SCHWARZKOPF, David
Bamberg

Entwicklung von Analysekategorien für Argumentationen über Wahrscheinlichkeiten in der Sekundarstufe I

Argumentationen über Wahrscheinlichkeiten können Schüler und Schülerinnen vor Herausforderungen stellen, da bereits auf elementarem Niveau subjektive Empfindungen objektiven Begründungen im Weg stehen können (Biehler et al., 2023; Biehler & Engel, 2015). Die Analyse auf dieser Basis lässt nur eine sehr grobe Einschätzung der Kompetenzen der Lernenden zu (D. Schwarzkopf, 2022). In diesem Beitrag wird ein Kategoriensystem vorgestellt, mit dessen Hilfe die Qualität wahrscheinlichkeitstheoretischer Argumente differenzierter erfasst werden kann.

Mathematisch argumentieren über Wahrscheinlichkeiten

Die Entwicklung und Förderung der prozessbezogenen Kompetenz „mathematisch Argumentieren“ gilt unbestritten als wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts (Jeannotte & Kieran, 2017; KMK, 2022). Entsprechend wurden zur inhaltlichen und strukturellen Analyse von Argumentationen bereits verschiedene Kategoriensysteme entwickelt (z.B. Bezold, 2009; Brunner et al., 2022; Neumann et al., 2014; R. Schwarzkopf, 2003; Stylianides, 2008).

Eine in allen angeführten Systemen vorgenommene Unterscheidung ist die Trennung zwischen mathematischen Argumenten, die ein auftretendes Phänomen lediglich beschreiben und Argumenten, die das Phänomen versuchen mathematisch zu begründen. Wird eine Begründung angeführt, betrifft eine zweite in allen Systemen vorgenommene Kategorisierung den Grad der Verallgemeinerung. Bezieht sich eine Begründung auf ein konkretes Beispiel oder wenige Einzelfälle, wird sie in der Regel einer niedrigeren ‚Stufe‘ zugeordnet als Begründungen, die mathematisch oder sprachlich allgemein gehalten sind.

Etliche Studien zur Erhebung oder Förderung der Argumentations- bzw. Begründungskompetenz adressieren geometrische oder arithmetisch-algebraische Kontexte (z.B. Bezold, 2009; Ufer et al., 2009). Ebenso können auch wahrscheinlichkeitstheoretische Aufgabenstellungen reichhaltige Anlässe für (mathematische) Argumentationen bieten (Schnell, 2019; Vogt, 2021). Genauere Untersuchungen stochastischer Begründungen wie beispielsweise bei Vogt (2021) oder Neubert (2007) stellen jedoch eher die Ausnahme dar. Beide Untersuchungen konzentrieren sich auf den Bereich der Primarstufe. Nachfolgend liegt der Fokus auf der Analyse von Argumentationen aus dem Bereich der Sekundarstufe I.

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Bezugsebenen der Argumentationen über Wahrscheinlichkeiten

Eine Argumentation über die Wahrscheinlichkeiten eines Zufallsexperiments kann sich auf wahrnehmbare oder nicht direkt wahrnehmbare Phänomene beziehen. Zur primären Ebene zählen zum einen die strukturgebenden Eigenschaften eines Zufallsgeräts (z. B. Verhältnis der Flächeninhaltsmaße, Massenmittelpunkt) und zum anderen die konkret in einer Versuchsserie produzierten (absoluten) Häufigkeiten. Zur sekundären Ebene gehören nummerische Verhältnisangaben (z.B. Brüche- oder Prozentangaben) in Form von Wahrscheinlichkeiten oder relativen Häufigkeiten, die erst nach der Analyse des Zufallsgeräts oder nach der Durchführung des Zufallsexperiments bestimmt werden können.

Für ein Argument, dass den Grund für die Wahrscheinlichkeiten am gegebenen Beispiel klärt, ist es wesentlich, innerhalb der primären Ebene einen argumentativen Zusammenhang zwischen den strukturgebenden Eigenschaften und den absoluten Häufigkeiten herzustellen. Innerhalb der sekundären Ebene reicht die Darlegung der Verhältnisangaben aus. Wird ein argumentativer Zusammenhang zwischen den Ebenen hergestellt, so wird durch diese Verbindung in der Argumentation eine Verallgemeinerung möglich.

Vorschlag von Analysekategorien zu Argumentationen über Wahrscheinlichkeiten

Aus den Theorieüberlegungen können folgende Kategorien zur Analyse von Argumentationen über Wahrscheinlichkeiten abgeleitet werden:

- nicht mathematisch
- nicht strukturell: Argumente, die lediglich die Beschreibung eines Phänomens enthalten.
- beispielgebunden strukturell: Argumente, die eine Begründung innerhalb einer Bezugsebene angeben.
- allgemein strukturell: Argumente, die durch einen Zusammenhang zwischen den Ebenen eine (allgemeine) Begründung für die Wahrscheinlichkeiten liefern.

Evaluation der Analysekategorien

Das deduktiv entwickelte Kategoriensystem wurde am Beispiel der Bearbeitungen eines Papier-Pencil Tests in der 8. Jahrgangsstufe an drei bayerischen Mittelschulen (n = 44) evaluiert. Die Schüler und Schülerinnen hatten vorab keinen Unterricht zur Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Sekundarstufe I.

Exemplarisch wird hier die Überprüfung der Passung der Kategorien an Bearbeitungen zu folgender Aufgabe illustriert: Dargestellt ist eine Tabelle mit

den absoluten Häufigkeiten der eingetretenen Ergebnisse nach dem 1000-maligen Werfen eines Riemer Quaders und ein „Mensch ärgere dich nicht“ Spielfeld. Die Schülerinnen und Schüler sollen entscheiden, ob es einen Unterschied macht, mit diesem Quader anstatt eines Spielwürfels zu spielen. Neben der dichotomen Ankreuzoption (Ja/Nein) wird eine Erklärung erwartet. 66% wählten die korrekte Antwort (Ja) aus und sogar 73% geben eine Erklärung an, die nach den obigen Kategorien analysiert werden.

Ein Drittel der hier gegebenen Erklärungen ist *nicht mathematisch*. Zwei Drittel versuchen mathematische Argumente zu nutzen.

Antworten wie „es könnten manchen Zahlen wie z. B. 2 und 5 weniger drankommen“ oder „zwei Seiten fallen häufiger“ verweisen auf Wissen um Unterschiede in den Wahrscheinlichkeiten, aber es wird lediglich eine Beschreibung auf der primären Bezugsebene gegeben. Eine Begründung bleibt aus. Sie werden der Kategorie *nicht strukturell* (hier 16%) zugeordnet.

Argumente wie „weil du ja fast nur 1 oder 6 würfelst und nie 2, 3, 4, 5, weil diese Flächen kleiner sind“ stellen einen argumentativen Zusammenhang zwischen den strukturgebenden Eigenschaften des Quaders und den produzierten Häufigkeiten her. Die Bezugsebene ist je rein phänomenologisch (1 und 6 stehen bei diesem Quader auf den beiden größten Flächen), sodass die Argumente der Kategorie *beispielgebunden strukturell* (hier 9%) zugeordnet werden. Ebenfalls werden Argumentationen in diese Kategorie eingeordnet, die ausschließ auf Verhältnisangaben bezugnehmen wie z. B.: „Die Wahrscheinlichkeit für die 1 und die 6 beim Quader beträgt ungefähr 250/1000 bzw. 1/4. Bei einem Würfel ist es jeweils 1/6“.

Argumente wie „bei einem Würfel sind alle Flächen gleich groß. Beim Quader nicht. Daher hat der Quader unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten“ verbinden die primäre Ebene (ungleich große Flächen) mit der sekundären Ebene (ungleiche Wahrscheinlichkeiten). Sie beinhalten Verallgemeinerungen und werden daher mit allgemein strukturell (hier 19%) codiert.

Fazit

Die deduktiv erarbeiteten Kategorien erfassen fast 80% der gegebenen Argumentationen. Noch nicht eingeordnet werden Argumente wie „weil der Quader keine quadratische Form hat“ oder „Die Seiten sind nicht gleich groß“. Diese beziehen sich auf die strukturgebenden Eingeschalten des Quaders, stellen aber keinen argumentativen Zusammenhang zu den Häufigkeiten oder den Verhältnisangaben her. Folglich wird das Kategoriensystem um die Kategorie *teilweise strukturell* induktiv ergänzt. Somit ist das vorgeschlagenen Analyseinstrument erschöpfend und ermöglicht, alle Schriftdokumente eindeutig einer der Kategorien zuzuweisen.

Literatur

Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote*. Dr. Kovac.

Biehler, R., & Engel, J. (2015). Stochastik: Leitidee Daten und Zufall. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 221–251). Springer.

Biehler, R., Engel, J., & Frischemeier, D. (2023). Stochastik: Leitidee Daten und Zufall. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2. Aufl., S. 243–280). Springer.

Brunner, E., Lampart, J., & Jullier, R. (2022). Schriftliches mathematisches Argumentieren in zwei unterschiedlichen Inhaltsbereichen in den Jahrgangsstufen 4-6. *Journal für Mathematikdidaktik, 43*(2), 463–493. https://doi.org/10.1007/s13138-022-00197-8

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1–16.

KMK. (2022). B*ildungsstandards im Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)* (Kultusministerkonferenz, Hrsg.; i. d.F. vom 23.06.2022).

Neubert, B. (2007). Kompetenzen von Grundschülern bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Stochastik in der Schule, 27*(3), 28–33.

Neumann, A., Beier, F., & Ruwisch, S. (2014). Schriftliches Begründen im Mathematikunterricht. *Zeitschrift für Grundschulforschung, 7*(1), 113–125.

Schnell, S. (2019). ... Weil es halt nicht sicher ist. Argumentieren mit Wahrscheinlichkeiten. *mathematik lehren, 213*, 26–31.

Schwarzkopf, D. (2022). Schülerinnen und Schüler der 8. Jahrgangsstufe beurteilen (elementare) Wahrscheinlichkeiten. In IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022* (S. 1205–1208). Waxmann.

Schwarzkopf, R. (2003). Begründungen und neues Wissen: Die Spanne zwischen empirischen und strukturellen Argumenten in mathematischen Lernprozessen der Grundschule. *Journal für Mathematikdidaktik, 24*(3/4), 211–235.

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 9–16.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S., & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. *Journal für Mathematikdidaktik, 30*(1), 30–54.

Vogt, M. (2021). *Schriftliche Begründungskompetenzen in stochastischen Aufgabenkontexten: Eine Evaluations- und Interventionsstudie im 4. Schuljahr*. Springer.