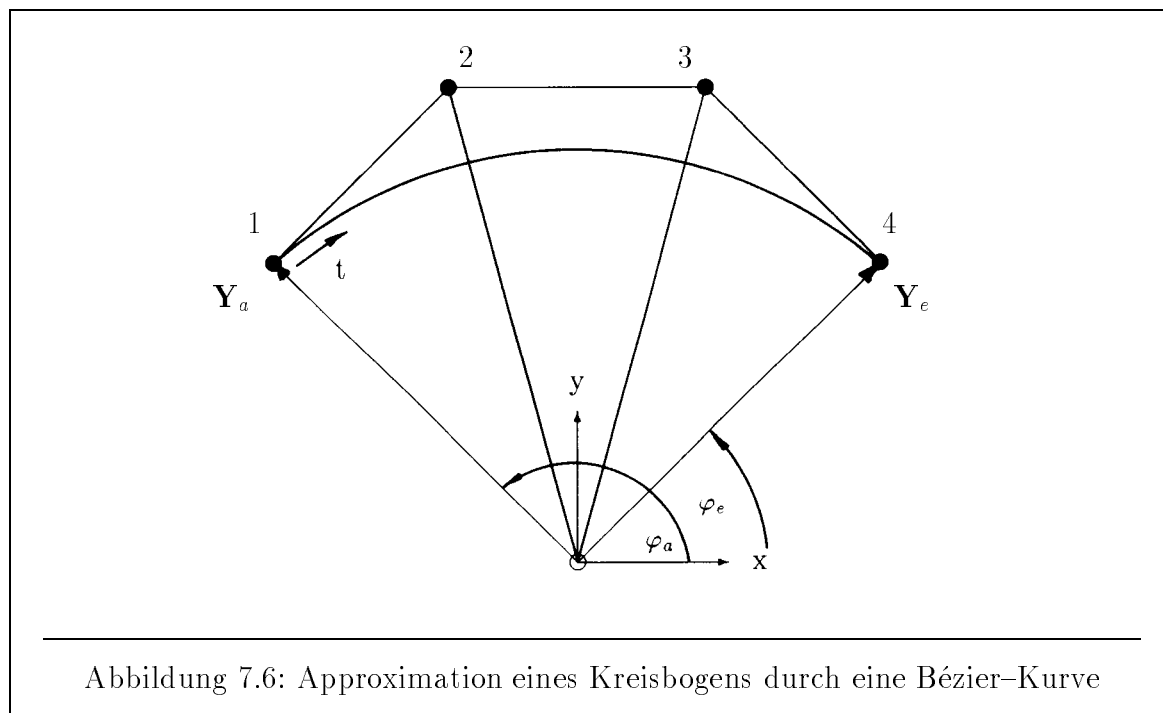
Aus dem Entwurfsvariablenmodell ist das parametrische CAD-Modell herzuleiten, das in drei verschiedenen Formen erfolgen kann.

1. Die analytische Beschreibung der Punkte auf dem Kreis in Abhängigkeit der natürlichen Parametrisierung durch den Winkel

$$X^1 = X_m^1 + r \cos \varphi \quad \text{und} \quad X^2 = X_m^2 + r \sin \varphi.$$

2. Exakte parametrische Beschreibung durch rationale Bézier-Kurven.
3. Approximative parametrische Beschreibung durch Bézier-Kurven.

Der Übergang von den Entwurfsparametern zu der dritten, approximativen Darstellung wird beispielhaft für den Kreisbogen dargestellt. In diesem Fall sei die Darstellung der Lage der Kontrollpunkte für einen Kreisbogen mit dem Öffnungswinkel  $\varphi_o$  gemäß Abbildung 7.6 dargestellt.



Der Kreis besitzt den Radius  $r$  und sein Mittelpunkt befindet sich im Punkt  $(X_m^1, X_m^2)$ . Für den Anfangs- und Endwinkel  $\varphi_a$  bzw.  $\varphi_e$  des Kreisbogens gilt

$$\varphi_a = \arctan \frac{X_a^2 - X_m^2}{X_a^1 - X_m^1} \quad \text{und} \quad \varphi_e = \arctan \frac{X_e^2 - X_m^2}{X_e^1 - X_m^1}.$$

Der Öffnungswinkel ist durch  $\varphi_o = \varphi_a - \varphi_e$  gegeben. Aus der Darstellung ist die Abhängigkeit der Kontrollpunkte  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_a$ ,  $\mathbf{Y}_2$ ,  $\mathbf{Y}_3$  und  $\mathbf{Y}_4 = \mathbf{Y}_e$  von den Koordinaten

$(X_m^1, X_m^2)$  und vom Radius  $r$  in der Form

$$\begin{aligned} Y_i^1 &= X_m^1 + r \cos \varphi_i && \text{für } i = 1, 4 \\ Y_i^1 &= X_m^1 + \bar{r} \cos \varphi_i && \text{für } i = 2, 3 \\ Y_i^2 &= X_m^2 + r \sin \varphi_i && \text{für } i = 1, 4 \\ Y_i^2 &= X_m^2 + \bar{r} \sin \varphi_i && \text{für } i = 2, 3 \end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$\bar{r} := \frac{r}{\cos \frac{\varphi_0}{3}}$$

gegeben. Dabei bezeichnet  $\varphi_i$  den zum Kontrollpunkt  $\mathbf{Y}_i$  gehörenden Winkel. Mit diesen Beziehungen können die partiellen Ableitungen der Kontrollpunktkoordinaten nach dem Radius  $r$  berechnet werden und es gilt

$$\frac{\partial Y_i^1}{\partial r} = \begin{cases} \cos \varphi_i & \text{für } i = 1, 4 \\ \frac{\cos \varphi_i}{\cos \frac{\varphi_0}{3}} & \text{für } i = 2, 3 \end{cases} \quad (7.4)$$

sowie entsprechend für die  $Y^2$ -Koordinate

$$\frac{\partial Y_i^2}{\partial r} = \begin{cases} \sin \varphi_i & \text{für } i = 1, 4 \\ \frac{\sin \varphi_i}{\cos \frac{\varphi_0}{3}} & \text{für } i = 2, 3 \end{cases} \quad (7.5)$$

Weitere Ableitungen können in analoger Weise hergeleitet werden. Damit ist die parametrische Darstellung der Linien dieses Beispiels dargestellt worden.

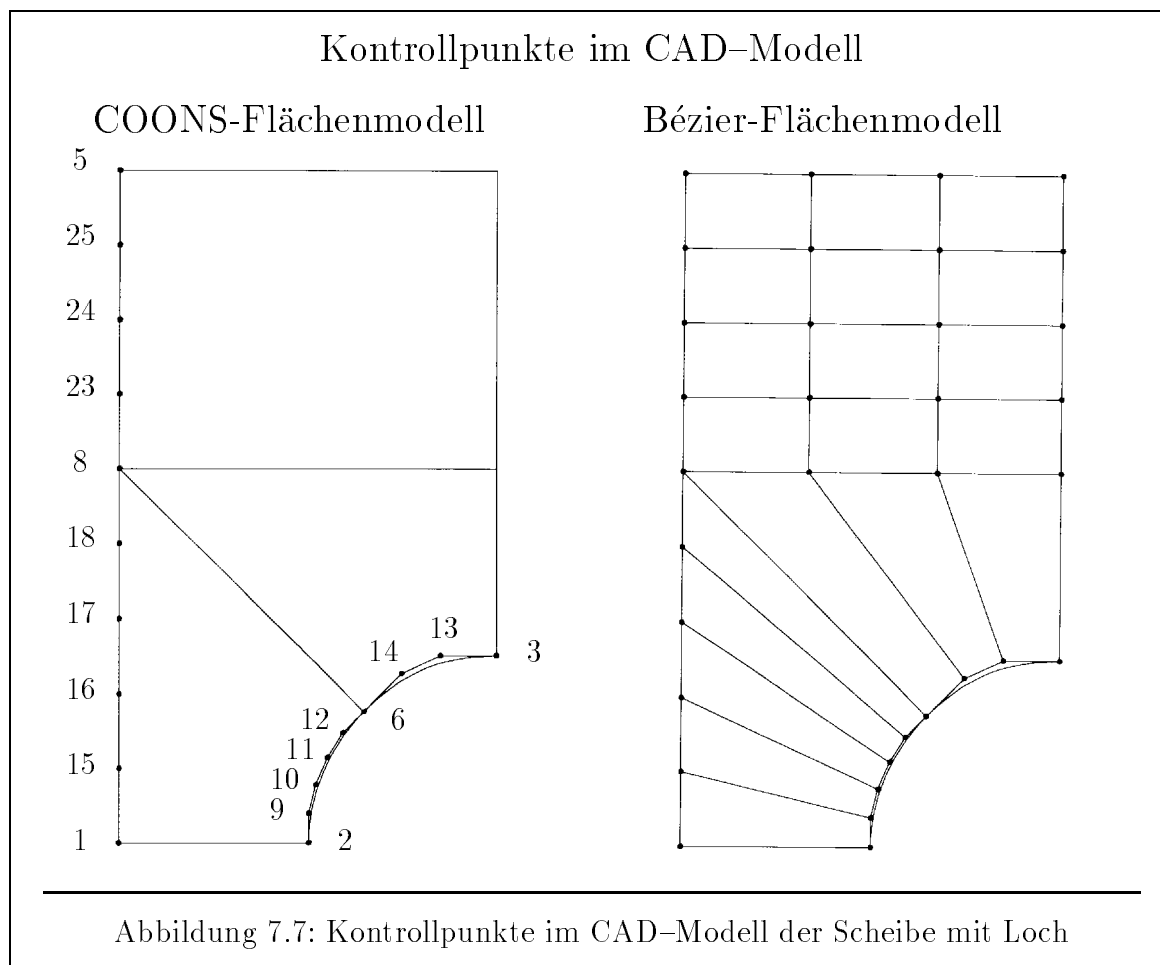
Für die parametrische Darstellung der Flächen sind folgende Lösungen in INA-OPT implementiert (siehe hierzu auch die Anmerkungen zum Programmpaket CARAT in den Arbeiten von *Bletzinger, Kimmich, Ramm*, z.B. [19], [54], [21]):

- Bilineare Lagrange-Elemente (Vorbelegung, falls keine weitere Definition erfolgt),
- Quadratische Lagrange-Elemente,
- Bézier-Flächen-Darstellung,
- Coons-Flächen-Darstellung und die
- Lofted-Surfaces-Flächen-Darstellung.

In diesem Beispiel erfolgt die parametrische Flächendarstellung wahlweise nach dem Konzept Bézier-Flächen-Darstellung bzw. der Coons-Flächen-Darstellung, die durch Eingabe einer Kennung definiert wird. Das Topologiemodell liefert wieder den Zusammenhang der Flächen zu den definierenden Linien, aus der für die Randkurven bereits die parametrische Darstellung durch Vervollständigung der eindimensionalen Darstellung ermittelt werden kann. Für die Coons-Flächen-Darstellung ist die Parametrisierung innerhalb der Fläche durch die Angabe der Randlinienbeschreibung gegeben, d.h.

es sind neben der Definition der Fläche über die einzugebende Kennung keine weiteren Eingaben erforderlich.

In der Abbildung 7.7 sind die Kontrollpunkte des CAD-Modells der Scheibe mit Loch eingetragen. Für Kontrollpunkte, deren Koordinaten in den Optimierungsaufgaben als Designvariablen definiert werden, wird eine Nummerierung eingeführt. Somit ist aus dem Topologiemodell nach Abbildung 7.3 und der Darstellung der Kontrollpunkte zu erkennen, daß die Linien 1, 2, 5, 8 gemäß Gleichung 7.2 als Bézierkurven mit 2, 3 bzw. 4 inneren Kontrollpunkten beschrieben werden.



Für die Formoptimierung ebener Strukturen ist in der Regel die Coons-Flächenbeschreibung effektiver einzusetzen, da in diesem Fall die Veränderung der Punkte innerhalb der Fläche eindeutig durch das Verhalten der vier Randlinien bestimmt ist. Für eine Bézier-Flächendarstellung treten zusätzliche Kontrollpunkte im Gebiet auf, deren Koordinaten während der Optimierung geeignet modifiziert werden müssen. Dieses führt in der Regel zur Einführung von zusätzlichen Nebenbedingungen, um eine akzeptable Netzgüte zu erhalten (siehe hierzu auch die Bemerkungen in Abschnitt 7.2.3).

### 7.1.3.4 Das Technologiemodell

Für die Strukturanalyse sind über die rein geometrischen Informationen hinaus noch weitere sogenannte „Technologiedaten“ bereitzustellen. In diesem Fall sind die Angaben über das Material, die Randbedingungen und die Belastung erforderlich.

**Technologiedaten**

- Randbedingungen gemäß der Darstellung in Abbildung 7.1
- Lasten gemäß der Darstellung in Abbildung 7.1
- Materialgesetz: Ogden-Material nach Gleichung (2.75), d.h.

$$\bar{W} = \tilde{W}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} \{ \bar{\lambda}_1^{\alpha_p} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_p} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_p} \},$$

mit den Materialparametern

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 1.30, & \alpha_2 = -2.00, & \alpha_3 = 5.0000, \\ \mu_1 = 0.63, & \mu_2 = -0.01, & \mu_3 = 0.0012 \end{array}$$

sowie der Bedingung (2.76)

$$\sum_{p=1}^N \mu_p \alpha_p = 2\mu$$

an die Materialparameter  $\mu_p$  und  $\alpha_p$ .  
Der Schubmodul beträgt damit  $\mu = 0,4225 \text{ N/mm}^2$ .

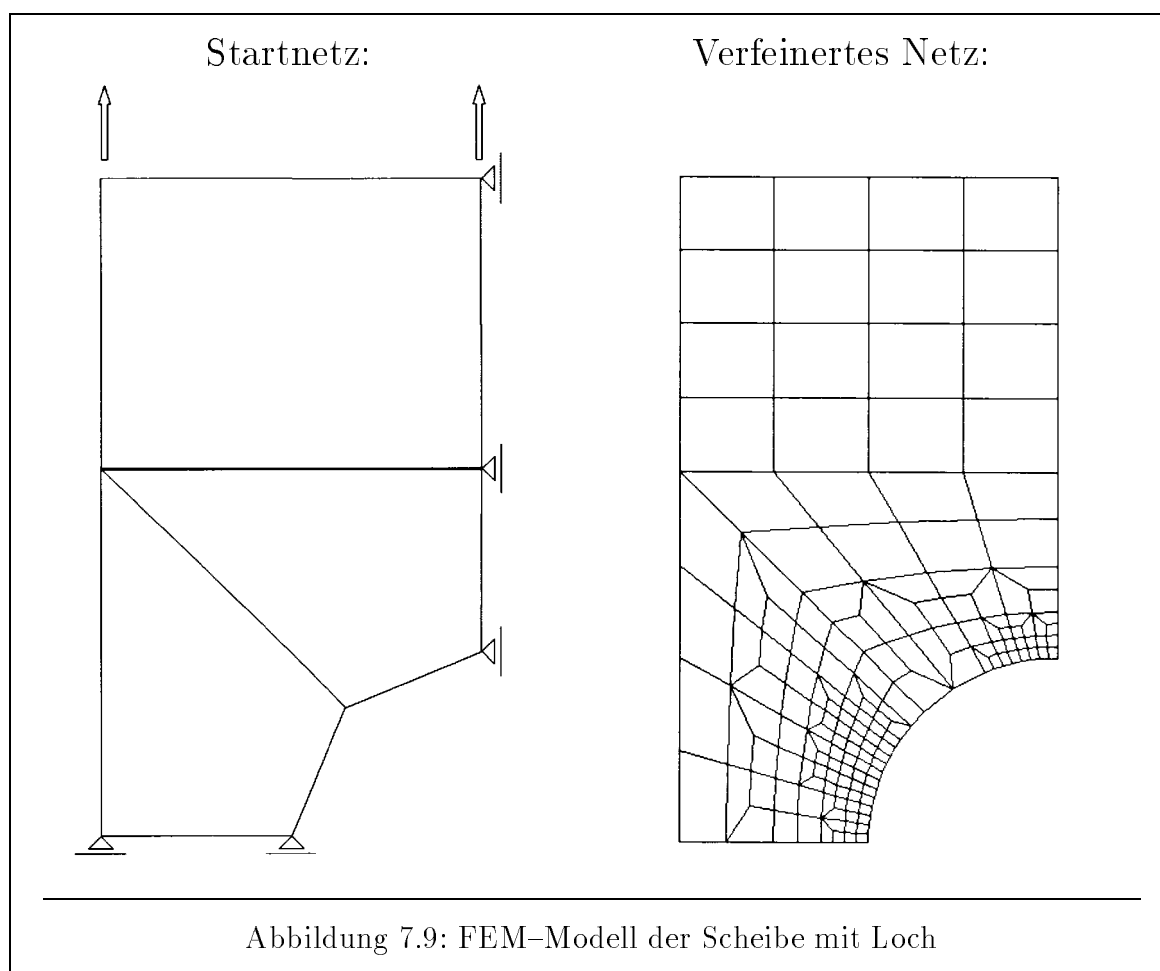
---

Abbildung 7.8: Technologiedaten der Scheibe mit Loch

Die Definition dieser Technologiedaten erfolgt in den kommerziell verfügbaren Programmsystemen in der Regel erst mit dem Aufbau eines Berechnungsmodells im Preprozessor des FE-Programmpaketes. Viele industriell eingesetzte CAD-Systeme sowie die verfügbaren Datenschnittstellen (z.B. IGES, VDA-FS) bieten keine Möglichkeiten diese Technologiedaten bereits zu Beginn der Konstruktion eines Bauteils der Geometrie zuzuordnen.

### 7.1.3.5 Das Finite-Elemente-Modell

Die Analyse der durch ein Geometriemodell gegebenen und durch die Technologiedaten erweiterten Struktur wird üblicherweise durch numerische Näherungsverfahren durchgeführt. An dieser Stelle wird die Finite-Elemente-Methode betrachtet, die essentiell auf der Triangulation des Gebietes basiert. Damit stellt sich die Aufgabe, aufbauend auf dem CAD-Modell ein FE-Netz zu erzeugen. Hierbei spielt die Güte der Netze, die sich in dem Konvergenzverhalten der numerischen Lösung gegen die exakte (nicht bekannte) Lösung widerspiegelt, eine besondere Rolle. Für die Netzverfeinerung wurde das in *Rust* [80] beschriebene und von ihm implementierte Netzadaptionungsverfahren für die Verwendung in INA-OPT aufbereitet. Das in Abbildung 7.9 dargestellte Netz wurde dabei in fünf Verfeinerungsschritten auf der Grundlage einer linear-elastischen Berechnung aus dem Startnetz erzeugt. Zunächst traten zwei gleichmäßige Verfeinerungsschritte auf. Anschließend ergab die dreimalige Anwendung des Verfeinerungskriteriums nach *Zienkiewicz, Zhu* [112] mit einer Schranke von 0.8 für den normierten Fehler das dargestellte Netz, das sich nur aus 4-Knoten-Vierecks-Elementen zusammensetzt.



Das Netz enthält 255 Elemente mit 364 Knoten und 698 Unbekannten. Die Bandbreite des Gleichungssystems konnte durch den Einsatz einer Knotennummeroptimierung auf 91 begrenzt werden.

### 7.1.4 Bemerkungen zur Durchführung der Strukturanalyse

Die Berechnung inkompressibler Materialien im ebenen Spannungszustand kann mit einem reinen Verschiebungsansatz durchgeführt werden, da in diesem Fall die Inkompressibilitätsbedingung exakt und zwängungsfrei erfüllt wird. Damit tritt der unerwünschte Effekt des „Locking“ nicht auf, siehe auch Abschnitt 3.5. Das beobachtete numerische Iterationsverhalten in allen Beispielrechnungen weist die gewünschte quadratische Konvergenz der Verschiebungen in der Nähe der Lösung auf.<sup>1</sup>

Die Scheibe mit Loch kann für das in Abbildung 7.9 angegebenen FE-Netz nicht in einem Schritt auf die geforderte dreifache Länge gestreckt werden. Das Lösungsverhalten der Struktur ist entsprechend dem gewählten Materialgesetz stark nichtlinear, so daß das Newton-Verfahren der nichtlinearen Gleichgewichtsiteration im Startpunkt der unverformten Konfiguration eine Abstiegsrichtung liefert, die zu einem Iterationspunkt der Verschiebungen mit Elementdurchdringungen führt.

Etliche Testrechnungen mit unterschiedlich stark verfeinerten Netzen ließen erkennen, daß grobe Netze eher unempfindlich sind, während besonders stark verfeinerte Netze eine ebenfalls feine Lastinkrementierung benötigten. Als Beispiel sind in Abbildung 7.10 die maximale Verschiebung des Strukturpunktes 4 angegeben, für den noch keine Elementdurchdringung auftritt.

Gleichmäßige Verfeinerung	Adaptive Verfeinerung	Verschiebung [ <i>mm</i> ]
Startnetz		24.0
1 gleichmäßige Verfeinerung		22.0
2 gleichmäßige Verfeinerungen		16.0
3 gleichmäßige Verfeinerungen		10.9
3 gleichmäßige Verfeinerungen	1 adaptive Verfeinerung	10.3
3 gleichmäßige Verfeinerungen	2 adaptive Verfeinerungen	10.0

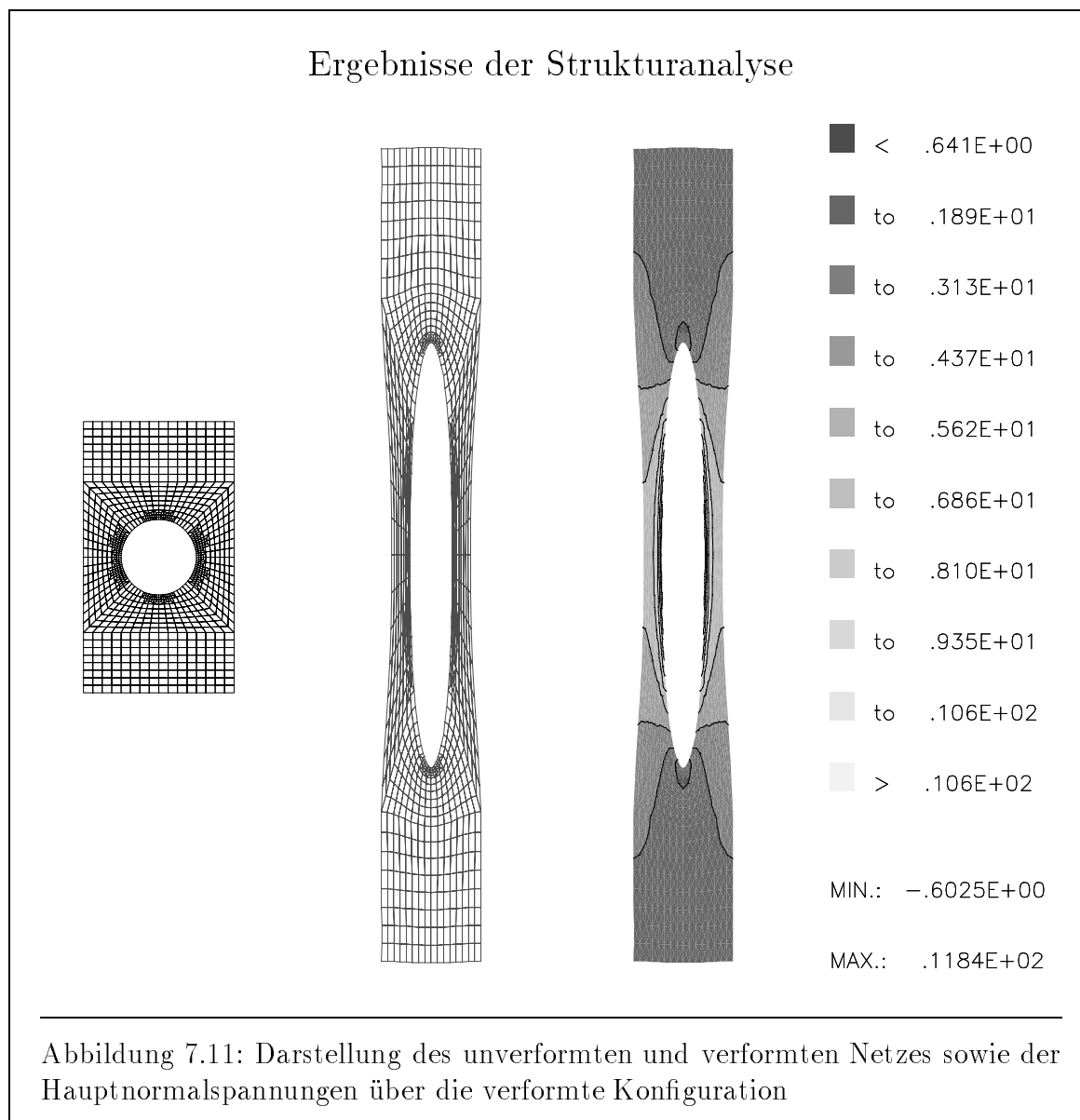
Abbildung 7.10: Angabe der maximal in einem Schritt ohne Auftreten von Elementdurchdringungen aufzubringenden Gesamtverschiebung bei unterschiedlichen FE-Netzen

Das hier für den ebenen Spannungszustand beschriebene Phänomen tritt bei Berechnungen im ebenen Verzerrungszustand und der Berücksichtigung der Inkompressibilitätsbedingung noch verstärkt auf. Um den Programmabbruch durch ein Auftreten von Elementdurchdringungen zu vermeiden ist die Gesamtdeformation in vier Schritten aufgebracht worden.

<sup>1</sup>Die Berechnung und Optimierung von Materialien im ebenen Verzerrungszustand benötigt die in Abschnitt 4.2 beschriebene gemischte Finite-Elemente-Methode um die „Locking“-Phänomene zu vermeiden. An dieser Stelle wird auf eine explizite Darstellung akademischer Beispiele im räumlichen, ebenen bzw. axisymmetrischen Verzerrungszustand zur Beschränkung des Umfangs dieser Arbeit verzichtet, siehe hierfür das in Abschnitt 7.3 behandelte Beispiel der Formoptimierung eines PKW-Reifens. Die Berechnung und Optimierung der z.B. von *Ramm* [75] und *Parisch* [71] behandelten Gummischeibe mit Loch für den ebenen Spannungszustand und vergleichend für den ebenen Verzerrungszustand ist in *Barthold* [7] beschrieben.



Tritt während einer Strukturanalyse innerhalb der Optimierungsberechnung trotz vorsichtiger Lastinkrementierung eine Elementdurchdringung auf, so werden einige Line-Search-Schritte für die Designvariablen durchgeführt bis ein Design erreicht ist, bei dessen Deformation keine Elementdurchdringungen (in der verformten Konfiguration) auftreten. Diese Problematik kann bei der linearen Finite-Elemente-Berechnung nicht auftreten, da dort das Gleichgewicht am unverformten Körper erfüllt sein muß. Durch die gewählte und in Abschnitt 6.4 beschriebene Art der Netzveränderung bei Formänderung ist das Netz der unverformten Konfiguration stets durchdringungsfrei. Das unverformte und verformte Netz sowie die Hauptnormalspannungen des Cauchy-Spannungstensors im verformten Endzustand sind in Abbildung 7.11 dargestellt.



### 7.1.5 Ergebnisse der Optimierungsaufgabe

Mit diesem Optimierungsproblem wurde die im weiteren beschriebene Aufgabe untersucht. Für die Angaben zu den Bezeichnungen der Linien, Kontrollpunkte und des eingeführten Koordinatensystems siehe die Abbildungen 7.1, 7.3 und 7.7.

- **Zielfunktion:**

Minimierung des Gesamtgewichts

- **Nebenbedingungen:**

- Beschränkung der maximalen Hauptnormalspannungen  $T_I$  des Cauchy-Spannungstensors  $\mathbf{T}$  der Momentankonfiguration unterhalb der Grenzspannung von  $9,0 N/mm^2$

- Beschränkung der Verschiebung der Punkte 2 und 3

$$u_2 \leq 2,5 \text{ mm} \quad \text{und} \quad v_3 \leq 25,0 \text{ mm}$$

- Gewährleistung der  $G^1$ -Stetigkeit der Linien 4 und 8, d.h. die Kontrollpunkte 8, 18, 23 müssen auf einer Geraden liegen.

- Gewährleistung der  $G^1$ -Stetigkeit der Linie 4 für die symmetrische Ergänzung des Berechnungsmodells zur Gesamtgeometrie, d.h. die Kontrollpunkte 1 und 15 müssen gleiche  $x$ -Koordinaten besitzen.

- **Designvariablen:**

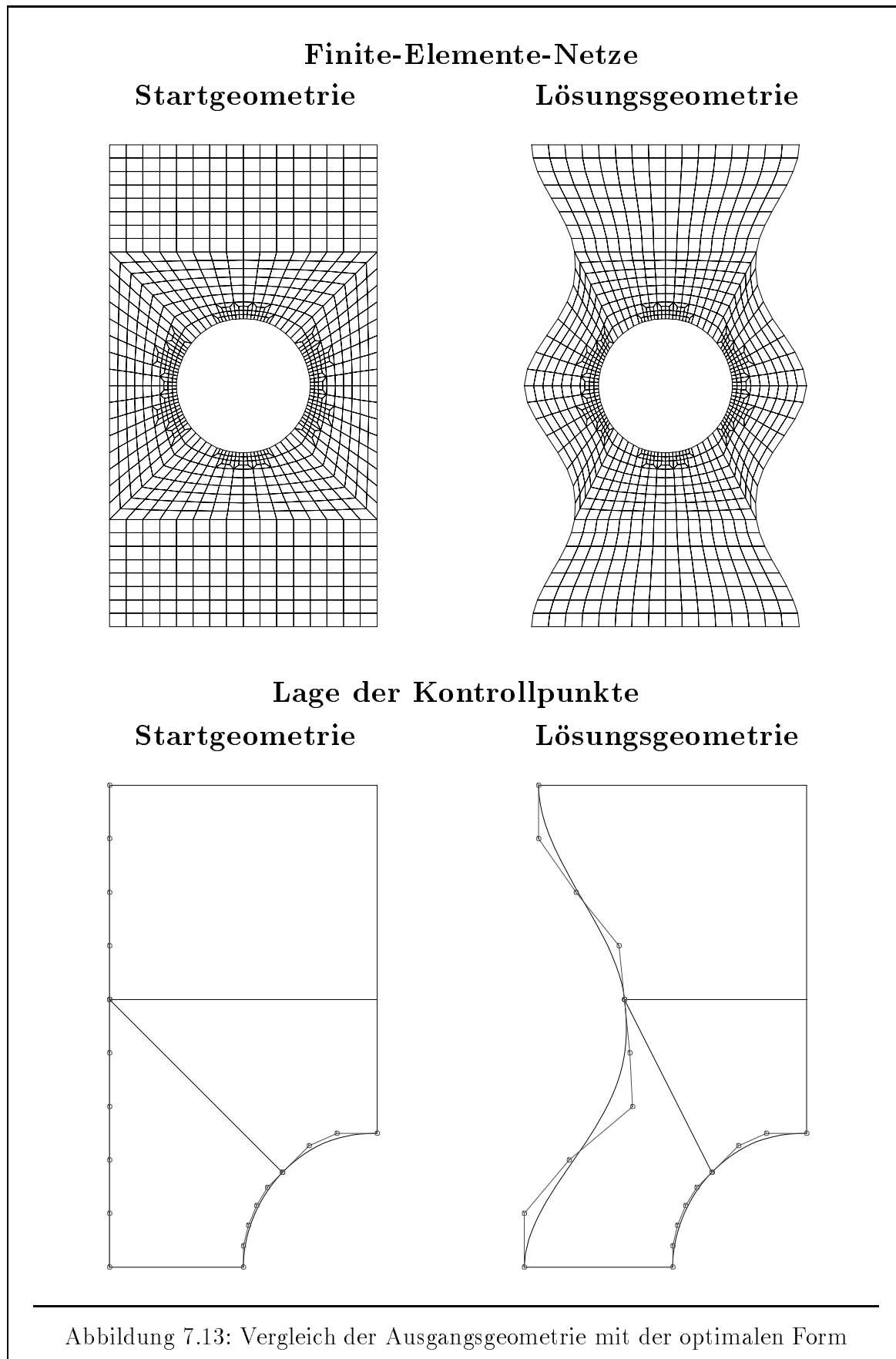
$x$ -Koordinaten der Kontrollpunkte 1, 15, 16, 17, 18, 8, 23, 24 der äußeren Linie nach Abbildung 7.7 mit den Schranken  $0 \leq x_{KP} \leq 4,5 \text{ mm}$ .

---

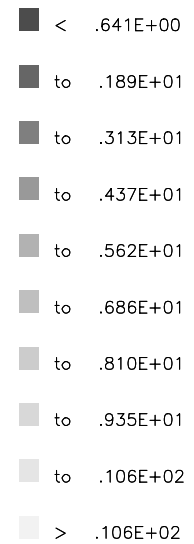
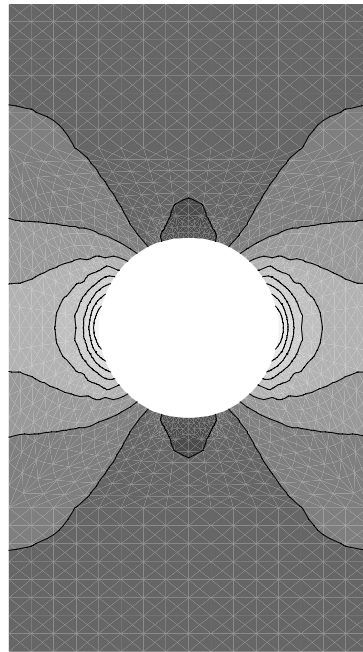
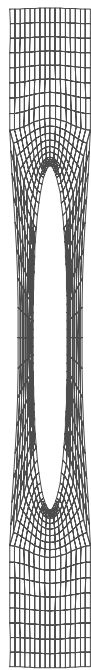
Abbildung 7.12: Definition des Optimierungsproblems

Die maximale Hauptnormalspannung  $T_I$  des Cauchy-Spannungstensors  $\mathbf{T}$  ergibt für die Ausgangsgeometrie nach Abbildung 7.11 einen Wert von  $T_I = 11,84 N/mm^2$ , der über dem gewünschten Grenzwert von  $9,0 N/mm^2$  liegt. Dies führt dazu, dass die Optimierung im unzulässigen Bereich der Designvariablen beginnt. Für die numerisch effektive Behandlung der Optimierungsaufgabe wurden die Zielfunktion, Nebenbedingungen und Designvariablen durch Division mit den jeweiligen Startwerten normiert. Dieses führt zu einer günstigeren Kondition der BFGS-Approximation der Hessematrix der Lagrangefunktion dieses Optimierungsproblems, siehe z.B. die Bemerkungen hierzu in Schittkowski [84], [85], [86].

Der Algorithmus konnte die Optimierungsaufgabe unter Verwendung der vollständig analytisch bereitgestellten variationellen Sensitivitäten effektiv lösen. Für die optimierte Geometrie der Scheibe mit Loch sind in Abbildung 7.13 das Finite-Elemente-Netz und die Lage der Kontrollpunkte dargestellt. In Abbildung 7.14 werden die deformierten Konfigurationen sowie deren Spannungszustände (aufgetragen über die unverformte Konfiguration) der Ausgangsgeometrie und der optimierten Form gegenübergestellt.



### Deformation und Spannungszustand der Startgeometrie

MIN.:  $-.6025E+00$ MAX.:  $.1184E+02$ 

### Deformation und Spannungszustand der Lösungsgeometrie

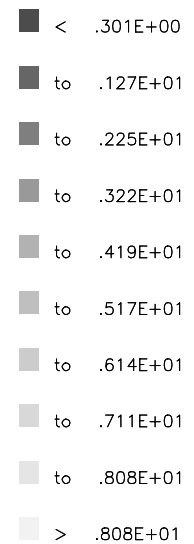
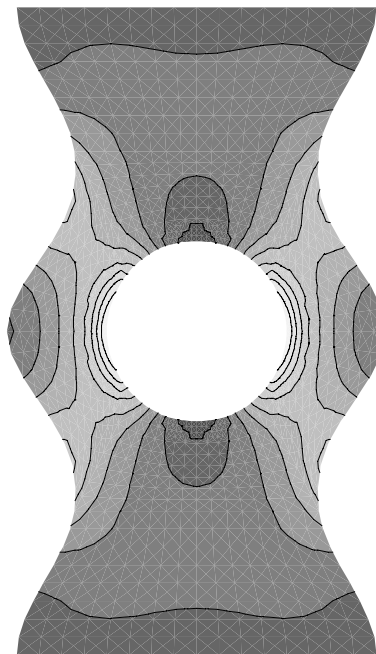
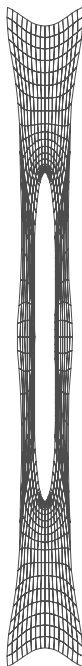
MIN.:  $-.6719E+00$ MAX.:  $.9057E+01$ 

Abbildung 7.14: Darstellung der Deformation und des Spannungszustands der optimalen Form

Diese Optimierungsberechnung (wie auch alle weiteren) wurde mit dem SQP-Verfahren in einer Implementation von Prof. K. Schittkowski, Universität Bayreuth, durchgeführt (siehe die Bemerkungen hierzu in Abschnitt 6.1).<sup>2</sup> Die Leistungsdaten des Algorithmus sind in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt. Die Bezeichnungen für die angegebenen Werte sind der Quelle des SQP-Verfahrens entnommen und ausführlich in den Arbeiten von *Schittkowski* beschrieben.

Wert der Zielfunktion im Startpunkt	$f_0$	24.0
Wert der Zielfunktion im Lösungspunkt	$f^*$	22.7
Anzahl der Iterationsschritte	ITER	18
Anzahl der Funktionsauswertungen	NFUNC	20
Anzahl der Gradientenberechnungen	NGRAD	18
Norm der Lagrangefunktion	GLNOR	$1.9 \cdot 10^{-4}$
Verletzung der Nebenbedingungen	SRES	$9.0 \cdot 10^{-16}$

Abbildung 7.15: Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus

Im Lösungspunkt ergeben sich für die Kontrollpunkte 1, 15, 16, 17, 18, 8, 23, 24 und 25 die folgenden Werte der  $x$ -Koordinaten (in gleicher Reihenfolge)

0,4604; 0,4604; 2,1307; 4,50; 4,392; 4,186, 3,984; 3,962; 2,416.

Dabei befindet sich die Koordinate des Kontrollpunktes 17 auf der oberen Schranke von 4,5 mm. Ein weiterer Abstieg der Zielfunktion ist daher bei der Aufgabe dieser Schranken für die Koordinatenwerte der Kontrollpunkte möglich.

Die Behandlung einer modifizierten Optimierungsaufgabe, bei der die Lochform zur Gewichtsminimierung verändert werden kann ist, in *Barthold* [7] vorgenommen worden.

<sup>2</sup>Für die freundliche Bereitstellung seiner Realisation des SQP-Verfahrens möchte ich Herrn Prof. K. Schittkowski, Universität Bayreuth, recht herzlich danken.

## 7.2 Identifikation der Materialparameter und der Geometrie aus dem Deformationsverhalten der Struktur

### 7.2.1 Problemstellung

Das Deformationsverhalten einer Struktur ist von den gewählten Materialparametern des betrachteten Materialgesetzes und von der Geometrie abhängig. Die Lösung der Randwertaufgabe, d.h. die Bestimmung des Verschiebungszustandes, kann nach Diskretisierung der Struktur z.B. mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode berechnet werden.

Eine wichtige Problemstellung ist mit der Umkehrung der üblichen Aufgabenstellung der Strukturanalyse gegeben. Hierbei ist das Deformationsverhalten aus Versuchen bzw. aus den Zielvorstellungen des Ingenieurs im Konstruktionsprozeß bekannt und es sind die Materialparameter bzw. die geometrische Form der Struktur gesucht, die ein solches gewünschtes Deformationsverhalten erzeugen. Man spricht in diesem Fall vom *inversen Problem*, das insbesondere aus mathematischer Sicht bezüglich der Existenz und Regularität von Lösungen nicht trivial zu lösen ist. Auf diese mathematischen Aspekte soll hier nicht eingegangen werden.

Ein algorithmisches Lösungskonzept zur Behandlung inverser Probleme, d.h. zur Bestimmung der unbekannt Materialparameter und der unbekannt geometrischen Form, soll im weiteren erläutert werden. Hierzu sind in Abbildung 7.16 die Verschiebung eines signifikanten Punktes der Struktur über der Zeit  $t$  aufgetragen. Bei quasi-statischen Prozessen wird durch den Parameter  $t$  der inkrementelle Belastungsvorgang beschrieben.

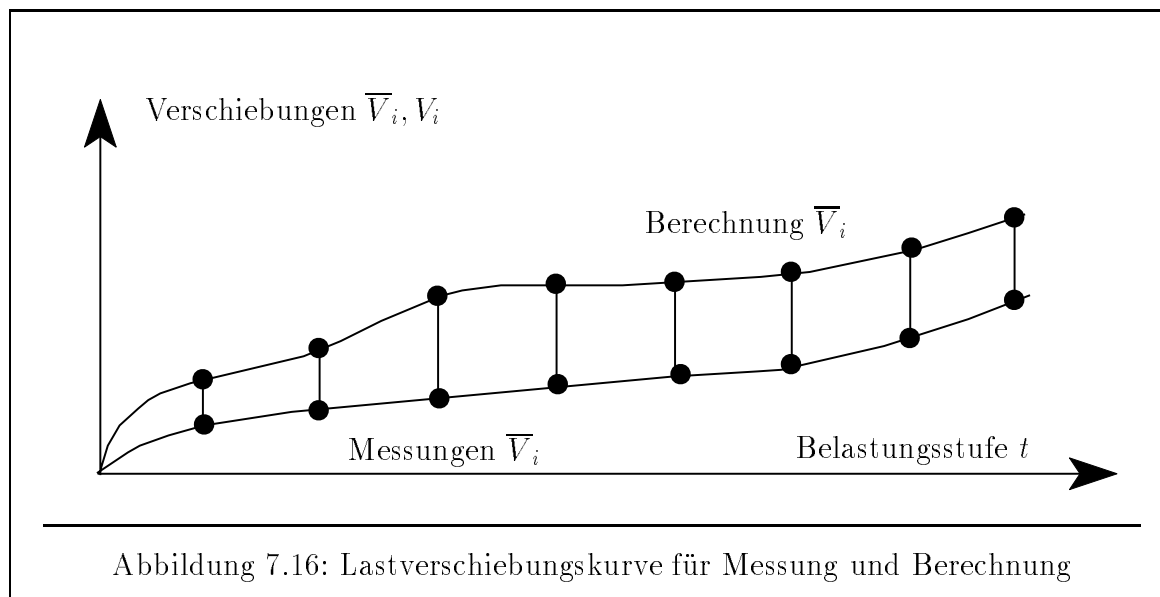


Abbildung 7.16: Lastverschiebungskurve für Messung und Berechnung

Die Kurve  $\bar{V}$  mit den diskreten Verschiebungen  $\bar{V}_i$  zu den Zeiten (bzw. Lastinkrementen)  $t_i$  stellt den vorgegebenen (Messung oder Zielvorstellung des Ingenieurs) Verschiebungszustand dar, während dagegen die Kurve  $V$  mit den diskreten Werten  $V_i$  die numerisch mit Hilfe der Finite Elemente Methode erzielten Ergebnisse für einen Schätzwert der Materialparameter bzw. der Geometrie angibt.

Das Ziel eines algorithmischen Optimierungsprozesses ist es, die Unterschiede zwischen den vorgegebenen Werten der Messung  $\bar{V}_i$  und den Ergebnissen der numerischen Berechnung  $V_i$  durch systematische Veränderung der Materialparameter bzw. der Geometrie zu verringern. Dies führt dazu, daß das Fehlerquadrat zwischen  $\bar{V}_i$  und  $V_i$  als Zielfunktion gewählt wird, d.h.

$$f = \sum_{i=1}^{nlast} (V_i - \bar{V}_i)^2 \rightarrow \min. \quad (7.6)$$

Dabei bezeichnet  $nlast$  die Anzahl der betrachteten Werte bei unterschiedlichen Meßpunkten und unterschiedlichen Laststufen.

Wie bereits erwähnt, ist die Behandlung inverser Probleme sowohl aus theoretischer als auch aus algorithmischer Sicht keineswegs trivial zu behandeln, so daß an dieser Stelle eine sinnvolle Einschränkung der Problematik vorgenommen wird. Um die Anwendungsmöglichkeiten und die Leistungsfähigkeit des entwickelten Programmsystems darzustellen, ist es erlaubt und sinnvoll, den mit der Finite Elemente Methode verbundenen Diskretisierungsfehler aus der Betrachtung auszuschließen. Zu diesem Zweck wird der vorgegebene Verschiebungszustand  $\bar{V}_i$  ebenfalls mit der Finite-Elemente-Methode unter Verwendung der gleichen Diskretisierungsstufe wie bei der späteren Berechnung der Verschiebungen  $V_i$  erzeugt. Damit reduziert sich in diesem Fall die Problemstellung der Materialparameter- und Geometrieidentifikation auf ein Wiedererkennen von Materialparametern und Geometrie nach einer Störung. In diesem Fall ist somit auch die Lösbarkeit des inversen Problems gesichert.

Die effiziente algorithmische Behandlung dieser Aufgabe ist notwendige Voraussetzung für die weitere Anwendung auf praxisrelevante Beispiele.

## 7.2.2 Wiedererkennung der Materialparameter

Als erstes Beispiel wird die Scheibe mit Loch in ihrem Ausgangsdesign gemäß Abbildung 7.1 und der Diskretisierung nach Abbildung 7.9 betrachtet, die unter der angegebenen Streckenlast bis auf die dreifache Ausgangslänge gedehnt wird.

Die Struktur wird im ebenen Spannungszustand als inkompressibles Material mit Hilfe der Verschiebungsmethode, siehe die Abschnitte 2.5, 2.6, 4.1, in einer Darstellung bezüglich der Größen der Momentankonfiguration gerechnet. Die Berechnung ist in diesem Fall mit der reinen Verschiebungsmethode sinnvoll möglich, da die Inkompressibilitätsbedingung zwängungsfrei erfüllt werden kann.

Für das betrachtete Ogden Materialgesetz nach Gleichung (2.75) seien die Materialparameter (Materialdatensatz A)

$\alpha_1 = 1,3000$	$\alpha_2 = -2.0000$	$\alpha_3 = 5,0000$
$\mu_1 = 0,6300$	$\mu_2 = -0.0100$	$\mu_3 = 0,0012$

vorgegeben. Damit können die Verschiebungen  $\bar{V}_i$  für 5 signifikanter Strukturpunkte (horizontale Verschiebungen der Punkte 1, 2, 5 sowie vertikale Verschiebungen der Punkte 3, 4 und 5 (siehe Abbildung 7.3)) über 10 Laststufen (mit je 20% Dehnung) bis zur Gesamtdehnung von 200 % protokolliert werden. Damit sind insgesamt  $n_{last} = 60$  Informationen über den Deformationszustand vorhanden.

Die Wiedererkennung der ursprünglichen Materialparameter (Materialparameterdatensatz A) aus dem Deformationsverhalten wird durch die Minimierung der Zielfunktion nach Gleichung (7.6), ausgehend von einem um 20% gestörten Datensatz B

$\alpha_1 = 1,5000$	$\alpha_2 = -1.6000$	$\alpha_3 = 4,0000$
$\mu_1 = 0,5540$	$\mu_2 = -0.0125$	$\mu_3 = 0,0015$ ,

untersucht. Da die Werte  $\bar{V}_i$  mit dem gleichen FE-Modell in einer Strukturanalyse ermittelt wurden, ist das Minimum  $f = 0$  bekannt und kann mit dem Optimierungsmodell erreicht werden.

Zunächst wurde die Wiederermittlung jeweils zweier in Beziehung stehender Materialparameter, d.h. von  $\alpha_p$  und  $\mu_p$ , durchgeführt. Dabei waren die restlichen Materialparameter mit dem exakten Wert aus dem Materialparameterdatensatz A angegeben und nicht als Designvariablen definiert worden. Die Leistungsdaten des Algorithmus sind in den nachfolgenden Abbildungen dargestellt.

1. Designvariable  $\alpha_1, \mu_1$ : siehe Abbildung 7.17
2. Designvariable  $\alpha_2, \mu_2$ : siehe Abbildung 7.18
3. Designvariable  $\alpha_3, \mu_3$ : siehe Abbildung 7.19

Die ersten beiden Problemstellungen wurden bei Skalierung der Zielfunktion, Nebenbedingungen und Designvariablen durch den Startwert bearbeitet. Diese Problemformulierung war in der dritten Aufgabenstellung nicht erfolgreich, sondern eine unskalierte Problembehandlung lieferte die besten Resultate. In allen drei Problemstellungen wurden die Materialparameter mit einer hohen Genauigkeit wiedererkannt.



**Problem 1:** Designvariable  $\alpha_1, \mu_1$ , Problemformulierung mit Skalierung

Wert der Zielfunktion im Startpunkt	$f_0$	60.0
Wert der Zielfunktion im Lösungspunkt	$f^*$	$1.7 \cdot 10^{-6}$
Anzahl der Iterationsschritte	ITER	14
Anzahl der Funktionsauswertungen	NFUNC	22
Anzahl der Gradientenberechnungen	NGRAD	14
Norm der Lagrangefunktion	GLNOR	$1.1 \cdot 10^{-1}$
Verletzung der Nebenbedingungen	SRES	0.0

Abbildung 7.17: Problem 1: Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus

**Problem 2:** Designvariable  $\alpha_2, \mu_2$ , Problemformulierung mit Skalierung

Wert der Zielfunktion im Startpunkt	$f_0$	60.0
Wert der Zielfunktion im Lösungspunkt	$f^*$	$1.1 \cdot 10^{-5}$
Anzahl der Iterationsschritte	ITER	21
Anzahl der Funktionsauswertungen	NFUNC	21
Anzahl der Gradientenberechnungen	NGRAD	21
Norm der Lagrangefunktion	GLNOR	$5.5 \cdot 10^{-2}$
Verletzung der Nebenbedingungen	SRES	0.0

Abbildung 7.18: Problem 2: Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus

**Problem 3:** Designvariable  $\alpha_3, \mu_3$ , Problemformulierung ohne Skalierung

Wert der Zielfunktion im Startpunkt	$f_0$	$1.4 \cdot 10^{-3}$
Wert der Zielfunktion im Lösungspunkt	$f^*$	$1.3 \cdot 10^{-8}$
Anzahl der Iterationsschritte	ITER	11
Anzahl der Funktionsauswertungen	NFUNC	12
Anzahl der Gradientenberechnungen	NGRAD	11
Norm der Lagrangefunktion	GLNOR	$5.0 \cdot 10^{-3}$
Verletzung der Nebenbedingungen	SRES	0.0

Abbildung 7.19: Problem 3: Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus

Für die gleichzeitige Definition aller sechs Materialparameter ergab sich das Iterationsergebnis nach Abbildung 7.20.

Wert der Zielfunktion im Startpunkt	$f_0$	30.6
Wert der Zielfunktion im Lösungspunkt	$f^*$	$3.3 \cdot 10^{-4}$
Anzahl der Iterationsschritte	ITER	32
Anzahl der Funktionsauswertungen	NFUNC	65
Anzahl der Gradientenberechnungen	NGRAD	32
Norm der Lagrangefunktion	GLNOR	$2.3 \cdot 10^{+4}$
Verletzung der Nebenbedingungen	SRES	$6.3 \cdot 10^{-5}$

Abbildung 7.20: Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus für die Definition aller Materialparameter als Designvariable

In diesem Fall wurde ebenfalls nicht skaliert. Weiterhin wurden für den Strukturpunkt 4, der in der Berechnung zur Ermittlung der Sollwerte die Verschiebung gesteuert hat, Nebenbedingungen eingeführt, d.h. die vertikalen Verschiebungen dürfen nicht wesentlich (Schranke  $10^{-5}$ ) von den vorgegebenen Verschiebungen abweichen. Die Einführung dieser Nebenbedingungen wirkte sich positiv auf den Iterationsverlauf aus. Der große Wert für die Norm der Lagrangefunktion ist durch die großen Werte der Penaltyparameter ( $10^7$ ) für die nicht eingehaltenen Nebenbedingungen zu erklären, der sich dadurch ergibt, daß der gesamte Iterationsverlauf im unzulässigen Bereich verlief.

Nach Beendigung der Iteration ergeben sich die Materialparameter zu

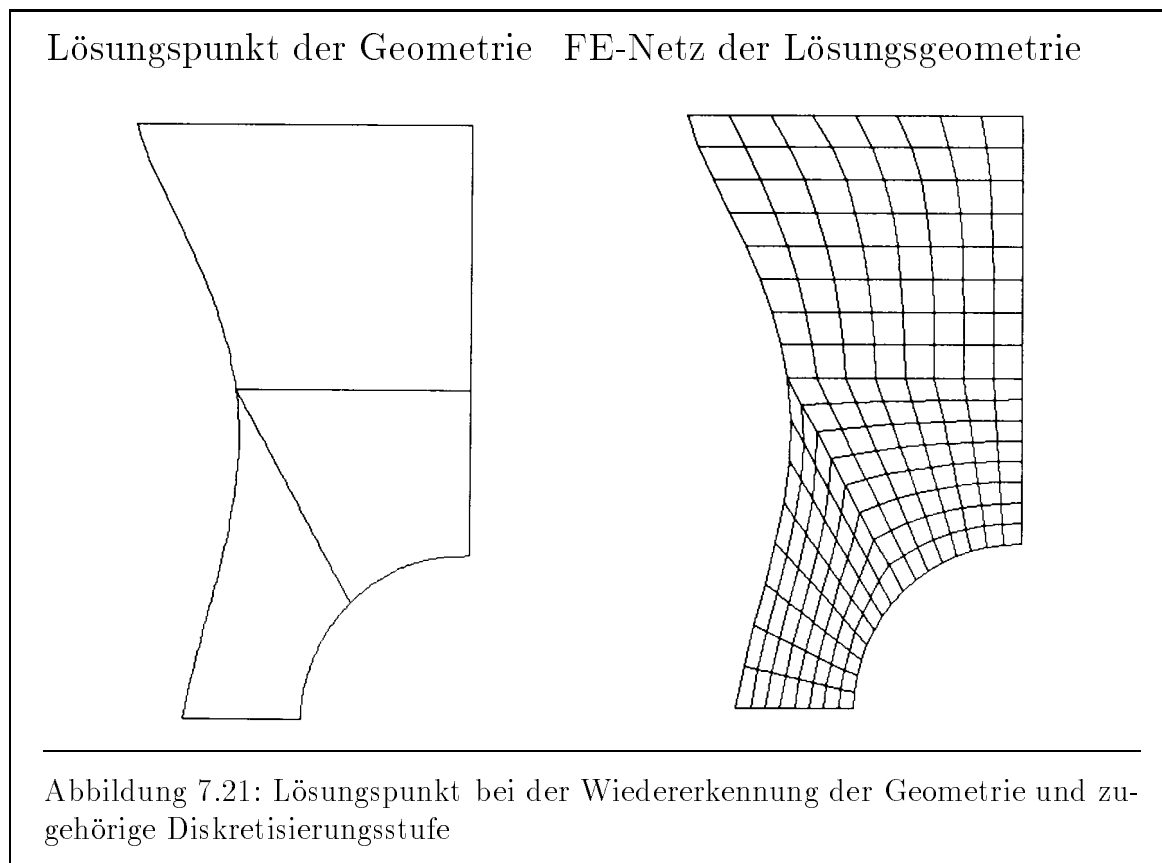
$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 1,3020 & \alpha_2 = -2.00676 & \alpha_3 = 5,06070 \\ \mu_1 = 0,6323 & \mu_2 = -0.0075 & \mu_3 = 0,00108 \end{array}$$

und sind damit (bis auf  $\mu_2$ ) hinreichend genau wiedergefunden. Für diese Materialparameter ergab sich eine Abweichung von 50 %, die mit der geringen Änderung der Deformation bei Änderung dieser Variablen zu erklären ist. An dieser Stelle tritt der große Unterschied in den nichtskalierten Designvariablen nachteilig in Erscheinung. Zur Behebung dieser Problematik ist eine problemgerechtere Definition des Optimierungsproblems anzugeben, d.h. insbesondere die Vorgabe der Zielwerte der Verformung mit einer höheren Genauigkeit, Vorgabe der Verformungen weiterer Strukturpunkte und eine effektivere Formulierung für den mathematischen Optimierungsalgorithmus. Die Bedeutung und richtige Angabe der Sensitivitäten der Deformation eines hyperelastischen Materialgesetzes unter großen Deformationen bei Veränderung der Materialparameter bleibt von der Problematik hiervon jedoch unberührt.

Damit ist der erfolgreiche Einsatz des Optimierungsalgorithmus und insbesondere die Leistungsfähigkeit der hierfür notwendigen Sensitivitätsanalyse gezeigt worden.

### 7.2.3 Wiedererkennung der Geometrie

An diesem Beispiel soll die Anwendung des Algorithmus auf die Wiedererkennung der Geometrie aus dem Deformationsverhalten der Struktur dargestellt werden. Zu diesem Zweck wurde für eine beliebig gewählte geometrische Form der Scheibe mit Loch (im weiteren mit „Lösungsgeometrie“ benannt) mit der angegebenen Diskretisierungsstufe (siehe Abbildung 7.21) das Deformationsverhalten für mehrere Strukturpunkte (horizontale Verschiebungen der Punkte 1, 2, 5 und vertikale Verschiebungen der Punkte 3, 4, 5 (siehe Abbildung 7.3) und 4 Laststufen (50%, 100%, 150% und 200% Dehnung) protokolliert. Damit stehen insgesamt  $n_{last} = 24$  Informationen aus dem Deformationszustand der Struktur zur Verfügung.

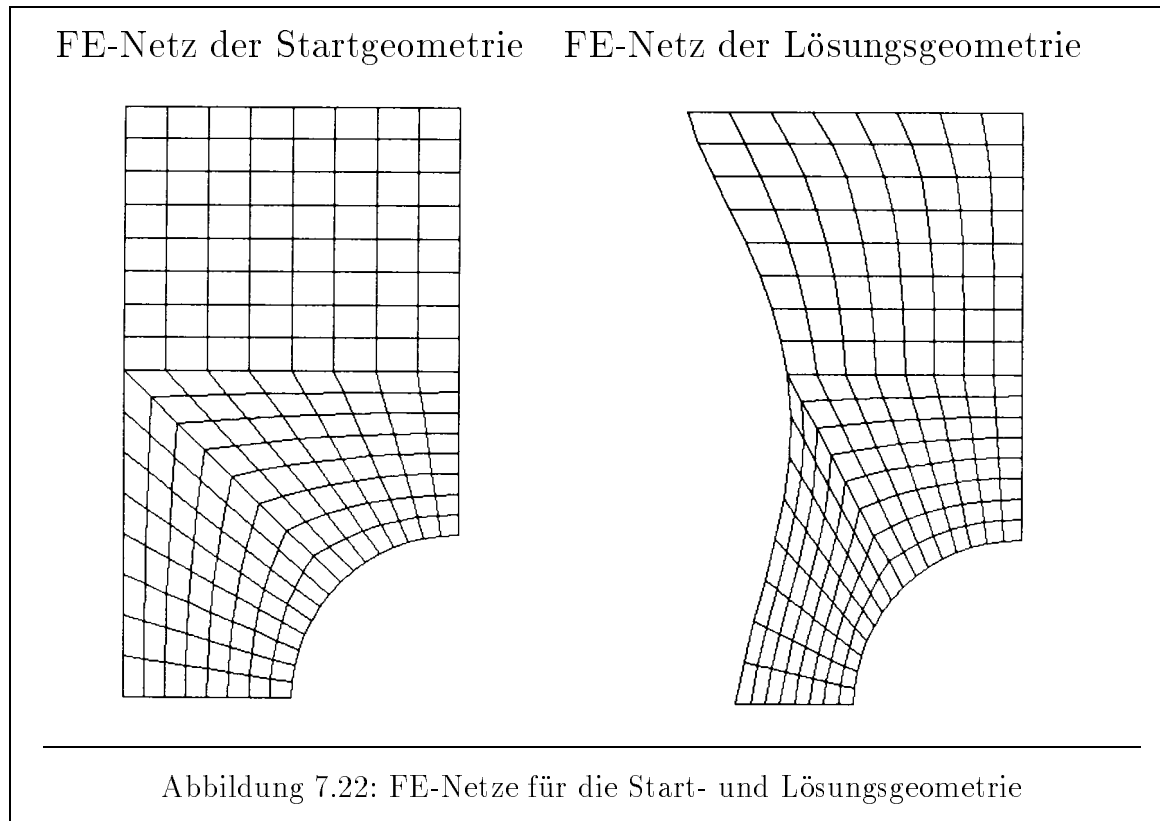


Die Optimierungsaufgabe besteht damit in diesem Fall in der Wiedererkennung der geometrischen Form durch die Minimierung der Zielfunktion nach (7.6), d.h. von

$$f = \sum_{i=1}^{n_{last}} (V_i - \bar{V}_i)^2 \rightarrow \min.$$

Als Designvariablen sind die horizontalen Koordinaten der Kontrollpunkte mit den Nummern 1, 15, 16, 17, 18, 8, 23, 24 nach Abbildung 7.7 gewählt worden.

Als Startwert für die Optimierungsberechnung (im weiteren mit „Startgeometrie“ benannt) wurde die Geometrie nach Abbildung 7.1 gewählt. Für die numerischen Berechnungen wurde sowohl für die Startgeometrie als auch für die Lösungsgeometrie die identische Verfeinerungsstufe, d.h. eine dreimalige gleichmäßige Verfeinerung ausgewählt (siehe Abbildung 7.22).



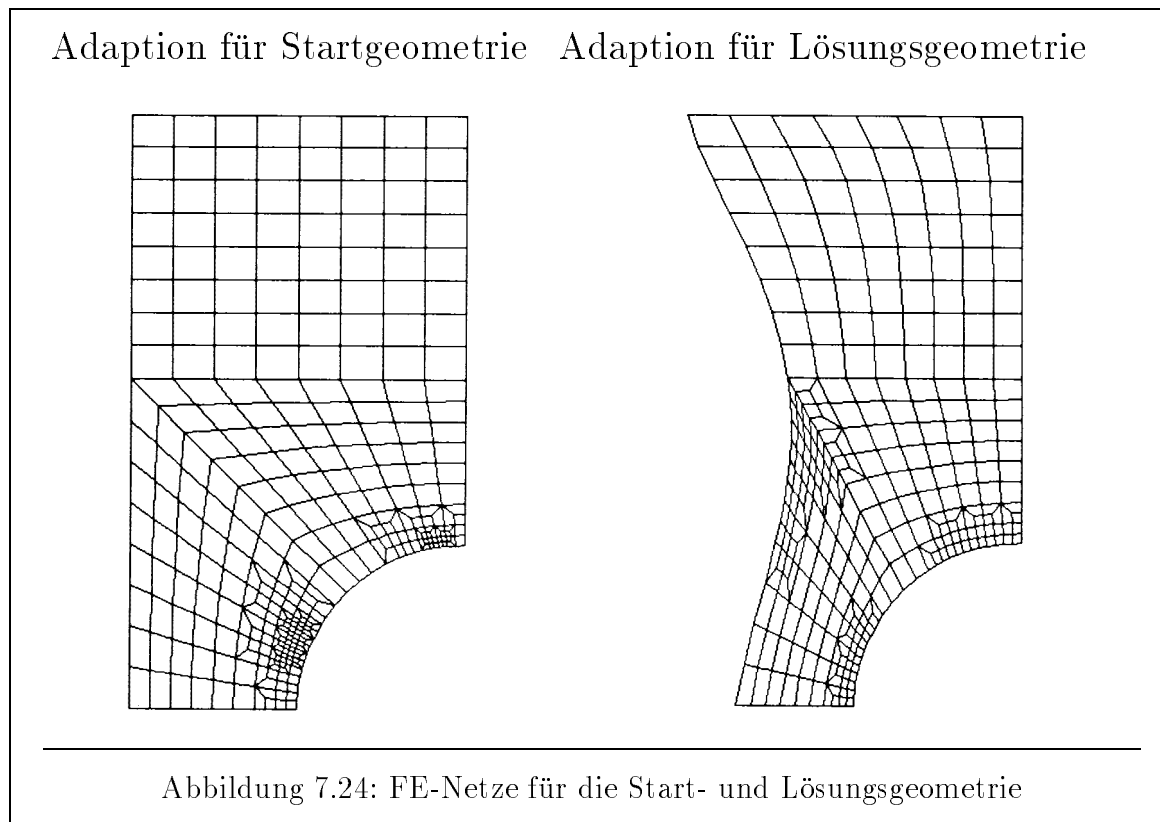
Die wesentlichen Leistungsdaten des Iterationsalgorithmus zur Identifikation sind in der folgenden Tabelle angegeben.

Wert der Zielfunktion im Startpunkt	$f_0$	24.0
Wert der Zielfunktion im Lösungspunkt	$f^*$	$8.0 \cdot 10^{-7}$
Anzahl der Iterationsschritte	ITER	21
Anzahl der Funktionsauswertungen	NFUNC	21
Anzahl der Gradientenberechnungen	NGRAD	21
Norm der Lagrangefunktion	GLNOR	$1.9 \cdot 10^{-4}$
Verletzung der Nebenbedingungen	SRES	$9.0 \cdot 10^{-16}$

---

Abbildung 7.23: Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus

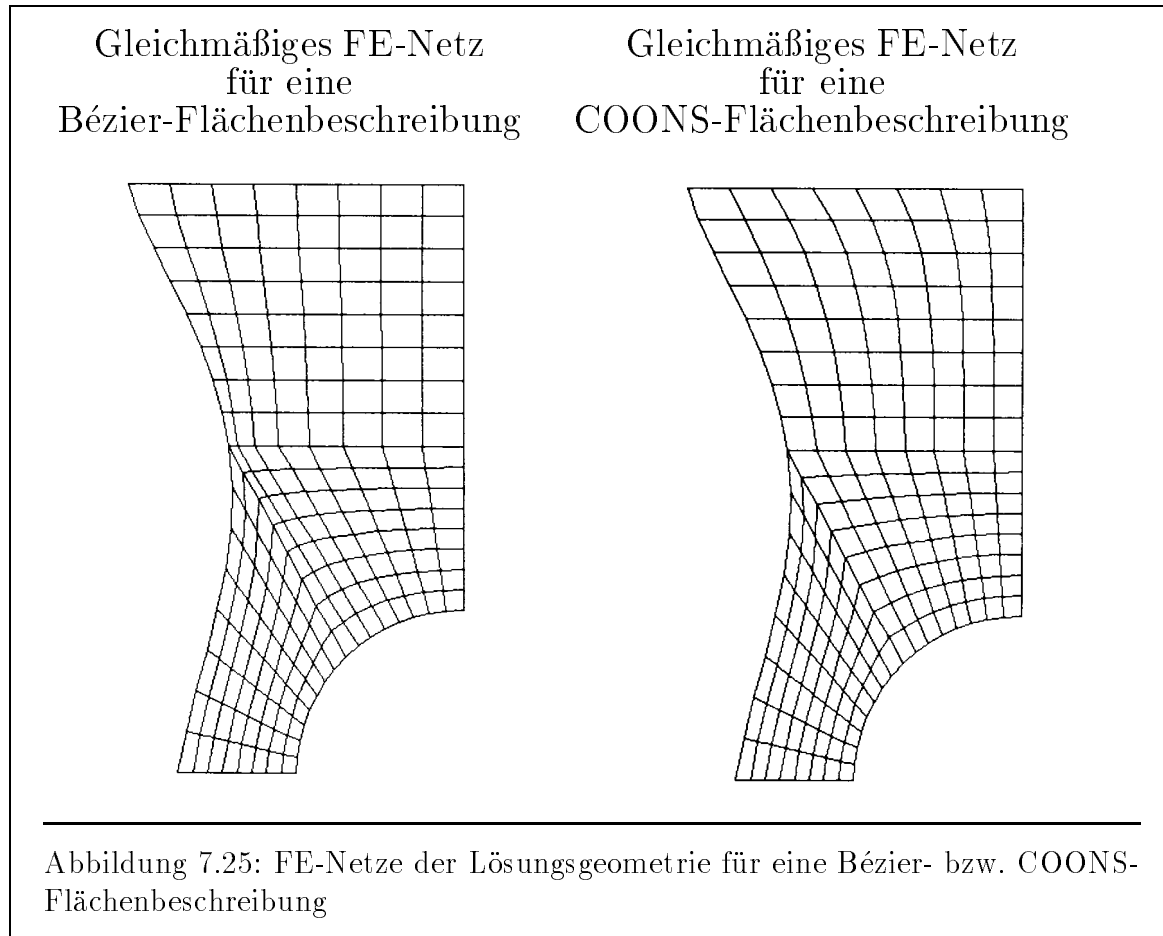
Auf zwei wichtige Aspekte für den Einsatz adaptiver FE-Verfahren für die Formoptimierung soll an dieser Stelle eingegangen werden. Zunächst sei die Veränderung des Tragverhaltens einer Struktur bei Optimierung erwähnt, die sich beim Einsatz adaptiver FE-Verfahren durch die Ausbildung weiterer oder gänzlich anderer Adaptionszonen bemerkbar macht. Zur Verdeutlichung wurde auf die Ausgangsgeometrie und die Lösungsgeometrie die gleichen Adaptionskriterien angewandt, die unterschiedliche adaptive Netze liefert. Der effektive Einsatz der Adaptionsverfahren innerhalb der Formoptimierung ist von großer Bedeutung für den algorithmischen Verlauf.



Weiterhin ist die sinnvolle Definition der Netzveränderung bei Geometrieänderung zu erwähnen, die in der vorgenommenen Implementation von der Wahl der CAGD-Flächenbeschreibung abhängt.

Bei der Verwendung einer Bézier-Flächen-Beschreibung, wobei die inneren Kontrollpunkte der Fläche 3 bei Veränderung der äußeren Linie konstant bleiben, ergibt sich das Netz nach Abbildung 7.25. Man erkennt, daß sich im Extremfall großer Lageänderungen der Kontrollpunkte der Randlinie sehr stark verzerrte Elemente ausbilden. Die in der optimalen Form unbefriedigende Form der Elemente im Grenzbereich der Geometrieflächen wird durch die Wahl einer COONS-Beschreibung deutlich verbessert.

Sind die Geometrieänderungen jedoch sehr groß, so sind die in Abschnitt 6.4 genannten Maßnahmen (Neuvernetzung, Anwendung geometrischer Adaptionskriterien, Netzvergrößerungsstrategien) anzuwenden.



Der Spannungs- und Deformationszustand der Lösungsgeometrie nach Abbildung 7.21 wird an dieser Stelle nicht dokumentiert, da er sich wegen der ähnlichen geometrischen Form zur Struktur nach Abbildung 7.21 nicht wesentlich von den in den Abbildungen 7.13 und 7.14 angegebenen Deformations- und Spannungszuständen unterscheidet.

## 7.3 Formoptimierung einer Normprobe

### 7.3.1 Problemstellung

In diesem Abschnitt wird die S2-Normprobe nach DIN 53504 betrachtet, siehe Abbildung 7.26. Der Übergangsbereich zwischen dem Kopf der Probe mit der Breite  $b_k$  und dem Steg mit der Breite  $b$  wird durch die Anordnung von zwei Kreisbögen mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$  gebildet. Damit ergibt sich ein unstetiger Verlauf der Randlinienkrümmung.

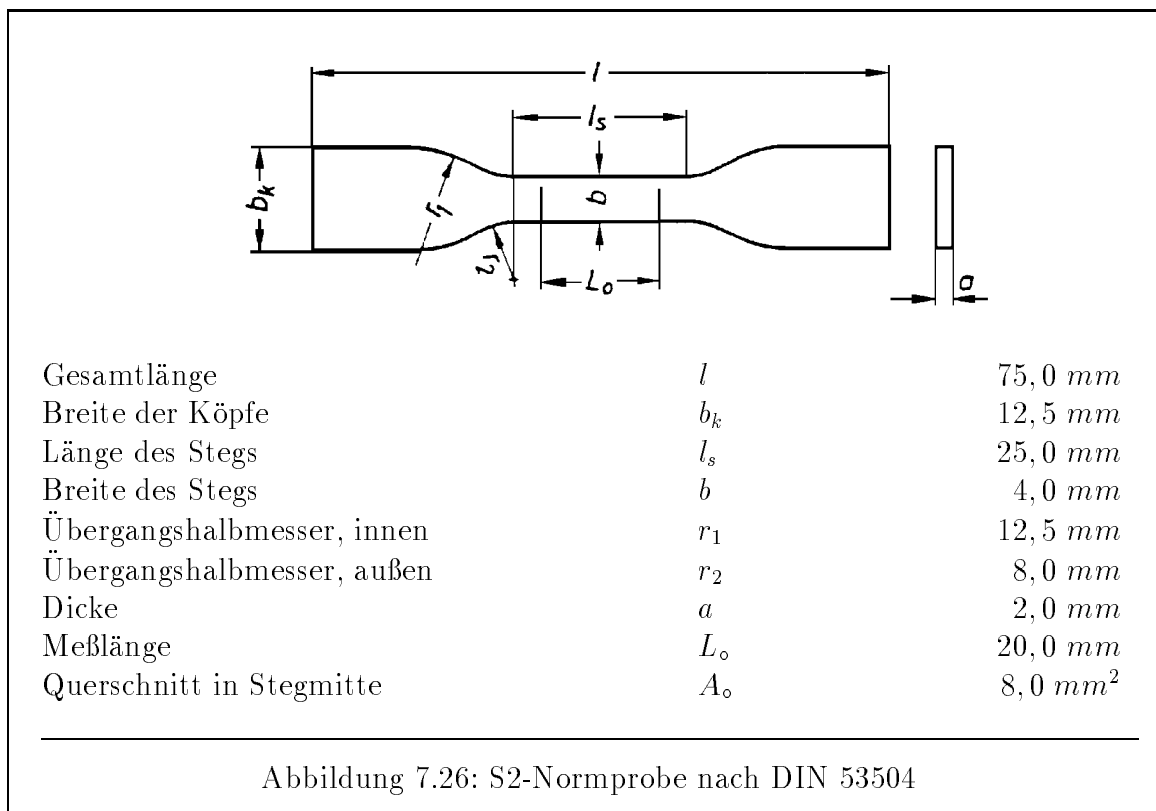


Abbildung 7.26: S2-Normprobe nach DIN 53504

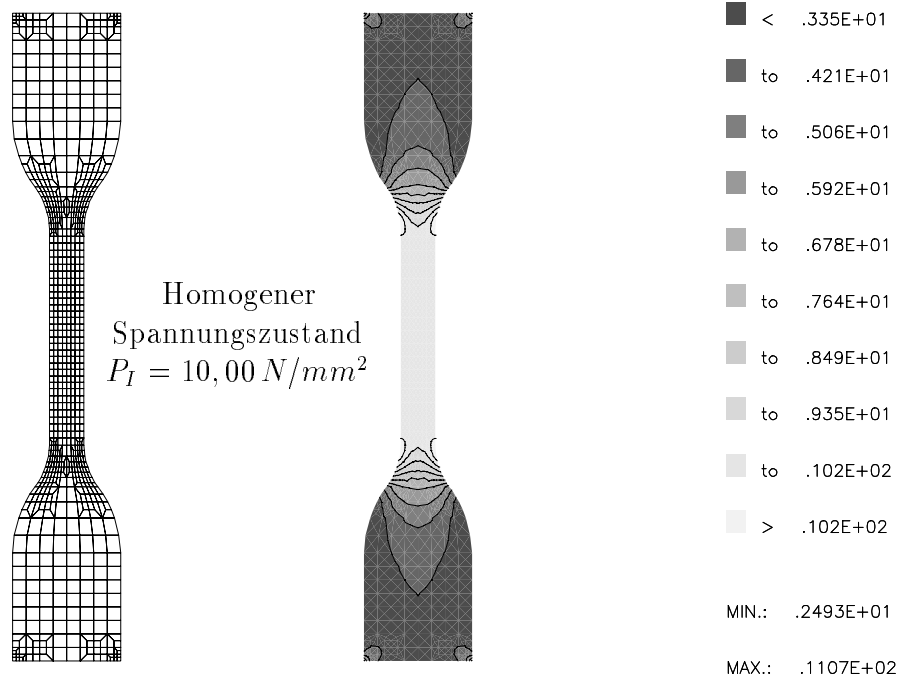
Die Berechnung der Normprobe zeigt bereits für kleine Verzerrungen unabhängig vom gewählten Materialgesetz Spannungskonzentrationen außerhalb des Bereichs homogener Deformationen. Aus diesem Grund wurde zunächst die Normprobe für einen Stahlquerschnitt St 37 mit dem Elastizitätsmodul von  $E = 210000 \frac{N}{mm^2}$  und der Querkontraktionszahl von  $\nu = 0,3$  untersucht, dessen Materialverhalten durch das kompressible St. Venant-Kirchhoff-Materialgesetz (siehe auch Ciarlet [28]) beschrieben wurde<sup>3</sup>

$$W = \hat{W}(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2} (\text{tr } \mathbf{E})^2 + \mu \text{tr } \mathbf{E}^2.$$

Für die gewählten kleinen Verzerrungen ergibt sich im homogenen Bereich die Hauptnormalspannung  $P_I = 10 \frac{N}{mm^2}$  des 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors  $\mathbf{P}$ , den die Spannungskonzentration um 10% überschreitet (siehe Abbildung 7.27). Damit ist die Gefahr des unerwünschten Reißens der Probe außerhalb des homogenen Dehnungsbereiches erhöht gegeben.

<sup>3</sup>Die Wahl dieses geometrisch nichtlinearen Materialgesetzes erfolgte zur Verdeutlichung der Leistungsfähigkeit der realisierten analytischen Sensitivitätsanalyse.

### FE-Netz und Spannungszustand der S2-Normprobe



### Darstellung der Spannungskonzentration

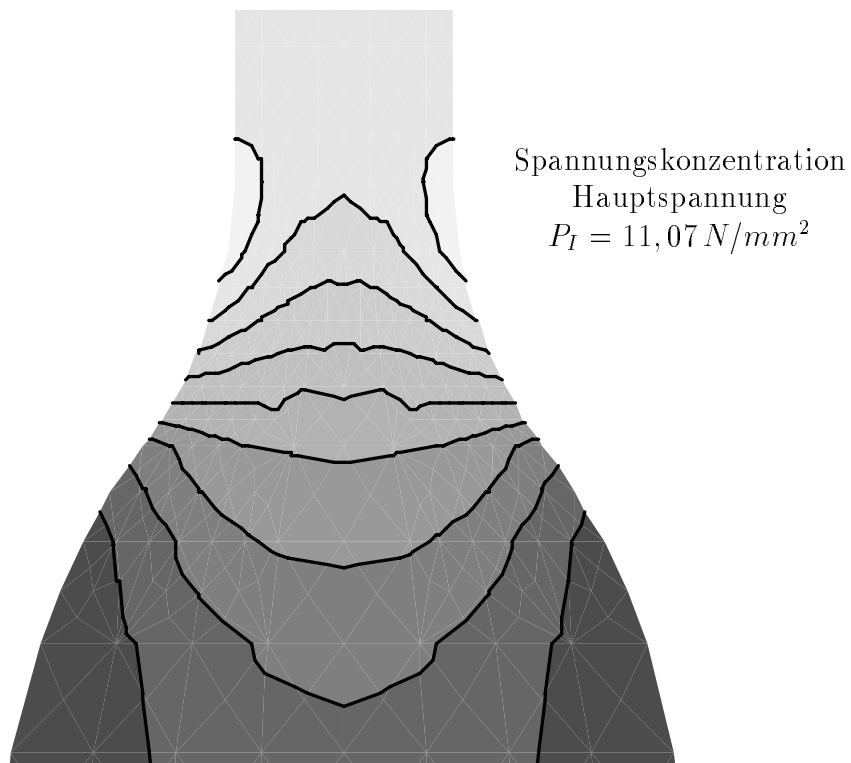


Abbildung 7.27: FE-Netz der Normprobe und Angabe des Spannungszustandes



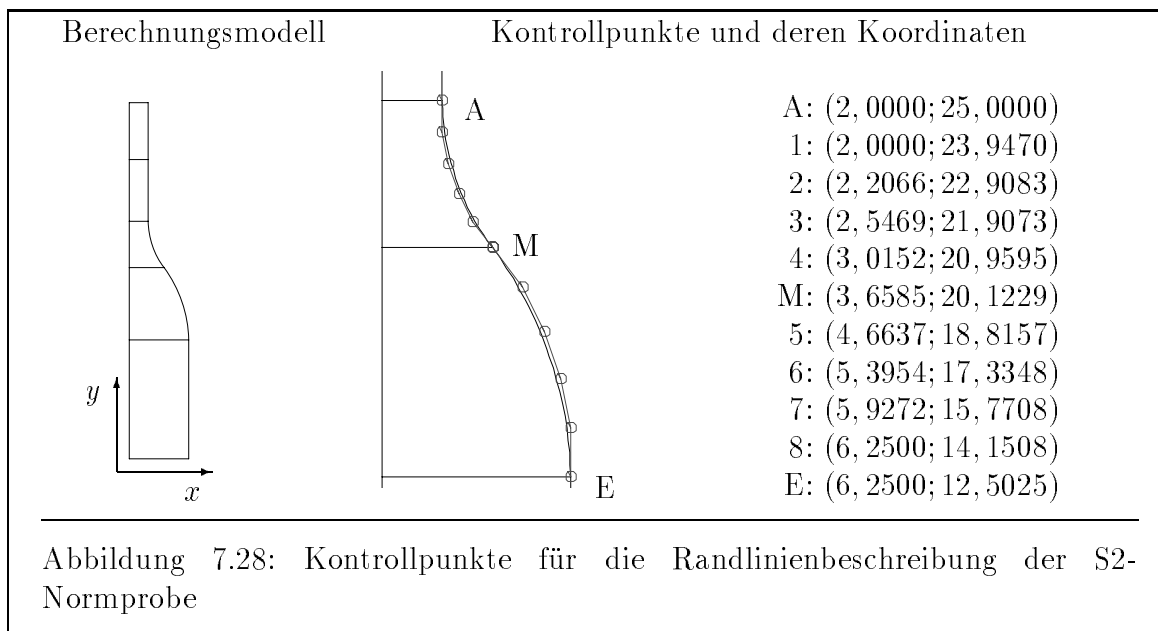
### 7.3.2 Die Definition des Optimierungsproblems

Das Ziel der folgenden Untersuchung ist die Reduktion der Spannungsspitzen außerhalb des homogenen Verzerrungsbereiches durch die Variation der Form der Randlinie. Erwünscht ist dabei die Reduktion der maximalen Hauptnormalspannung auf einen Wert unterhalb der maximalen Hauptnormalspannung im homogenen Bereich.

Eine direkte Formulierung, d.h. die Wahl der maximalen Hauptspannung als die zu minimierende Zielfunktion bei Veränderung des Randlinienverlaufes, führt zu einer unerwünschten Aufweitung der Probe im Übergangsbereich zwischen Steg und Kopf, die algorithmisch in einem lokalen Minimum mit einer nicht erwünschten Geometrie der Normprobe endet. Die Definition der Krümmung der Randlinie als Zielfunktion unter Beachtung der Beschränkungen in den Spannungen wurde bisher nicht betrachtet.

Als Zugang zur Lösung wurde in diesem Beispiel die glättenden Eigenschaft der Gewichtsm minimierung benutzt. Hiermit ist die Tatsache gemeint, das sich bei Gewichtsm minimierung im Übergangsbereich der gerade Randlinienverlauf des Steges einstellen wird. Als Nebenbedingungen werden die Hauptnormalspannungen in den Elementen des Übergangsbereiches betrachtet, die unterhalb der Spannung des homogenen Bereiches liegen sollen. Dabei werden die Gradienten durch die besonderen Eigenschaften des SQP-Verfahrens nur für aktive Nebenbedingungen berechnet, was den Berechnungsaufwand beträchtlich mindert. Weiterhin ist für die Beurteilung des algorithmischen Verlaufes zu beachten, das der Startpunkt der Iteration im unzulässigen Bereich liegt.

Die Geometrie der Normprobe, d.h. der Verlauf der äußeren Form der Probe in der dargestellten Form mit zwei Kreisbögen, wird approximativ durch die Angabe von zwei Bézierkurven mit jeweils vier inneren Kontrollpunkten modelliert (Linie 1 mit den Kontrollpunkte  $A, 1, 2, 3, 4, M$  und Linie 2 mit den Kontrollpunkten  $M, 5, 6, 7, 8, E$ ). Die Koordinaten der Kontrollpunkte der Bézierkurven stellen dabei die Designvariablen im Optimierungsproblem dar (siehe Abbildung 7.28). Damit kann sich die Randlinie als Freiformlinie entsprechend der Notwendigkeit der Spannungsreduktion einstellen.



### 7.3.3 Die Ermittlung einer optimaler Form für die Normprobe

Für diese Problemlösung sind die  $x$ -Koordinaten von insgesamt 9 Kontrollpunkten bei der Randkurvenbeschreibungen, d.h. die  $x$ -Koordinaten der Kontrollpunkte 1, 2, 3, 4,  $M$ , 5, 6, 7, 8, als Designvariablen definiert worden. Damit sind innerhalb des gewählten Modells die maximalen Beschreibungsmöglichkeiten gegeben. Bei der Ermittlung der Lösungsgeometrie zeigte der Optimierungsalgorithmus das in Abbildung 7.29 angegebene Verhalten.

Wert der Zielfunktion im Startpunkt	$f_0$	2.00
Wert der Zielfunktion im Lösungspunkt	$f^*$	1.36
Anzahl der Iterationsschritte	ITER	348
Anzahl der Funktionsauswertungen	NFUNC	358
Anzahl der Gradientenberechnungen	NGRAD	348
Norm der Lagrangefunktion	GLNOR	$1.1 \cdot 10^{-3}$
Verletzung der Nebenbedingungen	SRES	$2.6 \cdot 10^{-2}$

Abbildung 7.29: Leistungsdaten des Optimierungsalgorithmus

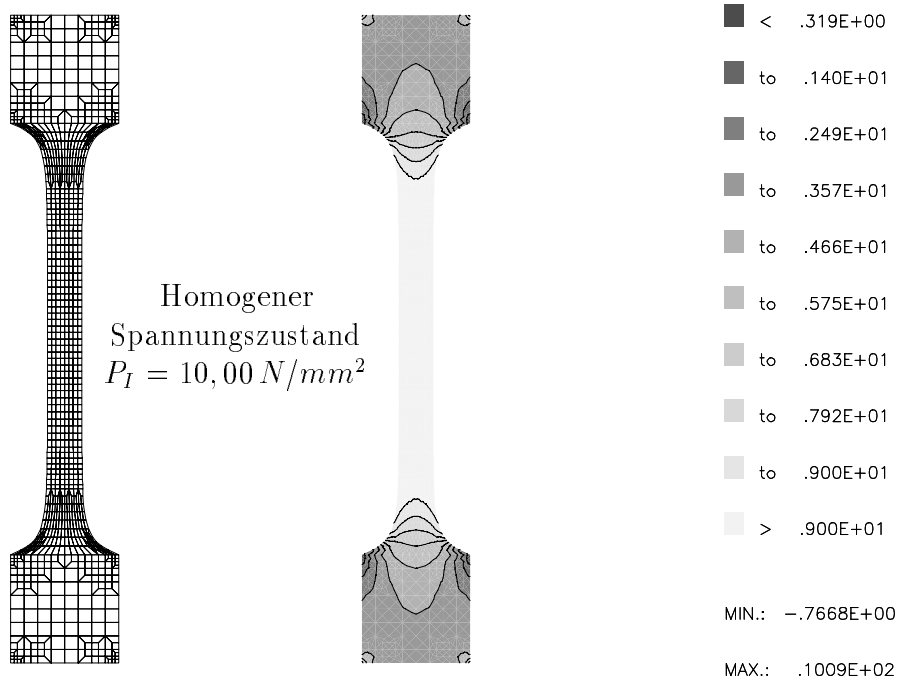
Für die Spannungskonzentrationen wurde eine Beschränkung auf eine 0,5%-tige Überschreitung des Nominalwertes gewählt, die mit einer Genauigkeit (Abbruchgenauigkeit des SQP-Verfahrens) von  $ACC = 10^{-4}$  eingehalten werden sollte. Nach Beendigung des Iterationsprozesses ergab sich hieraus eine maximale Hauptnormalspannung von  $10,09 \frac{N}{mm^2}$  und damit eine 0,9%-tige Überschreitung des Grenzwertes (siehe Abbildung 7.30).

Die große Anzahl der Iterationsschritte erklärt sich damit, daß durch den starken Einfluß der Zielfunktion (Gewichtsminimierung) ein Verlassen des Bereiches unzulässiger Iterationspunkte der Designvariablen (Nebenbedingungen sind verletzt) nicht erfolgte. Vielmehr verlief der gesamte Iterationsprozeß im unzulässigen Bereich und endete, als die Nebenbedingungen nur noch minimal (bezogen auf die vorgegebene Abbruchgenauigkeit) verletzt waren.

Das beschriebene Iterationsverhalten verdeutlicht, daß die Wahl der Zielfunktion zwar zum gewünschten Ergebnis führt, die Problembeschreibung über die glättende Eigenschaft der Gewichtsminimierung jedoch nicht optimal ist. Andererseits zeigt der Vergleich der Anzahl der Funktionsauswertungen und der Anzahl der Gradientenberechnungen, daß die algorithmische Umsetzung richtig erfolgt ist.

Neben der formal richtigen algorithmischen Umsetzung der Optimierungsaufgabe muß somit besonderer Wert auf eine problemgerechte Modellierung des Optimierungsziels gelegt werden.

### FE-Netz und Spannungszustand der optimierten Form



### Darstellung der Spannungskonzentration

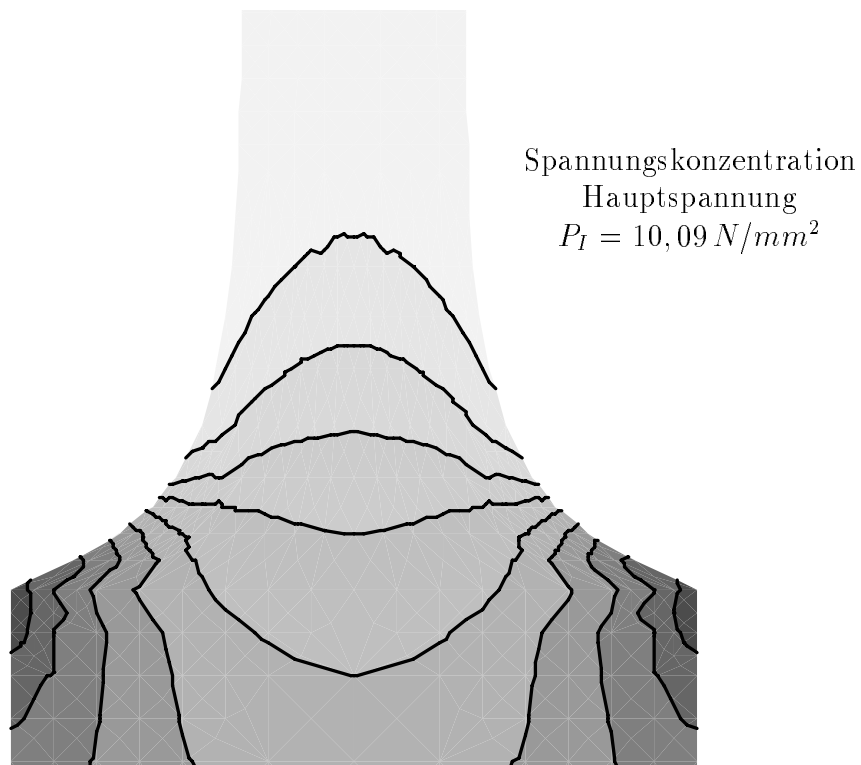


Abbildung 7.30: FE-Netz und Spannungszustand der ersten optimierten Form

### 7.3.4 Die Ermittlung einer optimaler Form für eine modifizierte Optimierungsaufgabe

In der zweiten Problemlösung wird die Normprobe für ein inkompressibles Mooney-Rivlin-Material

$$W = C_1 (\bar{I} - 3) + C_2 (\bar{II} - 3)$$

mit den Materialparametern  $C_1 = 0,1838 \frac{N}{mm^2}$ ,  $C_2 = 0,2745 \frac{N}{mm^2}$  und dem Schubmodul von  $\mu = 2(C_1 + C_2) = 0,9166 \frac{N}{mm^2}$  untersucht. Dieses Materialgesetz beschreibt einen Synthekautschuk, der in der industriellen Fertigung von Dichtungen eingesetzt wird. Die aufgebrachte Dehnung im homogenen Bereich beträgt in diesem Fall 100% (d.h.  $\lambda = 2,0$ ), so daß sich nach Auswertung des Spannungs- und Verzerrungszustandes eine maximale Hauptnormalspannung im homogenen Bereich von  $T_I = 2,2474 \frac{N}{mm^2}$  ergibt. Der Spannungsverlauf entspricht qualitativ der Darstellung nach Abbildung 7.27, so daß auf eine Dokumentation an dieser Stelle verzichtet wird. Die maximale Hauptnormalspannung der Cauchy-Spannungen außerhalb des homogenen Bereichs beträgt in diesem Fall  $2,3440 \frac{N}{mm^2}$ , d.h. es tritt eine 4 %-tige Überschreitung der Spannungen des homogenen Deformationsbereiches auf. Die Optimierungsaufgabe unterscheidet sich von der vorherigen dadurch, daß nur noch die  $x$ -Koordinaten der Kontrollpunkte 1, 2, 3, 4,  $M$  als Designvariablen definiert wurden. Dies führt zu einem optisch gefälligeren Verlauf der Randlinie, vermindert durch die geringeren Freiheitsgrade der Randlinienausbildung jedoch die Reduktionsmöglichkeiten der Spannungsspitzen.

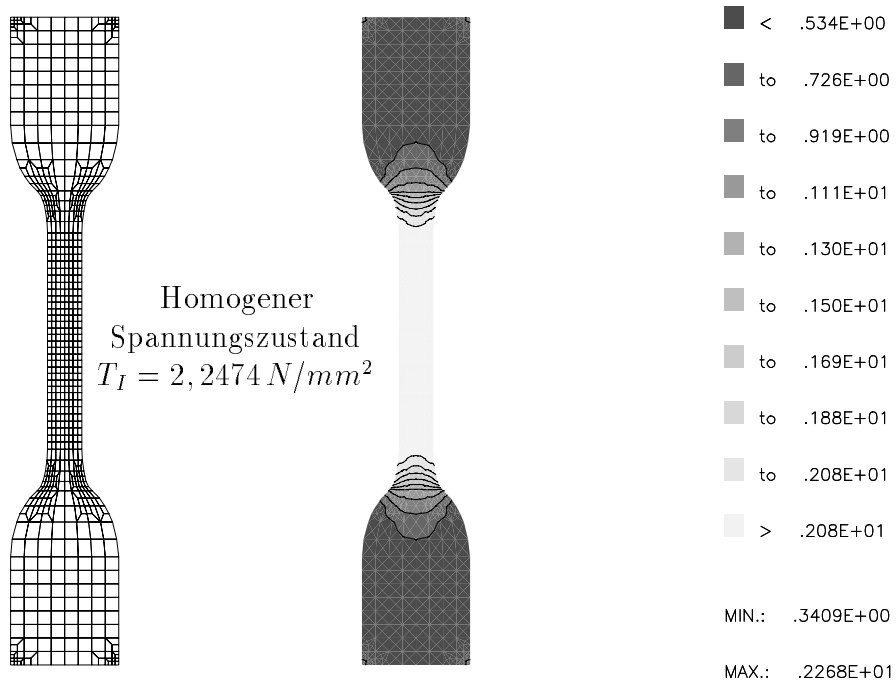
In diesem Beispiel wurden die Nebenbedingungen für die Hauptnormalspannungen des Cauchy-Spannungstensors der Momentankonfiguration derart gewählt, daß sich die Spannungskonzentrationen von einer unzulässigen 4%-igen Überschreitung der zulässigen Werte auf eine zulässige 0,1%-ige Überschreitung reduzierten (siehe Abbildung 7.32). Die Koordinaten der Kontrollpunkte im Lösungspunkt sind in Abbildung 7.31 angegeben.

	KP 1	KP 2	KP 3	KP 4	KP M	KP 5	KP 6	KP 7	KP 8
A	2,0000	2,2066	2,5469	3,0152	3,6585	4,6637	5,3954	5,9272	6,2500
B	2,0378	2,0088	2,0520	2,1020	2,1127	2,1293	2,1443	2,9340	2,0000
C	2,0427	2,0000	2,4628	2,2604	3,2029	4,6637	5,3954	5,9272	6,2500

Abbildung 7.31: Werte der  $x$ -Koordinaten der Kontrollpunkte für die S2-Normprobe (A) sowie für die erste (B) und zweite (C) optimierte Form (Angaben in  $[mm]$ )

Die Untersuchung der S2-Normprobe zeigt, daß es durch die Variation der Probengeometrie möglich ist, unerwünschte Spannungskonzentrationen abzubauen. Die Formulierung der Optimierungsaufgabe über die Gewichtsminimierung unter Beachtung zusätzlicher Nebenbedingungen, die das eigentliche Ziel der Optimierungsaufgabe darstellen, hat sich als akzeptable Möglichkeit zur Behandlung komplexer Probleme herausgestellt. Dieser Weg ist insbesondere dann vielversprechend, falls aussagekräftige Zielfunktionen nicht direkt anzugeben sind.

### FE-Netz und Spannungszustand der optimierten Form



### Darstellung der Spannungskonzentration

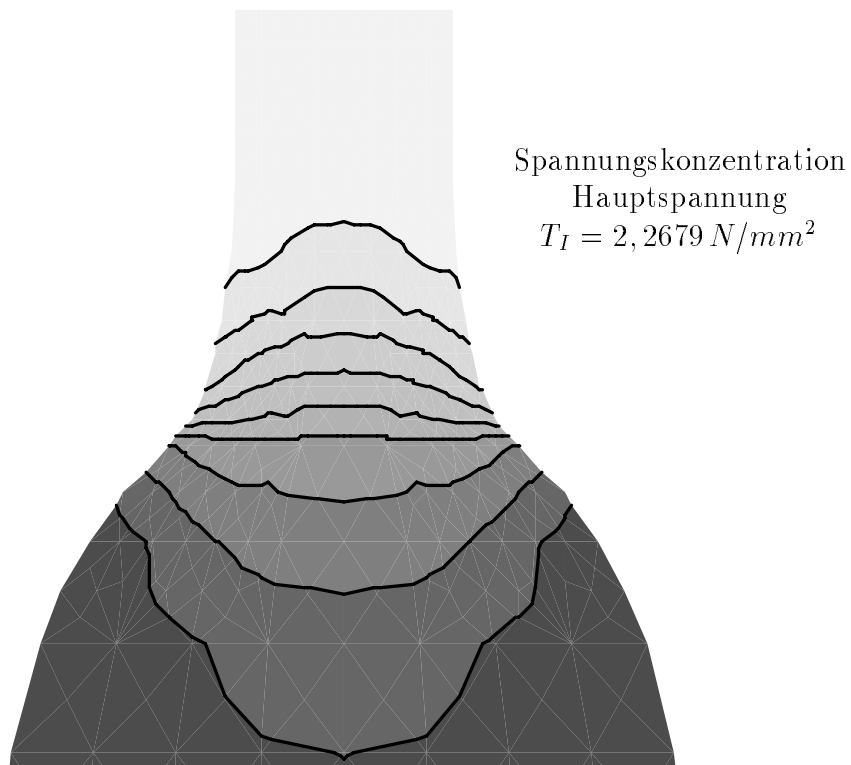


Abbildung 7.32: FE-Netz und Spannungszustand der zweiten optimierten Form

## 7.4 Ein Anwendungsbeispiel der Formoptimierung in der Reifenkonstruktion

### 7.4.1 Problemstellung

Die Konstruktion von Reifen sowie deren numerische Analyse z.B. mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode erfordert ein hohes Maß an mechanischem Verständnis der vielfältig auftretenden Phänomene. So ist neben der vollständigen Beschreibung des Verhaltens der unterschiedlichen Werkstoffe (mehrere Gummimischungen, Stahlkorde, Nylonbandagen) auch die Analyse des Verbundes von Gummi und Stahlkorde im Stahlgürtel nicht trivial zu beschreiben. Darüber hinaus ist ein Verständnis für die Interaktionen der einzelnen Strukturen im Stahlgürtelreifen bedeutsam für die geeignete Konstruktion, wobei die gewünschten Zielvorstellungen neben guter Hafteigenschaften, geringem Rollwiderstand, Haltbarkeit, geringe Geräuschentwicklung komplex und vielfältig sind. Neben der notwendigen Erfahrung im Konstruktionsprozeß und einer intensiven Nutzung der Versuchstechnik wird zunehmend auch in der numerischen Analyse des Verhaltens Erkenntnisse für eine verbesserte Reifenkonstruktion gesucht.

An dieser Stelle soll an einem exemplarischen Beispiel die Einsatzmöglichkeit der Formoptimierung auf dieses komplexe mechanische System dargestellt werden. In Abbildung 7.33 ist der Querschnitt eines PKW-Reifens qualitativ aufgetragen, auf eine quantitative Angabe aller technischen Daten wird wegen der Komplexität an dieser Stelle verzichtet.<sup>4</sup> Das Reifenmodell besteht damit hauptsächlich aus dem inkompressiblen Gummimaterial, für das im gesamten Reifenquerschnitt einheitliche Materialeigenschaften angenommen wurden, d.h. ein Mooney-Rivlin-Material mit

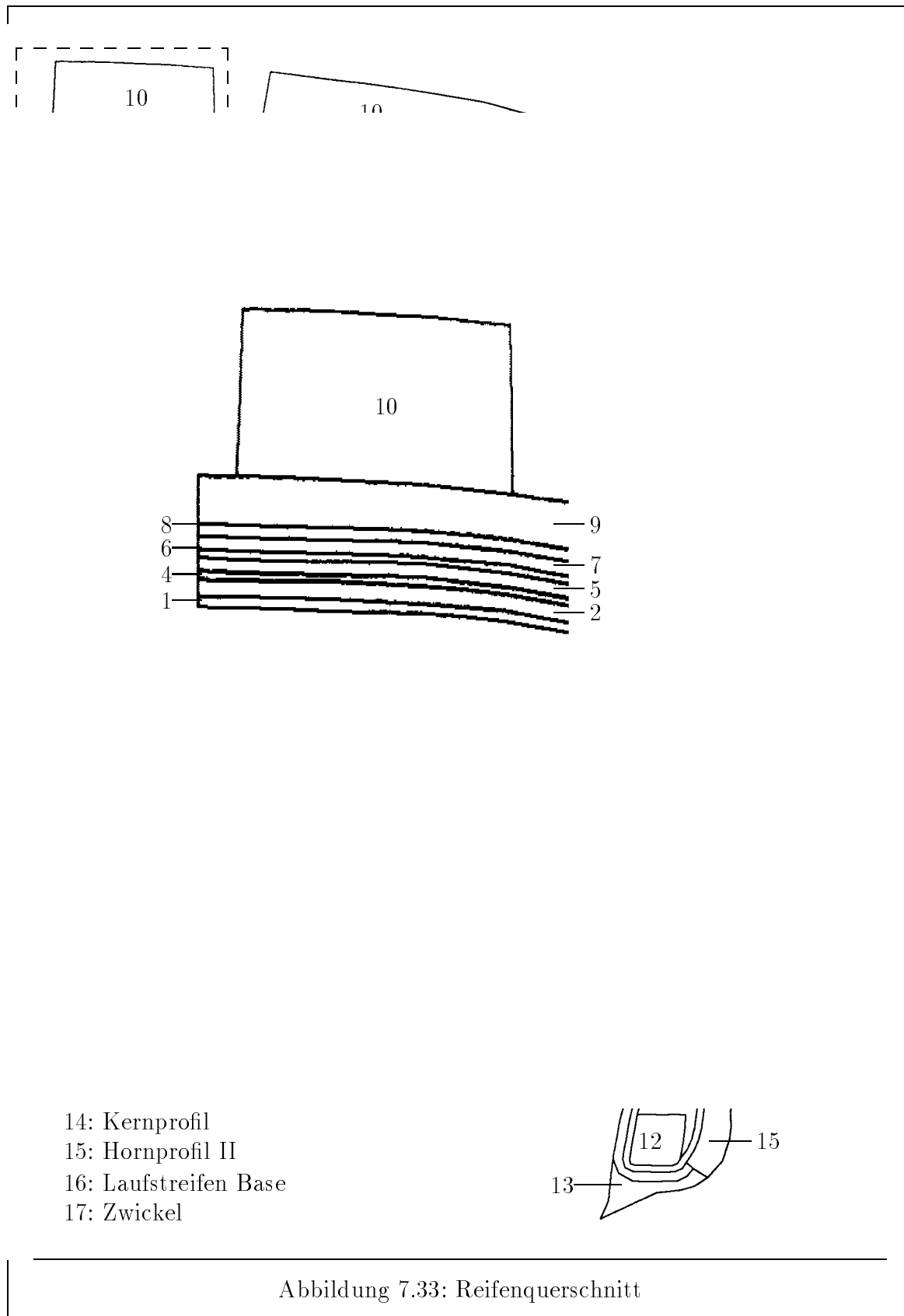
$$W = C_1 (\bar{I} - 3) + C_2 (\bar{II} - 3) \quad \text{sowie} \quad C_1 = 0,58 \frac{N}{mm^2} \quad \text{und} \quad C_2 = 0,25 \frac{N}{mm^2}.$$

Die Haupttragwirkung wird durch die Stahlgürtellagen erzielt, deren Verbund aus Stahlkorden und Gummiträger vereinfachend als verschmiertes, homogenes, orthotropes, linear-elastisches Material mit den Materialparametern  $E = 210000 \frac{N}{mm^2}$  und  $\nu = 0,3$  beschrieben wurde. Die Annahme eines linear-elastischen Materials ist durch die geringen Verzerrungen in der Stahlgürtellage gerechtfertigt.

Die Beschreibung dieses Reifenmodells erfolgte unter der Berücksichtigung der Rotationsymmetrie für den Lastfall Innendruck  $p = 0,15 \frac{N}{mm^2}$ . Der Kontakt des Reifens mit der Straße konnte wegen der bisher nicht zur Verfügung stehenden Sensitivitätsanalyse dieser Kontaktproblematik nicht berücksichtigt werden.

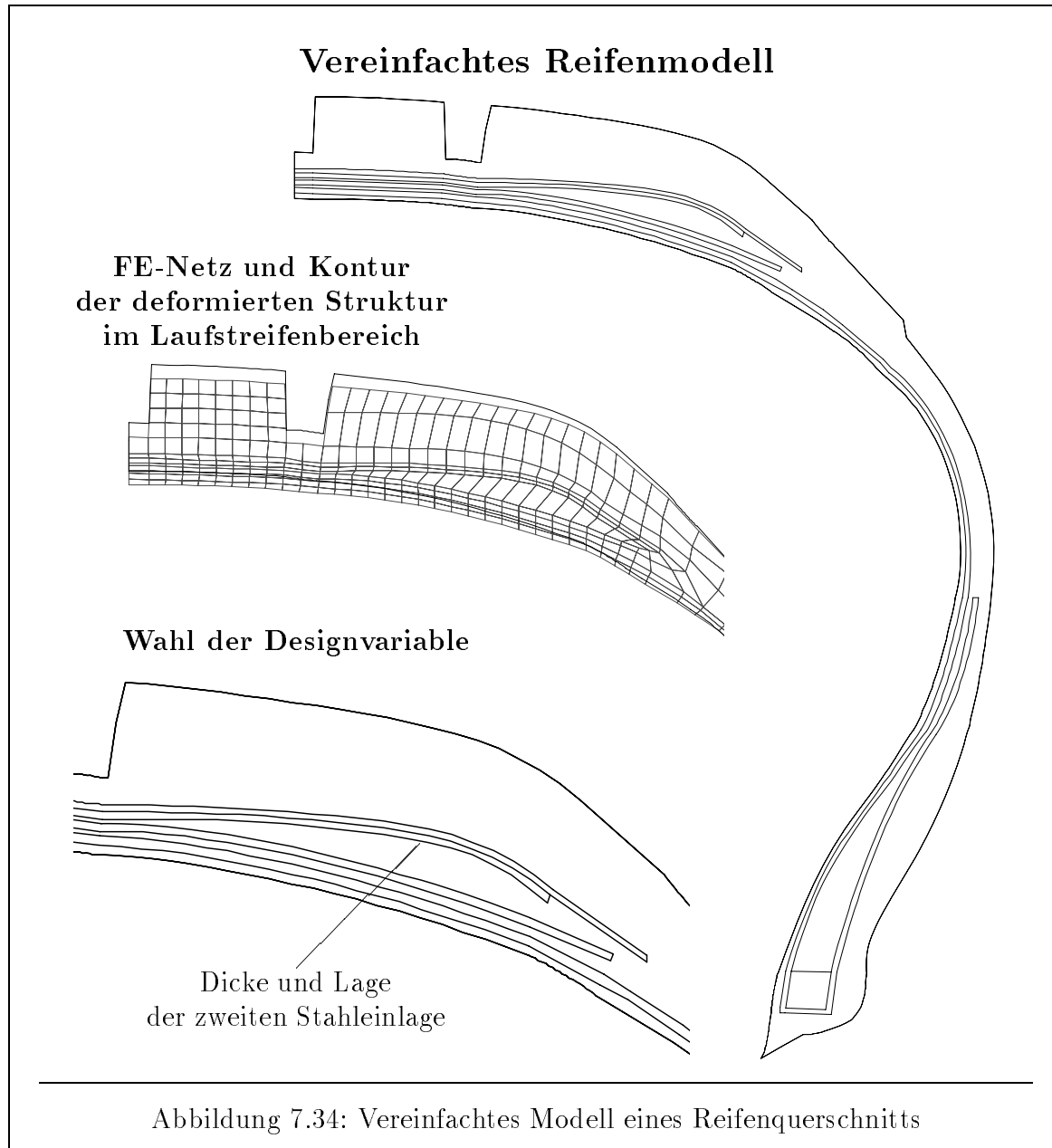
Für die Konstruktion eines Reifens ist bereits dieses Modell interessant, da zwei wesentliche Eigenschaften „eingestellt“ werden können. Zunächst ist ein gleichmäßiger radialer Verschiebungszustand („Wachstum des Reifens“ im Sprachgebrauch des Reifenkonstruktors) im Laufstreifenbereich des Reifens zu garantieren. Weiterhin sollte der Reifen unter diesem Grundlastfall möglichst membrangerecht die Last abtragen, was zugleich zu einer geringeren Formänderungsenergie des Reifens führt. Hieraus kann dann auch eine Verminderung des Rollwiderstands, der in Verbindung mit der dissipativen Energie des Reifens steht, erwartet werden.

<sup>4</sup>Ich danke der CONTINENTAL AG, Hannover, für die freundliche Unterstützung bei der Bearbeitung dieser Problemstellung und für die Bereitstellung des Datenmaterials.



### 7.4.2 Optimierungsaufgabe

Für die beispielhafte Darstellung der Anwendungsmöglichkeiten der Formoptimierung wurde der Reifenquerschnitt auf die wesentlichen Tragelemente vereinfacht.



Die obigen Vorüberlegungen führten zu der folgenden Optimierungsaufgabe. Als Zielfunktion wurde die gesamte Formänderungsenergie des Reifens im deformierten Zustand bei einem Innendruck von  $p = 0,15 \frac{N}{mm^2}$  minimiert. Die weitere Anforderung eines gleichmäßigen Wachstums des Reifens wurde über eine Nebenbedingung an die Radialverschiebungen im Laufstreifenbereich in das Optimierungsproblem eingebracht, die mit einer Genauigkeit von  $\pm 0,01 \text{ mm}$  den Wert von  $0,5 \text{ mm}$  betragen soll. Veränderbar (innerhalb vorgegebener Schranken) war bei dieser Untersuchung die Dicke und die Form der oberen Stahlgürtellage, die in dem Geometriemodell durch Bézierkurven dargestellt wurde.



Für die Modellierung der rußgefüllten Gummimischungen konnte in guter Näherung ein quasi-inkompressibles Material (mit  $\nu = 0,4995$ ) angenommen werden. Für diese Situation tritt, wie vielfach in der Literatur beschrieben, ein „Locking-Phänomen“ auf, das die Behandlung der Struktur mit reinen Verschiebungsansätzen unmöglich macht. Der Reifenquerschnitt wurde deshalb im axialsymmetrischen Verzerrungszustand unter Verwendung der in Kapitel 4 beschriebenen gemischten Methode berechnet. Hierbei stellt die Inkompressibilität eine Nebenbedingung auf Elementebene dar, die nicht wie beim ebenen Spannungszustand zwängungsfrei erfüllt werden kann.

Im Reifenquerschnitt treten aufgrund der unterschiedlichen Faserwinkel der Stahleinlagen untereinander besonders im Zwickelbereich (Materialgruppe 17 in Abbildung 7.33) hohe lokale Scherbeanspruchungen bis zu 50% Dehnung auf. Die Reifenkonstruktion versucht dieser Situation durch den gezielten Einsatz unterschiedlicher Gummimischungen mit spezifischen Eigenschaften gerecht zu werden.

Die für den Optimierungsalgorithmus erforderlichen analytischen Sensitivitäten sind in Kapitel 5 hergeleitet worden. Die Richtigkeit der Implementation wurde durch Vergleich mit vollständig numerisch berechneten Gradienten kontrolliert. Dabei zeigte die analytische Sensitivitätsanalyse bei diesem komplexen nichtlinearen Strukturmodell die erwarteten Rechenzeitvorteile.

Die Optimierungsberechnung ergab durch die gezielte Veränderung der Dicke und Lage der oberen Stahleinlage eine 3,8%-tige Abnahme der gesamten Formänderungsenergie des Reifens. Dabei nahm das Gewicht dieser Stahleinlage zusätzlich um 9% ab. Das gleichmäßige Wachstum des Reifens im Laufstreifenbereich wurde dabei vom Optimierungsalgorithmus durch die Beachtung der gewählten Nebenbedingungen garantiert.

### 7.4.3 Einsatzmöglichkeiten der Formoptimierung in der industriellen Reifenentwicklung

Das hier dargestellte Anwendungsbeispiel deutet an, in welcher Form die Formoptimierung innerhalb des Konstruktionsprozesses eines Stahlgürtelreifens eingesetzt werden kann. Das ein praktischer Einsatz in der Industrie auch tatsächlich lohnend ist und deshalb durchgesetzt werden sollte, möchte ich abschließend begründen.

Ein erster Grund liegt darin, das ein Reifen in hohen Stückzahlen produziert wird und somit schon geringe Gewichtseinsparungen die Entwicklung und den Einsatz von Optimierungssoftware amortisiert. Dieses Argument trifft auch auf die verbesserten Eigenschaften wie Rollwiderstand, Haltbarkeit usw. zu, die z.B. den Brennstoffverbrauch eines Fahrzeuges verringern.

Weiterhin ist anzumerken, daß die Reifenentwicklung weit fortgeschritten ist, so daß große Qualitätssprünge allein aus der Erfahrung der Konstrukteure heraus nur schwer zu erreichen sind. Hierzu sind verfeinerte Methoden, wie z.B. eine intensive Nutzung numerischer Hilfsmittel, erforderlich.

Während die obigen Gründe sicherlich schnell akzeptiert werden, stellt sich die Frage einer baldigen Einsatzfähigkeit der Formoptimierungssoftware im industriellen Umfeld. Die großen Schwierigkeiten in der praxisrelevanten Anwendung der Formoptimierung auf Industrieprobleme sehe ich in der notwendigen Verknüpfung bestehender flexibler

CAD-Systeme über leistungsstarke Netzgeneratoren mit vorhandenen kommerziellen FE-Programmsystemen, die zudem, wie in diesem Fall, die Fähigkeit zur Berechnung nichtlinearer Phänomene besitzen müssen.

Hierzu sei zunächst erwähnt, daß das Geometriemodell eines Reifens vollständig in einer Querschnittsebene beschrieben werden kann. Zudem ist der Aufbau eines Reifens prinzipiell gleichbleibend, so daß die Anforderungen an eine praxisrelevante CAD-Beschreibung und ihre möglichen geometrischen Designvariablen bekannt und im Vergleich zu der Vielfalt möglicher Geometrieformen im Allgemeinen Maschinenbau doch beschränkt sind.

Weiterhin werden für den Optimierungsprozeß keine großen Geometrieänderungen erwartet, so daß die Güte der FE-Netze während des Optimierungsprozesses ohne große Probleme zu gewährleisten ist. Ebenfalls sind zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens nur wenige unterschiedliche Elementformulierungen erforderlich, so daß die Modifikation und Erweiterung des Element Quellcodes auf die Erfordernisse der Sensitivitätsanalyse mit begrenztem Aufwand möglich erscheint.

Alles in allem scheint trotz der vorhandenen geometrisch und physikalisch nichtlinearen Phänomene im Reifen aufgrund der klaren geometrischen Struktur ein baldiger Einsatz möglich. An dieser Stelle sollte jedoch auch erwähnt werden, daß die relevanten Phänomene im Reifen vor dem Einsatz von Optimierungssoftware zunächst in der Strukturanalyse qualitativ und auch quantitativ richtig beschrieben werden müssen.

# Kapitel 8

## Zusammenfassung und Ausblick

### 8.1 Zusammenfassung

Die Zielsetzung dieser Arbeit über die „Berechnung und Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien“ bestand in der

- Herleitung einer numerisch effizienten Methodik zur strukturmechanischen Berechnung der Materialien,
- der Herleitung der Sensitivitäten bezüglich einer Änderung der Geometrie und der Materialparameter sowie der
- Konzeption und Implementation eines effizienten Gesamtalgorithmus zur numerischen Behandlung der Optimierungsaufgaben.

Eine wesentliche Erkenntnis bei der Bearbeitung der obigen Aufgabenstellungen besteht in dem Grundsatz, daß das Optimierungsmodell nicht dazu geeignet ist, ein schlechtes Geometrie- bzw. Berechnungsmodell zu verbessern und es dazu auch nicht mißbraucht werden darf. Dies gilt sowohl für die Modellbildung als auch für die Form und Güte der durchgeführten Implementation. Das Optimierungsmodell und damit der Optimierungsprozeß ist nur so effizient wie der schwächste Baustein in der gesamten Prozeßkette.

Aus diesem Grund ist zunächst die Sichtung, Überprüfung, Modifikation und Strukturierung der kontinuumsmechanischen Grundlagen isotroper, hyperelastischer Materialien, d.h. die **Herleitung der Spannungs- und Materialtensoren**, in Kapitel 3 durchgeführt worden. Dabei wurde besonderer Wert auf eine weitestgehende Allgemeingültigkeit unabhängig von einem speziellen Materialgesetz gelegt.

Für die Behandlung hyperelastischer Materialien sind die folgenden Aspekte berücksichtigt worden:

1. Darstellung in der Referenz- sowie in der Momentankonfiguration,
2. Behandlung unterschiedlicher Spannungs- und Verzerrungszustände (3-D-Zustand, ebener Verzerrungszustand, Axialsymmetrie, ebener Spannungszustand),

3. Behandlung kompressibler, quasi-inkompressibler und inkompressibler Materialien,
4. Behandlung von Formänderungsenergiefunktionen als Funktion der Invarianten bzw. als Funktion der Eigenwerte.

Die in der Literatur angegebenen Spannungs- und Materialtensoren weisen die folgenden Struktur auf.

- Die Spannungs- und Materialtensoren (hier z.B. der Referenzkonfiguration) werden in der Form

$$\mathbf{S} = 2 \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{Z}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{C} = 4 \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^3 \{ \beta_{ij} \mathbf{Z}_i \otimes \mathbf{Z}_j \} + \alpha_i \frac{\partial \mathbf{Z}_i}{\partial \mathbf{C}} \right].$$

gebildet. Dabei stellen die  $\mathbf{Z}_i$  die zweistufige tensorielle Basis des betrachteten Raumes dar, und  $\mathbf{Z}_i$  sind zugehörige durch Ableitung gebildete vierstufige Tensoren. Die Summation über den Index  $i$  hängt von der Dimension des betrachteten Raumes ab und kann sich in Sonderfällen reduzieren. Die obige Struktur ist problemimmanent und somit in jeder Veröffentlichung zu finden.

- Für die Auswahl der Basen bestehen zwei natürlich gegebene Möglichkeiten zur Auswahl:
  - die Basistensoren werden direkt aus den Verzerrungstensoren  $\mathbf{C}$  bzw.  $\mathbf{b}$  aufgebaut, d.h. z.B.  $\{\mathbf{1}, \mathbf{C}, \mathbf{C}^{-1}\}$  oder  $\{\mathbf{1}, \mathbf{b}, \mathbf{b}^2\}$ ;
  - die Basistensoren ergeben sich aus den Eigenvektoren  $\mathbf{N}_i$  bzw.  $\mathbf{n}_i$ , d.h. z.B.  $\mathbf{Z}_i = \mathbf{N}_{(i)} \otimes \mathbf{N}_{(i)}$ .

Die Darstellung in dieser Arbeit erfolgte aus den folgenden Gründen bzgl. der einfach aus den Verzerrungstensoren zu ermittelnden tensoriellen Basis.

1. Für Formänderungsenergiefunktionen in Abhängigkeit der Invarianten ist die Berechnung der Eigenwerte und der Eigenvektoren nicht erforderlich.
2. Die Eigenvektoren und die daraus hergeleiteten Basistensoren können für hydrostatische und equibiaxiale Spannungszustände nicht exakt angegeben werden.
3. Für die diskrete Sensitivitätsanalyse ist die Darstellung bzgl. der Eigenvektoren ungeeignet, da diese aufwendiger berechnet werden, in den Sonderfällen nicht exakt anzugeben sind und somit in der Sensitivitätsanalyse schwieriger zu behandeln sind.

Somit ist eine Darstellung gewählt worden, die sich für Formänderungsenergiefunktionen der Invarianten in natürlicher Weise ergibt.

Für die Angabe der Formänderungsenergiefunktion in Abhängigkeit der Eigenwerte bestand die Notwendigkeit der Ermittlung der impliziten Ableitung nach den Invarianten, die für den allgemeinen Zustand ungleicher Eigenwerte und für die Sonderfälle zusammenfallender Eigenwerte für das Ogden-Material angegeben wurde. Dieser Zugang ist in

der Literatur für die Behandlung von Ogden-Materialien bisher nicht beschrieben und implementiert worden. Zudem wird durch die Angabe der exakten Materialmatrizen für die Sonderfälle hydrostatischer bzw. equibiaxialer Spannungszustände eine Lücke geschlossen, die bisher durch Störung der Eigenwerte näherungsweise als Problem mit unterschiedlichen Eigenwerten behandelt wurde.

Die Beziehungen für den ebenen Verzerrungszustand und den axialsymmetrischen Verzerrungszustand stellen Sonderfälle des dreidimensionalen Zustandes dar. Für den ebenen Spannungszustand waren gesonderte Überlegungen notwendig, die zu bisher nicht veröffentlichten Darstellungen für kompressible und inkompressible Materialien in den Größen der Momentankonfiguration und kompressiblen Materialien in der Referenzkonfiguration führten.

Insgesamt stellen das Kapitel 3, der Anhang A, B und die zugehörige Implementation in INA-OPT eine allgemeingültige, abgeschlossene Darstellung und numerische Verifikation der Spannungs- und Materialtensoren hyperelastischer Materialien dar. Damit wurde die Grundlage für die Sensitivitätsanalyse isotroper, hyperelastischer Materialien in Kapitel 5 gelegt und das erste gesetzte Ziel erreicht, d.h. es wurde eine numerisch effizienten Methodik zur strukturmechanischen Berechnung angegeben.

Für die erfolgreiche Bearbeitung der Optimierungsaufgaben ist die Lösung der zweiten Zielsetzung, d.h. die **Herleitung der Sensitivitäten** bzgl. einer Änderung der Geometrie- und der Materialparameter, erarbeitet worden.

Die theoretischen Darstellungen der kontinuumsmechanischen Beziehungen (insbesondere der Geometrie, der Bilanzsätze sowie der Spannungs- und Materialtensoren) in symbolischer Tensornotation werden in vielen Veröffentlichungen und Lehrbüchern benutzt und haben ihre Leistungsfähigkeit bei der Beschreibung physikalischer Beziehungen bewiesen. Aus diesem Grund, und um die Darstellung der Sensitivitätsanalyse konsistent zur vorgenommenen Beschreibung der Spannungs- und Materialtensoren anzugeben, wurde eine kontinuumsmechanische Sichtweise der Formoptimierung formuliert.

Als Grundlage dient die Beschreibung des materiellen Körpers und seiner Konfigurationen über konvektive Koordinaten, die der Darstellung der Konfiguration eines Körpers als differenzierbare Mannigfaltigkeit entspricht. Zur Berücksichtigung der Gestalt des Körpers wurden die Abbildungen der Kontinuumsmechanik (siehe Kapitel 2) um die Abhängigkeit von der Designvariablen erweitert. Damit stellt die Designvariable  $s$  neben der Zeit  $t$  einen weiteren skalaren Parameter dar.

Ausgehend von diesen Grundbeziehungen wurde die von *Céa* und *Zolesio* stammende Interpretation der Formänderung als ein spezieller „Deformationsprozeß“ aus kontinuumsmechanischer Sichtweise zurückgewiesen und durch eine zur bisherigen Kontinuumsmechanik konsistente Erweiterung ersetzt. In der vorgeschlagenen Interpretation versteht sich die Formänderung als der durch die Designvariable hinreichend glatt beschriebene Übergang zwischen unterschiedlichen materiellen Körpern bzw. deren Konfigurationen. Mit dieser Darstellung ist die Sensitivitätsanalyse zu einem Bestandteil der Kontinuumsmechanik geworden und sollte in Zukunft vermehrt von den „etablierten Kontinuumsmechanikern“ aufgegriffen werden.

Die Leistungsfähigkeit dieser Darstellung ist in Abschnitt 5.2 für die variationelle Sensitivitätsanalyse aufgezeigt worden. Wie dort beschrieben wurde, können die für die Sen-

sitivitätsanalyse erforderlichen partiellen Ableitungen der Spannungen der Referenz- und der Momentankonfiguration in formal analoger Darstellung zu den bekannten Zeitableitungen angegeben werden. Die hergeleiteten Beziehungen für die Änderung der Spannungen der Referenz- und der Momentankonfiguration sind dabei neue, bisher nicht dargestellte Erkenntnisse für die Sensitivitätsanalyse elastischer Materialien. Hieraus wurde zum einen die überragende Bedeutung der Materialtensoren und der konsistenten Formulierungen für die Sensitivitätsanalyse deutlich. Weiterhin bilden diese Darstellungen eine solide Basis, auf der eine Erweiterung der Sensitivitätsanalyse auf geschichtsabhängige Materialgesetze möglich ist.

Die variationelle Sensitivitätsanalyse ist auf der Basis der kontinuumsmechanischen Formulierungen in dem bereits für die Spannungs- und Materialmatrizen angegebenen Umfang hergeleitet und in INA-OPT realisiert worden. In Abschnitt 5.3 ist die diskrete Sensitivitätsanalyse beschrieben worden, die ebenfalls in dem beschriebenen Umfang hergeleitet und numerisch umgesetzt worden. Ein numerischer Vergleich der variationellen und der diskreten Sensitivitätsanalyse mit den numerisch bzw. semianalytisch ermittelten Ableitungen an vielen Testrechnungen zeigte die Übereinstimmung der Ergebnisse und den Rechenzeitvorteil der variationellen Sensitivitätsanalyse.

Mit der Darstellung der Sensitivitätsanalyse ist die Lösung der zweiten Aufgabenstellung gelungen.

In Kapitel 6 wurde das im Forschungspaket INA-OPT realisierte Konzept einer **Prozeßkette Optimale Formgebung** beschrieben. Als dringende Notwendigkeit für eine erfolgreiche algorithmische Abbildung der Optimierungsaufgabe erweist sich die leistungsfähige Modellbildung der Gesamtaufgabe sowie der Teilaufgaben, die sich sowohl in der Daten- als auch der Programmstruktur widerspiegeln muß. Bei der Modellbildung und der Implementation wurde strikt beachtet, daß das Optimierungsmodell die bereits bestehenden Modelle „nur“ verknüpfen muß, jedoch keine neuen Strukturen definieren darf. Die Aufgaben der Teilmodelle Entwurfsvariablenmodell, parametrisches Geometriemodell, Technologiemodell, das Modell zur Netzgenerierung- und -veränderung sowie das Strukturanalysemodell sind näher beschrieben und ihre Stellung in der Prozeßkette erläutert worden.

Mit der vorgenommenen algorithmischen Umsetzung der theoretischen Beziehungen in vollständig analytischer Form auf der Grundlage eines integrierten Daten- und Programmkonzeptes stellt das Forschungsprogrammpaket INA-OPT ein leistungsfähiges Werkzeug für weitere Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der Formoptimierung dar. Insbesondere die bereits vorgenommene Integration der Netzverfeinerungsalgorithmen sowie der zugehörigen Adaptionkriterien in den Gesamtalgorithmus Optimale Formgebung ermöglicht die Untersuchung des Netzeinflusses auf den Optimierungsprozeß und zeigt die Leistungsfähigkeit der Programmkonzeption, siehe auch *Barthold et. al.* [8].

In Kapitel 7 wurde mit den dargestellten Beispielen die Leistungsfähigkeit der algorithmischen Umsetzung der Strukturoptimierung auf große elastische Deformationen aufgezeigt. Neben der Darstellung einer Gewichtsminimierung bei Einhaltung von Nebenbedingungen in der stark deformierten Momentankonfiguration wurden die Einsatzmöglichkeiten des Gesamtalgorithmus für die Bearbeitung inverser Probleme aufgezeigt. Weiterhin stellt die Untersuchung der S2-Normprobe ein praxisrelevantes Bei-

spiel dar, bei dem durch Geometrieänderung unerwünschte Spannungsspitzen reduziert werden konnten, so daß ein unerwünschtes Reißen der Probe außerhalb des homogenen Bereiches unwahrscheinlicher wird. Zum Abschluß wurde am Beispiel der Konstruktion von PKW-Reifen gezeigt, daß berechnete Hoffnungen bestehen, die Algorithmen der Optimalen Formgebung auch und gerade bei komplexen mechanischen Problemstellungen in der industriellen Entwicklung einsetzen zu können.

## 8.2 Ausblick

Für die Strukturanalyse isotroper, hyperelastischer Materialien unter großen Deformationen erweist sich die Formulierung in den Größen der Momentankonfiguration als besonders geeignet. Für die effektive Bearbeitung und Ermittlung aussagekräftiger Spannungen sind die Netzverfeinerungsstrategien und -kriterien auf die besondere Situation großer Deformationen anzuwenden und anzupassen.

Der Einsatz adaptiver FE-Verfahren für die Strukturanalyse ist ein bedeutender Forschungsschwerpunkt. Eine Anwendung dieser Methoden auf die Sensitivitätsanalyse ist dringend erforderlich, da sich durch die Formänderung das Tragverhalten der Strukturen stark ändern kann. Eine Berücksichtigung dieser Phänomene wird den Optimierungsprozeß effektiver gestalten. Die Grundlagen der Interaktion zwischen Formoptimierung und Adaptivität sind in INA-OPT realisiert, siehe z.B. *Barthold et. al.* [8].

Das in der Formoptimierung benutzte Geometriemodell ist für die effektive Anwendung der Formoptimierung gerade auf praxisrelevante Strukturen der wesentliche Baustein in der Prozeßkette Formoptimierung. Aus der Sicht der Anwender muß die Konstruktion schnell und effektiv in den Entwurfsvariablen (Gerade, Kreis, Zylinder, etc.) unter Berücksichtigung von Relationen unter den definierten Objekten erstellt und auch modifiziert werden können. Andererseits ist die Auffassung der Geometrie eines Körpers als differenzierbare Mannigfaltigkeit wesentlich für die Umsetzung theoretischer Beziehungen. Diese beiden Anforderungen sind gleichermaßen gut zu erfüllen, um Anwenderfreundlichkeit und damit Akzeptanz in der Industrie mit einer weitestgehenden Abbildung theoretischer Zusammenhänge im Algorithmus zu verknüpfen. Ein Fortschritt in dieser Richtung stellt die Integration eines kommerziell anerkannten CAD-Programmsystems in eine integrierte Daten- und Programmstruktur unter Verwendung ausschließlich analytischer Gradienten dar.

Die Grundlagen der kontinuumsmechanischen Darstellung der Sensitivitätsanalyse setzen keine Einschränkungen voraus, so daß sie auch die Grundlage der Behandlung geschichtsabhängiger Prozesse sind. Die in Abschnitt 5.2 angegebenen Sensitivitätsbeziehungen gelten zunächst nur für hyperelastische, d.h. weg- und geschichtsunabhängige Formulierungen. Ein wesentlicher Forschungserfolg wäre mit der Erweiterung der Sensitivitätsanalyse auf geschichtsabhängige Prozesse erreicht, der auf der Grundlage der für elastische Materialien erarbeiteten Beziehungen möglich ist. Hierbei ist wesentlich, daß die Sensitivitätsanalyse analog zur Strukturanalyse inkrementell erfolgen muß und die Abhängigkeit interner Variablen von der Designvariablen über die bereits bekannten Materialtensoren erfaßt werden kann.





# Anhang A

## Spannungs- und Materialtensoren der Momentankonfiguration

### A.1 Grundlagen

Für die Beschreibung in den Größen der Momentankonfiguration erhält man mit (3.1) für den Cauchyschen Spannungstensor  $\mathbf{T}$  die Darstellung der Gleichung (3.10) bzw. für den räumlichen Materialtensor  $\mathfrak{c}$  die Darstellung (3.11). In analoger Weise gilt für die deviatorischen Anteile des Cauchyschen Spannungstensors

$$\mathbf{T}^D = \frac{2}{J} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{g}} = \frac{2}{J} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_i} \cdot \frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \mathbf{g}}$$

und für den zugehörigen Materialtensors  $\mathfrak{c}^D$

$$\mathfrak{c}^D = \frac{4}{J} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \mathbf{g} \partial \mathbf{g}} = \frac{4}{J} \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_i \partial \bar{I}_j} \cdot \frac{\partial \bar{I}_i}{\partial \mathbf{g}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_j}{\partial \mathbf{g}} \right\} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_i} \cdot \frac{\partial^2 \bar{I}_i}{\partial \mathbf{g} \partial \mathbf{g}} \right].$$

Hierin ist  $W$  die Formänderungsenergiefunktion in der funktionalen Abhängigkeit der Gleichung (2.77), bzw.  $\bar{W}$  deren deviatorische Anteil nach (2.78). Da die Invarianten  $i_{\mathbf{C}}$  des Rechts-Cauchy-Green-Tensors  $\mathbf{C}$  mit den Invarianten  $i_{\mathbf{b}}$  des Links-Cauchy-Green-Tensors  $\mathbf{b}$  übereinstimmen, sind die Anteile

$$\frac{\partial W}{\partial I_i} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{I}_i \partial \bar{I}_j}$$

unabhängig von der Wahl der Betrachtungsweise. Diese Anteile können somit direkt aus den entsprechenden Abschnitten des Kapitels 3 übernommen werden. Für die Darstellung in den Größen der Momentankonfiguration sind somit nur die Ableitungen der Invarianten  $I_i$  bzw. der modifizierten Invarianten  $\bar{I}_i$  nach der Metrik  $\mathbf{g}$  zu berechnen, d.h. es gilt

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{g}} = \mathbf{b}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{g}} = \text{I} \mathbf{b} - \mathbf{b}^2, \quad \frac{\partial \text{III}}{\partial \mathbf{g}} = \text{III} \mathbf{g}^{-1}, \quad \frac{\partial \bar{I}}{\partial \mathbf{g}} = \text{dev } \bar{\mathbf{b}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \mathbf{g}} = \bar{\text{I}} \text{dev } \bar{\mathbf{b}} - \text{dev } \bar{\mathbf{b}}^2.$$

## A.2 Spannungs- und Materialtensoren für kompressible Materialien

Diese Darstellung der Spannungs- und Materialtensoren kompressibler Materialien für eine Beschreibung in den Größen der Momentankonfiguration orientiert sich an Abschnitt 3.2.

**Tafel A.1:** Spannungs- und Materialtensoren kompressibler Materialien für die Beschreibung in den Größen der Momentankonfiguration

1. Bestimme die tensorielle Basis

$$\underline{\mathbf{Z}}^T := \{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3\} := \{\mathbf{g}^{-1}, \mathbf{b}, \mathbf{b}^2\}$$

isotroper, hyperelastischer Materialien in der Momentankonfiguration und bilde die Ableitung der Basis nach  $\mathbf{g}$  in der Form

$$\frac{\partial \mathbf{g}^{-1}}{\partial \mathbf{g}} = -\mathbb{I}_{\mathbf{g}^{-1}}, \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{g}} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{b}^2}{\partial \mathbf{g}} = -\mathbb{I}_{\mathbf{b}}.$$

2. Bestimme die Koeffizientenmatrix  $\underline{\mathbf{A}}$  für die Darstellung der Ableitung der Invarianten nach  $\mathbf{g}$  bezüglich der gewählten Basis, d.h.

$$\underline{\mathbf{A}} = (A_{im}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{I} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \text{III} \end{pmatrix}.$$

3. Berechne die Ableitungen der Formänderungsenergie nach den Invarianten

$$W_{,i} = \frac{\partial W}{\partial \text{I}_i} \quad \text{und} \quad W_{,ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \text{I}_i \partial \text{I}_j}$$

für die unterschiedlichen Formen der Formänderungsenergiefunktion. Für weitere Bemerkungen siehe hierzu Tafel 3.3.

4. Berechne die Koeffizienten  $\alpha_i$  und  $\beta_{ij}$  in der Form

$$\alpha_m = W_{,i} A_{im} \quad \text{und} \quad \beta_{lm} = A_{il} W_{,ij} A_{jm} + W_{,i} \frac{\partial A_{im}}{\partial \text{I}_k} A_{kl}$$

5. Bestimme den Cauchyschen Spannungstensor  $\mathbf{T}$  und den zugehörigen Materialtensor  $\mathfrak{c}$  in der Form

$$\mathbf{T} = \frac{2}{J} \alpha_m \mathbf{Z}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{c} = \frac{4}{J} \beta_{lm} \mathbf{Z}_l \otimes \mathbf{Z}_m + 4 \alpha_m \frac{\partial \mathbf{Z}_m}{\partial \mathbf{g}}.$$

## A.3 Spannungs- und Materialtensoren für inkompressible Materialien

**Tafel A.2:** Deviatorischer Anteil der Spannungs- und Materialtensoren inkompressibler Materialien für die Beschreibung in den Größen der Momentankonfiguration

- Bestimme die tensorielle Basis

$$\bar{\mathbf{Z}}_1 = \text{dev } \bar{\mathbf{b}} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{Z}}_2 = \text{dev } \bar{\mathbf{b}}^2$$

und bilde die Ableitung der Basis nach  $\mathbf{g}$  in der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}_1}{\partial \mathbf{g}} &= \frac{1}{3} \bar{\mathbf{I}} \left\{ \mathbb{I}_{\mathbf{g}^{-1}} - \frac{1}{3} \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g}^{-1} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{3} \left\{ \bar{\mathbf{Z}}_1 \otimes \mathbf{g}^{-1} + \mathbf{g}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{Z}}_1 \right\} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}_2}{\partial \mathbf{g}} &= \frac{1}{3} \text{tr } \bar{\mathbf{b}}^2 \mathbb{I}_{\mathbf{g}^{-1}} + J^{-4/3} \mathbb{I}_{\mathbf{b}} - \frac{2}{9} \text{tr } \bar{\mathbf{b}}^2 \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g}^{-1} \\ &\quad - \frac{2}{3} \left\{ \bar{\mathbf{Z}}_2 \otimes \mathbf{g}^{-1} + \mathbf{g}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{Z}}_2 \right\} \end{aligned}$$

- Bestimme die Koeffizientenmatrix  $\bar{\mathbf{A}}$  für die Darstellung der Ableitung der modifizierten Invarianten nach  $\mathbf{g}$  bezüglich der gewählten Basis, d.h.

$$\bar{\mathbf{A}} = (\bar{A}_{im}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{\mathbf{I}} & -1 \end{pmatrix}.$$

- Berechne die Ableitungen des deviatorischen Anteils  $\bar{W}$  an der Formänderungsenergie  $W$  nach den modifizierten Invarianten

$$\bar{W}_{,i} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_i} \quad \text{und} \quad \bar{W}_{,ij} = \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_i \partial \bar{\mathbf{I}}_j}$$

für die unterschiedlichen Formen der Formänderungsenergiefunktion. Für weitere Bemerkungen siehe hierzu Tafel 3.3.

- Berechne die Koeffizienten  $\bar{\alpha}_i$  und  $\bar{\beta}_{ij}$  in der Form

$$\bar{\alpha}_m = \bar{W}_{,i} \bar{A}_{im} \quad \text{und} \quad \bar{\beta}_{lm} = \bar{A}_{il} \bar{W}_{,ij} \bar{A}_{jm} + \bar{W}_{,i} \frac{\partial \bar{A}_{im}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_k} \bar{A}_{kl}$$

- Bestimme die deviatorischen Anteile  $\mathbf{T}^D$  und  $\mathbf{c}^D$  in der Form

$$\mathbf{T}^D = \frac{2}{J} \bar{\alpha}_m \bar{\mathbf{Z}}_m \quad \text{und} \quad \mathbf{c}^D = \frac{4}{J} \bar{\beta}_{lm} \bar{\mathbf{Z}}_l \otimes \bar{\mathbf{Z}}_m + 4 \bar{\alpha}_m \frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}_m}{\partial \mathbf{g}}.$$

## A.4 Der ebene Spannungszustand bei kompressiblen Materialien

Die Berechnung orientiert sich an der Darstellung des Abschnitt 3.4, wobei besondere Überlegungen zum Ablauf der lokalen Iteration vorzunehmen sind. In diesem Fall ist die Spannungskomponente  $T_{33}$  des Cauchyschen Spannungstensors  $\mathbf{T}$  abhängig vom Links-Cauchy-Green-Tensor  $\mathbf{b}$  und mit der Definition

$$\mathbf{G} := \frac{J}{2} \mathbf{b}^{-1} \mathbf{T} = \mathbf{b}^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{g}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{b}} \quad (\text{A.1})$$

ergibt sich die Aussage

$$T_{33} = \hat{T}_{33}(b_{33}) = 0 \iff G_{33} = \hat{G}_{33}(b_{33}) = 0, \quad (\text{A.2})$$

da der (33)-Anteil von  $\mathbf{T}$  durch die spezielle Kinematik der Scheibe entkoppelt von den ebenen Anteilen ist. Somit folgt analog zu (3.54) und (3.55) mit

$$G_{33}^{k+1} = 0 = G_{33}^k + \left. \frac{\partial G_{33}}{\partial b_{33}} \right|_{b_{33}^k} (b_{33}^{k+1} - b_{33}^k) \quad (\text{A.3})$$

und den Komponenten  $T_{33}$  und  $\mathfrak{c}_{3333}$  die lokale Iterationsvorschrift zur Erfüllung der Bedingung  $T_{33} = 0$  des ebenen Spannungszustandes in der Form

$$b_{33}^{k+1} = b_{33}^k - \left\{ \left. \frac{\partial G_{33}}{\partial b_{33}} \right|_{b_{33}^k} \right\}^{-1} G_{33}^k = b_{33}^k - 2 b_{33}^k \frac{T_{33}^k}{\mathfrak{c}_{3333}^k}. \quad (\text{A.4})$$

Damit kann der Spannungstensor  $\mathbf{T}_{esz}$  des ebenen Spannungszustandes entsprechend Gleichung (3.56) in der Form

$$\mathbf{T}_{esz} = \frac{2}{J} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{g}} \quad (\text{A.5})$$

angegeben werden und der zugehörige Kirchhoff-Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$  ergibt sich zu

$$\boldsymbol{\tau} = J\mathbf{T} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{g}}. \quad (\text{A.6})$$

Mit der Lie-Ableitung von  $\boldsymbol{\tau}$  in der Form

$$L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\tau}) = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{g} \partial \mathbf{g}} : \mathbf{d}, \quad (\text{A.7})$$

wobei  $\mathbf{d}$  den räumlichen Verzerrungsgeschwindigkeitstensor darstellt, und der Bedingung  $L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\tau})|_{33} = 0$  folgt analog zu Abschnitt 3.4.3

$$0 = L_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\tau})|_{33} = \frac{\partial^2 W}{\partial g_{33} \partial \mathbf{g}_{esz}} : \mathbf{d}_{esz} + \frac{\partial^2 W}{\partial g_{33} \partial g_{33}} \cdot d_{33}. \quad (\text{A.8})$$

Damit ergibt sich die Komponente  $d_{33}$  des räumlichen Verzerrungsgeschwindigkeitstensors  $\mathbf{d}$  zu

$$d_{33} = \left[ - \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial g_{33} \partial g_{33}} \right\}^{-1} \frac{\partial^2 W}{\partial g_{33} \partial \mathbf{g}_{esz}} \right] : \mathbf{d}_{esz}. \quad (\text{A.9})$$

Hieraus folgt der räumliche Materialtensor des ebenen Spannungszustandes zu

$$\mathfrak{c}_{esz} = \frac{4}{J} \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{g}_{esz} \partial \mathbf{g}_{esz}} - \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial g_{33} \partial g_{33}} \right\}^{-1} \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{g}_{esz} \partial g_{33}} \otimes \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{g}_{esz} \partial g_{33}} \right\}. \quad (\text{A.10})$$

## A.5 Der ebene Spannungszustand bei inkompressiblen Materialien

Für inkompressible Materialien berechnet sich die Dickenänderung  $b_{33}$  bzw. die Änderung von  $b_{33}$  entsprechend den Gleichungen (3.63) und (3.64) zu

$$b_{33} = \hat{b}_{33}(\mathbf{b}_{esz}) = \frac{1}{\det \mathbf{b}_{esz}} = \frac{1}{b_{11} b_{22} - b_{12} b_{12}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial b_{33}}{\partial \mathbf{g}_{esz}} = -b_{33} \mathbf{g}_e^{-1}. \quad (\text{A.11})$$

Damit ergibt sich der ebene Anteil des Cauchysche Spannungstensors  $\mathbf{T}$  analog (3.67) zu

$$\mathbf{T}_{esz} = \frac{2}{J} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{g}} = \frac{2}{J} \left\{ \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{g}_{esz}} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial b_{33}} \frac{\partial b_{33}}{\partial \mathbf{g}_{esz}} \right\} = \frac{2}{J} \left\{ \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{g}_{esz}} - \frac{\partial \bar{W}}{\partial g_{33}} \mathbf{g}_{esz}^{-1} \right\} \quad (\text{A.12})$$

und der Materialtensor  $\mathfrak{c}_{esz}$  zu

$$\begin{aligned} \frac{J}{4} \mathfrak{c}_{esz} &= \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \mathbf{g}_{esz} \partial \mathbf{g}_{esz}} - \frac{\partial \bar{W}}{\partial g_{33}} \frac{\partial \mathbf{g}_{esz}^{-1}}{\partial \mathbf{g}_{esz}} \\ &- \left\{ \mathbf{g}_{esz}^{-1} \otimes \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \mathbf{g}_{esz} \partial g_{33}} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \mathbf{g}_{esz} \partial g_{33}} \otimes \mathbf{g}_{esz}^{-1} \right\} \\ &+ \left\{ b_{33} \frac{\partial}{\partial b_{33}} \left( b_{33} \frac{\partial \bar{W}}{\partial b_{33}} \right) \right\} \mathbf{g}_{esz}^{-1} \otimes \mathbf{g}_{esz}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$



# Anhang B

## Hinweise zur Implementation der geometrischen Größen

### B.1 Darstellung der Basistensoren

Der Ausgangspunkt der numerischen Aufbereitung der in Kapitel 3 und im Anhang A aufgestellten tensoriellen Beziehungen bildet die Darstellung des materiellen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  bzgl. beliebiger krummliniger Basissysteme der Referenz- und der Momentankonfiguration. In der Referenzkonfiguration tritt dabei die kovariante Basis  $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3\}$  bzw. die kontravariante Basis  $\{\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3\}$  auf. In der Momentankonfiguration wird die kovariante Basis mit  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  und die kontravariante Basis  $\{\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3\}$  bezeichnet. Man beachte, daß die Metriktensoren mit  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{g}$ , d.h. mit dem gleichen Buchstaben, jedoch ohne Indizes, bezeichnet werden, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{G} = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad \text{und} \quad \mathbf{G}^{-1} = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j, \\ \mathbf{1} &= \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad \text{und} \quad \mathbf{g}^{-1} = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j. \end{aligned}$$

Für eine genauere Beschreibung der differentialgeometrischen Zusammenhänge sei auf *Marsden, Hughes* [59] verwiesen. Für den materiellen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  gilt damit

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i \quad \text{und} \quad \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i. \quad (\text{B.1})$$

Somit können die im Kapitel 3 eingeführten Tensoren in der Vektorbasis der Referenz- bzw. Momentankonfiguration dargestellt werden.

- Referenzkonfiguration

$$\mathbf{C}^{-1} = g^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j, \quad \mathbf{G}^{-1} = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = g_{kl} G^{ki} G^{lj} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j$$

- Momentankonfiguration

$$\mathbf{g}^{-1} = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j, \quad \mathbf{b} = G^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad \text{und} \quad \mathbf{b}^2 = g_{kl} G^{ki} G^{lj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$$

- Referenzkonfiguration mit multiplikativen Split ( $\text{tr } \mathbf{C}^2 = 2\Pi_{\mathbf{C}} - I_{\mathbf{C}}^2$ )

$$\begin{aligned}\text{dev } \overline{\mathbf{C}}\mathbf{C}^{-1} &= J^{-2/3} \left( \mathbf{G}^{-1} - \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} \right) \\ \text{dev } \overline{\mathbf{C}^2}\mathbf{C}^{-1} &= J^{-4/3} \left( \mathbf{C} - \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{C}^2\mathbf{C}^{-1} \right)\end{aligned}$$

- Momentankonfiguration mit multiplikativen Split ( $\text{tr } \mathbf{b}^2 = 2\Pi_{\mathbf{b}} - I_{\mathbf{b}}^2$ )

$$\begin{aligned}\text{dev } \overline{\mathbf{b}} &= J^{-2/3} \left( \mathbf{b} - \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{b} \mathbf{g}^{-1} \right) \\ \text{dev } \overline{\mathbf{b}^2} &= J^{-4/3} \left( \mathbf{b}^2 - \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{b}^2 \mathbf{g}^{-1} \right)\end{aligned}$$

## B.2 Ableitung der Basistensoren

Die Ableitung der Basistensoren erfolgt in der Referenzkonfiguration nach  $\mathbf{C}$ , d.h. nach

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \left( \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i \right) \left( \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{G}^j \right) = g_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j. \quad (\text{B.2})$$

Für die Ableitung eines Tensors  $\mathbf{A} = A^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j$  nach  $\mathbf{C}$  bedeutet die symbolische Schreibweise

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial A^{ij}}{\partial g_{kl}} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l. \quad (\text{B.3})$$

Analog gilt dies für die Ableitung eines Tensors  $\mathbf{a} = a^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$  der Momentankonfiguration nach  $\mathbf{g}$ , d.h. nach  $\mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$ , die sich zu

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{g}} = \frac{\partial a^{ij}}{\partial g_{kl}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad (\text{B.4})$$

ergibt.

Als Beispiel seien die Ableitungen der Basistensoren  $\mathbf{C}^{-1}$ ,  $\mathbf{G}^{-1}$  und  $\mathbf{C}$  der Beschreibung in den Größen der Referenzkonfiguration angegeben. Hierfür gilt

$$\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial (g^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j)}{\partial (g_{kl} \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l)} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{kl}} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l.$$

Mit der Ableitung des Kronecker-Deltas  $\delta_m^i$  nach  $g_{kl}$  folgt

$$0 = \frac{\partial \delta_m^i}{\partial g_{kl}} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{kl}} g_{jm} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{kl}} g_{jm} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial g_{kl}} g^{ij} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{kl}} g_{jm} + g^{ij} \delta_j^k \delta_m^l.$$

Nach der Multiplikation mit  $g^{mn}$  folgt hieraus

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{kl}} = -g^{ik} g^{jl},$$



d.h. die Ableitung von  $\mathbf{C}^{-1}$ , sowie in analoger Weise die Ableitungen von  $\mathbf{G}^{-1}$  und  $\mathbf{C}$ , nach  $\mathbf{C}$  ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} &= -g^{ik} g^{jl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l =: -\mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}}, \\ \frac{\partial \mathbf{G}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} &= G^{ik} G^{jl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l =: \mathbb{I}_{\mathbf{G}^{-1}}.\end{aligned}$$

In analoger Weise ergeben sich die Ableitungen der Basistensoren der Momentankonfiguration nach  $\mathbf{g}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{g}^{-1}}{\partial \mathbf{g}} &= -g^{ij} g^{kl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l =: -\mathbb{I}_{\mathbf{g}^{-1}}, \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{g}} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \mathbf{b}^2}{\partial \mathbf{g}} &= G^{ik} G^{jl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l =: \mathbb{I}_{\mathbf{b}}\end{aligned}$$

sowie der modifizierten Basistensoren bei Verwendung der multiplikativen Zerlegung in der Referenzkonfiguration

$$\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{dev} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{3} \operatorname{tr} \bar{\mathbf{C}} \left[ \mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right] \\ &\quad - \frac{1}{3} \left[ (\operatorname{dev} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1}) \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes (\operatorname{dev} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1}) \right], \\ \frac{\partial \operatorname{dev} \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{3} \operatorname{tr} \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}} + J^{-4/3} \mathbb{I}_{\mathbf{G}^{-1}} - \frac{2}{9} \operatorname{tr} \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \\ &\quad - \frac{2}{3} \left[ (\operatorname{dev} \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbf{C}^{-1}) \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes (\operatorname{dev} \bar{\mathbf{C}}^2 \mathbf{C}^{-1}) \right]\end{aligned}$$

und der Momentankonfiguration

$$\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{dev} \bar{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{g}} &= \frac{1}{3} \operatorname{tr} \bar{\mathbf{b}} \left[ \mathbb{I}_{\mathbf{g}^{-1}} - \frac{1}{3} \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g}^{-1} \right] \\ &\quad - \frac{1}{3} \left[ \operatorname{dev} \bar{\mathbf{b}} \otimes \mathbf{g}^{-1} + \mathbf{g}^{-1} \otimes \operatorname{dev} \bar{\mathbf{b}} \right], \\ \frac{\partial \operatorname{dev} \bar{\mathbf{b}}^2}{\partial \mathbf{g}} &= \frac{1}{3} \operatorname{tr} \bar{\mathbf{b}}^2 \mathbb{I}_{\mathbf{g}^{-1}} + J^{-4/3} \mathbb{I}_{\mathbf{b}} - \frac{2}{9} \operatorname{tr} \bar{\mathbf{b}}^2 \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g}^{-1} \\ &\quad - \frac{2}{3} \left[ \operatorname{dev} \bar{\mathbf{b}}^2 \otimes \mathbf{g}^{-1} + \mathbf{g}^{-1} \otimes \operatorname{dev} \bar{\mathbf{b}}^2 \right].\end{aligned}$$

Innerhalb dieser Arbeit ist die Allgemeingültigkeit der obigen Beziehungen nicht beibehalten worden, vielmehr wird in der jeweiligen Konfiguration ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, d.h. für die Beschreibung in der Referenzkonfiguration gilt  $G^{ij} = \delta^{ij}$  bzw. in der Momentankonfiguration  $g^{ij} = \delta^{ij}$ .

### B.3 Speicherdarstellung eines Tensors vierter Stufe

Für die Materialtensoren  $\mathbb{C}$  der Referenz- bzw.  $\mathfrak{c}$  der Momentankonfiguration, die sich aus Anteilen der dyadischen Produkte der zweistufigen Basistensoren  $\mathbf{Z}_i$  bzw.  $\overline{\mathbf{Z}}_i$  und aus Anteilen der Ableitungen der Basistensoren nach  $\mathbf{C}$  bzw.  $\mathbf{g}$  zusammensetzen, ist für die numerische Umsetzung eine geeignete Darstellung in Matrixschreibweise anzugeben. Hierzu wird beispielhaft das Inkrement des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors  $\dot{\mathbf{S}}$  betrachtet, das sich aus dem Inkrement des Greenschen Verzerrungstensors  $\dot{\mathbf{E}}$  mit Hilfe des Materialtensors in der Form

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}}$$

bzw. als

$$\dot{S}^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = \left( \mathbb{C}^{ijklm} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_l \otimes \mathbf{G}_m \right) : \left( \dot{E}_{rs} \mathbf{G}^r \otimes \mathbf{G}^s \right) = \mathbb{C}^{ijklm} \dot{E}_{lm} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j$$

und damit

$$\dot{S}^{ij} = \mathbb{C}^{ijklm} \dot{E}_{lm}.$$

Diese Beziehung kann in der Matrixform

$$\begin{pmatrix} \dot{S}^{11} \\ \dot{S}^{22} \\ \dot{S}^{33} \\ \dot{S}^{12} \\ \dot{S}^{23} \\ \dot{S}^{13} \\ \dot{S}^{21} \\ \dot{S}^{32} \\ \dot{S}^{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{1111} & \mathbb{C}^{1122} & \mathbb{C}^{1133} & \mathbb{C}^{1112} & \mathbb{C}^{1123} & \mathbb{C}^{1113} & \mathbb{C}^{1121} & \mathbb{C}^{1132} & \mathbb{C}^{1131} \\ \mathbb{C}^{2211} & \mathbb{C}^{2222} & \mathbb{C}^{2233} & \mathbb{C}^{2212} & \mathbb{C}^{2223} & \mathbb{C}^{2213} & \mathbb{C}^{2221} & \mathbb{C}^{2232} & \mathbb{C}^{2231} \\ \mathbb{C}^{3311} & \mathbb{C}^{3322} & \mathbb{C}^{3333} & \mathbb{C}^{3312} & \mathbb{C}^{3323} & \mathbb{C}^{3313} & \mathbb{C}^{3321} & \mathbb{C}^{3332} & \mathbb{C}^{3331} \\ \mathbb{C}^{1211} & \mathbb{C}^{1222} & \mathbb{C}^{1233} & \mathbb{C}^{1212} & \mathbb{C}^{1223} & \mathbb{C}^{1213} & \mathbb{C}^{1221} & \mathbb{C}^{1232} & \mathbb{C}^{1231} \\ \mathbb{C}^{2311} & \mathbb{C}^{2322} & \mathbb{C}^{2333} & \mathbb{C}^{2312} & \mathbb{C}^{2323} & \mathbb{C}^{2313} & \mathbb{C}^{2321} & \mathbb{C}^{2332} & \mathbb{C}^{2331} \\ \mathbb{C}^{1311} & \mathbb{C}^{1322} & \mathbb{C}^{1333} & \mathbb{C}^{1312} & \mathbb{C}^{1323} & \mathbb{C}^{1313} & \mathbb{C}^{1321} & \mathbb{C}^{1332} & \mathbb{C}^{1331} \\ \mathbb{C}^{2111} & \mathbb{C}^{2122} & \mathbb{C}^{2133} & \mathbb{C}^{2112} & \mathbb{C}^{2123} & \mathbb{C}^{2113} & \mathbb{C}^{2121} & \mathbb{C}^{2132} & \mathbb{C}^{2131} \\ \mathbb{C}^{3211} & \mathbb{C}^{3222} & \mathbb{C}^{3233} & \mathbb{C}^{3212} & \mathbb{C}^{3223} & \mathbb{C}^{3213} & \mathbb{C}^{3221} & \mathbb{C}^{3232} & \mathbb{C}^{3231} \\ \mathbb{C}^{3111} & \mathbb{C}^{3122} & \mathbb{C}^{3133} & \mathbb{C}^{3112} & \mathbb{C}^{3123} & \mathbb{C}^{3113} & \mathbb{C}^{3121} & \mathbb{C}^{3132} & \mathbb{C}^{3131} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \dot{E}_{33} \\ \dot{E}_{12} \\ \dot{E}_{23} \\ \dot{E}_{13} \\ \dot{E}_{21} \\ \dot{E}_{32} \\ \dot{E}_{31} \end{pmatrix}$$

geschrieben werden.

Mit der Definition der Matrizen der wesentlichen Komponenten des Inkrementes des Spannungs- bzw. Verzerrungstensors in der Form

$$\underline{\dot{S}} := \begin{pmatrix} \dot{S}^{11} \\ \dot{S}^{22} \\ \dot{S}^{33} \\ \dot{S}^{12} \\ \dot{S}^{23} \\ \dot{S}^{13} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\dot{E}} := \begin{pmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \dot{E}_{33} \\ 2 \dot{E}_{12} \\ 2 \dot{E}_{23} \\ 2 \dot{E}_{13} \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

ergibt sich aufgrund der Symmetrie  $\dot{S}^{ij} = \dot{S}^{ji}$  und  $\dot{E}_{ij} = \dot{E}_{ji}$  die Darstellung

$$\underline{\dot{S}} = \underline{\mathbb{C}} \underline{\dot{E}}. \quad (\text{B.6})$$

Hierbei erhält die Materialmatrix  $\underline{\mathbb{C}}$  die Form

$$\underline{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{1111} & \mathbb{C}^{1122} & \mathbb{C}^{1133} & \frac{\mathbb{C}^{1112} + \mathbb{C}^{1121}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{1123} + \mathbb{C}^{1132}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{1113} + \mathbb{C}^{1131}}{2} \\ \mathbb{C}^{2211} & \mathbb{C}^{2222} & \mathbb{C}^{2233} & \frac{\mathbb{C}^{2212} + \mathbb{C}^{2221}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{2223} + \mathbb{C}^{2232}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{2213} + \mathbb{C}^{2231}}{2} \\ \mathbb{C}^{3311} & \mathbb{C}^{3322} & \mathbb{C}^{3333} & \frac{\mathbb{C}^{3312} + \mathbb{C}^{3321}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{3323} + \mathbb{C}^{3332}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{3313} + \mathbb{C}^{3331}}{2} \\ \mathbb{C}^{1211} & \mathbb{C}^{1222} & \mathbb{C}^{1233} & \frac{\mathbb{C}^{1212} + \mathbb{C}^{1221}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{1223} + \mathbb{C}^{1232}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{1213} + \mathbb{C}^{1231}}{2} \\ \mathbb{C}^{2311} & \mathbb{C}^{2322} & \mathbb{C}^{2333} & \frac{\mathbb{C}^{2312} + \mathbb{C}^{2321}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{2323} + \mathbb{C}^{2332}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{2313} + \mathbb{C}^{2331}}{2} \\ \mathbb{C}^{1311} & \mathbb{C}^{1322} & \mathbb{C}^{1333} & \frac{\mathbb{C}^{1312} + \mathbb{C}^{1321}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{1323} + \mathbb{C}^{1332}}{2} & \frac{\mathbb{C}^{1313} + \mathbb{C}^{1331}}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Für die Speicherung der symmetrischen Materialmatrix  $\underline{\mathbb{C}}$  kann die Column-Heigh-Technik benutzt werden, bei der die Matrix als Vektor in gepackter Form

$$\underline{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & D_4 & D_7 & D_{11} & D_{16} \\ & D_3 & D_5 & D_8 & D_{12} & D_{17} \\ & & D_6 & D_9 & D_{13} & D_{18} \\ & & & D_{10} & D_{14} & D_{19} \\ & & & & D_{15} & D_{20} \\ & & & & & D_{21} \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

abgespeichert wird. Ein Vergleich der Darstellungen (B.7) und (B.8) liefert sofort die Werte der Einträge  $D_1 \dots D_{21}$ .



# Anhang C

## Bezeichnungen

In diesem Kapitel des Anhangs wird die zum Verständnis erforderliche, wesentliche Notation zusammengefaßt. In den einzelnen Abschnitten treten weitere Bezeichnungen auf, die dort erklärt sind und für die nachfolgenden Abschnitte und Kapitel keine Bedeutung haben.

Bei der Wahl der Notation konnte nicht in jedem Fall das Auftreten mehrerer Bedeutungen für eine Bezeichnung unterbleiben, da eine Überfrachtung mit Indizes vermieden werden sollte. Eine Liste dieser Doppelbedeutungen ist am Ende der Übersicht angegeben.

Notation	Bedeutung
<b>Skalare, Vektoren, Tensoren, Matrizen</b>	
$\alpha, \beta, \dots$	Darstellung von Skalaren durch kleine griechische Buchstaben
$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \dots$	Darstellung von Vektoren durch fette kleine lateinische Buchstaben (Ausnahme: $\mathbf{X}$ für den Ortsvektor des materiellen Punktes zur Referenzzeit $t_0$ ).
$\mathbf{S}, \mathbf{C}, \mathbf{F}, \dots$	Darstellung von Tensoren zweiter Stufe durch fette große lateinische Buchstaben (Ausnahme: $\mathbf{b}$ für den Links-Cauchy-Green-Tensor).
$\mathbf{1}, \mathbf{0}$	Zweistufiger Einheits- bzw. Nulltensor
$\mathbb{C}, \mathbb{c}, \mathbb{P}, \mathbb{Z}, \dots$	Darstellung von Tensoren vierter Stufe durch Hinzufügen eines Aufstriches im Buchstaben an geeigneter Stelle
$\mathbb{I}, \mathbb{O}$	Vierstufiger Einheits- bzw. Nulltensor

### Indizes

Index  $t_0, o$       Bezug auf die Größen der Referenzkonfiguration zur Zeit  $t_0$

---

Index $t$	Bezug auf die Größen der Momentankonfiguration zur Zeit $t$
Index $s$	Abhängigkeit von der Designvariablen $s$
Index $esz$	Kennzeichnung der Größen des ebenen Spannungszustandes
Index $h$	Kennzeichnung diskreter Größen
Index $(i)$	Kennzeichnung des Anteils des $i$ -ten finiten Elementes an der kontinuumsmechanischen Größe
Index $D$	Kennzeichnung des deviatorischen Anteils der kontinuumsmechanischen Größe
Index $K$	Kennzeichnung des Kugeltensoranteils der kontinuumsmechanischen Größe
$\overline{\{\bullet\}}$	Kennzeichnung des isochoren Anteils der kontinuumsmechanischen Größe

---

### Operatoren

Für die Vektoren  $\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i$  und die Tensoren  $\mathbf{b} = b_j^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j$  werden die nachfolgend angegebenen Operatoren eingeführt. Für die Darstellung in den Größen der Referenzkonfiguration treten die entsprechenden materiellen Größen auf.

tr	Spur-Operator $\text{tr } \mathbf{b} = b_i^i$
det	Determinanten-Operator
Div	materieller Divergenz-Operator
div	räumlicher Divergenz-Operator
Grad	materieller Gradienten-Operator
grad	räumlicher Gradienten-Operator
dev	Deviator der kontinuumsmechanischen Größe
	$\text{dev}\{\bullet\} = \{\bullet\} - \frac{1}{3} \text{tr}\{\bullet\} \mathbf{1}$
$\frac{D}{Dt}$	materielle Zeitableitung
$L_{\mathbf{v}}(\bullet)$	Lie-Ableitung einer kontinuumsmechanischen Größe

---

### Vektorräume, Basis, Metrik

$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^3$	Vektorraum der Zahlentripel
$P$	Raumpunkt des Euklidischen Punktraumes $P \in \mathbb{E}^3$
$\mathbb{E}^3$	Euklidischer Vektorraum (mit Bezugspunkt, Basis)
$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$	Raumfeste kartesische Basis zur Zeit $t$
$\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$	Raumfeste kartesische Basis zur Referenzzeit $t_0$
$\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$	Beliebige kovariante Basis zur Zeit $t$

---

$\{\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3\}$	Zugehörige kontravariante Basis $\mathbf{g}^i = g^{ik} \mathbf{g}_k$
$\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3\}$	Beliebige kovariante Basis zur Referenzzeit $t_0$
$\{\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3\}$	Zugehörige kontravariante Basis $\mathbf{G}^A = G^{AB} \mathbf{G}_B$
$g^{ij}, g_{ij}$	Ko- und kontravariante Metrikkoeffizienten zur Zeit $t$ $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ , $g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j$ und $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$
$\mathbf{g} = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$	Metriktensor der Momentankonfiguration zur Zeit $t$
$G^{AB}, G_{AB}$	Ko- und kontravariante Metrikkoeffizienten zur Zeit $t_0$ $G_{AB} = \mathbf{G}_A \cdot \mathbf{G}_B$ , $G^{AB} = \mathbf{G}^A \cdot \mathbf{G}^B$ und $G^{AB} G_{BC} = \delta_C^A$
$\mathbf{G} = G^{AB} \mathbf{G}_A \otimes \mathbf{G}_B$	Metriktensor der Referenzkonfiguration zur Referenzzeit $t_0$

---

### Parameterräume

$t, t_0$	beliebiger Zeitpunkt $t$ , Referenzzeitpunkt $t_0 = 0$
$\mathcal{T}_t$	Eindimensionaler Raum der Zeitpunkte $\mathcal{T}_t = \mathbb{R}$
$\{\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3\}$	Konvektive Koordinaten
$\mathcal{T}_\Theta$	Dreidimensionaler Raum der konvektiven Koordinaten $\mathcal{T}_\Theta = [0, 1]^3$
$s, s_0$	Designvariable, Startwert der Designvariablen
$\mathcal{T}_s$	Eindimensionaler Raum der Designvariablen $\mathcal{T}_s = \mathbb{R}$

---

### Materieller Körper

$\mathcal{B}$	Kontinuum (materieller Körper im Anschauungsraum ohne Metrik)
$\mathcal{M}$	Materieller Punkt des Kontinuums $\mathcal{M} \in \mathcal{B}$
$\partial\mathcal{B}$	Berandung des Kontinuums $\partial\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}_\sigma \cup \partial\mathcal{B}_u$ , $\partial\mathcal{B}_\sigma \cap \partial\mathcal{B}_u = \emptyset$
$\partial\mathcal{B}_u$	Teil der Berandung von $\mathcal{B}$ mit vorgegebenen Verschiebungsfeld
$\partial\mathcal{B}_\sigma$	Teil der Berandung von $\mathcal{B}$ mit vorgegebener Oberflächenspannung
$B$	Raum aller materieller Körper

---

### Bewegung, Konfiguration

$\chi$	Abbildung der materiellen Punkte $\mathcal{M} \in \mathcal{B}$ und der Zeit $t \in \mathcal{T}_t$ auf die Raumpunkte $P \in \mathbb{E}^3$ mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}$
$\chi_0, \chi_t$	Abbildung der materiellen Punkte $\mathcal{M}$ auf die Raumpunkte $P$ zur Referenzzeit $t_0$ bzw. zu einem bestimmten festgehaltenen Zeitpunkt $t$ .
$\Phi_{t,t_0}$	Abbildung der Referenzkonfiguration $\mathbf{B}_0$ auf die Momentankonfiguration $\mathbf{B}_t$
$\omega$	Abbildung der konvektiven Koordinaten $(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$ auf die materiellen Körper.

	In Kapitel 5 um die Abhängigkeit von der Designvariablen erweitert.
$\psi$	Abbildung der konvektiven Koordinaten $(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$ und der Zeit $t$ auf die kartesischen Koordinaten der Konfiguration des materiellen Körpers.
	In Kapitel 5 um die Abhängigkeit von der Designvariablen erweitert.
$\mathbf{B}_t$	Momentankonfiguration des materiellen Körpers $\mathcal{B}$ zum beliebigen Zeitpunkt $t$ , d.h. $\mathbf{B}_t = \chi_t(\mathcal{B})$ , mit der Oberfläche $\partial\mathbf{B}_t$ aus den Anteilen $\partial\mathbf{B}_{t\sigma}$ mit vorgegebener Spannung und $\partial\mathbf{B}_{tu}$ mit vorgegebener Verschiebung und $\partial\mathbf{B}_t = \partial\mathbf{B}_{t\sigma} \cup \partial\mathbf{B}_{tu}$ , $\partial\mathbf{B}_{t\sigma} \cap \partial\mathbf{B}_{tu} = \emptyset$
$\mathbf{B}_o$	Referenzkonfiguration des materiellen Körpers $\mathcal{B}$ zur Referenzzeit $t_o$ , d.h. $\mathbf{B}_o = \chi_o(\mathcal{B})$ , mit der Oberfläche $\partial\mathbf{B}_o$ aus den Anteilen $\partial\mathbf{B}_{o\sigma}$ mit vorgegebener Spannung und $\partial\mathbf{B}_{ou}$ mit vorgegebener Verschiebung und $\partial\mathbf{B}_o = \partial\mathbf{B}_{o\sigma} \cup \partial\mathbf{B}_{ou}$ , $\partial\mathbf{B}_{o\sigma} \cap \partial\mathbf{B}_{ou} = \emptyset$
$\mathbf{x}$	Ortsvektor eines materiellen Punktes zu dem beliebigen Zeitpunkt $t$ , d.h. $\mathbf{x} = \chi(\mathcal{M}, t) = \chi_t(\mathcal{M})$ .
$\mathbf{X}$	Ortsvektor eines materiellen Punktes zur Referenzzeit $t_o$ , d.h. $\mathbf{X} = \chi(\mathcal{M}, t_o) = \chi_{t_o}(\mathcal{M}) = \chi_o(\mathcal{M})$
$x^1, x^2, x^3$	Koeffizienten von $\mathbf{x}$ bzgl. der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$
$X^1, X^2, X^3$	Koeffizienten von $\mathbf{X}$ bzgl. der Basis $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$
$\rho, \rho_o$	Massendichte in der Momentan- bzw. der Referenzkonfiguration
$\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{v}$	Geschwindigkeit
$\ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{a}$	Beschleunigung
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor

### Verzerrungen

$\mathbf{F}$	Materieller Deformationsgradient $\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{x}$
$J$	Jakobische Funktionaldeterminante $J = \det \mathbf{F}$
$\mathbf{H}$	Materieller Verschiebungsgradient $\mathbf{H} = \text{Grad } \mathbf{x}$
$\mathbf{U}$	Rechts-Streck-Tensor (symmetrischer, positiv definiten Tensor)
$\mathbf{V}$	Links-Streck-Tensor (symmetrischer, positiv definiten Tensor)
$\mathbf{R}$	Drehtensor (eigentlich orthogonaler Tensor)
$\mathbf{C}$	Rechts-Cauchy-Green-Tensor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$
$\mathbf{b}$	Links-Cauchy-Green-Tensor $\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$
$\mathbf{E}$	Greenscher Verzerrungstensor $2 \mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{1}$
I, II, III	Invarianten eines zweistufigen Tensors (gekennzeichnet durch den Index), weitere Bezeichnungen $I_1, I_2, I_3$ und $i_{\mathbf{C}}$ (bzw. $i_{\mathbf{b}}$ ) für die Invarianten von $\mathbf{C}$ (bzw. $\mathbf{b}$ )



---

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$       Eigenwerte des Rechts- und Links-Streck-Tensors  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$

---

### Längen-, Flächen- und Volumenelemente

$d\mathbf{x}, d\mathbf{X}$       Längenelemente  $d\mathbf{x}$  in der Momentankonfiguration und  $d\mathbf{X}$  in der Referenzkonfiguration mit  $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$

$dv, dV$       Volumenelemente  $dv$  in der Momentankonfiguration und  $dV$  in der Referenzkonfiguration mit  $dv = \det \mathbf{F} dV$

$d\mathbf{a}, d\mathbf{A}$       Flächenelemente  $d\mathbf{a}$  in der Momentankonfiguration und  $d\mathbf{A}$  in der Referenzkonfiguration mit  $d\mathbf{a} = \det \mathbf{F}(\mathbf{F}^T)^{-1}d\mathbf{A}$

---

### Zeitliche Ableitungen

$\dot{\mathbf{F}}$       Zeitliche Ableitung des materiellen Deformationsgradienten

$\mathbf{l}$       Räumlicher Geschwindigkeitsgradient  $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$

$\mathbf{d}$       Räumlicher Verzerrungsgeschwindigkeitstensor  $2 \mathbf{d} = \mathbf{l} + \mathbf{l}^T$

$\dot{\mathbf{T}}, \dot{\boldsymbol{\tau}}, \dot{\mathbf{S}}$       Zeitliche Änderung der Spannungstensoren

$\dot{\mathbf{C}}$       Zeitliche Änderung des Rechts-Cauchy-Green-Tensors

---

### Spannungs- und Materialtensoren

$\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{t}}_o$       Eingeprägte Oberflächenkraftdichte

$\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{k}}_o$       Eingeprägte Volumenkräfte

$\mathbf{T}$       Cauchy'scher Spannungstensor

$\boldsymbol{\tau}$       Kirchhoff-Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau} = J \mathbf{T}$

$\mathbf{P}$       1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor  $\mathbf{P} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T}$

$\mathbf{S}$       2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor  $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}$

$\mathbb{C}$       Materialtensor der Referenzkonfiguration

$\boldsymbol{\alpha}$       Materialtensor der Momentankonfiguration

$\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}$       Basistensoren für die Darstellung der Spannungs- und Materialtensoren

$\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}$       vierstufige Tensoren der Ableitung der Basistensoren nach  $\mathbf{C}$  bzw.  $\mathbf{g}$

$\underline{\mathbf{A}}, \bar{\underline{\mathbf{A}}}$       Matrix der Koeffizienten der Ableitung der Invarianten nach  $\mathbf{C}$  bzw.  $\mathbf{g}$  bzgl. der Basis  $\mathbf{Z}$

$\alpha_m, \beta_{lm}$       Koeffizienten bei der Darstellung der Spannungs- und Materialtensoren

---

### Materialparameter

$E$       Elastizitätsmodul

$\nu$       Querkontraktionszahl

---

$\mu$	Schubmodul
$\mu_p, \alpha_p$	Materialparameter im Ogden-Materialgesetz

---

### Potentialfunktionen

$W$	Formänderungsenergiefunktion $W = \overline{W} + U$
$\Psi$	freie Helmholtzenergie mit $W = \rho_o \Psi$
$\overline{W}$	Anteil der isochoren Deformation an der Formänderungsenergiefunktion
$U$	Anteil der volumetrischen Deformation an der Formänderungsenergiefunktion $U = \hat{U}(J)$
$\check{W}, \check{\overline{W}}$	Formänderungsenergiefunktion in Abhängigkeit der Invarianten
$\tilde{W}, \tilde{\overline{W}}$	Formänderungsenergiefunktion in Abhängigkeit der Eigenwerte
$\Pi$	Gesamte Potentielle Energie
$\Pi_a$	Potential der äußeren Kräfte
$\theta$	Feldgröße für das erweiterte Energiefunktional
$p$	Hydrostatischer Druck
$\Pi_L$	erweitertes Energiefunktional (Lagrangefunktional)
$g, G$	schwache Form des Gleichgewichts
$\eta$	Testfunktion

---

### Finite-Elemente-Methode, diskrete Größen

$g_h, G_h$	diskrete Form der schwachen Form des Gleichgewichts
$\underline{g}, \underline{G}$	Matrixform der schwachen Form des Gleichgewichts
$\underline{V}$	globaler Knotenverschiebungsvektor
$\underline{K}_T$	tangentiale Steifigkeitsmatrix
$\xi_1, \xi_2, \xi_3$	Lokale Koordinaten des isoparametrischen Konzepts
$N^k$	Ansatzfunktion des $k$ -ten Elementknotens im isoparametrischen Konzept

---

### Sensitivitätsanalyse

$\varphi$	Kontinuierliche Problemfunktion $\varphi = \hat{\varphi}(s, \hat{\mathbf{u}}(s))$
-----------	---

---

### Doppelbedeutung in der Notation

- $\{\bullet\}$  1.) Kennzeichnung isochorer Größen bei der multiplikativen Aufspaltung des materiellen Deformationsgradienten nach (2.20), d.h. insbesondere  $\overline{W}, \overline{I}_k, \overline{\lambda}_i$

- 
- 2.) Darstellung der Größen an der Stelle der Linearisierung
  - 3.) Vorgegebene Größen in den Bilanzsätzen, d.h. die vorgegebene eingeprägte Volumenkraftdichte  $\bar{\mathbf{k}}$  bzw.  $\bar{\mathbf{k}}_0$  und die vorgegebene eingeprägte Oberflächenkraftdichte  $\bar{\mathbf{t}}$  bzw.  $\bar{\mathbf{t}}_0$ .
- n**
- 1.) Äußerer Normalenvektor an die Oberfläche  $\partial\mathbf{B}_t$  der Momentankonfiguration  $\mathbf{B}_t$
  - 2.) Eigenvektor  $\mathbf{n}_i$  des Links-Streck-Tensors  $\mathbf{V}$
- N**
- 1.) Äußerer Normalenvektor an die Oberfläche  $\partial\mathbf{B}_0$  der Referenzkonfiguration  $\mathbf{B}_0$
  - 2.) Eigenvektor  $\mathbf{N}_i$  des Rechts-Streck-Tensors  $\mathbf{U}$
- g, G**
- 1.) Metriktensor der Momentan- bzw. Referenzkonfiguration
  - 2.) Basisvektoren  $\mathbf{g}_i$  (bzw.  $\mathbf{G}_A$ ) der Momentan- (bzw. Referenz-) konfiguration
- g**
- 1.) Schwache Form des Gleichgewichts in den Größen der Momentankonfiguration
  - 2.) Nebenbedingung  $g_i$  der mathematischen Problemformulierung
- Index o
- 1.) Kennzeichnung der Größen der Referenzzeit  $t_0$
  - 2.) Kennzeichnung des Startwertes  $s_0$  der Designvariablen, der keinerlei Bezug zu der physikalischen Größe Zeit besitzt



# Literaturverzeichnis

- [1] H. M. Adelman und R. T. Haftka. Sensitivity analysis of discrete structural systems. *AIAA Journal*, 24:823–832, 1988.
- [2] J. S. Arora. *Introduction to Optimum Design*. McGraw–Hill Book Company, New York, 1989.
- [3] J. S. Arora und J. E. B. Cardoso. A design sensitivity analysis principle and its implementation into ADINA. *Computers and Structures*, 32:691–705, 1989.
- [4] P. Arumugam, P. Neittaanmäki und K. Salmenjoki. Sensitivity analysis for the design of an elektromagnet. Technischer Bericht, Preprint University of Jyväskylä, 1988.
- [5] E. Atrek, R. H. Gallagher, K. M. Ragsdell und O. C. Zienkiewicz, Hrsg. *New Directions in Optimum Structural Design*. J. Wiley, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1984.
- [6] F. J. Barthold. The contact problem of elastic bodies: theoretical and numerical aspects. Technischer Bericht, Brunel University, Uxbridge, 1987.
- [7] F.-J. Barthold. Optimierung von Strukturen aus gummiartigen Materialien – Beispielberechnungen. Technischer Bericht 94/2, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 1994.
- [8] F.J. Barthold, A. Becker, A. Falk und W. Rust. Zum Einfluß der Netzadaption bei der Formoptimierung. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, zur Veröffentlichung eingereicht.
- [9] K. J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden, Matrizen und lineare Algebra. Die Methode der finiten Elemente. Lösung von Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen; Deutsche Übersetzung von P. Zimmermann*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [10] A. Becker. Strukturoptimierung stabilitätsgefährdeter Systeme mittels analytischer Gradientenermittlung. Technischer Bericht F 92/2, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1992.
- [11] A. Becker und F.-J. Barthold. Strukturoptimierung stabilitätsgefährdeter Systeme. In E. Stein und W. Wunderlich, Hrsg., *Finite Elemente – Anwendungen in der Baupraxis* –. W. Ernst & Sohn, Berlin, 1991.

- [12] A. Becker und V. Berkhahn. Querschnittsoptimierung und Stabilitätsuntersuchungen von Stahltragwerken auf der Grundlage des Traglastverfahrens. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 69:T227–T229, 1989.
- [13] A. Becker, V. Berkhahn und E. Stein. Weight optimization of steel frames with consideration of geometrical and material nonlinearities. In H. A. Eschenauer und G. Thierauf, Hrsg., *Discretization Methods and Structural Optimization - Procedures and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 32–39, 1989.
- [14] A. D. Belegundu und J. S. Arora. A study of mathematical programming methods for structural optimization, part I: Theory, part II: Numerical results. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21:1583–1623, 1985.
- [15] V. Berkhahn. Optimale Formgebung von Stabtragwerken mit Nichtlinearitäten in der Zielfunktion und in den Restriktionen unter Verwendung der Finite-Element-Methode. Technischer Bericht F 88/2, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1988.
- [16] D. Bischoff. Mathematische Formulierung und numerische Methoden für Kontaktprobleme auf der Grundlage von Extremalprinzipien. Technischer Bericht F 88/5, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1988.
- [17] D. Bischoff und G. Brand. Optimierungsverfahren in der Strukturmechanik. In E. Stein und D. Bischoff, Hrsg., *Geometrisch/physikalisch nichtlineare Probleme – Struktur und Algorithmen –; GAMM-Seminar; Hannover*. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1–12, 1985.
- [18] P. J. Blatz und W. L. Ko. Application of finite elasticity theory to the deformation of rubbery materials. *Trans. Soc. Rheology*, 6:223–251, 1962.
- [19] K.-U. Bletzinger. Formoptimierung von Flächentragwerken. Technischer Bericht 11, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, 1990.
- [20] K.-U. Bletzinger. Extended method of moving asymptotes based on second order informations. *Structural Optimization*, 5:175–183, 1993.
- [21] K.-U. Bletzinger, A. Kimmich und E. Ramm. Efficient modeling in shape optimal design. *Computing Systems in Engineering*, 2:483–496, 1991.
- [22] M. Bremicker. Ein Konzept zur Topologie- und Gestaltoptimierung von Bauteilen. In H. H. Müller-Slany, Hrsg., *Beiträge zur Maschinentechnik: Berichte aus Forschung und Praxis*, Siegen, 1990.
- [23] J. Céa. Adaption de la méthode du gradient à un problème d'identification de domaine. In R. Glowinski und J. L. Lions, Hrsg., *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, Part 2*, Nummer 11 in Lecture Notes in Computer Science, Berlin, 391–402, 1974. Springer-Verlag.

- [24] J. Céa. Une méthode numérique pour la recherche d'un domaine optimal. In R. Glowinski und J. L. Lions, Hrsg., *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, Part 2*, Nummer 134 in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Berlin, 245–257, 1976. Springer-Verlag.
- [25] J. Céa. Numerical methods of shape optimal design. In Haug and Céa [50], 1049–1087.
- [26] K. K. Choi und J. L. T. Santos. Design sensitivity analysis of non-linear structural systems. part I: Theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:2039–2055, 1987.
- [27] P. G. Ciarlet und G. Geymonat. Sur les lois de comportement en élasticité non-linéaire compressible. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II*, 295:423–426, 1982.
- [28] Ph.G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity I: Three-dimensional Elasticity*. North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [29] R. de Boer. *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer-Verlag, 1982.
- [30] K. Dems und Z. Mróz. Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis, variation of material parameters within fixed domain. *International Journal of Solids & Structures*, 19:677–692, 1983.
- [31] K. Dems und Z. Mróz. Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis, structure shape variation. *International Journal of Solids & Structures*, 20:527–552, 1984.
- [32] K. Dems und Z. Mróz. Variational approach to first- and second-order sensitivity analysis of elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21:637–661, 1985.
- [33] T.C. Doyle und J.L. Ericksen. Applied mechanics. In *Nonlinear Elasticity*, 53–115. Academic Press, New York, 1956.
- [34] G. A. Duffett und B. D. Reddy. The analysis of incompressible hyperelastic bodies by the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 41:105–120, 1983.
- [35] H. Eschenauer. Rechnerische und experimentelle Untersuchungen zur Struktur-optimierung von Bauweisen. Forschungsvorhaben der Deutschen Forschungsgemeinschaft (1980 –1984). Technischer Bericht, Institut für Mechanik und Regelungstechnik, Universität-Gesamthochschule Siegen, 1985.
- [36] H. Eschenauer, J. Koski und A. Osyczka. *Multicriteria Design Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990.
- [37] H. Eschenauer, P. U. Post und M. Bremicker. Einsatz der Optimierungsprozedur SAPOP zur Auslegung von Bauteilkomponenten. *Bauingenieur*, 63:515–526, 1988.

- [38] H. Eschenauer und E. Schäfer. Über die Lösung von Strukturoptimierungsaufgaben mit Diskretheitsforderungen. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 70:279–281, 1990.
- [39] G. Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, London, 2. Ausgabe, 1988.
- [40] C. Fleury. Structural weight optimization by dual methods of convex programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14:1761–1783, 1979.
- [41] C. Fleury. First and second order convex approximation strategies in structural optimization. *Structural Optimization*, 1:3–10, 1989.
- [42] C. Fleury und V. Braibant. Structural optimization – a new dual method using mixed variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23:409–428, 1986.
- [43] C. Fleury und G. Sander. Dual methods for optimizing finite element flexural systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 37:249–275, 1983.
- [44] P. E. Gill, W. Murray und M. H. Wright. *Practical Optimization*. Academic Press, London, 1981.
- [45] D. E. Grierson. Computer-automated design of building frameworks. In C. A. Mota Soares, Hrsg., *Computer Aided Optimal Design; Structural and Mechanical Systems*. Tróia, Portugal, 322–338, 1986.
- [46] F. Gruttmann und R. L. Taylor. Theory and finite element formulation of rubberlike membrane shells using principal stretches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35:1111–1126, 1992.
- [47] R.T. Haftka und R.V. Grandhi. Structural shape optimization - a survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 57:91–106, 1986.
- [48] S. P. Han. A globally convergent method for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 22:297–309, 1977.
- [49] J. Haslinger und P. Neittaanmäki. *Finite Element Approximation for Optimal Shape Design - Theory and Applications*. J. Wiley, Chichester New York Brisbane Toronto Singapore, 1988.
- [50] E. J. Haug und J. Céa, Hrsg. *Optimization of Distributed Parameter Structures, Parts I & II*, Nato Advanced Study Institute Series, Series E, Alphen van den Rijn, 1981. Sijthoff & Noordhoff.
- [51] E. J. Haug, K. K. Choi und V. Komkov. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press, Orlando, 1986.
- [52] T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, London, 1987.



- [53] T. J. R. Hughes und K. S. Pister. Consistent linearization in mechanics of solids and structures. *Computers and Structures*, 8:391–397, 1978.
- [54] S. Kimmich. Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen. Technischer Bericht 12, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, 1990.
- [55] K. H. Lambertz. Traglastberechnungen von Faltwerken mit elastoplastischen Deformationen. Technischer Bericht F 89/2, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1989.
- [56] D. G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison–Wesley Publishing Company, 2. Ausgabe, 1983.
- [57] R. Mahnken. Duale Methoden für nichtlineare Probleme in der Strukturmechanik. Technischer Bericht F 92/3, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1992.
- [58] L. E. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1969.
- [59] J. E. Marsden und T. J. R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1983.
- [60] C. Miehe. Zur numerischen Behandlung thermomechanischer Prozesse. Technischer Bericht F 88/6, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1988.
- [61] C. Miehe. Kanonische Modelle multiplikativer Elasto–Plastizität. Thermodynamische Formulierung und numerische Implementation. Technischer Bericht F 93/1, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1993.
- [62] M. Mooney. A theory of elastic deformations. *Journal of Applied Physics*, 11:582–598, 1940.
- [63] K. N. Jr. Morman. The generalized strain measure with application to non-homogenous deformation in rubber-like solids. *Applied Mechanics*, 53:726–728, 1985.
- [64] N. Müller-Hoeppe. Beiträge zur Theorie und Numerik finiter inelastischer Deformationen. Technischer Bericht F 90/4, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1990.
- [65] P. Neittaanmäki und T. Tiihonen. Sensitivity analysis for a class of optimal shape design problems. Technischer Bericht, University of Jyväskylä, 1985.
- [66] R. W. Ogden. Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiments for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 326:565–584, 1972.

- [67] R. W. Ogden. Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiments for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 328:567–583, 1972.
- [68] R. W. Ogden. Elastic deformations of rubberlike solids. In H. G. Hopkins und M. J. Sewell, Hrsg., *The Rodney Hill 60th Anniversary Volume*. Pergamon Press, 499–537, 1982.
- [69] R.W. Ogden. *Non-Linear Elastic Deformations*. Ellis Horwood und John Wiley, Chichester, 1984.
- [70] A. Osyczka. *Multicriterion Optimization in Engineering*. Ellis Horwood, 1984.
- [71] H. Parisch. Efficient non-linear finite element shell formulation involving large strains. *Engineering Computations*, 3:121–128, 1986.
- [72] L. Plank. Netzadaption und Mehrgitterverfahren für die numerische Behandlung von Faltwerken. Technischer Bericht F 90/3, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1990.
- [73] L. Plank, K.-H. Lambertz und D. Bischoff. INA-SP; INelastic Analysis of Shells and Plates; Programmdokumentation (Elementbibliothek, Algorithmen, Optimale Formgebung). Technischer Bericht, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 1987.
- [74] M. J. D. Powell. A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations. In G. A. Watson, Hrsg., *Numerical Analysis; Proceedings of the Biennial Conference, Held at Dundee, June 1977; Lecture Notes in Mathematics; Vol. 630*. Springer Verlag, Berlin, 144–157, 1978.
- [75] E. Ramm. Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente. Technischer Bericht Bericht Nr. 76-2, Habilitationsschrift. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1976.
- [76] I. Rechenberg. Evolution strategy: Nature's way of optimization. In H. W. Bergmann, Hrsg., *Optimization: Methods and Application, Possibilities and Limitations*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 106–126, 1989.
- [77] R. S. Rivlin. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 45:485ff, 1949.
- [78] R. S. Rivlin und J. L. Ericksen. Stress-deformation relations for isotropic materials. *J. Rational Mech. Anal.*, 4:323–425, 1955.
- [79] R. S. Rivlin und D. W. Saunders. *Phil. Trans. Royal Soc. London A.*, 243:251ff, 1951.
- [80] W. Rust. Mehrgitterverfahren und Netzadaption für lineare und nichtlineare statische FE-Berechnungen von Flächentragwerken. Technischer Bericht F 91/2, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1991.

- 
- [81] J. L. T. Santos und K. K. Choi. Sizing design sensitivity analysis of non-linear structural systems. Part II: Numerical method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:2097–2114, 1988.
- [82] K. Schittkowski. The nonlinear programming method of Wilson, Han and Powell with an augmented Lagrangian type line search function. *Numerische Mathematik*, 38:83–114 und 115–127, 1981.
- [83] K. Schittkowski. On the convergence of a sequential quadratic programming method with an augmented lagrangian line search function. *Math. Operationsforschung und Statistik, ser. Optimization*, 14,2:197–216, 1983.
- [84] K. Schittkowski, Hrsg. *COMETT–Seminar über Computerunterstützte Struktur-optimierung mit FE–Modellen*, 1988.
- [85] K. Schittkowski, Hrsg. *COMETT–Seminar über Computerunterstützte Struktur-optimierung*, 1990.
- [86] K. Schittkowski, Hrsg. *COMETT–Seminar über Computerunterstützte Struktur-optimierung*, 1993.
- [87] H.-P. Schwefel. *Numerische Optimierung von Computermodellen mittels der Evolutionsstrategie*. Birkhäuser Verlag, Stuttgart, Basel, 1977.
- [88] J. Simo und R. L. Taylor. Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. continuum basis and numerical algorithms. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 85:273–310, 1991.
- [89] J. C. Simo und J. E. Marsden. On the rotated stress tensor and the material version of the Doyle-Ericksen formula. Technischer Bericht, University of California, Berkley, 1983.
- [90] J. C. Simo und J. E. Marsden. Stress tensors, Riemannian metrics and the alternative description in elasticity. Technischer Bericht, University of California, Berkley, 1983.
- [91] J. C. Simo, R. L. Taylor und K. S. Pister. Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51:177–208, 1985.
- [92] J.C. Simo und K.S. Pister. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46:201–215, 1984.
- [93] W. Stadler. Multicriteria optimization in mechanics (a survey). *Appl. Mech. Review*, 37:277–286, 1984.
- [94] W. Stadler, Hrsg. *Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences*, New York, London, 1988. Plenum Press.

- [95] E. Stein und F. J. Barthold. Elastizitätstheorie. Technischer Bericht, Vorlesungsunterlagen, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover, 1991.
- [96] E. Stein, A. Becker und F.-J. Barthold. Structural optimization of beam structures including imperfections. In G. N. Pande und J. Middleton, Hrsg., *Numerical Methods in Engineering: Theory and Applications (NUMETA 90)*. Elsevier Applied Science, London, New York, 454–463, 1990.
- [97] T. Sussmann und K. J. Bathe. A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis. *Computers and Structures*, 26:357–409, 1987.
- [98] K. Svanberg. An algorithm for optimum structural design using duality. *Math. Prog. Study*, 20:161–177, 1982.
- [99] K. Svanberg. The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:359–373, 1987.
- [100] P. B. Thanedar, J. S. Arora und C. H. Tseng et. al. Performance of some SQP algorithms on structural optimization problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23:2187–2203, 1986.
- [101] T. C. T. Ting. Determination of  $\mathbf{c}^{1/2}$ ,  $\mathbf{c}^{-1/2}$  and more general tensor functions of  $\mathbf{c}$ . *Journal of Elasticity*, 15:319–323, 1985.
- [102] L. R. G. Treloar. *Trans. Faraday Soc.*, 39:241ff, 1943.
- [103] C. Truesdell und W. Noll. The nonlinear field theories of mechanics. In S. Flügge, Hrsg., *Handbuch der Physik III/3*. Springer-Verlag, 1965.
- [104] K.C. Valanis und R. F. Landel. The strain-energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios. *Journal of Applied Physics*, 38:2997–3002, 1967.
- [105] P. A. J. van den Bogert. Characteristics of the Mooney-Rivlin model for rubber-like materials. Technischer Bericht 25.2-89-08, TU Delft, 1989.
- [106] P. A. J. van den Bogert. Constitutive models for rubber-like materials. Technischer Bericht 25.2-89-05, TU Delft, 1989.
- [107] P. A. J. van den Bogert. Computational modelling of rubberlike materials. Technischer Bericht, TU Delft, 1991.
- [108] P. Wriggers. Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Element-Methode. Technischer Bericht F 88/4, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1988.

- 
- [109] T. M. Yao und K. K. Choi. 3-D shape optimal design and automatic finite element regridting. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:369–384, 1989.
- [110] G. Zhang. Einspielen und dessen numerische Behandlung für Flächentragwerke aus ideal plastischem bzw. kinematisch verfestigendem Material. Technischer Bericht F 92/1, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1992.
- [111] O. C. Zienkiewicz und R. L. Taylor. *The Finite Element Method, 4rd Ed.* McGraw Hill, London, 1988.
- [112] O. C. Zienkiewicz und J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:334–357, 1987.
- [113] J. P. Zolesio. Domain variational formulation for free boundary problems. In Haug and C ea [50], 1152–1194.
- [114] J. P. Zolesio. The material derivative (or speed) method for shape optimization. In Haug and C ea [50], 1089–1151.
- [115] J. Zowe. Nondifferentiable optimization – A motivation and a short introduction into the subgradient and the bundle concept. In K. Schittkowski, Hrsg., *Computational Mathematical Programming*. NATO ASI Series F: Computer and System Sciences, 1985.

## Lebenslauf

### Persönliches

Franz–Joseph Barthold	Jordanstraße 37, 30173 Hannover
Geburt:	14. 06. 1959 in Iburg, jetzt Bad Iburg, Kreis Osnabrück
Eltern:	Drogist Joseph Barthold und Hausfrau Christa Barthold, geb. Hagedorn
Ehefrau:	Sonderschullehrerin Silke Barthold, geb. Bodenburg
Kinder:	Katharina Rebekka, geb. 28. 01. 1991 Magdalena Rabea, geb. 24. 01. 1993

### Schule, Ausbildung, Beruf

1966 – 1969	Grundschule Glane, Kreis Osnabrück
1969 – 1978	Gymnasium (Niedersächsische Heimschule Iburg, jetzt Gymnasium Bad Iburg)
Juni 1978	Abitur
Okt. 1978 – Sep. 1979	Grundwehrdienst
1979 – 1986	Studium des Bauingenieurwesens, Universität Hannover
Okt. 1982 – Sep. 1987	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover
September 1986	Diplomhauptprüfung
Okt. 1986 – Sep. 1987	Numerical Analysis, Brunel University, Uxbridge, England
Sep. 1987 / Juli 1988	Examen und Ernennung zum Master of Science
Oktober 1987 – März 1988	Wissenschaftliche Hilfskraft (mit Diplom) am Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover
seit April 1988	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baumecha- nik und Numerische Mechanik der Universität Hannover

## Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover

In dieser Schriftenreihe bisher erschienene Berichte:

- S 73/1 Seminar über Thermodynamik und Kontinuumsmechanik, Hannover 1973
- F 75/1 „Die Spannungsberechnung im Rahmen der Finite-Element-Methode“, R.Ahmad, Dissertation, April 1975
- F 76/1 „Zur Theorie und Anwendung der Stoffgleichungen elastisch-plastisch-viskoser Werkstoffe“, H.Mentlein, Dissertation, April 1976
- S 77/1 Seminar über lineare und geometrisch nichtlineare Schalentheorie einschließlich Stabilitätstheorie, Hannover 1977
- F 77/2 „Beitrag zur Berechnung von Gründungsplatten mit Hilfe der Finite-Element-Methode“, H.Meyer, Dissertation, Juli 1977
- F 77/3 „Zur Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen räumlich vorgekrümmter und vorverwundener Stäbe“, J.Möhlenkamp, Dissertation, Dezember 1977
- F 77/4 „Zur Theorie und Berechnung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Kontinua mit Anwendung der Methode der finiten Elemente“, J.Paulun, Dissertation, Dezember 1977
- F 77/5 noch nicht erschienen
- S 78/1 2. Seminar über Thermodynamik und Kontinuumsmechanik, Hannover 1978
- F 79/1 „Theoretische und numerische Behandlung geometrisch nichtlinearer viskoplastischer Kontinua“, K.-D. Klee, Dissertation, Februar 1979
- F 79/2 „Zur Konstruierbarkeit von Variationsfunktionalen für nichtlineare Probleme der Kontinuumsmechanik“, J.Siefer, Dissertation, Oktober 1979
- F 80/1 „Theoretische und numerische Behandlung gerader Stäbe mit endlichen Drehungen“, M.Kessel, Dissertation, Februar 1980
- F 81/1 „Zur Berechnung von Kontakt- und Stoßproblemen elastischer Körper mit Hilfe der Finite-Element-Methode“, P.Wriggers, Dissertation, Januar 1981
- F 81/2 „Stoffgleichungen für Steinsalze unter mechanischer und thermischer Beanspruchung“, J.Olschewski, E.Stein, W.Wagner, D.Wetjen, geänderte Fassung eines Zwischenberichtes zum BMFT-Forschungsvorhaben KWA 1608/5

- F 82/1 „Konvergenz und Fehlerabschätzung bei der Methode der Finiten Elemente“, R.Rohrbach, E.Stein, Abschlußbericht eines VW-Forschungsvorhabens, Februar 1982
- F 82/2 „Alternative Spannungsberechnung in Finite-Element-Verschiebungsmodellen“, C.Klöhn, Dissertation, November 1982
- F 83/1 Seminar über nichtlineare Stabtheorie, Hannover 1983
- F 83/2 „Beiträge zur nichtlinearen Theorie und inkrementellen Finite-Element-Berechnung dünner elastischer Schalen“, A.Berg, Dissertation, Juli 1983
- F 83/3 „Elastoplastische Plattenbiegung bei kleinen Verzerrungen und großen Drehungen“, J.Paulun, Habilitation, September 1983
- F 83/4 „Geometrisch nichtlineare FE-Berechnung von Faltenwerken mit plastisch/viskoplastischem Deformationsverhalten“, M.Krog, Dissertation, Dezember 1983
- F 85/1 Verleihung der Ehrendoktorwürde des Fachbereichs Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Hannover an die Herren Prof. Dr. Drs. h.c. J.H.Argyris, Dr.-Ing. H.Wittmeyer
- F 85/2 „Eine geometrisch nichtlineare Theorie schubelastischer Schalen mit Anwendung auf Finite-Element-Berechnungen von Durchschlag- und Kontaktproblemen“, W.Wagner, Dissertation, März 1985
- F 85/3 „Geometrisch/physikalisch nichtlineare Probleme — Struktur und Algorithmen —“, GAMM-Seminar im Februar 1985 in Hannover
- F 87/1 „Finite-Elemente-Berechnungen ebener Stabtragwerke mit Fließgelenken und großen Verschiebungen“, R.Kahn, Dissertation, Oktober 1987
- F 88/1 „Theorie und Numerik schubelastischer Schalen mit endlichen Drehungen unter Verwendung der Biot-Spannungen“, F. Gruttmann, Dissertation, Juni 1988
- F 88/2 „Optimale Formgebung von Stabtragwerken mit Nichtlinearitäten in der Zielfunktion und in den Restriktionen unter Verwendung der Finite-Element-Methode“, V. Berkahn, Dissertation, Oktober 1988
- F 88/3 „Beiträge zur Theorie und Numerik großer plastischer und kleiner elastischer Deformationen mit Schädigungseinfluß“, R. Lammering, Dissertation, November 1988
- F 88/4 „Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihrer Anwendung auf die Finite-Elemente-Methode“, P. Wriggers, Habilitation, November 1988
- F 88/5 „Mathematische Formulierung und numerische Methoden für Kontaktprobleme auf der Grundlage von Extremalprinzipien“, D. Bischoff, Habilitation, Dezember 1988



- F 88/6 „Zur numerischen Behandlung thermomechanischer Prozesse“,  
C. Miehe, Dissertation, Dezember 1988
- F 89/1 „Zur Stabilität und Konvergenz gemischter finiter Elemente in der  
linearen Elastizitätstheorie“, R. Rolfes, Dissertation, Juni 1989
- F 89/2 „Traglastberechnungen von Faltenwerken mit elastoplastischen Deforma-  
tionen“, K.-H. Lambertz, Dissertation, Oktober 1989
- F 89/3 „Transientes Kriechen und Kriechbruch im Steinsalz“,  
U. Heemann, Dissertation, November 1989
- F 89/4 „Materialgesetze zum Verhalten von Betonkonstruktionen bei harten Stößen“,  
E. Stein, P. Wriggers, T. Vu Van & T. Wedemeier,  
Dezember 1989
- F 89/5 „Lineare Konstruktion und Anwendungen von Begleitmatrizen“,  
C. Carstensen, Dissertation, Dezember 1989
- F 90/1 „Zur Berechnung prismatischer Stahlbetonbalken mit verschiedenen Quer-  
schnittsformen für allgemeine Beanspruchungen“,  
H. N. Lucero-Cimas, Dissertation, April 1990
- F 90/2 „Zur Behandlung von Stoß- Kontaktproblemen mit Reibung unter Ver-  
wendung der Finite-Element-Methode“,  
T. Vu Van, Dissertation, Juni 1990
- F 90/3 „Netzadaption und Mehrgitterverfahren für die numerische Behandlung  
von Faltenwerken“,  
L. Plank, Dissertation, September 1990
- F 90/4 „Beiträge zur Theorie und Numerik finiter inelastischer  
Deformationen“,  
N. Müller-Hoeppe, Dissertation, Oktober 1990
- F 90/5 „Beiträge zur Theorie und Numerik von Materialien mit innerer  
Reibung am Beispiel des Werkstoffes Beton“,  
T. Wedemeier, Dissertation, Oktober 1990
- F 91/1 „Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der  
Methode der Finiten Elemente“,  
W. Wagner, Habilitation, April 1991
- F 91/2 „Mehrgitterverfahren und Netzadaption für lineare und nichtlineare sta-  
tische Finite-Elemente-Berechnungen von Flächentragwerken“,  
W. Rust, Dissertation, Oktober 1991
- F 91/3 „Finite Elemente Formulierungen im Trefftzchen Sinne für dreidimen-  
sionale anisotrop-elastische Faserverbundstrukturen“,  
K. Peters, Dissertation, Dezember 1991

- F 92/1 „Einspielen und dessen numerische Behandlung von Flächentragwerken aus ideal plastischem bzw. kinematisch verfestigendem Material“,  
G. Zhang, Dissertation, Februar 1992
- F 92/2 „Strukturoptimierung stabilitätsgefährdeter Systeme mittels analytischer Gradientenermittlung“,  
A. Becker, Dissertation, April 1992
- F 92/3 „Duale Methoden für nichtlineare Optimierungsprobleme in der Strukturmechanik“,  
R. Mahnken, Dissertation, April 1992
- F 93/1 „Kanonische Modelle multiplikativer Elasto–Plastizität. Thermodynamische Formulierung und numerische Implementation“,  
C. Miehe, Habilitation, Dezember 1993
- F 93/2 „Theorie und Numerik zur Berechnung und Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien“,  
F.–J. Barthold, Dissertation, Dezember 1993