

ALARCÓN-RELMUCAO, Nicolás
Bielefeld

Grundvorstellungen zur Exponentialfunktion: Eine deutsch-chilenische Vergleichsstudie

Verschiedene Studien aus Lateinamerika weisen darauf hin, dass sowohl die Vermittlung als auch das Verständnis der Exponentialfunktion mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden ist (Álvarez, 2017; Sudera & Otero, 2013). Grund dafür ist sowohl das fehlende Verständnis der praktizierenden Lehrkräfte als auch die angewandten Methoden und das verfügbare pädagogische Material (wie Schulbücher und Lehrpläne), welche oftmals nicht für einen sinnstiftenden Unterricht geeignet sind. Eine vorherrschende fachliche Ausrichtung im Unterricht der Exponentialfunktion vernachlässigt häufig die mentalen Prozesse, die für das Verständnis dieses mathematischen Begriffs notwendig sind. Folglich sind Lernende oft nicht in der Lage, Exponentialfunktionen zur Problemlösung und zur Modellierung realer Prozesse einzusetzen. Dies führt einerseits zu einer mechanisierten, formelbasierten Vermittlung durch die Lehrkräfte und andererseits zu einer abstrakten, realitätsfernen Anwendung der Exponentialfunktion.

Trotz der Vielzahl an qualitativen Forschungsarbeiten zum funktionalen Denken fehlen spezifische quantitative Studien, die sich explizit auf exponentielle Prozesse konzentrieren und die Kompetenzen von Lernenden in Bezug auf das Identifizieren, Berechnen und Schätzen exponentiellen Wachstums detailliert analysieren.

Theoretischer Rahmen

Um die Lehrsituation in Lateinamerika zu verbessern, erscheint es zielführend, den Blick zu weiten und zu untersuchen, wie Exponentialfunktionen in verschiedenen Weltregionen unterrichtet werden. Diese Studie vergleicht daher die Ansätze Chiles, repräsentativ für Lateinamerika, mit denen Deutschlands, als Beispiel für Europa. Deutschland wurde aufgrund seiner langen Tradition in der Mathematikdidaktik und der Entwicklung der Theorie der Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995; vom Hofe & Blum, 2016) ausgewählt, welche in dieser Untersuchung eine wesentliche Rolle spielt. Die Arbeit sucht die folgenden Fragen zu antworten:

- Welche Grundvorstellungen zur Exponentialfunktion lassen sich aus normativer Perspektive identifizieren?
- Über welche Basiskompetenzen zur Exponentialfunktion verfügen Lehramtsstudierende in Chile und Deutschland?"

Grundvorstellungen zur Exponentialfunktion

Auf der Basis der Sachanalysen lassen sich folgende Grundvorstellungen zur Exponentialfunktion bestimmen (Alarcón-Relmucao, 2022):

- **Prozentuelles Wachstum:** Die Exponentialfunktion beschreibt ein Wachstum, bei dem der momentane Bestand in jedem gleichgroßen Zeitintervall mit demselben Prozentsatz ansteigen. Man kann zwischen einer additiven und einer multiplikativen Sichtweise unterscheiden (vgl. Abb. 1 und Abb. 2).

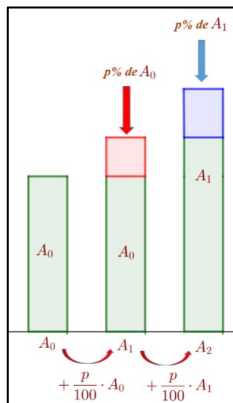


Abb. 1: Durch die Sukzessive Addition eines Prozentwertes

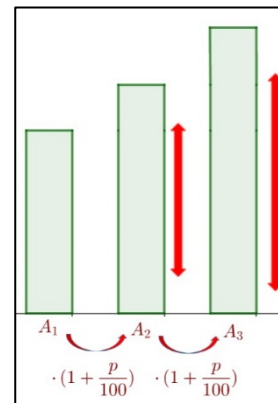


Abb. 2: Durch den Prozentfaktor

Diese Grundvorstellung findet sich in Aufgaben zur Zinseszinsrechnung wieder.

- **Wachstum mit konstantem Faktor:** Die Exponentialfunktion beschreibt ein Wachstum, bei dem der momentane Bestand in jedem Schritt mit einem konstanten Faktor vervielfacht wird (vgl. Abb. 3).

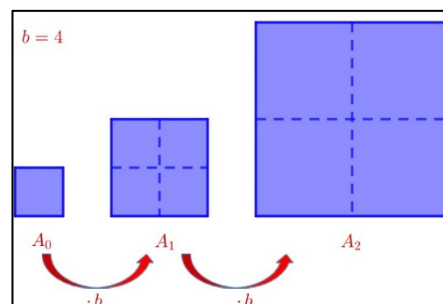


Abb. 3: Der Vorstellung des Wachstums um einen konstanten Faktor

Diese Vorstellung findet Anwendung bei Aufgaben zum Wachstum von Bakterien.

Studiendesign

Der Test wurde mit 128 Studierenden (weiblich: 65; männlich: 63) aus zwei Universitäten durchgeführt. Die Teilnehmer:innen setzen sich aus zwei Untergruppen zusammen: 81 Lehramtsstudierende für Mathematik (weiblich: 37; männlich: 44) aus einer Universität in Nordrhein-Westfalen, Deutschland (EA) und 47 Lehramtsstudierende für Mathematik (weiblich: 28; männlich: 19) aus einer öffentlichen chilenischen Universität in der Region Valparaíso, Chile (EC).

Der Test umfasste 23 Items, die Basiskompetenzen im Umgang mit Funktionen, insbesondere der Exponentialfunktion, abdeckten und war in die Kategorien "Identifizieren", "Berechnen" und "Schätzen" gegliedert. Bei den Items zum Identifizieren handelt es sich um das Erkennen exponentieller Prozesse und um ihre Unterscheidung zu anderen Wachstumsarten. Die Kategorie Berechnen umfasst Items zu elementaren Kalkulationen. Bei den Items zu Kategorie Schätzen handelt es sich um näherungsweise Beurteilen exponentieller Prozesse ohne exakte Berechnung.

Ergebnisse

Mithilfe von Inferenzstatistik und des nichtparametrischen Mann-Whitney-Tests wurden signifikante Unterschiede zwischen den Studiengruppen festgestellt. In der Kategorie "Identifizieren" waren die Werte der EA-Gruppe signifikant höher als die der EC-Gruppe ($U=906.5$, $p<.001$, $r=.439$), ebenso in der Kategorie "Berechnen" ($U=1146.5$, $p<.001$, $r=.334$) und in der Kategorie "Schätzen" ($U=990$, $p<.001$, $r=.405$).

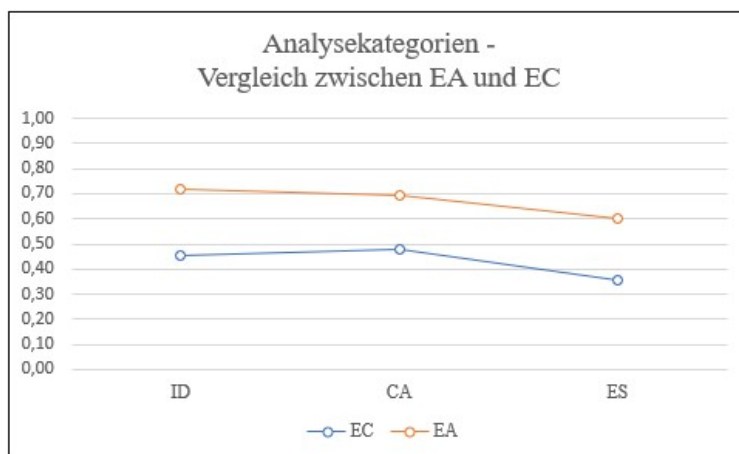


Abb. 4: Leistung von EA und EC in Bezug auf die Analysekategorien

In Abb. 4 ist zu erkennen, dass die Lösungswahrscheinlichkeit in den Basiskompetenzen Identifizieren, Berechnen und Schätzen im Fall von EC jeweils unter 50% liegt. Im Fall von EA ist eine Schwierigkeit in der Kategorie

"Schätzen" zu erkennen, dennoch liegt die Lösungswahrscheinlichkeit bei fast 60 %.

Fazit

Durch die didaktische Sachanalyse konnten zwei Grundvorstellungen zur Exponentialfunktion aus normativer Perspektive identifiziert werden, die in den heutigen Schulen ein tiefes und für die Bewältigung von Alltagsproblemen tragfähiges Verständnis von exponentiellen Wachstum zu fördern. In der Praxis ist es wichtig, die Vorstellung des prozentualen Wachstums über den Prozentfaktor als Hauptstrategie zu erarbeiten. Auf diese Weise kann die Exponentialfunktion in ihrer allgemeinen Form auf natürliche Weise eingeführt werden. Gleichzeitig können entsprechende Fehler verringert werden. Die Konstruktion des Prozentfaktors stellt eine robustere Struktur dar als die Arbeit durch sukzessive Addition eines Prozentwerts, da z.B. Aufgaben mit mehrschrittigen Prozentoperationen viel leichter und eleganter zu realisieren sind. Die Analyse von Lehrbüchern und Lehrplänen in beiden Ländern erklärt teilweise die Ergebnisse der empirischen Studie. Diese Ergebnisse zeigen den Unterschied zwischen einem Unterricht, der sich auf Lernprozesse konzentriert, wie es in EA der Fall ist, und einem, der sich auf Inhalte und mechanische Prozesse fokussiert, wie es in EC der Fall ist.

Literatur

- Alarcón-Relmucao, N. (2022). *Grundvorstellungen zur Exponentialfunktion aus normativer Perspektive*. Universitätsbibliothek Dortmund.
- Alvarez, L. (2017). *Comprensión de las funciones exponenciales y logarítmicas, desde los registros de representación semiótica con la asistencia de entornos virtuales de aprendizaje en estudiantes de primer semestre de la Universidad Tecnológica de Pereira*. (Tesis de maestría no publicada). Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.
- Salle, A., & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 42(2), 553-580.
- Sureda, P., und Otero, M. R. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Educación matemática*, 25(2), 89-118.
- Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Vom Hofe, R., & Blum, W. (2016). "Grundvorstellungen" as a category of subject-matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 225-254.