

Maria FAST, Wien

## **Typische Entwicklungsverläufe von Lösungswegen beim Addieren und Subtrahieren von Klasse 2 bis 4**

Die Erforschung des arithmetischen Denkens von Schülerinnen und Schülern, insbesondere der Verlauf von Lösungswegen bei Addition und Subtraktion, steht im Mittelpunkt des Erkenntnisinteresses. In einer qualitativen Längsschnittstudie (Paneldesign,  $N = 44$ ) mit sechs Erhebungszeitpunkten werden durch Fallvergleich und Fallkontrastierung Ähnlichkeiten und Unterschiede in den Lösungswegen, Lösungsquoten und Fehlermustern identifiziert. Ausgehend von der Frage, wie sich die Lösungswege von Kindern bei Additions- und Subtraktionsaufgaben von der zweiten bis zur vierten Schulstufe entwickeln, und dem bereits publizierten Forschungshintergrund (Fast 2012) werden nachfolgend die gefundenen Typen vorgestellt und interpretiert.

### **Typische Entwicklungsverläufe**

Bestimmend für die Typenbildung ist die Vergleichsdimension *Lösungswege* mit den Ausprägungen *Zählen*, *Rechnen in den Stellenwerten* und *Zahlenrechnen*, in der die Art des Vorgehens, speziell die Verknüpfung der Teilschritte bei den einzelnen Rechnungen einbezogen wird. In die zweite Vergleichsdimension *Lösungsquote* fließen neben der Anzahl der richtigen Lösungen das Zahlverständnis, insbesondere auch Fehlermuster, mit ein.

Vor dem unterrichtlichen Hintergrund eines „routine approach“ (Heinze, Marschick & Lipowsky 2009, S. 594), der durch Anschauungsmaterialien mit einem stark stellenorientiertem Konzept wie Zehnersystem-Blöcke und Rechengeld gekennzeichnet ist, konnten sieben Typen identifiziert werden. Die noch nicht endgültig abgeschlossene Bezeichnung der Typen erfolgt derzeit teilweise beschreibend und teilweise inhaltlich-charakterisierend.

Die ersten drei angeführten Typen von Entwicklungsverläufen bei Kindern favorisieren das Zerlegen der Zahlen in ihre Stellenwerte. Eingesetzt werden vorwiegend Split-Methoden wie *stellenweises Rechnen*, *ziffernweises Rechnen* (Schipper 2009, S. 140) und *algorithmische Rechenverfahren*. Dies erfolgt mit unterschiedlicher Lösungsquote, je nach Verständnis des Stellenwertsystems und impliziter Kenntnis der Rechengesetze.

Typ 1: Kinder, die *durchgängig stellenwertrechnend, mit hoher Lösungsquote*, vorgehen, wissen von Beginn der zweiten Schulstufe an um die Bedeutung von Zehnern und Einern, sie bündeln bzw. entbündeln und verknüpfen entsprechend der gültigen Rechengesetze. Diese Kinder verwenden keinerlei Ableitungsstrategien. Sie sind auf ihre Art (verhalten) kreativ

(Selter 2009), allerdings nur innerhalb der einzelnen Stellenwerte, die sie in vielfältigen komplexen Teilschritten richtig ausführen und zur Gesamtrechnung zusammensetzen.

Typ 2: Kinder, die *durchgängig stellenwertrechnend, mit mittlerer Lösungsquote*, vorgehen, unterscheiden meist von Beginn der zweiten Schulstufe, sicher am Ende der zweiten Schulstufe, zwischen Zehnern und Einern. Manchmal zählen sie. Sie können bei Zehnerüberschreitungen am Ende der zweiten Schulstufe bei der Addition bündeln, aber bei der Subtraktion nicht entbündeln. Erst in der dritten Schulstufe zeigen die Kinder Sicherheit beim Rechnen im Zahlenraum 100. Im Zahlenraum 1 000 dagegen sind sie, im Gegensatz zu den Kindern, die *durchgängig stellenwertrechnend mit hoher Lösungsquote* vorgehen, weniger sicher. Am Ende der vierten Schulstufe werden fast alle Aufgaben entweder durch schriftliche Rechenverfahren, aber auch durch *ziffernweises Rechnen*, vorwiegend richtig gelöst.

Typ 3: Beim Entwicklungsverlauf *von ziffern- zu algorithmisch rechnend, mit niedriger Lösungsquote*, rechnen die Kinder von der zweiten bis zur vierten Schulstufe fast nur stellenweise, sehr oft mit den Ziffern in den Stellenwerten, die sie (wenig verstanden) abarbeiten. Zu Beginn der zweiten Schulstufe sind sie großteils zählende Rechner/innen und wissen nicht um die Bedeutung zwischen Zehnern und Einern. Zu Beginn der dritten Schulstufe zeigen die Kinder vielversprechende Ansätze zum Rechnen mit Zahlganzheiten, vorwiegend kombinierte Lösungsmethoden, die jedoch nach Einführung der schriftlichen Rechenverfahren Mitte der dritten Schulstufe gänzlich verschwinden. Bei diesem Entwicklungsverlauf treten die niedrigsten Lösungsquoten auf. Verlässlich hohe Lösungsquoten ergeben sich erst, wenn die schriftlichen Rechenverfahren vorschriftsmäßig verwendet werden. Das gelingt frühestens am Ende der vierten Schulstufe. Kinder dieses Typus sind verfahrensorientierte Rechner/innen mit unsicherem Zahl- und Operationsverständnis.

Die nächsten drei angeführten Typen beschreiben Entwicklungsverläufe von Kindern, welche beim Rechnen eher die Zahlganzheiten sehen und öfters Jump-Methoden, wie *schrittweises Rechnen* und *kombinierte Lösungsmethoden*, praktizieren. Diese Kinder verwenden, im Gegensatz zu den bis jetzt beschriebenen „Stellenwert“-Typen auch Ableitungsstrategien, wie z. B. *Ergänzen* bzw. *Strategien zur Veränderung und Kompensation* (Schipper 2009, S. 134).

Typ 4: Kinder, die *durchgängig überwiegend zahlenrechnend, mit hoher Lösungsquote*, vorgehen, verwenden ab der zweiten Schulstufe vorwiegend *schrittweises Rechnen* und *kombinierte Lösungsmethoden*. Die in dieser

Studie eingesetzten Rechnungen lösen sie durch Kopfrechnen, weniger mit schriftlichen Rechenverfahren. Auch nach Einführung der schriftlichen Rechenverfahren, am Ende der dritten Schulstufe, werden weiterhin *schrittweises Rechnen* und *kombinierte Lösungsmethoden* praktiziert. Nicht universelle Lösungsmethoden, wie *Ergänzen* bzw. *Strategien zur Veränderung und Kompensation*, werden gehäuft erst am Ende der vierten Schulstufe eingesetzt. Während bei den Stellenwertrechner/innen häufig Stellenwertfehler auftreten, fehlen sie bei diesem Typus.

Typ 5: Kinder, die *durchgängig überwiegend flexibel, mit hoher Lösungsquote, rechnen*, lösen auf der zweiten und zu Beginn der dritten Schulstufe Additionen *stellenweise* (in Zahlganzeheiten) und Subtraktionen *schrittweise*. Ab Ende der dritten Schulstufe treten vermehrt nicht universelle Lösungsmethoden, wie *Ergänzen* bzw. *Strategien zur Veränderung und Kompensation* auf. Ausgehend von einer gewissen individuellen Adaptivität (Torbeyns, Verschaffel & Ghesquière 2006) erreichen diese Kinder hohe, in dieser Untersuchung die höchsten Lösungsquoten. Sie können als flexible, im weitesten Sinn auch als adaptive Rechner/innen mit einem gesicherten Zahlverständnis bezeichnet werden.

Typ 6: Kinder, die *zufällig auswählend, weniger aufgabenadäquat, mit mittlerer Lösungsquote, rechnen*, praktizieren *zählendes Rechnen, schrittweises Rechnen, stellenweises Rechnen* und *kombinierte Lösungsmethoden*, später auch algorithmische Rechenverfahren und *ziffernweises Rechnen*. In der vierten Schulstufe setzen sie auch vereinzelt *Ergänzen* bzw. *Strategien zur Veränderung und Kompensation* ein. Durch Stellenwert-, Operations- und Rechenfehler werden nur mittlere Lösungsquoten erreicht. Diese Kinder zeigen ein Verständnis von Zahlen und auch ein Wissen über Rechenoperationen, das sie manchmal, aber nicht immer zeigen. Ihr Wissen divergiert mit dem tatsächlichen Verhalten (Blöte, Klein & Beishuizen 2000).

Typ 7: Beim Typus *von zahlenrechnend zu stellenwertrechnend, mit mittlerer Lösungsquote*, ändert sich im Verlauf der Entwicklung die Sicht auf Zahlen. Die Kinder verwenden bis Mitte der dritten Schulstufe eher *schrittweises Rechnen* und *kombinierte Lösungsmethoden*. Nach Einführung der schriftlichen Rechenverfahren praktizieren sie mehr Split-Methoden, die vorerst, am Ende der dritten Schulstufe, unergiebig beherrscht, jedoch bis Ende der vierten Schulstufe perfektioniert werden. Diese Kinder sind „vorschriftsmäßige“ Rechner/innen, welche die im Unterricht bzw. im Schulbuch vorgestellten Verfahren verstehen und anwenden.

## **Zusammenfassung und Interpretation**

Fast alle Entwicklungsverläufe sind dadurch charakterisiert, dass sie sich in den gleichen Ausprägungen bezüglich Zahlverständnis und Wissen über Rechenoperationen weiter entwickeln. Kinder scheinen ein bestimmtes Verständnis von Zahlen und der darauf aufbauenden additiven Verknüpfungen zu haben, das sie über die Jahre beibehalten und auf Basis des bei dieser Untersuchung stattfindenden Unterrichts nicht aufgebrochen werden kann. Die Kinder gewinnen an Routine und Geläufigkeit, allein der Blick auf Zahlen und das Vorgehen beim Lösen von Rechenoperationen bleiben gleich.

Algorithmische Rechenverfahren verstärken zifferorientierte Lösungsverfahren. Sie treten in dieser Untersuchung auch schon vorher auf, was vermutlich auf den Einsatz von vorwiegend stellenwertorientierten Anschauungsmaterialien zurückzuführen ist.

Die niedrigsten Lösungsquoten und die unsichersten Konzepte treten bei Kindern auf, welche ausschließlich einzeln Stellenwerte verknüpfen. Sehen die Kinder hingegen Zahlganzzheiten und verknüpfen sie diese dementsprechend, reduzieren sich die Stellenwertfehler und die Lösungsquote steigt. So gibt es kaum Zahlenrechner/innen mit niedriger Lösungsquote.

Flexibles Rechnen tritt nur in Entwicklungsverläufen auf, bei denen die Kinder auch in Zahlganzzheiten denken. Um die in dieser Untersuchung auftretende reduzierte Sicht auf Zahlen aufzubrechen, bedarf es offenbar gezielter Interventionen bezüglich eines umfassenden Verständnisses von Zahlen, insbesondere von Zahlganzzheiten und deren Verknüpfungen.

## **Literatur**

- Blöte, A. W., Klein, A. S., & Beishuizen, M. (2000): Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction*, 10, 221–247.
- Fast, M. (2012): Wie Kinder addieren und subtrahieren. Längsschnittliche Analysen von Klasse 2 bis Klasse 4. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*. Münster: WTM-Verlag, 241–244.
- Heinze, A., Marschick, F. & Lipowsky, F. (2009): Addition and subtraction of three-digit numbers: adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. In: *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 41, 591–604.
- Schipper, W. (2009): *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel.
- Selter, C. (2009): Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. In: *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 41, 619–625.
- Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2006): Developmental changes of children's adaptive expertise in the number domain 20 to 100. In: *Cognition and Instruction*, 24, 439–465.