

KOLBE, Tim
Universität Paderborn

Wissensnutzung von Ingenieurstudierenden beim Lösen mathematischer Aufgaben zum Thema Differentialrechnung

In universitären Mathematikveranstaltungen ist es üblich, dass Studierende ein hoher Zeitanteil für die eigenständige Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten zugeschrieben wird. In vielen Fällen unterstützt die Veranstaltung diesen Lernprozess, indem wöchentlich Hausaufgaben gestellt werden. Viele Studierende stoßen auf Schwierigkeiten, wenn eigenständig mathematische Inhalte bzw. Aufgaben bewältigt werden müssen. Diese Schwierigkeiten scheinen sich auch im Ingenieurstudium zu zeigen, da viele studienbezogene Probleme auf den Umgang mit mathematischen Inhalten zurückzuführen sind (Hochmuth & Schreiber, 2016). Aus bisheriger empirischer Forschung gibt es noch zu wenig Erkenntnisse, in welcher Weise sich Studierende mit den mathematischen Inhalten auseinandersetzen. Durch eine Rekonstruktion des von Studierenden aktivierten Wissens, das sie bei der Bearbeitung von mathematischen Aufgaben nutzen, kann ein Einblick gewonnen werden, wie Studierende mit mathematischen Inhalten umgehen. Indem solche Prozesse besser verstanden werden, können Lehrende gezielter auf die Bedürfnisse von Studierenden eingehen.

Verortung mathematischer Inhalte in der Wissensmatrix

Die Wissensmatrix (Prediger et al., 2011) liefert eine Möglichkeit, mathematische Inhalte bezüglich beteiligter Wissens Elemente zu betrachten. Dabei wird das Wissen zunächst in die beiden Wissensarten prozedural und konzeptuell (Hiebert & Lefevre, 1986) unterteilt. Die Wissensarten werden in den Spalten der Wissensmatrix in verschiedene Wissensfacetten (Prediger et al., 2011) aufgeteilt: Explizite Formulierung, Konkretisierung & Abgrenzung, Bedeutung & Vernetzung sowie konventionelle Festlegung. Die Zellen der Wissensmatrix sind dabei die verschiedenen Wissens Elemente. Die Bedeutung der einzelnen Wissens Elemente kann stichpunktartig der Abbildung 1 entnommen werden (detaillierter z.B. in Prediger et al., 2011).

Nach der Wissensmatrix lassen sich mathematische Inhalte in verschiedene Wissens Elemente unterteilen. Dabei ist allerdings noch nicht klar, inwiefern Studierende auf die verschiedenen Wissens Elemente in Bearbeitungsprozessen zurückgreifen. Es stellt sich demnach die Forschungsfrage: Auf welche Wissens Elemente greifen Ingenieurstudierende beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben zurück?

	Mathematischer Inhalt	Explizite Formulierung	Konkretisierung & Abgrenzung	Bedeutung & Vernetzung	Konventionelle Festlegungen
Konzeptuelles Wissen	Konzepte (=Definitionen)	Ausformulierte Definition	Beispiele / Gegenbeispiele	Vorstellung / Darstellung	Fachwörter
	Zusammenhänge (=Sätze)	Ausformulierter Satz	Beispiele / Gegenbeispiele	(anschauliche) Begründung / Beweise	Namen, Bezeichnungen
Prozedurales Wissen	Verfahren	Anleitung des Verfahrens	Bedingung der Anwendbarkeit, Spezialfälle	Vorstellung / Begründung	Nicht begründbare Festlegungen

Abbildung 8: Wissensmatrix (übernommen aus Prediger et al., 2011)

Methodik

Zu Datengewinnung wurden freiwillige Ingenieurstudierende der Universität Paderborn im Wintersemester 2022/23 akquiriert. Die teilnehmenden Studierenden (N=10, fünf Lerngruppen unterschiedlicher Größe) wurden während des Semesters in der Vorlesungswoche zehn bis zwölf begleitet. Dabei wurden die Bearbeitungsprozesse der Studierenden zu den mathematischen Hausaufgaben videografiert. Den Studierenden wurde aufgetragen, dass sie bei der Bearbeitung der Aufgaben "laut denken" (Ericsson & Simon, 1980) sollen.

Es wurden mehrere gemeinsame Bearbeitungsprozesse zu verschiedenen Aufgaben videografiert, wobei dieser Beitrag auf Bearbeitungsprozesse der folgenden Aufgabe fokussiert:

Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{e^x}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

gegebene Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle 0 differenzierbar ist, und bestimmen Sie $f'(0)$.

Abbildung 9: Aufgabe "Differenzierbarkeit prüfen"

Um die Forschungsfrage zu beantworten, wird die Wissensmatrix als Analyseinstrument genutzt. Dabei wird den Wissensarten allerdings jeweils die Facette implizite Nutzung hinzugefügt. Sie beschreibt für das prozedurale Wissen die Anwendung eines mathematischen Verfahrens und für das konzeptuelle Wissen den Anwendungskontext einer Definition bzw. eines Satzes.

Letztlich wird im empirischen Analyseschritt der Bearbeitungsprozess anhand des Videomaterials auf aktivierte Wissens Elemente untersucht. Alle

Stellen mit identifizierter Aktivierung von Wissensselementen im Bearbeitungsprozess werden chronologisch durch Zahlen in der Wissensmatrix dargestellt. Wenn eine Zahl doppelt auftritt, werden Wissensselemente gleichzeitig benutzt.

Analyse der Aktivierung von Wissensselementen

Mit Hilfe der Wissensmatrix wurde bei fünf verschiedenen Lerngruppen die Aktivierung von Wissensselementen zur selben Aufgabe (Abb. 2) untersucht.

Im Bearbeitungsverlauf von Alex und Thomas (Abb. 3) sprechen beide zunächst darüber, wie die Differenzierbarkeit einer Funktion gezeigt werden kann ("1" in der Wissensmatrix). Im Anschluss wird nach einem konkreten Beispiel gesucht, um das Vorgehen übernehmen zu können ("2"). Der Bearbeitungsprozess von Thomas und Alex endet damit, dass sie ihr Ergebnis anhand einer Visualisierung der Funktion validieren ("22"). Aus Platzgründen wird hier nur der Anfang und das Ende des Bearbeitungsverlaufs beschrieben. Ein Überblick kann der Matrix (Abb. 3) entnommen werden.

	Mathematischer Inhalt	Implizite Nutzung	Explizite Formulierung	Konkretisierung & Abgrenzung	Bedeutung & Vernetzung	Konventionelle Festlegung
Konzeptuelles Wissen	Konzept: Differenzierbarkeit	1				21
	Konzept: Funktion				8, 22	
	Konzept: Abschnittsweise definierte Funktion	10				
	Konzept: Verkettung von Funktion		20		8	
	Zusammenhang: Differenzierbare Funktionen					
Prozedurales Wissen	Verfahren: Differenzierbarkeit prüfen	3, 6, 12, 15, 19		2, 5, 14, 16, 18	13	4, 9, 11
	Verfahren: Stetigkeit prüfen		17	7, 17		
	Verfahren: Grenzwert von Funktionen berechnen	6, 12, 20	20			
	Verfahren: Sandwich-Kriterium					

Abbildung 10: Aktivierte Wissensselemente von Thomas und Alex

Alex und Thomas haben insgesamt ca. 27 Minuten an der Aufgabe gearbeitet und haben eine fast vollständig korrekte Lösung erarbeitet. Während der Bearbeitung aktivieren Alex und Thomas viele Wissensselemente. Bezüglich der Wissensarten kann der zugehörigen Wissensmatrix entnommen werden, dass Alex und Thomas häufiger prozedurales als konzeptuelles Wissen aktivieren. Dies liegt vor allem daran, dass beide mittels Beispiele aus dem Skript, Übungen und Internet versuchen, eine Lösung für die Aufgaben zu generieren (Kodierung: Konkretisierung & Abgrenzung). Dabei wird häufig versucht, die gefundenen Beispiele auf die eigene Aufgabe zu übertragen. In den gefundenen Beispielen wird allerdings keine abschnittsweise definierte Funktion vorgegeben, sodass bei dem Schritt des Einsetzens in die Definition der Differenzierbarkeit sowie der Berechnung des Grenzwerts Schwierigkeiten auftauchen (Kodierung: Implizite Nutzung).

Im Vergleich mit den anderen Lerngruppen aktivieren Alex und Thomas

viele verschiedene Wissensselemente in ihrem Bearbeitungsprozess. Dies liegt vermutlich zum einen daran, dass sie vergleichsweise viel Zeit in den Aufgabebearbeitungsprozess investieren. Zum anderen haben Thomas und Alex ihre inhaltlichen Probleme wahrgenommen und versucht, weiterhin eine Lösung zu finden und nicht aufzugeben. Zuletzt erreichen Alex und Thomas eine fast vollständig korrekte Lösung. Ähnlich wie bei Thomas und Alex zeigt sich bei David ebenfalls eine hohe Vielzahl von aktivierten Wissensselementen. Auch von ihm werden aufgetretene inhaltliche Probleme ausführlich behandelt. David gelangt ebenfalls zu einer Lösung, wobei diese durch einen Gedankenfehler im letzten Schritt nicht korrekt ist. Sowohl bei Alex und Thomas als auch bei David lässt sich nach der Bearbeitung der Aufgabe dennoch vermuten, dass durch die vielen aktivierten Wissensselemente ein tieferes Verständnis der mathematischen Inhalte erlangt wurde.

Die anderen drei Lerngruppen haben in ihrem Bearbeitungsverlauf weniger Wissensselemente aktiviert. Dabei wurden die Fehler oder Problemstellen im eigenen Vorgehen allerdings nicht erkannt bzw. nicht weiter aufgegriffen, sodass nicht auf weitere Wissensselemente zurückgegriffen wurde. Da die Aufgaben in diesen drei Lerngruppen nur in einer Gruppe ansatzweise richtig gelöst wurde, kann vermutet werden, dass eine Aktivierung von weiteren Wissensselementen sowohl für die Lösung als auch für das Verständnis der notwendigen mathematischen Inhalte geholfen hätte.

Ausblick

Zunächst kann festgehalten werden, dass sich die Wissensmatrix als Analyseinstrument für Bearbeitungsprozesse von Studierenden eignet. Im nächsten Schritt soll die Wissensmatrix für die Analyse von Bearbeitungsprozesse weiterer Aufgaben eingesetzt werden.

Literatur

- Ericsson, K. A. & Simon, H. A. (1980). Verbal reports as data. *Psychological review*, 87(3), 215-251.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (S. 1-27). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Hochmuth, R. & Schreiber, S. (2016). Überlegungen zur Konzeptualisierung mathematischer Kompetenzen im fortgeschrittenen Ingenieurwissenschaftsstudium am Beispiel der Signaltheorie. *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase: Herausforderungen und Lösungsansätze*, 549-566.
- Prediger, S., Barzel, B., Leuders, T. & Hussmann, S. (2011). Systematisieren und Sichern. Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. *mathematik lehren* (164), 2-9.