

SCHWARZMEIER, Sabrina; KOBER, Alan & OBERSTEINER, Andreas
München

Visualisierungen von Brüchen in Schulbüchern: Kontinuierlich, diskretisiert oder diskret?

1. Theoretischer Hintergrund

Das Erlernen von Brüchen ist für Schüler:innen oft schwierig (Lortie-Forgues et al., 2015). Ein Grund dafür könnte sein, dass Kinder überwiegend ihr Vorwissen über natürliche Zahlen unreflektiert auf Brüche übertragen. Brüche unterscheiden sich aber auf vielfältige Weise von natürlichen Zahlen. Zum Beispiel können natürliche Zahlen verwendet werden, um diskrete Objekte abzuzählen, während Brüche nicht zum Abzählen geeignet sind. Studien haben gezeigt, dass Schüler:innen dazu neigen, bei Bruchaufgaben Strategien zu verwenden, die sie von den natürlichen Zahlen kennen und die daher nicht immer angemessen sind (Ni & Zhou, 2005). Ein typisches Beispiel hierfür ist der Größenvergleich von zwei Brüchen. Schüler:innen betrachten hierbei oft die Bruchkomponenten getrennt voneinander, was zu falschen Antworten führen kann (z. B. "4/7 ist größer als 3/5, weil $4 > 3$ und $7 > 5$ "). Visuelle Darstellungen wie beispielsweise Bruchstreifen (siehe Tab. 1, 1. und 2. Zeile) könnten hilfreich sein, um zwei Brüchen zu vergleichen, da der größere Bruch visuell leicht erkennbar ist (Atagi et al., 2016).

Ein weiterer Vorteil solcher Visualisierungen besteht darin, dass sie die bei Kindern früh verfügbaren Fähigkeiten nutzen, visuell dargestellte Anteile einzuschätzen und zu vergleichen (Jeong et al., 2007). Allerdings stellten Begolli et al. (2020) fest, dass Kinder bei Aufgaben zu visuell dargestellten Anteilen besser abschneiden, wenn ihnen kontinuierliche Visualisierungen präsentiert werden (ohne sichtbare Unterteilungen; Tab. 1, 1. Zeile) anstelle von diskretisierten (mit sichtbaren Unterteilungen; Tab. 1, 2. Zeile) oder diskreten (getrennte Objekte; Tab. 1, 3. Zeile). Ein Grund dafür ist, dass diskrete und diskretisierte Visualisierungen eher dazu verleiten können, weniger effiziente Strategien zu verwenden, die auf dem Vorwissen über natürliche Zahlen basieren (z. B. Zählen der Segmente). Bei kontinuierlichen Visualisierungen werden möglicherweise häufiger Strategien, die auf der intuitiven Einschätzung von Anteilen basieren, verwendet (Schwarzmeier et al., 2023).

Kontinuierliche Visualisierungen von Brüchen haben also potenzielle Vorteile, die auch für das Lernen im Unterricht genutzt werden könnten. Bislang besteht anekdotische Evidenz, dass dieses Potenzial kaum genutzt wird und im Unterricht überwiegend mit diskretisierten oder diskreten Visualisierungen gearbeitet wird. Systematische Erkenntnisse über die Häufigkeit der Verwendung unterschiedlicher Typen von Visualisierungen von Brüchen im

Unterricht fehlen. Aus Studien ist bekannt, dass Schulbücher das Unterrichtsgeschehen maßgeblich beeinflussen - unter anderem, weil sie teils abstrakte Lehrpläne in konkrete Vorschläge für die Instruktion im Klassenzimmer übersetzen und somit Lehrkräften eine wichtige Orientierung bei der Unterrichtsplanung bieten (Valverde et al., 2002). Daher untersucht die vorliegende Studie als erste Annäherung an die Unterrichtspraxis die Häufigkeiten unterschiedlicher Visualisierungen in Schulbüchern.

2. Methode

In die Analyse wurden Schulbücher einbezogen, die sich an verschiedene Schulformen richten. Bislang liegen die Ergebnisse der Analyse von vier Schulbüchern vor. Die Schulbücher *Lambacher Schweizer 6* und *Fokus Mathematik 6* sind zwei gängige Lehrwerke an bayerischen Gymnasien. *Mathe.logo 6 Realschule* bzw. *Wirtschaftsschule* wird an bayerischen Realschulen bzw. Wirtschaftsschulen verwendet.

Mit Hilfe eines Kodierschemas wurden die Visualisierungen von Brüchen in die Kategorien *kontinuierlich*, *diskretisiert*, und *diskret* eingeordnet (siehe Tab. 1). Die Kodierung erfolgte durch zwei unabhängige Rater. Die Interrater-Reliabilität war hoch (Cohens Kappa $\kappa = .86$).

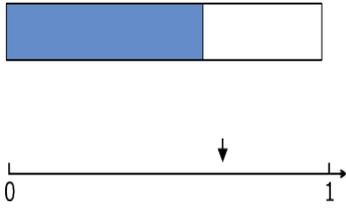
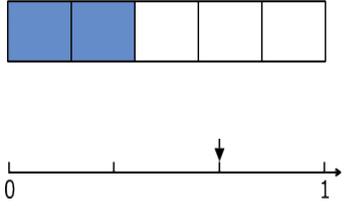
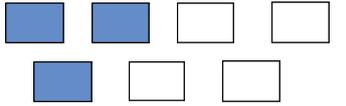
Kategorie	Beschreibung	Ankerbeispiel
Kontinuierlich	Geometrisch zusammenhängende Grundgesamtheit, bei der nur der dargestellte Anteil hervorgehoben ist (ohne abzählbare Segmente) oder Brüche an einem Zahlenstrahl ohne Unterteilungen	
Diskretisiert	Geometrisch zusammenhängende Grundgesamtheit, unterteilt in abzählbare Segmente oder Brüche an einem Zahlenstrahl mit Unterteilungen	
Diskret	Einzelne, abzählbare, geometrisch voneinander getrennte Objekte	

Tabelle 1: Kodierschema

3. Ergebnisse

Insgesamt analysierten wir in den vier Schulbüchern $N = 633$ Visualisierungen von Brüchen. Abbildung 1 zeigt den Anteil der drei Kategorien an der Gesamtanzahl der Visualisierungen.

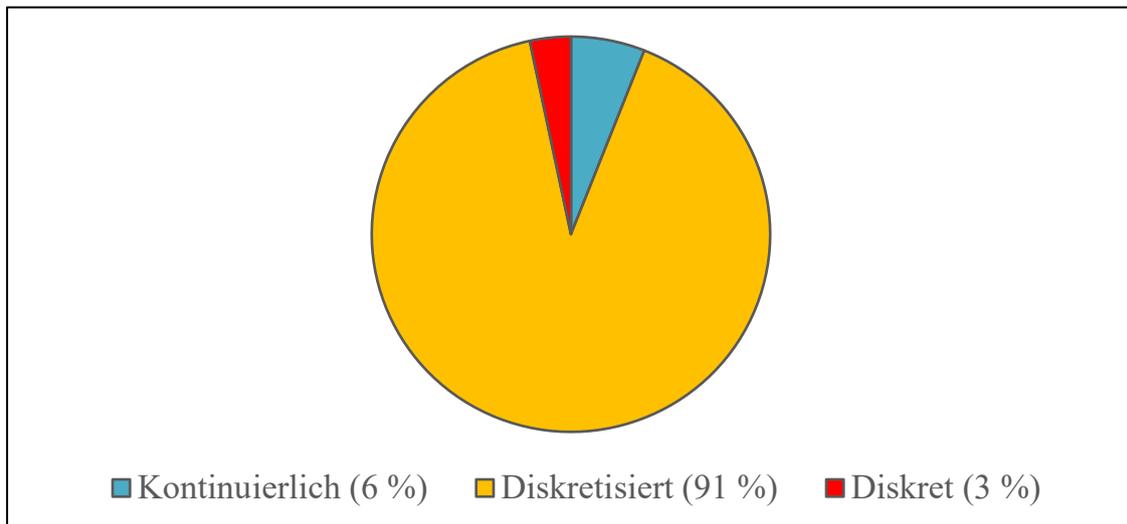


Abbildung 1: Anteil der drei Kategorien an der Gesamtanzahl der Visualisierungen
94 % der Visualisierungen waren diskretisiert oder diskret. Lediglich 6 % der Visualisierungen waren kontinuierlich.

4. Diskussion

Diese Schulbuchanalyse zeigt, dass sich die untersuchten Schulbücher bei der Darstellung von Brüchen stark auf nicht-kontinuierliche Visualisierungen (diskretisiert und diskret) stützen und nur selten kontinuierliche Visualisierungen einsetzen. Diskrete und diskretisierte Visualisierungen sind nützlich für den Unterricht zu Brüchen. Sie bieten gegenüber kontinuierlichen Visualisierungen den Vorteil, dass das Übersetzen zwischen visueller und symbolischer Darstellung einfacher ist, da Zähler und Nenner in der Visualisierung direkt erkennbar sind. Dennoch erscheint der starke Fokus auf diskrete und diskretisierte Visualisierungen problematisch, weil das oben beschriebene Potential von kontinuierlichen Visualisierungen möglicherweise nicht vollständig genutzt wird.

Die vorliegende Schulbuchanalyse berichtet erste Ergebnisse auf Basis einer vergleichsweise kleinen Stichprobe, die sich auf bayerische Schulbücher beschränkt. Daher sollten in Zukunft umfassendere Analysen auch mit Schulbüchern aus anderen Bundesländern und Ländern erfolgen, was bereits in Planung ist.

In Ergänzung der vorliegenden Schulbuchanalyse wird derzeit eine Lehrkräftebefragung durchgeführt. Erste Ergebnisse bestätigen im Wesentlichen den hier berichteten Befund. Lehrkräfte gaben an, dass sie in ihrem Unterricht nur selten kontinuierliche Visualisierungen einsetzen und fast ausschließlich mit diskretisierten oder diskreten Visualisierungen arbeiten. Bisherige Studien konnten jedoch anhand von Lösungsraten (Begolli et al., 2020) und Eye-Tracking Daten (Schwarzmeier et al., 2023) zeigen, dass sich kontinuierliche Visualisierungen von Brüchen für das korrekte und effiziente Einschätzen von Bruchgrößen vermutlich besser eignen als diskretisierte und diskrete Visualisierungen. Es könnte deshalb sinnvoll sein, kontinuierliche Visualisierungen häufiger im Unterricht einzusetzen, besonders wenn es um den Größenvergleich von Brüchen geht.

Literatur

- Atagi, N., DeWolf, M., Stigler, J. W. & Johnson, S. P. (2016). The role of visual representations in college students' understanding of mathematical notation. *Journal of Experimental Psychology. Applied*, 22(3), 295–304.
- Begolli, K. N., Booth, J. L., Holmes, C. A. & Newcombe, N. S. (2020). How many apples make a quarter? The challenge of discrete proportional formats. *Journal of Experimental Child Psychology*, 192, 104774.
- Jeong, Y., Levine, S. C. & Huttenlocher, J. (2007). The Development of Proportional Reasoning: Effect of Continuous Versus Discrete Quantities. *Journal of Cognition and Development*, 8(2), 237–256.
- Lortie-Forgues, H., Tian, J. & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, 38, 201–221.
- Ni, Y. & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52.
- Schwarzmeier, S., Obersteiner, A., Alibali, M. W. & Marupudi, V. (2023). Diskretisierte und kontinuierliche Visualisierungen von Brüchen: Eine Eye-Tracking Studie mit Erwachsenen. In IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022: 56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 29.08.2022 bis 02.09.2022 in Frankfurt am Main*. WTM-Stein.
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. & Houg, R. T. (2002). *According to the Book: Using TIMSS to Investigate the Translation of Policy into Practice through the World of Textbooks*. Kluwer Academic Publisher.