RÖSSNER, Michael & BINDER, Karin
München

Typische Schülerfehler beim Eintragen von statistischen Informationen in Vierfeldertafel & Co.

Einleitung und theoretischer Hintergrund

Visualisierungen sind ein wichtiger Bestandteil des Stochastikunterrichts. Vor allem aus der Forschung zu sogenannten "Bayesianischen Aufgaben" ist bekannt, dass das Bereitstellen vollständig ausgefüllter stochastischer Diagramme die Bearbeitung solcher Aufgaben erleichtern kann (siehe z. B. McDowell & Jacobs, 2017). Hierbei hat sich gezeigt, dass sowohl die Lösungsraten als auch das Auftreten typischer Fehler zum einen vom Typ der verwendeten Visualisierung (z. B. Baumdiagramm, Doppelbaum, Vierfeldertafel; Binder et al., 2015, Böcherer-Linder & Eichler, 2019) und zum anderen vom Informationsformat der Visualisierung (Wahrscheinlichkeiten wie z. B. 80% vs. "natürliche Häufigkeiten" wie z. B. 80 von 100 Frauen) abhängen (Formateffekt; Gigerenzer & Hoffrage, 1995). Während Formateffekte im Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten bei Bayesianischen Aufgaben empirisch gut belegt sind, zeigt sich für das Ablesen von Schnittwahrscheinlichkeiten aus entsprechenden Diagrammen kein systematischer Formateffekt (Stegmüller et al., in Begutachtung).

Typische Fehler beim Ablesen bedingter Wahrscheinlichkeiten (z. B. $P(B|T+)$) aus Vierfeldertafeln, Baumdiagrammen etc. sind der sogenannte *joint occurrence Fehler*, also die Verwechslung einer bedingten Wahrscheinlichkeit mit der entsprechenden Schnittwahrscheinlichkeit (z. B. $P(B \cap T+)$) und der *inverse fallacy Fehler*, d. h. die Verwechslung mit der umgekehrten bedingten Wahrscheinlichkeit $P(T+|B)$ (Woike et al., 2023). Typische Fehler beim Ablesen von Schnittwahrscheinlichkeiten (z. B. $P(B \cap T+)$) wurden bisher kaum untersucht. Bekannt ist ebenfalls eine Verwechslung mit einer zugehörigen bedingten Wahrscheinlichkeit (z. B. $P(B|T+)$, sog. *conditional fallacy*), sowie die Verwechslung mit einer Randwahrscheinlichkeit (z. B. $P(B)$, sog. *marginal fallacy*; Binder et al., 2020). Unabhängig von der Art der Information treten gelegentlich Verwechslungen eines oder beider Ereignisse mit dem jeweiligen Komplement (z. B. $P(B \cap T-)$) auf (sog. *Nicht-Fehler*; Binder et al., 2020).

Viele relevante Schritte des Lösungsprozesses Bayesianischer Aufgaben, wie das Auswählen einer geeigneten Visualisierung, das Eintragen gegebener Werte oder das Interpretieren und Validieren der gefundenen Lösung blieben in bisheriger Forschung weitgehend unbeachtet. Daher fokussiert die

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

vorliegende Studie die Performanz und typische Fehler beim *Eintragen* statistischer Information (damit sind Wahrscheinlichkeiten oder die zugehörigen natürlichen Häufigkeiten gemeint) in leere Visualisierungen (Vierfeldertafel, Doppelbaum und Netz, siehe auch Abb. 1). Dabei wird für das Eintragen *bedingter Information* ein analoger Formateffekt wie beim Ablesen aus Diagrammen erwartet. Darüber hinaus werden für das Eintragen ähnliche Fehler wie beim Ablesen von statistischer Information erwartet. Zusätzlich besteht beim Eintragen von statistischer Information die Möglichkeit, einen Wert an mehrere Positionen im Diagramm zu schreiben (mehrfache Einträge), fälschlicherweise anzugeben, dass eine Information nicht in das vorliegende Diagramm eingezeichnet werden kann (es gab bei jeder Aufgabe in der Studie die Möglichkeit anzukreuzen, dass eine Information nicht in das gegebene Diagramm eingetragen werden kann, siehe Abb. 1) oder bei natürlichen Häufigkeiten nur einen Teil des Zahlenpaares einzutragen (unvollständiger Eintrag).

Methode

N=172 Personen (52 Biologiestudierende und 120 Schüler*innen der gymnasialen Oberstufe) bearbeiteten in einem Papier-und-Bleistift-Test je vier von insgesamt 24 Aufgaben (zwei Kontexte, zwei Informationsformate, drei Visualisierungen und zwei Arten von Information, siehe Tab. 1) zum Eintragen von statistischen Informationen in leere Diagramme. In Abbildung 1 sind zwei beispielhafte Aufgabenstellungen dargestellt.

Informationsformat	Kontext	Art der einzutragenden Information	
		Bedingte Information	Schnittinformation
Wahrscheinlichkeiten	Mammographie	Vierfeldertafel	Vierfeldertafel
		Doppelbaum	Doppelbaum
		Netz	Netz
	Persönlichkeitseigenschaft	Vierfeldertafel	Vierfeldertafel
		Doppelbaum	Doppelbaum
		Netz	Netz
Natürliche Häufigkeiten	Mammographie	Vierfeldertafel	Vierfeldertafel
		Doppelbaum	Doppelbaum
		Netz	Netz
	Persönlichkeitseigenschaft	Vierfeldertafel	Vierfeldertafel
		Doppelbaum	Doppelbaum
		Netz	Netz

Tabelle 1: Studiendesign. Jede Person bearbeitete beide Aufgaben aus zwei der zwölf dargestellten Zeilen zu je unterschiedlichem Kontext und Informationsformat.

Tragen Sie bitte die folgende Wahrscheinlichkeit an den richtigen Ast/in das richtige Kästchen in der Visualisierung ein oder kreuzen Sie an, dass die Wahrscheinlichkeit nicht eingetragen werden kann.

a) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Frau Brustkrebs hat (B) und ein positives Testergebnis erhält (T+) beträgt **1,6 %**.
   ☐ Alternativ: die Wahrscheinlichkeit kann nicht eingetragen werden.
b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Frau Brustkrebs hat (B), wenn sie ein positives Testergebnis erhalten hat (T+), beträgt **14,0 %**.
   ☐ Alternativ: die Wahrscheinlichkeit kann nicht eingetragen werden.

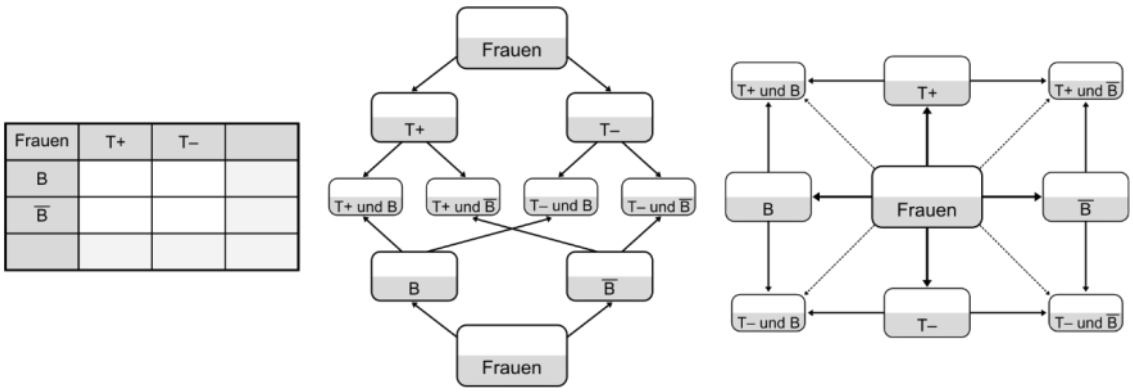

Abbildung 1: Exemplarische Aufgabenstellung. Es wurde jeweils nur eine Aufgabenstellung und eine leere Visualisierung pro Aufgabenblatt präsentiert.

Ergebnisse und Diskussion

Abbildung 2a zeigt den Anteil korrekter Lösungen für das Eintragen bedingter Information getrennt nach Visualisierung und Informationsformat. Für Vierfeldertafel und Netz ist, wie erwartet, ein Formateffekt erkennbar, das heißt, das Eintragen von bedingten Häufigkeiten fiel den Teilnehmenden hier signifikant leichter als das Eintragen bedingter Wahrscheinlichkeiten. Die stark unterschiedlichen Lösungsraten der verschiedenen Visualisierungen im Wahrscheinlichkeitsformat sind zum Großteil durch das Auftreten des joint-occurrence Fehlers erklärbar. Diese wird bei Vierfeldertafeln durch die fehlende Möglichkeit bedingte Wahrscheinlichkeiten einzutragen besonders provoziert. Im Häufigkeitsformat unterscheiden sich die Performanzen weniger stark voneinander und es ist keine dominierende Fehlerstrategie identifizierbar.

Abbildung 2b zeigt den Anteil korrekter Lösungen für das Eintragen von Schnittinformation getrennt nach Visualisierung und Informationsformat. Besonders auffällig ist hier, dass den Teilnehmenden für die Vierfeldertafel das Eintragen von Schnittwahrscheinlichkeiten leichter fiel als das Eintragen von Schnitthäufigkeiten. Auch hier unterscheiden sich die Lösungsraten im Wahrscheinlichkeitsformat stärker voneinander als im Häufigkeitsformat, was vor allem durch das Auftreten des conditional fallacy Fehlers zu erklären

ist, der jedoch hier besonders vom Doppelbaum provoziert wird.

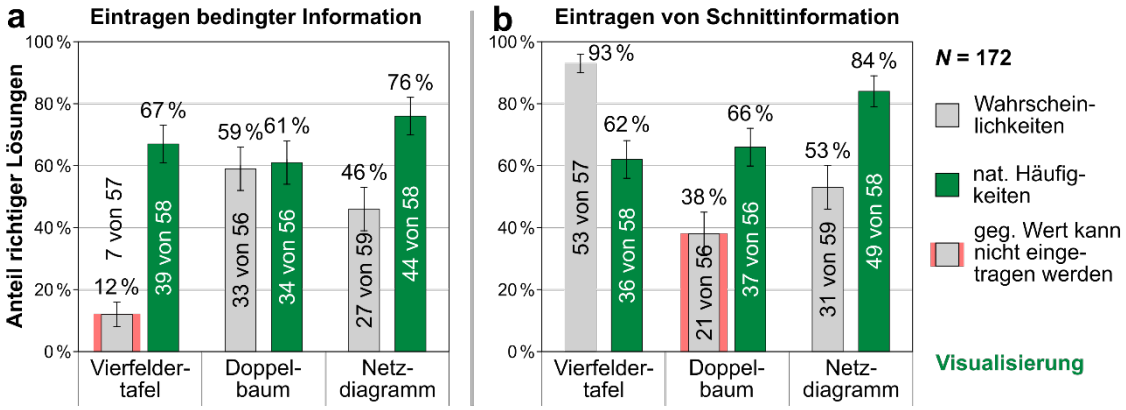

Abbildung 2: Lösungsraten beim Eintragen bedingter (a) und Schnittinformation (b) in Vierfeldertafel, Doppelbaum und Netzdiagramm.

Das Wissen darüber, welche Visualisierung (in welchem Format) bestimmte Fehler von Lernenden provoziert, kann unterrichtlich von Lehrkräften gezielt genutzt werden. Zukünftige Forschung sollte weitere Schritte des Lösungsprozesses, wie das Auswählen und Zeichnen eines zur Fragestellung passenden Diagramms, das Anwenden diagrammspezifischer Rechenregeln zum Ermitteln fehlender Werte und das Interpretieren und Validieren der gefundenen Lösung fokussieren.

Literatur

Binder, K., Krauss, S., & Wiesner, P. (2020). A new visualization for probabilistic situations containing two binary events: The Frequency Net. *Frontiers in Psychology*, *11*, 750. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.00750

Binder, K., Krauss, S., & Bruckmaier, G. (2015). Effects of visualizing statistical information - an empirical study on tree diagrams and 2 × 2 tables. *Frontiers in Psychology*, *6*, 1186. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01186

Böcherer-Linder, K., & Eichler, A. (2019). How to Improve Performance in Bayesian Inference Tasks: A Comparison of Five Visualizations. *Frontiers in Psychology*, *10*, 267. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.00267

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review, 102*(4), 684–704. http://dx.doi.org/10.1037/0033-295X.102.4.684.

McDowell, M., & Jacobs, P. (2017). Meta-analysis of the effect of natural frequencies on Bayesian reasoning. *Psychological Bulletin*, *143*(12), 1273–1312. https://doi.org/10.1037/bul0000126

Stegmüller, N., Binder, K., & Krauss, S. (in Begutachtung). How general is the natural frequency effect?.

Woike, J. K., Hertwig, R., & Gigerenzer, G. (2023). Heterogeneity of rules in Bayesian reasoning: A toolbox analysis. *Cognitive Psychology*, *143*, 101564. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2023.101564