

Graphentheorie in der Grundschullehramtsausbildung an der Universität Hildesheim

Seit etwa fünf Jahren gibt es an der Universität Hildesheim für Grundschulstudierende fachwissenschaftliche Vorlesungen und Seminare zur Graphentheorie. Mittlerweile existieren zahlreiche Abschlussarbeiten zu fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Fragestellungen aus diesem Bereich. Im Zuge der Einführung von GHR 300 wurde dieses Angebot um ein Projektband zur Graphentheorie in der Grundschule ergänzt, in dem Studierende eigene Forschungsprojekte entwickeln und umsetzen. Im Folgenden werden die einzelnen Veranstaltungen vorgestellt und es wird an ausgewählten Beispielen der Mehrwert im Grundschulstudium deutlich gemacht. Ferner werden einige aktuelle Forschungsprojekte präsentiert und weiterführende Fragestellungen formuliert, die zur Diskussion anregen und einen Anstoß zu zukünftigen Untersuchungen geben sollen.

Motivation

Bereits seit den 1950er Jahren gibt es verschiedene Argumente, die für die Umsetzung graphentheoretischer Inhalte im schulischen Kontext angeführt werden. Winter (1971) sieht die Graphentheorie z.B. als ein Themengebiet an, das zur kreativen Auseinandersetzung mit der Mathematik anregt und problemorientiertes, entdeckendes und forschendes Arbeiten fördert (vgl. Winter, 1971). Bigalke (1974a) ergänzt dies durch die Aspekte der immensen Anwendungsfreundlichkeit, der großen Anschaulichkeit und die weit gestreute Problemfreudigkeit auf jedem beliebigen Niveau (vgl. Bigalke, 1974a, Bigalke, 1974b). Leneke (2013) stellt die Vielfalt an inhaltlichen Aspekten in der Graphentheorie als einen zentralen Vorteil heraus (vgl. Leneke, 2013). Dennoch ist die Graphentheorie derzeit kein Bestandteil schulischer Bildung und ob bzw. inwiefern das beschriebene Potential wirklich zutreffend ist, wurde bisher wenig bis gar nicht untersucht. Die genannten potenziellen Vorteile der Graphentheorie sollten sich auch auf die Lehramtsausbildung übertragen lassen. Zusätzlich bietet dieses Gebiet einen anschaulichen und intuitiven Zugang zum Beweisen (vgl. Lutz-Westphal, 2006), welches den Studierenden häufig Schwierigkeiten bereitet. Diese Gründe führten zur Implementierung von mehreren fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Veranstaltungen zur Graphentheorie in der Lehramtsausbildung.

Fachwissenschaftliche Veranstaltungen

Es gibt vier Veranstaltungen, in denen graphentheoretische Themen behandelt werden, die *Mathe-Hütte* im zweiten Semester (vgl. de Wiljes et al.,

2016), die Vorlesung *Algorithmen & Modellierung* im dritten Semester, die Vorlesung *Vertiefung der Graphentheorie* im fünften Semester und das *Fachwissenschaftliche Seminar zur Graphentheorie* im sechsten Semester. Dabei ist nur die zweite Veranstaltung verpflichtend, die anderen sind optional (es gibt weitere Vertiefungen). Im Folgenden wird kurz beschrieben, welche Inhalte in den einzelnen Veranstaltungen eine Rolle spielen.

Während der *Mathe-Hütte*, einer dreitägigen Exkursion, bearbeiten Studierende in Kleingruppen (3-4) ein mathematisches Teilgebiet. Graphentheoretische Themen waren dabei Eulertouren, Färbungen, Matchings (Heiratssatz von Hall) und viele weitere. Durch diese Veranstaltung werden bereits einige Studierende motiviert, mehr zu dem Bereich erfahren zu wollen.

In der Vorlesung *Algorithmen & Modellierung* wird etwa 30% der Zeit für die algorithmische Lösung (binäre Suchbäume, Tiefen- und Breitensuche, Kruskal, Dijkstra und Ford-Fulkerson) graphentheoretischer Probleme verwendet.

Die *Vertiefung der Graphentheorie* beschäftigt sich weitestgehend unter Ausschluss algorithmischer Anteile mit den Bereichen/Konzepten Zusammenhang, Bäume, Matchings, Planarität, Färbung, Netzwerke, Kreuzungszahl und Zufallsgraphen. Der Fokus liegt auf dem Umgang mit graphentheoretischen Objekten und dem Beweisen verschiedenster Aussagen sowie der dafür notwendigen Verwendung geeigneter heuristischer Strategien. Ferner werden in der begleitenden Übung Forschungsfragen, wie etwa Möglichkeiten von Verallgemeinerungen bekannter Aussagen und Konzepte, besprochen und teilweise gelöst. Erfahrungen aus den abschließenden mündlichen Prüfungen machen deutlich, dass viele Studierende in diesem mathematischen Gebiet nicht nur in der Lage sind, korrekt zu definieren und Aussagen wiederzugeben, sondern in kurzer Zeit selbständig neue Probleme in geeigneter Weise anzugehen und partielle Antworten auf diese zu geben.

In den fachwissenschaftlichen Seminaren erhalten die Studierenden mathematische Fachliteratur in Form von Artikeln aus fachwissenschaftlichen Zeitschriften. Die dort zu findenden Beweise müssen verstanden und präsentiert werden. Durch den sehr anschaulichen Charakter der Graphentheorie fällt es den Studierenden leichter als in anderen mathematischen Gebieten, die Aussagen und Beweisschritte nachzuvollziehen. Ferner gibt es nach wie vor viele aktive Forschungsbereiche innerhalb der Graphentheorie, die nicht zu schwierig für Studierende des Grundschullehramts sind. Beispielthemen sind Turniergraphen, Beschriftungen von Graphen und Spiele auf Graphen (z. B. Solitär und Lights-Out).

Auf Grundlage ihres Seminarthemas können Studierende eine fachwissenschaftliche Bachelorarbeit schreiben. Hier gibt es einerseits die „übliche“ Möglichkeit einer Literaturlarbeit, allerdings besteht immer häufiger der Wunsch nach Exploration eigener Forschungsfragen. So gab es in Bachelorarbeiten bereits neue Ergebnisse zu Königen in gerichteten Graphen (Dominanz von Graphen ist verwandt damit), die in absehbarer Zukunft fachwissenschaftlich publiziert werden sollen. Die Studierenden haben damit die Möglichkeit, direkt an Forschung beteiligt zu werden, was in manchen anderen mathematischen Bereichen mit dem Vorwissen fast unmöglich ist.

Fachdidaktische Veranstaltungen

Motiviert durch die zuvor genannten Aspekte wurde im Rahmen von GHR 300 ein Projektband *Graphentheorie in der Grundschule* konzipiert. In diesem haben Studierende innerhalb von drei Semestern eigene exemplarische Forschungsprojekte entwickelt, durchgeführt, ausgewertet und reflektiert. Mittels Leitfadeninterviews, Beobachtungen und Fragebögen wurden z.B. Einstellungen von Schüler_innen und Lehrpersonen zu graphentheoretischen Inhalten, das Melde- und Arbeitsverhalten von Schüler_innen bei graphentheoretischen Lernarrangements, Strategien bei der Bearbeitung graphentheoretischer Problemstellungen sowie Meinungen der Lehrpersonen darüber, welche prozessbezogenen Kompetenzen mit graphentheoretischen Aufgaben gefördert werden, untersucht. Außerdem wurden Schulbuchanalysen in Bezug auf graphentheoretische Inhalte durchgeführt. Als graphentheoretische Inhalte wurden dabei exemplarisch die Bereiche Kürzeste Wege, Minimal aufspannende Bäume, Eulerkreise und Färbung ausgewählt. Die Evaluation des Projektbandes hat ergeben, dass die Studierenden auf Grundlage der entwickelten und durchgeführten Projekte graphentheoretische Inhalte in der Grundschule zum einen für umsetzbar halten und zum anderen als eine sinnvolle Ergänzung der „normalen“ Inhalte sehen, um mathematische Kompetenzen zu fördern.

Das Ziel, das graphentheoretische Potential für den Mathematikunterricht in der Grundschule weiter zu untersuchen, um neue Erkenntnisse über mögliche Chancen und Schwierigkeiten zu gewinnen, wurde weiterhin in Masterarbeiten verfolgt. Die Studierenden untersuchen dabei ganz unterschiedliche Problemstellungen, welche unter anderem die Analyse von Lehr-Lernprozessen (z. B. Schrader, 2018) sowie die Gestaltung, Erprobung und Evaluierung von Lernarrangements (z. B. Hagemann, 2018) umfassen. Beispielsweise hat Schrader (2018) in ihrer Arbeit unter anderem herausgearbeitet, dass die befragten Viertklässler_innen ohne graphentheoretische Vorkenntnisse viele Voraussetzungen für das Arbeiten mit Graphen mitbringen, der aktive Wortschatz ausreichend ist, um Zusammenhänge beim Modellieren

mit Graphen erläutern und interpretieren zu können und dass die Wörter aus dem aktiven Wortschatz der Kinder an eine geometrische Fachsprache angelehnt sind (vgl. Schrader, 2018).

Ausblick und mögliche weitere Forschungsansätze

Ausgehend von dem bisher nur subjektiv aber über die Jahre hinweg bestätigten Eindruck, dass den Studierenden das Verständnis mathematischer Konzepte und Beweismethoden anhand von graphentheoretischen Inhalten leichter fällt, sollte dies genauer untersucht werden, um daraus mögliche Konsequenzen für die Lehramtsausbildung und das Lernen von Mathematik abzuleiten. Zum einen sollte hier erforscht werden, ob die Studierenden die Konzepte tatsächlich besser verstehen. Wenn dies der Fall ist, sollte zum anderen die Ursache dafür näher untersucht werden, indem die Graphentheorie aus stoffdidaktischer Sicht genauer in den Blick genommen wird.

Des Weiteren sind die Ergebnisse aus den Projektbänden und den Masterarbeiten als Ausgangspunkt für weitere graphentheoretische Forschungen im schulischen Kontext zu sehen. Hier sollte es zunehmend zum Ziel werden, das immer wieder angesprochene didaktische Potential graphentheoretischer Inhalte anhand empirischer Forschung zu belegen und somit Chancen und Grenzen für die Umsetzung im Mathematikunterricht aufzuzeigen.

Literatur

- Bigalke, H.-G. (1974a): Graphentheorie im Mathematikunterricht? In: *Der Mathematikunterricht*, 20, 4: (S. 5–10).
- Bigalke, H.-G. (1974b): Über die mögliche Bedeutung der Graphentheorie beim Lernen von Mathematik. In: *Didaktik der Mathematik*, 2: (S. 181–216).
- de Wiljes, J.-H., Hamann, T. & Schmidt-Thieme, B. (2016). Die Hildesheimer Mathe-Hütte – ein Angebot zur Einführung in mathematisches Arbeiten im ersten Studienjahr. In A. Hoppenbrock et al. (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 101–113). Wiesbaden: Springer.
- Hagemann, S. (2018). Der Vier-Farben-Satz der Graphentheorie im Mathematikunterricht der Grundschule – Konzeption, Umsetzung und Reflexion einer Unterrichtseinheit. Hildesheim: Universität Hildesheim, unveröffentlichte Masterarbeit.
- Leneke, B. (2013): Graphen als Modelle für Wege und Rundreisen im Mathematikunterricht. In: *Der Mathematikunterricht*, 59, 2: (S. 36–41).
- Lutz-Westphal, B. (2006): Kombinatorische Optimierung: Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht. Berlin: TU Berlin, Dissertation.
- Schrader, S. (2018). Graphentheorie im Mathematikunterricht der Grundschule. Eine Untersuchung zum aktiven Wortschatz von Kindern der vierten Klasse beim Modellieren mit Graphen. Hildesheim: Universität Hildesheim, unveröffentlichte Masterarbeit.
- Winter, H. (1971): Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule. In: *Der Mathematikunterricht*, 17, 5: (S. 40–66).