SCHUMANN, Heinz
Weingarten

Ein Buchprojekt: Raumgeometrie am Beispiel des Würfels

Es gibt einige Buchpublikationen über den Würfel, die jeweils besondere Bereiche der Würfelgeometrie abdecken. Wir nennen hier nur das 2018 erschienene aufgabenstellende Buch von Hans Walser „Der Würfel: Ansichten – Dimensionen – Modelle“ und das 1964 publizierte und als klassisch geltende Büchlein “The Cube Made Interesting“ von Aniela Ehrenfeucht. Neben Buchveröffentlichungen existiert im Internet eine Vielzahl von Seiten über die Kombination von Würfel und Geometrie: Mit der Suche nach „wuerfel+geometrie“ findet man mehr als eine Million Seiten, mit „cube+geometry“ mehr als 100 Millionen Seiten. Viele dieser Seiten haben aber gar keinen Bezug zur Elementargeometrie des Würfels.

Die bestehenden Veröffentlichungen zum Thema „Würfel“ hat der Autor durch ein Buch des Titels „WürfelGEOMETRIE – Ein Zugang zur Raumgeometrie“ ergänzt, das sich an alle wendet, die an Raumgeometrie interessiert sind oder die sogar einen Zugang zur Raumgeometrie suchen.

Der Autor hat in die Fülle der Informationen einen Schneisenschlag nach populärwissenschaftlichen Gesichtspunkten versucht, indem er das Thema Würfelgeometrie gliedert nach den ausgewählten geistigen bzw. physischen Handlungen: Konstruieren und Herstellen, Abbilden und Darstellen, Verwandeln und Transformieren, Ein- und Umbeschreiben, Verbinden und Durchdringen, Verallgemeinern, Polygonisieren, Stumpfen und Sternen, Zerlegen und Zusammensetzen, Schneiden (s. Abb. 1; ein Pfeil bedeutet: „Handlung … wird angewendet auf den Würfel etc.“). Die Abbildungen 2.1/2 zeigen das Inhaltsverzeichnis der entsprechenden Buchkapitel 1 – 10.

Zwangsläufig entstehen Lücken, die auch das Kapitel „Verschiedenes“ mit dem Inhalt: ‚Der Würfel als optimaler Quader. Die Würfelverdopplung – ein Problem der Antike. Schnittkörper des Würfels im pädagogischen Kontext. Der Würfel als Gebrauchsgegenstand. Der Würfel in der Modernen Kunst. Der Würfel in der modernen Architektur und im Design. Der Würfel als besonderes Symbol.’ nicht zu schließen vermag. So findet der Leser und die Leserin fast nichts über Färbungsprobleme, über bestimmte Würfelberechnungen und auch nichts über Rubik’s Cube usw. Der Autor denkt aber, dass in seinem Buch auch einiges zur Formenkunde des Würfels enthalten ist, das sich nicht im Internet finden lässt und er hofft, dass, im Gegensatz zu den isolierten Internet-Informationen, ein besserer Zusammenhang elementaren würfelgeometrischen Wissens entsteht.

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

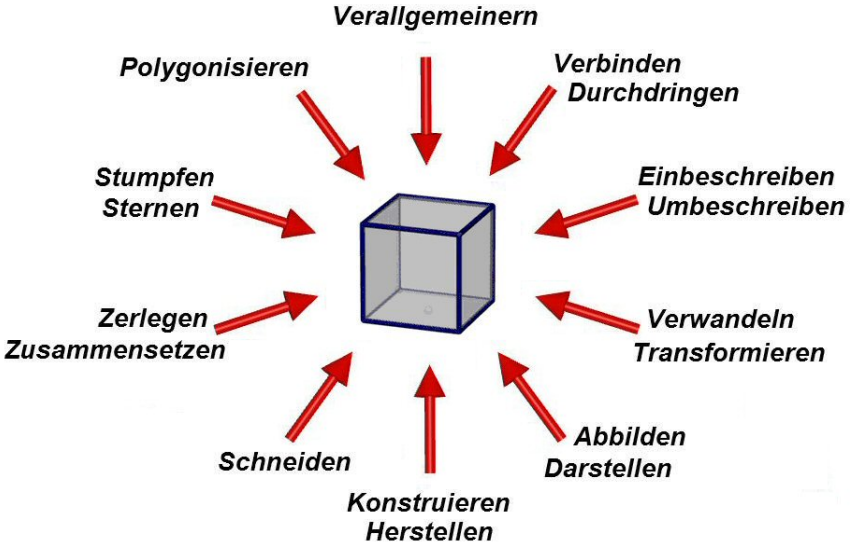

Abb. 1: Geistige bzw. physische Handlungen

1 Konstruieren und Herstellen

1.1 Geometrische Würfelkonstruktionen
1.2 Würfelnetze
1.3 Würfel flechten
1.4 Würfelbox und Würfelgestell bauen
1.5 Herstellung würfelförmiger Vollkörper

2 Abbilden und Darstellen

2.1 Würfel parallelprojektiv abbilden
2.2 Würfel zentralprojektiv abbilden
2.3 Selbstabbildungen des Würfels

3 Verwandeln und Transformieren

3.1 Achsensymmetrische Verwandlungen des Würfels
3.2 Transformation der Platonischen Körper
zu den Archimedischen Körpern
mittels Parallelverschiebung der Seitenpolygone

4 Einbeschreiben und Umbeschreiben

4.1 Dem Würfel einbeschriebene Polyeder
4.2 Die konvexen „Eckpunkt-Polyeder“ des Würfels
4.3 Volumen-, Oberflächen- und Kantensummen-Formeln
für dem Würfel einbeschriebene Körper
4.4 Optimales Einbeschreiben und Umbeschreiben des Würfels

5 Verbinden und Durchdringen

5.1 Verbundpolyeder und ihr Kern aus im Würfel rotierten Polyedern
5.2 Verbundpolyeder und ihr Kern
aus in Platonischen Körpern rotierten Würfeln
5.3 Verbundpolyeder und ihr Kern aus rotierten Würfeln
5.4 Optimale Durchdringung eines Würfels mit einem anderen Würfel

Abb. 2.1: Inhaltsverzeichnis der Kapitel 1-5

6 Verallgemeinern

6.1 Eine erste Verallgemeinerung des Würfels
6.2 Vom Würfel zum Parallelepiped (Spat)
6.3 Der Würfel als regelmäßiges konvexes Polyeder
6.4 Der Würfel - ein konvexes Hexaeder
6.5 Der vierdimensionale Würfel (Hyperwürfel)

7 Polygonisieren

7.1 Polygone aus Kanten und Flächendiagonalen
7.2 Billardpolygone auf dem Würfel
7.3 Besondere Billardpolygone im Würfel

8 Stumpfen und Sternen

8.1 Ecken- und Kantenstumpfen
8.2 Eckenstumpfen von den Platonischen Körpern aus
8.3 Sternen
8.4 Stumpfen und Sternen vom Würfel aus: Formspielereien

9 Zerlegen und Zusammensetzen

9.1 Vielteilige Würfelzerlegungen
9.2 Würfel-Zerlegungsgleichheit
9.3 Würfelzerlegung aus Würfeln
9.4 Polykuben und Polykuben-Anwendungen
9.5 Formelentwicklung und -veranschaulichung mit Würfeln
9.6 Würfel als Parkettsteine
9.7 Würfelsäulen, Würfelsterne und Würfelfraktale

10 Schneiden

10.1 Würfelschnitt in zwei Teilkörper
10.2 Untersuchung der Vieleckformen
aus ebenen Würfelschnitten
10.3 Zeichnerische Konstruktion von Schnittvielecken
10.4 Schnittscharen

Abb. 2.2: Inhaltsverzeichnis der Kapitel 6-10

Die Phänomenologie der räumlichen Figuren steht in diesem Buch im Vordergrund. Dabei beruft sich der Autor auf die Bedeutung der geometrischen Figur für die Erkenntnisbildung, wie sie Felix Klein (1849-1925) formuliert hat: „Es gibt eine eigentliche Geometrie, die nicht, [...], nur eine veranschaulichte Form abstracterer Untersuchungen sein will. In ihr gilt es, die räumlichen Figuren nach ihrer vollen gestaltlichen Wirklichkeit aufzufassen und (was die mathematische Seite ist) die für sie geltenden Beziehungen als evidente Folgen der Grundsätze räumlicher Anschauung zu verstehen. Ein Modell – mag es nun ausgeführt und angeschaut oder nur lebhaft vorgestellt sein – ist für diese Geometrie nicht ein Mittel zum Zwecke, sondern die Sache selbst.“ (Klein, F. (1872), 41+42).

Heute stehen Computerwerkzeuge zur Verfügung, die an die räumliche Elementargeometrie angepasst sind, und mit denen man räumliche Figuren im virtuellen Raum des Bildschirms konstruieren, darstellen, variieren und auch ausmessen sowie berechnen kann. Diese Werkzeuge sind unter dem Namen

„Dynamische Raumgeometrie-Systeme“ bekannt. Beispiele für solche Systeme sind die 3-D Komponente von Geogebra, Cabri 3D und Archimedes Geo 3D. In der Anlage des Buches befindet sich für die Nutzung solcher Tools eine kurze Einführung in das raumgeometrische Konstruieren.

Literatur

Ehrenfeucht, A. (1964). *The Cube Made Interesting*. Oxford: Pergamon Press.

Klein, F. (1872). *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Erlangen: Verlag von Andreas Deichert, 41+42.

Schumann, H. (2023). *WürfelGEOMETRIE – Ein Zugang zur Raumgeometrie*. Hildesheim: Franzbecker.

Walser, H. (2018). *Der Würfel: Ansichten – Dimensionen – Modelle*. Leipzig: Edition am Gutenbergplatz.