HAVERKAMP, Michael & KEMPEN, Leander
Universität Greifswald

Individuelle Vorstellungen beim Einstieg in die Binomialverteilung im Kontext eines Wahr-Falsch-Tests

Während individuelle Vorstellungen von Lernenden über Zufall und Wahrscheinlichkeit häufig betrachtet wurden (z. B. Shaughnessy, 1992), sind entsprechende gegenstandsspezifische Untersuchungen zur Binomialverteilung nur begrenzt vorhanden. Dabei ist die Berücksichtigung der anfänglichen Vorstellungen als Ausgangspunkt der Entwicklung intendierter Vorstellungen von entscheidender Bedeutung (Konold, 1991). In diesem Beitrag werden anfängliche Vorstellungen von Lernenden der gymnasialen Oberstufe zur Binomialverteilung aufgezeigt und resultierende Potenziale und Herausforderungen der zugrunde liegenden Lernumgebung diskutiert. Als Einstieg in den Lernprozess wurde der alltagsnahe Kontext eines Wahr-Falsch-Tests ausgewählt: Für zehn Aussagen wird jeweils eine zufällige Entscheidung getroffen, ob diese wahr oder falsch sind.

Spezifizierung des Lerngegenstands

Im Rahmen eines Design-Research-Projekts wurde in einem ersten Schritt der Lerngegenstand ausgehend von Literaturüberblicken spezifiziert. Eine Orientierung für die Binomialverteilung boten dabei u. a. die didaktischen Überlegungen von Eichler und Vogel (2013), die Simulationsergebnisse und Diskussionen über die Modellannahmen als Basis für die Erarbeitung der 'Bernoulli-Formel' sehen, sowie Hußmann (2003), der Kernideen für die eigenaktive Entdeckung der Binomialverteilung zusammenstellt. In Anbindung u. a. an diese Beiträge wurde der Lerngegenstand zunächst in neun Aspekte unterteilt, die in Abbildung 1 dargestellt und durch Äußerungen von Lernenden beispielhaft charakterisiert werden.

Modellannahmen	„Wir gehen davon aus, dass man rät.“; „Es gibt 10 Fragen und es ist immer fifty-fifty.“
Zufallsvariable	„Es geht nicht um die *erste* korrekte Antwort, sondern um *eine* korrekte Antwort.“
W.-verteilung	„Wir müssen jetzt die Wahrscheinlichkeiten finden.“
Eigenschaften einer W.-verteilung	„Wir müssen auf 100% kommen, wenn wir alles addieren.“
Eigenschaften der Binomialverteilung	„Ich würde sagen, dass es im mittleren Bereich am wahrscheinlichsten ist.“
Wahrscheinlichkeit	„Man hat immer 50 % und das 10 mal hintereinander, also 0,5 hoch 10.“
Kombinatorik	„Für 5 korrekte Antworten gibt es viel mehr Möglichkeiten.“
Daten	„Ich hatte zum Beispiel 6 richtig. Wie viel hattest Du?“
Verbindung Theorie und Empirie	„Für die Wahrscheinlichkeit müsste man viel mehr Leute fragen, nicht nur unseren Kurs.“

Abb. 1: Aspekte des Lerngegenstands beispielhaft charakterisiert durch Äußerungen von Lernenden.

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Aktivierung individueller Vorstellungen zu Beginn des Lernprozesses

Der erste Arbeitsbereich eines Design-Research-Projekts umfasst neben der Spezifizierung des Lerngegenstands auch eine Strukturierung, die durch die Entwicklung eines intendierten Lernpfads realisiert wird, wobei dieser Lernpfad eine Sequenzierung von konzeptuellen und sprachlichen Zielen umfasst (Prediger & Pöhler, 2015). In diesem Beitrag werden die konzeptuellen Ziele auf der ersten Stufe, die auf eine Aktivierung individueller Vorstellungen abzielt, fokussiert: In der bisher ausgearbeiteten Strukturierung erfolgt die Konstruktion der Bedeutung einer (symmetrischen) Binomialverteilung durch die qualitative Beschreibung und Begründung ihrer Eigenschaften.

Das für den Einstieg in die Thematik entwickelte Design besteht eingangs (1) aus einem Wahr-Falsch-Test mit zehn Aussagen, den die Lernenden aufgrund der Komplexität der Aussagen ratend beantworten und im Hinblick auf die Anzahl der korrekten Antworten auswerten, wodurch eine Zufallserfahrung ermöglicht wird. In der folgenden Arbeitsphase wird begründet geschätzt, (2) wie viele korrekte Antworten die Lernenden des Kurses erzielt haben (Häufigkeitsverteilung) und weiter (3) wie groß die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind (Wahrscheinlichkeitsverteilung; vgl. Abb. 2).

3 Wahrscheinlichkeiten schätzen

a. Schätzen Sie möglichst genau, wie groß die jeweilige Wahrscheinlichkeit ist, in diesem Test 0, 1, 2, … 10 Fragen korrekt zu beantworten.
Nehmen Sie an, dass bei der Bearbeitung des Tests ausschließlich geraten wird.

Korrekt beantwortete Fragen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Geschätzte Wahrscheinlichkeit											

b. Begründen Sie Ihre Schätzungen so gut wie möglich.

Abb. 2: Arbeitsauftrag 3 im ersten Teil der Lernumgebung.

Im Anschluss an die Designentwicklung interessiert auf Forschungsebene, welche Lernprozesse tatsächlich initiiert werden, d. h. im hier gesetzten Fokus, welche individuellen Vorstellungen zu Beginn des Lernprozesses tatsächlich aktiviert werden. So resultiert die Forschungsfrage: W*elche Vorstellungen aktivieren die Lernenden bei der Schätzung der Verteilungen?*

Methodik

Die gesamte Lernumgebung wird iterativ entwickelt und die initiierten Lehr-Lern-Prozesse werden in mehreren Zyklen qualitativ beforscht. Im ersten Zyklus wurden die Design-Experimente in sechs Kursen (vier Leistungskurse, zwei Grundkurse), die eine Kursgröße von acht bis 25 Lernenden (im Alter von 16 bis 18 Jahre) aufwiesen, durchgeführt. Als Datengrundlage dienen die bearbeiteten Aufgabenzettel und die Tonaufnahmen der Gruppendiskussionen, die ausschnittsweise transkribiert wurden. Für die Datenanalyse

wurde sich der inhaltlich strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse bedient (Kuckartz, 2012). Die in Abb. 1 dargestellten Aspekte des Lerngegenstands, ergänzt durch eine Kategorie für nicht-tragfähige Vorstellungen, bildeten die Basis für die kategorienbasierte Auswertung.

Einblick in die Ergebnisse

Insgesamt hat sich gezeigt, dass die Lernenden die Eigenschaften der Mittenbevorzugung sowie häufig auch die der Symmetrie und Gesamtwahrscheinlichkeit beschreiben. Einigen Lernenden gelang es durch die Entwicklung von Modellannahmen im Bearbeitungsprozess darüber hinaus, mathematisch intendierte Vorstellungen zur Wegwahrscheinlichkeit und Anzahlbestimmung aufzuzeigen. Andere Lernende wiederum konnten Teile des mathematischen Modells nicht korrekt in das Gesamtmodell einordnen. Fallbeispiel 1 und 2 geben einen konkreten, exemplarischen Einblick:

Fallbeispiel 1: Die Gruppe von Zoe, Emma und Ben vermutet bereits zu Beginn, dass viele Lernende vier bis sechs korrekte Antworten erzielt haben, womit eine intuitive Vorstellung der Mittenbevorzugung deutlich wird.

> Zoe: "Ja, was man eh erst einmal vermutet, dass die meisten halt so im Mittelfeld liegen."

Im Verlauf fokussiert Ben im Baumdiagramm verschiedene Wege für fünf richtige Antworten:

> Ben: "Es können die ersten fünf richtig sein und dann die fünf falsch. Aber es kann auch (…) ein richtiger, ein falscher, ein richtiger, ein falscher. (…) Im Baumdiagramm (…) sieht man halt, dass halt fünf richtige und fünf falsche am meisten vorkommt."

In diesem Modell gelingt es Ben, die Anzahl der Wege als bedeutsam herauszustellen und darüber die Mittenbevorzugung zu begründen.

In der Zusammenfassung des finalen Gruppenergebnisses konkretisiert Emma kombinatorische Aspekte durch die möglichen Anordnungen, um damit neben der Mittenbevorzugung auch die Symmetrie zu begründen:

> Emma: "Fünf richtige ist am wahrscheinlichsten, weil es die meisten möglichen Anordnungen für fünf richtige und für fünf falsche gibt. [...] Deswegen ist es dann bei vier und sechs quasi dieselbe Wahrscheinlichkeit, weil es ja die gleichen möglichen Anordnungen gibt sozusagen."

Fallbeispiel 2: In mehreren Gruppenergebnissen wurde die Wahrscheinlichkeit fünf korrekte Antworten zu erzielen auf 50 % geschätzt. In den Begründungen für diese Schätzung zeigten sich verschiedene (nicht-tragfähige) Vorstellungen, die auf eine Übergeneralisierung der 50 % deuten lassen:

> Mats: "Wir haben-, guck einmal, wir haben zehn Fragen. Fünf davon sind richtig, fünf sind falsch. Das heißt, fünf richtige sind, ist die Wahrscheinlichkeit 50 Prozent."

Mats beschreibt in seiner Begründung das Experiment weniger als Versuchsreihe, sondern viel eher als einen einzelnen Versuch. Mit *5 von 10* kann zwar der *Anteil* der korrekten Antworten beschrieben werden, aber nicht die dazugehörige Wahrscheinlichkeit.

> Julian: "Es ist ja so, es sind zehn Fragen. Und dann ist es bei jeder Frage fifty-fifty. Dann ist es ja auch fünfzig Prozent, dass du fünf Fragen richtig hast."

Im Gegensatz zu Max drückt Julian (ein Schüler einer anderen Gruppe) die Versuchs*reihe* aus. *"Fifty-fifty"* als Wahrscheinlichkeit für eine korrekte Antwort bei *einer einzelnen* Frage kann jedoch nicht direkt auf die Wahrscheinlichkeit für eine Anzahl an korrekten Antworten übertragen werden.

Diskussion

Es wurde deutlich, dass bei Bearbeitung der Lernumgebung eine reichhaltige Aktivierung der verschiedenen herausgestellten Aspekte erfolgen kann (Fallbeispiel 1), dafür aber die *Explizierung der Struktur des Zufallsexperiments im mathematischen Modell* von entscheidender Bedeutung zu sein scheint. Da die gesamte Struktur nicht immer vollständig aufgebaut werden konnte (Fallbeispiel 2), resultiert für die Weiterentwicklung der Lernumgebung ein *Unterstützungsbedarf*, der sich neben der Auswahl passender Darstellungen auch über den Aufbau einer bedeutungsbezogenen Sprache erstrecken wird.

Nichts desto trotz bietet die betrachtete Lernumgebung für Lehrkräfte und Forschende ein *hohes diagnostisches Potenzial*: Durch die Vielfalt an sichtbar werdenden (auch nicht-tragfähigen) Vorstellungen ergibt sich erst die Möglichkeit, Rückschlüsse auf die individuellen Lernstände zu ziehen und diese im Lernprozess hin zu intendierten Vorstellungen aufzugreifen.

Literatur

Eichler, A. & Vogel, M. (2013). Mustersuche - das Konzept der Verteilung. In *Leitidee Daten und Zufall: Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik* (S. 217-234). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-00118-6_7

Hußmann, S. (2003). *Mathematik entdecken und erforschen.* Cornelsen.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. In E. Glasersfeld (Hrsg.), *Radical constructivism in mathematics education* (S. 139-156). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47201-5_7

Kuckartz, U. (2012). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung.* Beltz Juventa.

Prediger, S. & Pöhler, B. (2015). The interplay of micro-and macro-scaffolding: an empirical reconstruction for the case of an intervention on percentages. *ZDM, 47,* 1179-1194. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0723-2

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 465-494). Macmillan Publishing Co, Inc.