

MÖLLER, Victoria
Frankfurt a. M.

Lehr-Lern-Prozesse zwischen Intuition und Algorithmus: instruktionale Erklärungen in der Bruchrechnung

Anspruchsvolle Lerninhalte stellen besonders hohe Anforderungen an Lehrende bei der Gestaltung der Lehr-Lern-Situation (Wittwer & Renkl, 2008). Da Bruchrechnen ein solcher besonders anspruchsvollere Lerninhalt zu sein scheint (Copur-Gencturk, 2021), wird im folgenden Artikel das Lehrendenhandeln bei der Instruktion in einer Unterrichtsstunde zum Addieren und Subtrahieren von Brüchen fokussiert. Nach Fischbein (1994) lassen sich mathematische Tätigkeiten durch drei Komponenten beschreiben. Der vorliegende Beitrag verknüpft die Theorie Fischbeins (1994) mit instruktionalen Erklärungen und untersucht, die Komponenten mathematischer Tätigkeit im Verlauf der videografierten Unterrichtsstunde.

1. Inskriptionale Erklärungen im Mathematikunterricht der Addition und Subtraktion von Brüchen

Erklärungen werden als Bestandteil professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften angesehen (Kunter et al., 2011). Häufig wird in der deutschen Mathematikdidaktik eine Ausdifferenzierung in drei verschiedene Erklärungsarten vorgenommen: Was-, Wie-, und Warum-Erklärungen (Klein, 2009). Sie lassen sich auch in der aktuellen didaktischen Schwerpunktsetzung der Bruchaddition und Subtraktion finden. Dabei wird eine Verknüpfung prozeduraler Fähigkeiten und konzeptionellen Verständnis forciert (Petit et al., 2022). Wie-Erklärungen beschreiben vor allem Prozesse und knüpfen damit an prozedurale Fähigkeiten an. Warum-Erklärungen zeigen strukturelle Verbindungen auf, die zu konzeptionellem Verständnis führen können. Für die Einführung der Addition und Subtraktion wird einerseits auf das Operationsverständnis der natürlichen Zahlen (z. B. Hinzufügen), auf Äquivalenzen von Brüchen sowie auf visuelle Modelle zurückgegriffen (Padberg & Wartha, 2023; Petit et al., 2022). Die zugrundeliegenden Konzepte der Bruchrechnung scheinen komplex zu sein und bereiten auch Lehrenden Schwierigkeiten. So wurde in der Studie von Copur-Genctur (2021) festgestellt, dass 19,8 % der untersuchten Lehrpersonen keine oder keine vollständig korrekte Erklärung für das Vorgehen der Bruchaddition angeben können.

2. Komponenten mathematischer Tätigkeit in Lehr-Lern-Prozessen

Nach Fischbein (1994) ist die Mathematik nicht nur als formales und deduktives Fachgebiet zu verstehen, sondern auch als eine kreative menschliche Tätigkeit. Diese menschliche Tätigkeit umfasst drei grundlegende Komponenten: die formale, die algorithmische und die intuitive Komponente

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.

57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
<https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0>

(Fischbein, 1994). Die formale Komponente beinhaltet Axiome, Definitionen und Theoreme, zum Beispiel die Betrachtung von Brüchen als Äquivalenzklassen. Die algorithmische Komponente konzentriert sich auf (standardisierte) Verfahren zur Lösung mathematischer Probleme, wie z. B. gleichnamig machen als Teilschritt der Addition oder Subtraktion von Brüchen. Die intuitive Komponente ist notwendig, um Denkprozesse anzuregen und wird ohne weitere Legitimation akzeptiert. Dazu gehört zum Beispiel die Vorstellung, dass die Zerteilung eines Tortenstücks dessen Gesamtgröße nicht verändert.

Ausgehend von der Annahme, dass mathematische Tätigkeiten mathematischen Lehr-Lern-Situationen immanent sind, können die oben genannten Komponenten mathematischer Tätigkeiten im Mathematikunterricht identifiziert werden. Da Unterrichtsprozesse in hohem Maße von der Lehrkraft initiiert und strukturiert werden, lohnt sich ein genauer Blick darauf, welche Komponenten mathematischer Tätigkeit die Lehrkraft in ihrem Mathematikunterricht äußert.

3. Methodisches Vorgehen

Im Folgenden wird ein 90-minütiges Video einer 6. Klasse (integrierten Gesamtschule) analysiert, bei der die Addition und Subtraktion von Brüchen eingeführt wird.

Das Datenmaterial wird mittels strukturierender Inhaltsanalyse nach Mayring (2014) untersucht. Das theoriebasierte Kategoriensystem strukturiert deduktiv entlang der Komponenten mathematischer Tätigkeit (Fischbein, 1994) und wird, basierend auf bestehenden Analysen (Möller, in Vorbereitung), induktiv erstellt und erweitert. Die sich daraus ergebenden Hauptkategorien werden als intuitive (*int*), algorithmische (*alg*) und sonstige Kategorie (*andere*) zusammengefasst. Jede Hauptkategorie wird in Unterkategorien differenziert. So beschreiben die Unterkategorien von algorithmisch (*alg*) die einzelnen Schritte des Additions- und Subtraktionsalgorithmus (*alg-1*: erweitern, *alg-2*: Zähler addieren und Nenner beibehalten, *alg-3*: das Ergebnis vollständig reduzieren) oder eine Kombination von mindestens zwei Schritten des Algorithmus (*alg-Schritte*). Zur algorithmischen Hauptkategorie (*alg*) gehören außerdem die Zerlegung eines Bruches in seine Bestandteile außerhalb eines Operationskontextes (*alg-Bruch*) oder eine algorithmische Äußerung, die sich keiner der bisher beschriebenen Unterkategorien zuordnen lässt (*alg-sonstige*). Die Intercoder-Reliabilität beträgt 0,92 (Holsti, 1969, S. 140).

4. Forschungsfragen und Ergebnisse

(1) Welche Komponenten mathematischer Tätigkeit lassen sich in Äußerungen der Lehrperson im Mathematikunterricht zur Addition und Subtraktion von Brüchen identifizieren?

Die im Folgenden dargestellten Ergebnisse fokussieren auf die Hauptkategorien *intuitiv* und *algorithmisch*. Die Lehrkraft äußert in 2,79 % der Intervalle eine intuitive Komponente (siehe Tabelle 1, oben). Am häufigsten äußert sich die Lehrkraft während der beobachteten Sequenz auf der algorithmischen Komponente ($alg = 57,17\%$), die sich aus allen algorithmischen Unterkategorien zusammensetzt (siehe Tabelle 1, unten). Darüber hinaus enthält der beobachtete Mathematikunterricht inhaltlich und organisatorische Strukturierungen, die unter *andere* zusammengefasst wurden ($andere = 40,04\%$). Die formale Komponente mathematischer Tätigkeit wurde im beobachteten Unterricht nicht kodiert.

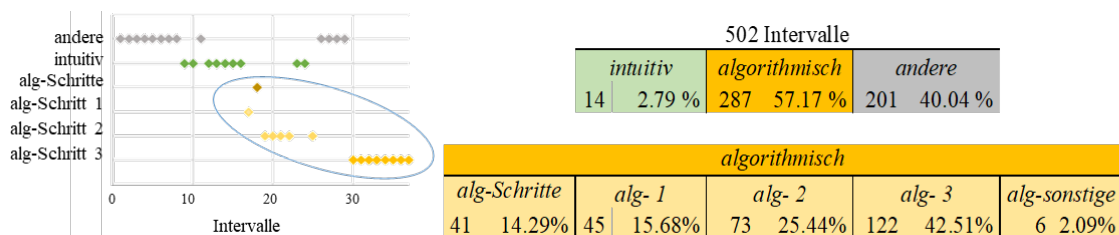


Abbildung 1: Ausgewählte Kodierungsergebnisse (Intervall 1-37).

Tabelle 4: Gesamte Kodierung (oben), algorithmische Hauptkategorie (unten).

(2) Welche Chronologie/ zeitliche Struktur kann durch die identifizierten Komponenten mathematischer Tätigkeit rekonstruiert werden?

Betrachtet man die Kodierung chronologisch ist auffällig, dass intuitive Intervalle primär zu Beginn des Unterrichts geäußert werden. Algorithmische Intervalle sind während der gesamten Stunde zu finden. Bei einem genaueren Blick auf die Unterkategorien, die den dreistufigen Additions- und Subtraktionsalgorithmus abbilden (*alg-1*, *alg-2*, *alg-3*), fällt auf, dass sie in kaskadenartiger Abfolge auftreten. Häufig wird ausgehend von einer verkürzten Darstellung mehrerer Schritte des Algorithmus (*alg-Schritte*) zunächst *alg-1*, dann *alg-2* und schließlich *alg-3* aktiviert (siehe Abbildung 1). Bemerkenswert ist, dass die Lehrkraft diese Kaskade häufig mit mehreren Intervallen einer standardisierten Ergebnisdarstellung (*alg-3*; z. B. einem vollständig reduzierten Bruch) abschließt und darin verharret, so dass dieser Code eine sehr hohe Ausprägung hat ($alg-3_{alg} = 42,51\%$).

5. Fazit und Ausblick

Die Lehrperson äußert sich bei der Addition und Subtraktion von Brüchen vor allem auf der algorithmischen Komponente. Innerhalb dieser Intervalle thematisiert sie häufig das vollständige Kürzen der Summe/ der Differenz. Das Kürzen des Ergebnisses wird in der Bruchdidaktik als optional angesehen (Padberg & Wartha, 2022). Es bleibt offen, warum die Lehrperson dieses Thema relativ häufig im Mathematikunterricht thematisiert und damit als einen zentralen Unterrichtsinhalt markiert. In weiterer Forschung sollten diese Äußerungen mit qualitativen Methoden untersucht werden.

Literaturverzeichnis

- Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 107(3), 525–545. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10033-4>
- Fischbein, E. (1994). The Interaction between the Formal, the Algorithmic, and the Intuitive Components in a Mathematical Activity. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, & B. Winkelmann (Hrsg.), *Mathematics education library: Bd. 13. Didactics of mathematics as a scientific discipline* (S. 231–245). Kluwer Academic Publishers.
- Holsti, O. R. (1969). *Content analysis for the social sciences and humanities*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Klein, J. (2009). ERKLÄREN-WAS, ERKLÄREN-WIE, ERKLÄREN-WARUM: Typologie und Komplexität zentraler Akte der Welterschließung. In R. Vogt, K. S. Ehrlich, J. Klein, C. Hohenstein, A. Berkemeier, J.-M. Lorenzen, A. Josefy, J.-U. Keßler, T. Koole & B. Schmidt-Thieme (Hrsg.), *Stauffenburg Linguistik: Bd. 52. Erklären: Gesprächsanalytische und fachdidaktische Perspektiven* (S. 25–36). Stauffenburg.
- Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.). (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Waxmann.
- Mayring, P. (2014). *Qualitative Content Analysis: Theoretical Foundation, Basic Procedures and Software Solution*. Social Science Open Access Repository. <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0168-ssoar-395173>
- Möller, V. (in Vorbereitung). Multimodale Rekonstruktion des Lehrkonzepts von Lehrpersonen – instruktionale Erklärsituationen im authentischen Mathematikunterricht (Arbeitstitel der Dissertation)
- Padberg, F. & Wartha, S. (2023). *Didaktik der Bruchrechnung: Brüche - Dezimalbrüche - Prozente*. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Springer Spektrum. <http://www.springer.com/>
- Petit, M. M., Laird, R. E., Marsden, E. L. & Ebby, C. B. (2022). *FOCUS ON FRACTIONS: Bringing mathematics education research to the. Studies in mathematical thinking and learning*. Routledge; Taylor & Francis Group. <https://doi.org/10.4324/9781003185475>
- Wittwer, J., & Renkl, A. (2008). Why Instructional Explanations Often Do Not Work: A Framework for Understanding the Effectiveness of Instructional Explanations. *Educational Psychologist*, 43(1), 49–64. <https://doi.org/10.1080/00461520701756420>