

Kapitel 5

Elementarteilchenphysik

Vorbemerkungen zu den Kapiteln 5–7

Im zweiten Teil der Vorlesung wollen wir die nächste elementare Stufe des Aufbaues der Materie besprechen.

Dabei heißen Bausteine elementar, wenn:

- sie keine Ausdehnung besitzen,
- sie nicht zusammengesetzt, d.h. nicht zerlegbar sind,
- die elementaren Wechselwirkungen an ihnen angreifen (elementare Wechselwirkung in dem Sinne, in dem die Coulombkraft elementar ist, die aus ihr abgeleitete van der Waals-Wechselwirkung aber nicht.)

LITERATUR: [1, 78, 79, 80, 81]

In diesem Teil der Vorlesung wollen wir uns mit folgenden Fragestellungen beschäftigen:

- Was sind die elementaren Bausteine (Antwort: Leptonen und Quarks) (Kap.5, 6)
- Welche elementaren Wechselwirkungen halten die Bausteine zusammen bzw. wirken zwischen ihnen (Antwort: (Gravitation), elektromagnetische/schwache Wechselwirkung (Quanten-Flavor-Dynamik), starke Wechselwirkung (Quanten-Chromo-Dynamik))(Kap.7)

Dabei existieren folgende Methoden, die Frage nach den elementaren Bausteinen der Materie und ihren Wechselwirkungen zu beantworten:

- Spektroskopie (Analysen der gebundenen Zustände)(Kap.5)
- Streuung (Untersuchung der Streuzustände)(Kap.6)

Bevor wir Einzelheiten diskutieren, wollen wir die charakteristischen Größen auf verschiedenen Ebenen der elementaren „Strukturen“ vergleichen.

	$\Delta E/mc^2$	r	Quantenzahlen
Atomphysik	10^{-9}	$10^{-8}cm$	n, J^π
Kernphysik	10^{-3}	$10^{-12}cm$	$n, J^\pi, A, Z, I(sospin)$
Elementarteilchenphysik	$0.1 \dots 1$	$< 10^{-18}cm$	$J^\pi, I, B, L, S, Y, \tilde{C}, \tilde{B}, \dots$

In dieser einführenden Vorlesung wollen wir uns auf drei Aspekte konzentrieren, die – im Rückblick – zu den wesentlichen neuen Begriffen und Vorstellungen führten.

Daher ist der zweite Teil der Vorlesung gegliedert in

- Spektroskopie, Kap.5 (neue additive Quantenzahlen, diskrete Symmetrien, Isospin und Quark-Modell als Ordnungsschemata),
- Tiefinelastische Streuprozesse, Kap.6 (alternative Begründung des Quarkmodells, Feldquanten),
- Wechselwirkungen, Kap.7 (Feldquanten, charakteristische Eigenschaften der Kraftfelder Zurückführung der Felder auf dynamische Symmetrien).

5.1 Teilchenklassifizierung und additive Quantenzahlen

In diesem Paragraphen sollen geeignete Begriffe eingeführt werden, die das umfangreiche experimentelle Material zu ordnen gestatten. Man geht dabei analog wie in der Atom- und Kernphysik vor, wo das Auftreten bestimmter Spektrallinien mit Hilfe weniger Quantenzahlen ($n, l, j, s, m_j, m_s, \text{Parität}$) und Auswahlregeln (zum Beispiel: $\Delta l = \pm 1$; $\Delta m = 0, \pm 1$ für Dipolstrahlung) „erklärt“ werden konnte. Sie wurden später im Rahmen der Quantenmechanik interpretiert.

Beispiel: Das H-Atom:

$$n \rightarrow \text{Energieeigenzustände} \rightarrow V(r) \sim \frac{1}{r}$$

$$l, m_l \rightarrow SO(3) - \text{Symmetrie}$$

5.1.1 Bosonen und Fermionen

Nach dem Spin-Statistik-Theorem (Pauli 1940) kann man Elementarteilchen in zwei disjunkte Mengen aufteilen:

Teilchen mit halbzahligem Spin ($\frac{\hbar}{2}, \frac{3\hbar}{2}, \frac{5\hbar}{2}, \dots$) genügen der Fermi-Statistik (Fermionen)
 Teilchen mit ganzzahligem Spin ($0, \hbar, 2\hbar, 3\hbar, \dots$) genügen der Bose-Statistik (Bosonen)

Für Ensembles identischer Fermionen/Bosonen gilt:

Fermionen: ≤ 1 Teilchen/Zustand antisymmetr. Wellenfunktion für ≥ 2 ident. Teilchen
 Bosonen: beliebig viele T./Zustand symmetrische Wellenfunktion für ≥ 2 ident. Teilchen

Dabei unterteilt man Bosonen und Fermionen weiter in:

Bosonen	
$\gamma, \underbrace{W^\pm, Z^0}_{\text{Vektor-Bosonen}}, \text{Gluonen, Graviton}$	Mesonen (mittlere Teilchen) $\pi^0, \pi^\pm, \rho^0, \rho^\pm, \omega, \Psi, \Upsilon, \dots$
Fermionen	
Bausteine Quarks: u, d, s, c, b, t Leptonen: $e^-, \nu_e, \mu^-, \nu_\mu, \tau^-, \nu_\tau$	Baryonen $p, n, \Lambda, \Sigma, \Xi, \Lambda_c^+, \Delta^{++}, \dots$

Experimentelle Verifikation des Spin-Statistik-Theorems:

- Periodensystem der Elemente

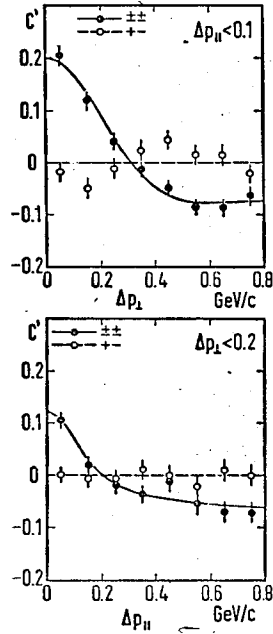


Abbildung 5.1: Bosonenkondensation im Impulsraum für identische Teilchen. $\Delta p_{||}$ (Δp_{\perp}) ist die Impulsdifferenz zweier Bosonen parallel (senkrecht) zu ihrem Summenimpuls

- Bose–Einstein–Korrelationen:
 - Radiosender
 - Laser
 - Man vergleicht die Impulsverteilung identischer Bosonenpaare (π^{\pm}, π^{\pm}) mit denen unterschiedlicher Bosonen (π^+, π^-). Man beobachtet eine Anhäufung identischer Bosonen für kleine Abstände im Impulsraum (siehe Abb.5.1)
- Fermi–Statistik:
 - Niveauschema des He–Atoms (Ortho– und Para–Helium)
 - Existenz von Neutronensternen
 - $\mu^- p \rightarrow \mu^- p \mu^+ \mu^-$, Minimum in der $m(\mu^- \mu^-)$ –Verteilung bei kleiner Masse.

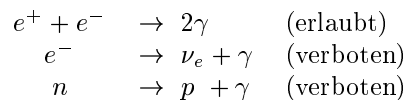
5.1.2 Erhaltung der Ladung

Wir wollen zunächst die Ladungserhaltung bei elementaren Reaktionen untersuchen, da die übrigen neuen Quantenzahlen, die wir in diesem Paragraphen besprechen, analoges Verhalten zeigen. Ein Beispiel ist die – schon in Kap.1.2 behandelte – Paarbildung eines γ –Quants im Kernfeld. Dieses und viele andere Beispiele führen zum Erhaltungssatz für ein abgeschlossenes System.

$$\sum Q_i = \sum Q_f \quad , \quad \Delta Q = 0 \quad .$$

Dabei sind $Q_{i,f}$ die Ladung im Anfangs– und Endzustand (initial/final). Es handelt sich bei der Ladung um eine **additive** Quantenzahl.

Beispiele:



Soweit man heute weiß, ist dieser Erhaltungssatz für alle Prozesse (Wechselwirkungen) gültig. Im Gegensatz zu den anderen additiven Quantenzahlen, die wir in diesem Paragraphen kennenlernen, hat die Ladung noch eine weitere physikalische Bedeutung: Sie ist die Quelle des elektromagnetischen Feldes.

Anmerkung: in Physik III wurde gezeigt, daß jeder Erhaltungssatz mit einer Symmetrie verknüpft ist (E. Nöther, 1918). Wir werden in Kap.7.1 sehen, daß die Ladungserhaltung und die Existenz des langreichweitigen elektromagnetischen Feldes eine Folge der Forderung ist, daß die Quantenmechanik invariant gegen lokale Phasentransformationen (lokale Eichinvarianz) ist, d.h.

$$u(\vec{r}) \rightarrow u(\vec{r}) e^{i\frac{e}{\hbar c} V(\vec{r})}$$

beschreiben die gleiche Physik, wobei z. B. $u(\vec{r})$ ein Dirac-Spinor für Spin 1/2-Teilchen ist.

5.1.3 Leptonladung ($\lambda\epsilon\pi\tau\sigma = \text{leicht}$)

Warum ist das H-Atom stabil, d.h. warum beobachtet man nicht den Zerfall

$$e^- + p \rightarrow 2\gamma$$

in Analogie zu

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma .$$

Keiner der bisher bekannten Erhaltungssätze *Energie*, *Impuls*-, *Drehimpuls*, *Ladungserhaltung* verbietet diesen Prozeß. Dennoch beweist die Existenz lebender Materie und die Grenze für die Protonlebensdauer

$$\tau_p \geq 5 \cdot 10^{32} a ,$$

daß die Reaktion nicht auftritt. Diese Beobachtung kann „erklärt“ werden, wenn man fordert, daß es eine additive Leptonzahl L gibt mit

$$\sum L_i = \sum L_f .$$

Dabei sind Leptonen Teilchen, die

- punktförmig sind
- die Leptonzahl $L \neq 0$ besitzen
- Gravitations-, elektromagnetische und schwache Wechselwirkung zeigen, jedoch keine starke Wechselwirkung

Es gibt 3 Leptonfamilien (Generationen, siehe Kap.7).

Leptonfamilie		mc^2 [MeV]	L_e, L_μ, L_τ	Lebensdauer τ
I	e^-	0.511	$L_e = +1, L_\mu = L_\tau = 0$	∞
	ν_e	$< 2.5 \text{ eV}$	$L_e = +1, L_\mu = L_\tau = 0$	∞
II	μ^-	105.7	$L_\mu = +1, L_e = L_\tau = 0$	$2.2 \mu s$
	ν_μ	< 0.17	$L_\mu = +1, L_e = L_\tau = 0$	∞
III	τ^-	1777.1	$L_\tau = +1, L_\mu = L_e = 0$	290.0 fs
	ν_τ	$< 18.2 \text{ keV}$	$L_\tau = +1, L_\mu = L_e = 0$	∞

Kosmologie [82] und Z^0 -Zerfall (Kap.7.3) zeigen, daß es drei leichte Generationen von Leptonen gibt. Nach heutigem Wissen ist die Leptonzahl absolut erhalten. Gemessen wurde z.B. das Verzweigungsverhältnis $Br(\mu^- \rightarrow e^- e^- e^+) = \Gamma(\mu^- \rightarrow e^- e^- e^+) / \Gamma_{tot}(\mu^-) < 10^{-12}$ (90 % Confidence Level):

- Leptonen sind Bausteine der Materie,

- die Leptonenzahl ist nicht mit Wechselwirkungen verknüpft (globale Phasentransformation als Symmetrioperation).

Dabei sind jedoch noch immer eine Reihe von Fragen unbeantwortet, z.B.:

- Warum gibt es 3 Leptongenerationen.
- Warum sind die erhaltenen Leptonzahlen nicht wie bei der elektrischen Ladung mit einer langreichweitigen Wechselwirkung verknüpft.

Zu jedem Lepton l gibt es ein **Antilepton** \bar{l} mit

$$Q_l = -Q_{\bar{l}} \quad , \quad L_l = -L_{\bar{l}} \quad .$$

Im folgenden werden Antiteilchen durch \bar{T} gekennzeichnet.

5.1.4 Hadronen ($\alpha\delta\rho\sigma = \text{gro\ss, stark}$)

Die 2. Klasse von Teilchen, denen wir beim Aufbau der Materie begegnen, sind die Hadronen. Sie sind durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

1. sie zeigen alle vier Wechselwirkungen,
2. es handelt sich um ausgedehnte Objekte ($r \approx 10^{-13} \text{ cm}$, siehe Kap.2.1),
3. sie besitzen angeregte Zustände mit $J \geq 0$,
4. $L_e = L_\mu = L_\tau = 0$.

Wegen der Eigenschaft 2) und 3) vermuten wir in Analogie zur Atom- und Kernphysik, da\ss Hadronen zusammengesetzte Teilchen sind. Aufgrund des Spin-Statistik-Theorems, das auch f\u00fcr zusammengesetzte Teilchen gilt, ist die vorl\u00e4ufige Aufteilung in zwei Klassen sinnvoll:

Mesonen	$(J = 0, 1, 2, 3 \dots)$	$\pi, \rho, \omega, \Phi, \Psi, K, D^+, B^0, \dots$ Zahl in der Reaktion ist nicht erhalten: $pp \rightarrow pp\pi^0\pi^0\pi^+\pi^-$; $pp \rightarrow pp\pi^0$; $pp \rightarrow pp\pi^+\pi^-$
Baryonen	$(J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots)$	$p, n, \Lambda, \Sigma, \Xi, \Omega^-, \Lambda_c^+, \dots$ Zahl in der Reaktion ist erhalten: $pp \rightarrow pn\pi^+$; $pp \rightarrow p\pi^+$; $pp \rightarrow p + e^+ + \nu_e$

Diese und weitere Beobachtungen f\u00fchren zur Einf\u00fchrung der **Baryonenzahl** (Baryonenladung), die erhalten ist:

$$\sum B_i = \sum B_f$$

mit $B(\text{Meson}) = 0$, $B(\text{Baryon}) = 1$.

Moderne theoretische Spekulationen besagen, da\ss die Baryonenzahl eventuell nicht erhalten ist (LITERATUR [83, 84]). Wie die Leptonladung ist nach heutigem Wissen auch die Baryonenladung mit einer globalen Eichtransformation verbunden und **nicht** mit einer Wechselwirkung verkn\u00fcpft. Sie unterscheidet sich dadurch grunds\u00e4tzlich von der elektrischen Ladung.

Antiteilchen besitzen eine Baryonenzahl, die der des zugeh\u00f6rigen Teilchens entgegengesetzt ist:

$$B_T = -B_{\bar{T}}$$

Proton	$Q_p = +1$	$B_p = +1$
Antiproton	$Q_{\bar{p}} = -1$	$B_{\bar{p}} = -1$

Neutron	$Q_n = 0$	$B_n = +1$
Antineutron	$Q_{\bar{n}} = 0$	$B_{\bar{n}} = -1$

Mit dieser Quantenzahl sind zwei bislang unerklärte Phänomene der Kosmologie verknüpft sowie eine experimentell noch nicht beantwortete Frage:

- $\sum_{Kosmos} B > 0$;
- $\sum B / \sum \gamma \approx 10^{-9}$, wenn man über hinreichend große Volumina im Kosmos mittelt;
- ziehen sich Antiproton und Proton durch Gravitation an oder stoßen sie sich ab?

Zur letzten Frage wird zur Zeit ein Experiment im CERN vorbereitet: freier Fall eines gebundenen (\bar{p} , e^+)-Paares (Antiwasserstoff) im Gravitationsfeld (siehe [85]).

5.1.5 Weitere additive Quantenzahlen

Neben den bislang besprochenen Quantenzahlen, die nach heutigem Wissen absolut erhalten sind, gibt es weitere Quantenzahlen, die nur für bestimmte Wechselwirkungen erhalten sind. Da sie die Basis des Quark-Modells (des Ordnungsschemas für die Hadronen) bilden, sollen sie hier kurz eingeführt werden. Die Einführung geschieht immer nach dem gleichen Muster: einige Reaktionen werden beobachtet, andere nicht; dies führt durch Induktionsschluß zu den Erhaltungssätzen. Diese werden dann anhand weiterer Reaktionen experimentell überprüft.

Strangeness S

beobachtet	nicht beobachtet	beobachtet (assoziierte Produktion)
$\gamma p \rightarrow n\pi^+$	$\gamma p \rightarrow nK^+$	$\gamma p \rightarrow K^+\Lambda$
$pp \rightarrow pn\pi^+$	$pp \rightarrow pnK^+$	$pp \rightarrow p\Lambda K^+$

Die assoziierte Produktion wird in vielen weiteren Reaktionen beobachtet, in denen die elektromagnetische oder die starke Wechselwirkung eine Rolle spielt. Gell-Mann und Pais schlugen vor, zur Beschreibung der neuen Phänomene eine weitere additive Quantenzahl einzuführen – die **Strangeness** S . Für die elektromagnetische und starke Wechselwirkung gilt:

$$\sum S_i = \sum S_f .$$

Einige Beispiele:

K^0, K^+	$S = +1$
$\Lambda, \Sigma^{\pm 0}$	$S = -1$
$\Xi^{0,-}$	$S = -2$
Ω^-	$S = -3$
$p, n, \pi, \omega, \Phi, \Psi, \Upsilon$	$S = 0$
für Teilchen/Antiteilchen gilt:	$S_{\bar{T}} = -S_T$

Details finden sich in der Tabelle der Elementarteilchen, die in der Vorlesung verteilt wurde. In der schwachen Wechselwirkung ist S **nicht** erhalten, es gilt aber die Auswahlregel (siehe Kap.7.3) $\Delta S = 0, \pm 1$.

Charm \tilde{C}

Diese Quantenzahl wurde auf Grund theoretischer Überlegungen eingeführt und Anfang November 1974 experimentell bestätigt:

$$e^+e^- \rightarrow D^+D^-, \rightarrow D^0\bar{D}^0, \rightarrow \Lambda_c^+\bar{\Lambda}_c^+\pi^+\pi^- .$$

Dabei ist $m_{D^+}c^2 = 1.86 \text{ GeV}$ und $m_{\Lambda_c^+}c^2 = 2.28 \text{ GeV}/c^2$.

Diese Teilchen besitzen Eigenschaften, die sich von denen der Strangeness-Teilchen unterscheiden:

$$\begin{array}{ll}
D^+, D^0, \Lambda_c^+, D^{*+}, D^{*0} & \tilde{C} = +1 \quad S = 0 \\
D_s^+, D_s^{*+} & \tilde{C} = +1 \quad S = +1 \\
D^- (= \bar{D}^+), \bar{D}^0, \Lambda_c^- & \tilde{C} = -1 \quad S = 0
\end{array}$$

Für die elektromagnetische und starke Wechselwirkung gilt der Erhaltungssatz

$$\sum \tilde{C}_i = \sum \tilde{C}_f .$$

Beauty \tilde{B}

Analog zu S und \tilde{C} fand man

$$\begin{array}{ll}
B^0, B^+ & \tilde{B} = +1 \quad C = S = 0 \\
\bar{B}^0, B^-, \Lambda_b & \tilde{B} = -1 \quad C = S = 0
\end{array}$$

Es gilt

$$\sum \tilde{B}_i = \sum \tilde{B}_f .$$

In Kap.5.3 wird gezeigt, warum das hier gewählte Vorzeichen sinnvoll ist (Gell-Mann–Nishijima-Formel). Man bezeichnet S, \tilde{C}, \tilde{B} als Flavors.

Hinweis: Es gilt für die Mesonen, deren Flavor ungleich Null ist, die Regel:

$$\begin{aligned}
\text{sign (additive Quantenzahl)} &= \text{sign (Ladung des geladenen Mesons)} \\
&= \text{sign (Ladung der Quarks)}
\end{aligned}$$

5.1.6 Teilchen – Antiteilchen

Man kann zeigen (Dirac für Fermionen mit Spin $\frac{\hbar}{2}$, Pauli allgemein), daß es zu jedem Teilchen ein Antiteilchen gibt, wobei gilt:

- additive Quantenzahl (T) = - additive Quantenzahl (\bar{T}),
- in allen Eigenschaften (Masse, Lebensdauer τ , \vec{J} , $|\vec{\mu}|$) stimmen Teilchen und Antiteilchen überein (TCP -Theorem siehe Kap.5.2.6).

Beispiele:

	e^+	e^-	\rightarrow	B_s^0	\bar{B}_s^0
L	-1	1		0	0
B	0	0		0	0
Q	1	-1		0	0
S	0	0		-1	1
\tilde{C}	0	0		0	0
\tilde{B}	0	0		1	-1

Wozu sind die ladungsartigen Quantenzahlen nützlich?

- Erlaubte/verbotene Reaktionen sind erkennbar
- Auswahlregeln für schwache Zerfälle können formuliert werden (siehe Kap.7)
- Klassifizierung der Teilchen ist möglich
- Ordnungsschema der Elementarteilchen (Quark-Modell) ist formulierbar

Abschließend seien die bei den verschiedenen Wechselwirkungen gültigen Erhaltungssätze für die additiven Quantenzahlen zusammengefaßt.

Erhaltungssatz	schwach	e.m.	stark
Q	+	+	+
L	+	+	+
B	+	+	+
S	-	+	+
\tilde{C}	-	+	+
\tilde{B}	-	+	+

5.2 Diskrete Symmetrien

In diesem Paragraphen wollen wir uns mit Symmetrien beschäftigen, die **diskreten** Symmetrioperationen zuzuordnen sind. Prototyp dieser Operation ist die Parität, die aus Physik IV bekannt ist. Wir wollen sie hier verallgemeinern.

5.2.1 Eigenparität

In Physik IV wurden Systeme behandelt, bei denen die Teilchenzahl und die Art der Teilchen erhalten blieb. In der Ortsdarstellung war die Parität definiert durch:

$$\begin{aligned}\hat{P}\Psi(\vec{r}, t) &= \eta_p \Psi(\vec{r}, t) \quad \rightarrow \\ \hat{P}^2\Psi(\vec{r}, t) &= \eta_p^2\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, t) \\ \rightarrow \quad \eta_p^2 &= 1 \quad \rightarrow \quad \eta_p = \pm 1 ,\end{aligned}$$

falls

$$[\hat{P}, \hat{H}] = 0 .$$

Wir gehen in der Teilchenphysik einen Schritt weiter und lassen die Umwandlung von Teilchen zu. Es zeigt sich, daß wir unter diesen Umständen den Begriff der Parität leicht verallgemeinern müssen. Dies soll an einem Beispiel exemplarisch erläutert werden:

Parität des π^\pm Mesons – Eigenparität

Bei kleinen Energien beobachtet man die Reaktion

$$d + \pi^- \rightarrow n + n .$$

Wir wollen zeigen, daß es zum Verständnis der Reaktion notwendig ist, daß das π -Meson die **Eigenparität**

$$\eta_p(\pi^-) = -1$$

besitzt.

Bei kleinen Energien $T_\pi \approx 1 \text{ MeV}$ befindet sich das π -Meson relativ zum Deuteron in einem s -Zustand ($J_\pi = l_\pi = 0$):

$$|\vec{p}_\pi| R_d = \frac{1}{c} \sqrt{2m_\pi c^2 T_\pi} R_d = \frac{1}{c} \sqrt{270 \text{ MeV}^2} 2fm = \frac{32 \text{ MeV}}{c} fm < \hbar .$$

Nach dem Vektormodell gilt für den Anfangszustand:

$$\vec{J}_i = \vec{J}_d + \vec{J}_\pi$$

mit

$$J_\pi = 0 , J_d = 1 \quad \rightarrow \quad J_i = 1 = J_f = J_{2n} .$$

Im Endzustand treten zwei identische Fermionen ($2n$) auf, nach dem Pauliprinzip muß die Gesamtwellenfunktion der beiden Neutronen antisymmetrisch sein:

$$\Psi_{2n} = \Psi_{Ort} \Psi_{Spin} ,$$

wobei die Spin-Wellenfunktion sein kann:

$$\begin{array}{l} \text{symmetrisch} \\ \text{antisymmetrisch} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} |1+1\rangle = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle_2 \\ |1-1\rangle = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle_2 \\ |1\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle_2 + \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_2 \right) \\ |0\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle_2 - \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_2 \right) \end{array} \right.$$

Der Gesamtspin J_{2n} des Endzustands ergibt sich nach dem Vektormodell aus dem relativen Bahndrehimpuls und dem Gesamtspin des $2n$ -Systems:

Neutronenwellenfunktion			Symmetrie		
Ψ_{Ort}	Ψ_{spin}	J_{2n}	Ort	Spin	gesamt
$l = 0$	1	1	S	S	S
$l = 1$	0	1	AS	AS	S
$l = 1$	1	1	AS	S	AS
$l = 2$	1	1	S	S	S

Nur der Endzustand mit $l = 1$ hat eine antimetrische Gesamtwellenfunktion für die beiden Neutronen. Da die Parität in der starken Wechselwirkung erhalten ist, folgt

$$\eta_p(\pi)\eta_p(d) = (-1)^l \eta_p(n)^2 = -1 = \eta_p(\pi) \cdot 1 .$$

Gemessen wird also die relative Parität des π -Mesons und des Deuterons. Die Existenz der Reaktion zeigt:

- Teilchen haben Eigenparität
- die relative Parität von π und d ist negativ

Konvention: $\eta_p(p) = \eta_p(n) = +1$
 Folgerung: $\eta_p(d) = \eta_p(p)\eta_p(n)(-1)^l = +1$, da $l = 0, 2$
 für den Deuteron-Grundzustand gemessen wurde.

Die Eigenparität ist nur meßbar, wenn eine Änderung der Teilchenart auftritt.

Eigenparität des π^0 -Mesons

Die Eigenparität des π^0 -Mesons kann aus dem Zerfall

$$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$$

ermittelt werden. Dabei gilt für den Anfangs- (i) und Endzustand (f):

$$\eta_p(i) = \eta_p(\pi^0)$$

$$\eta_p(f) = \eta_p(\gamma)^2 \eta_p(|2\gamma\rangle) .$$

Der Zustandsvektor $|2\gamma\rangle$ besitzt folgende Eigenschaften:

- $|2\gamma\rangle$ ist eine skalare/pseudoskalare Größe, da das π^0 -Meson den Spin 0 besitzt und sich daher wie ein Skalar/Pseudoskalar transformiert.
- Da $|2\gamma\rangle$ ein Zustand zweier identischer Bosonen ist, gilt nach dem Spin-Statistik-Theorem (siehe Kap.5.1)

$$|\gamma_1\gamma_2\rangle = |\gamma_2\gamma_1\rangle .$$

- Der Zustandsvektor im Zustandsraum kann konstruiert werden aus

$$\begin{array}{ll} \text{Polarisationsvektoren} & \vec{e}_1, \vec{e}_2 \\ \text{Impulsvektoren} & \vec{k}_1, \vec{k}_2 \quad (\vec{k}_1 = -\vec{k}_2) \text{ im Ruhssystem des } \pi^0 \end{array}$$

- Der Zustandsvektor ist eine lineare Größe, daher setzt sich der resultierende Zustandsvektor linear aus den obigen Größen zusammen.

Damit kann man folgende Zustandsvektoren für den Endzustand konstruieren.

$$\begin{array}{llll} \cos\theta & \sim \Psi(2\gamma) & \sim \vec{e}_1\vec{e}_2 & \text{skalar} & \eta(2\gamma) = +1 \\ \sin\theta & \sim \Psi(2\gamma) & \sim (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)\vec{k}_1 & \text{pseudoskalar} & \eta(2\gamma) = -1 \end{array}$$

Wegen der Transversalität reeller Photonen verschwindet die prinzipiell mögliche 3. Kombination

$$\Psi(2\gamma) \sim \vec{k}_1 \vec{e}_1 = \vec{k}_2 \vec{e}_2 = 0 .$$

Im Experiment findet man, daß die Polarisationsvektoren \vec{e}_1, \vec{e}_2 der beiden Photonen

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$$

erfüllen. Daraus folgt für den Zustandsvektor des 2γ -Systems:

$$\begin{aligned} \Psi(2\gamma) &\sim (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \vec{k}_1 \\ \eta(2\gamma) &= -1 = \eta(\pi^0) . \end{aligned}$$

Damit haben wir für Pionen gezeigt:

$$J^\pi = 0^- .$$

Diese Teilchen nennt man pseudoskalare Teilchen, weil der Zustandsvektor bei Spiegelung am Ursprung sein Vorzeichen ändert.

5.2.2 Eigenparität von Fermionen – Antifermionen

Wir betrachten Teilchen mit Spin 1/2, die durch den Dirac-Spinor ($\hbar = 1, c = 1$ gesetzt)

$$\Psi(x) \sim u(p)e^{-ipx} = u(p)e^{-iEt}e^{i\vec{x}\vec{p}} = \sqrt{E+m}e^{-iEt}e^{i\vec{x}\vec{p}} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m}\varphi \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.

In HQM wurde gezeigt, daß

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dem Paritätsoperator entspricht:

$$\Psi'(x') = \gamma^0 \Psi(x) = \sqrt{E+m}e^{-iEt}e^{i(-\vec{x})(-\vec{p})} \begin{pmatrix} \varphi \\ -\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m}\varphi \end{pmatrix} .$$

Bei $\Psi'(x')$ ist $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ und $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ übergegangen.

Im Ruhssystem gilt bei der Betrachtung der Spinoren für Teilchen/Antiteilchen:

$$\begin{aligned} \gamma^0 u_{1/2}(0) &= u_{1/2}(0) && \text{Teilchen haben positive Parität} \\ \gamma^0 u_{3/4}(0) &= -u_{3/4}(0) && \text{Antiteilchen haben negative Parität.} \end{aligned}$$

Zusammengefaßt ergibt die Quantenfeldtheorie:

- Bosonen $\eta_p(T) = \eta_p(\bar{T})$
- Fermionen $\eta_p(T) = -\eta_p(\bar{T})$
- Die relative Parität von Λ/Σ^0 -Teilchen ist historisch wichtig, da das Resultat zwischen Quarkmodell und Heisenbergscher Weltformel unterscheiden konnte:

$$\begin{aligned} \Sigma^0 &\rightarrow \Lambda + \gamma \\ E1 - \text{Strahlung} &\quad \eta_p(\Sigma^0) = -\eta_p(\Lambda) \\ M1 - \text{Strahlung} &\quad \eta_p(\Sigma^0) = \eta_p(\Lambda) \end{aligned}$$

(Experiment im Widerspruch zur Vorhersage der Heisenbergschen „Weltformel“, daß E1-Strahlung auftreten sollte).

- auch in der Teilchenphysik gilt:
Parität ist für starke und elektromagnetische Wechselwirkung erhalten,
Parität ist für schwache Wechselwirkung verletzt (siehe auch Kap.6.2.3 und 7.3).

5.2.3 Ladungskonjugation (Ladungspartitat)

Bei dieser Operation werden – wie der Name sagt – die Vorzeichen aller ladungsartigen Quantenzahlen umgekehrt, während Größen im Orts-/Impulsraum unverändert bleiben

$$\begin{array}{ccc}
 \langle \hat{p} \rangle & \xrightarrow{\hat{C}} & \langle \hat{p} \rangle \\
 Q & \rightarrow & -Q \\
 B & \rightarrow & -B \\
 S & \rightarrow & -S \\
 \tilde{B} & \rightarrow & -\tilde{B} \\
 \tilde{C} & \rightarrow & -\tilde{C} \\
 \text{zusätzlich gilt :} & & \\
 \hat{\mu} & \rightarrow & -\hat{\mu} \\
 \text{aber } \hat{s} & \rightarrow & +\hat{s}
 \end{array}$$

Wie immer in der Quantenmechanik sind Eigenzustände des Ladungspartitasoperators \hat{C} von besonderem Interesse

$$\begin{array}{ll}
 \hat{C} | \pi^\pm \rangle = | \pi^\mp \rangle & \text{kein Eigenzustand} \\
 \hat{C} | \pi^0 \rangle = \eta_c | \pi^0 \rangle & \eta_c = \pm 1 \\
 \hat{C} | \gamma \rangle = - | \gamma \rangle & \text{da } | \gamma \rangle \sim A^\mu \sim j^\mu \sim \text{Ladung}
 \end{array}$$

Aus der Beobachtung $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ folgt:

$$\eta_{\pi^0} = (-1)^2 = +1 .$$

Das Experiment zeigt:

Ladungspartitat ist erhalten für die starke und elektromagnetische Wechselwirkung, Ladungspartitat ist verletzt für die schwache Wechselwirkung (siehe Kap.3.2).

Beweis:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \Rightarrow \nu_e \\ \downarrow \hat{P} \end{array} & \begin{array}{c} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{P} \nearrow \\ \hat{C} \end{array} & \begin{array}{c} \Rightarrow \bar{\nu}_e \text{ (beobachtet)} \\ \downarrow \hat{P} \\ \leftarrow \bar{\nu}_e \end{array} \\
 \begin{array}{c} \leftarrow \nu_e \text{ (beobachtet)} \end{array} & &
 \end{array}$$

Dabei bezeichnen \rightarrow den Impuls \vec{p} und \Rightarrow den Spin \vec{S} .

Nicht alle Zustände, die durch \hat{C} auseinander hervorgehen, sind in der Natur realisiert, d. h. die \hat{C} -Parität ist verletzt, sie ist keine Symmetrie der Natur !

Für Spin 1/2-Fermionen kann der Operator der Ladungskonjugation geschrieben werden als

$$\hat{C} = i\gamma^2\gamma^0 .$$

Dabei bezeichnen die γ^μ die Diracschen γ -Matrizen. Man kann mit der Relation zeigen (Übungsaufgabe)

$$\begin{aligned}
 \hat{C}^{-1} \gamma^\mu \hat{C} &= -(\gamma^\mu)^T \\
 \hat{C}^{-1} &= -\hat{C} = -\hat{C}^+ = -\hat{C}^T
 \end{aligned}$$

$$\text{folgt : } j_\mu = -e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \rightarrow j_c^\mu = -(-)e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = +e\Psi\gamma^\mu\Psi ,$$

wobei Ψ ein Dirac-Spinor ist.

Folgerungen aus der Erhaltung der Ladungspartitat:

- $\pi^0 \rightarrow 3\gamma$ verboten:

$$\begin{aligned}
 \hat{C} | \pi^0 \rangle &= | \pi^0 \rangle \\
 \hat{C} | 3\gamma \rangle &= \eta_c^3 | 3\gamma \rangle = - | 3\gamma \rangle ,
 \end{aligned}$$

experimentell fand man: $Br < 3.1 \cdot 10^{-8}$ mit *confidence level* = 90 % (siehe Abb.3.11).

- Zerfall des Positroniums

$$\begin{aligned} \text{Parapositronium} \quad S = 0 &\Rightarrow e^+ e^- (1^1 S_0) \rightarrow 2\gamma \\ \text{Orthopositronium} \quad S = 1 &\Rightarrow e^+ e^- (1^3 S_1) \rightarrow 3\gamma \end{aligned}$$

Beweis: die Parapositroniumwellenfunktion (siehe Tabelle der Clebsch–Gordon–Koeffizienten Abb.5.9) ist

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,1\rangle_1 |1,-1\rangle_2 - |1,-1\rangle_1 |1,1\rangle_2)$$

Wir werden zeigen, daß die Gesamtwellenfunktion des Parapositroniums symmetrisch gegen Teilchenvertauschung ist (Boson!) und daher in einen 2γ -Zustand zerfallen kann.

Dagegen kann die Orthopositroniumwellenfunktion nicht aus 2γ -Zuständen konstruiert werden

$$|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,1\rangle_1 |1,0\rangle_2 + |1,0\rangle_1 |1,1\rangle_2),$$

weil die Bose–Statistik nicht erfüllt ist und 1 Photon longitudinal ($|1,0\rangle$) polarisiert sein müßte, was in der Natur nicht realisiert ist. Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} \text{Parapositronium} : \quad |0,0\rangle &\rightarrow 2\gamma \\ \text{Orthopositronium} : \quad |1,1\rangle &\rightarrow 3\gamma \end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt: Para– und Orthopositronium sind Eigenzustände des \hat{C} -Operators:

$$\underbrace{\Psi(e^- e^+)}_{e^+ \xrightarrow{\hat{C}} e^-} = \underbrace{\Psi_{ort}}_{(-1)^l} \underbrace{\Psi_{Spin}}_{(-1)^{s+1}} \underbrace{\Psi_{Ladung}}_{\eta_c} .$$

Dann ist für

$$\begin{aligned} e^+ e^- (1^1 S_0 \rightarrow 2\gamma) \quad \eta_c(1S_0) = \eta_c(2\gamma) = (-1)^2 = +1 = (-1)^s, \quad \text{da } S = 0 \\ e^+ e^- (1^3 S_1 \rightarrow 3\gamma) \quad \eta_c(3S_1) = \eta_c(3\gamma) = (-1)^3 = -1 = (-1)^s, \quad \text{da } S = 1. \end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\Psi(e^+ e^-) \xrightarrow{\hat{C}} \Psi(e^- e^+) \Rightarrow \eta_c(e^- e^+) = (-1)^l (-1)^{(S+1)} (-1)^S = (-1)^{(l+1)} .$$

Im Grundzustand des Positroniums ($l = 0$) gilt also

$$\Psi(e^+ e^-) = -\Psi(e^- e^+) ,$$

das heißt: es gilt ein verallgemeinertes Pauliprinzip, falls man innere Freiheitsgrade (Ladung, ...) bei Teilchen–Antiteilchen berücksichtigt.

- Um die \hat{C} -Erhaltung in der elektromagnetischen Wechselwirkung experimentell zu untersuchen, sehen wir uns die Zerfälle

$$\begin{aligned} \eta &\rightarrow \gamma\gamma \\ \eta &\rightarrow \pi^0 \gamma \rightarrow \pi^0 \mu^+ \mu^- \end{aligned}$$

an. Aus $\eta \rightarrow 2\gamma$ folgt $\eta_c(\eta) = +1$. Da aber

$$\begin{aligned} \eta_c(\eta) &= +1 \\ \eta_c(\pi^0 \gamma) &= \eta_c(\pi^0) \eta_c(\gamma) = (+1)(-1) = -1 \end{aligned}$$

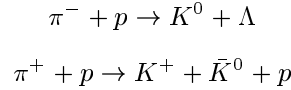
ist die zweite Reaktion verboten. Und tatsächlich ist dieser Zerfall nicht beobachtet worden:

$$Br(\eta \rightarrow \pi^0 \mu^+ \mu^-) < 4 \cdot 10^{-6} \quad (90\% \text{ CL}) .$$

5.2.4 $\hat{C}\hat{P}$ -Invarianz

Wir hatten gesehen, daß bei der schwachen Wechselwirkung die Parität und die Ladungspartität verletzt sind. Diese Tatsache veranlaßte Landau, Lee + Yang zu fordern, daß zwar \hat{P} und \hat{C} nicht separat wohl aber in der Kombination $\hat{C}\hat{P}$ mit einer Erhaltungsgröße verknüpft sind (siehe auch Kap.7.3). Dieses Postulat muß experimentell überprüft werden. Wir wollen zunächst annehmen, daß $\hat{C}\hat{P}$ **erhalten** ist und im Anschluß daran (siehe Kap.5.2.5) ein Experiment besprechen, das diese Symmetrie überprüft (Fitch und Cronin).

Ein besonders interessantes System bezüglich der $\hat{C}\hat{P}$ -Invarianz sind K^0 - und \bar{K}^0 -Mesonen, die in der Reaktion (starke Wechselwirkung)



erzeugt werden. Man überprüft leicht, daß die in Kap.5.1 eingeführten Erhaltungssätze für ladungsartige Quantenzahlen erfüllt sind. Die wesentlichen Eigenschaften dieser Mesonen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	K^0	\bar{K}^0	K^+	K^-
J^π	0^-	0^-	0^-	0^-
S	1	-1	1	-1
mc^2	497.67 MeV		493.646 MeV	
τ	$0.89 \cdot 10^{-10} s$			$5.2 \cdot 10^{-8} s$

$$B = \tilde{B} = \tilde{C} = 0 .$$

Folgende Zerfälle werden beobachtet:

$$„ K^0, \bar{K}^0 “ \rightarrow \pi^+ \pi^-, \pi^0 \pi^0, \pi^+ \pi^- \pi^0, \pi^0 \pi^0 \pi^0$$

es handelt sich also um schwache Zerfälle mit $\Delta S = \pm 1$. K^0 und \bar{K}^0 sind jedoch keine Eigenzustände von $\hat{C}\hat{P}$.

$$\begin{aligned}\hat{C}\hat{P} | K^0 \rangle &= \eta_p | \bar{K}^0 \rangle = - | \bar{K}^0 \rangle \\ \hat{C}\hat{P} | \bar{K}^0 \rangle &= \eta_p | K^0 \rangle = - | K^0 \rangle .\end{aligned}$$

Der gemeinsame Phasenfaktor wurde $\eta_c = +1$ gesetzt. K^0, \bar{K}^0 sind Eigenzustände der starken Wechselwirkung ($=\hat{H}_s$):

$$\hat{H}_s | K^0 \rangle = m | K^0 \rangle \quad , \quad \hat{H}_s | \bar{K}^0 \rangle = m | \bar{K}^0 \rangle .$$

Eigenzustände zu $\hat{C}\hat{P}$ sind (Basiswechsel !):

$$\begin{aligned}| K_1^0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(| K^0 \rangle - | \bar{K}^0 \rangle) \\ | K_2^0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(| K^0 \rangle + | \bar{K}^0 \rangle)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\hat{C}\hat{P} | K_1^0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(- | \bar{K}^0 \rangle + | K^0 \rangle) = + | K_1^0 \rangle \\ \hat{C}\hat{P} | K_2^0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(- | K^0 \rangle - | \bar{K}^0 \rangle) = - | K_2^0 \rangle .\end{aligned}$$

Diese Zustände sind Eigenzustände zu $\hat{C}\hat{P}$ und \hat{H} , falls

$$[\hat{C}\hat{P}, \hat{H}] = 0 \quad \text{und} \quad \hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_w .$$

Dabei beschreibt \hat{H}_w die schwache Wechselwirkung. Diese Zustände haben wohldefinierte Masse und Lebensdauer. Die Frage, die sich nun stellt, ist, welcher Zustand in 2π -Mesonen und welcher in 3π -Mesonen zerfällt, falls die Annahmen gelten.

$\pi^0\pi^0$ -System:

$$\begin{aligned} 0^- &\rightarrow \pi^0\pi^0 \quad \Rightarrow \quad l = 0 \\ \eta_p(\pi^0\pi^0) &= (-1)^2(-1)^l = +1 \\ \hat{C} | \pi^0\pi^0 \rangle &= | \pi^0\pi^0 \rangle, \quad \eta_c = +1 \\ \Rightarrow \hat{C}\hat{P} | \pi^0\pi^0 \rangle &= + | \pi^0\pi^0 \rangle. \end{aligned}$$

Analog zeigt man (unter Nutzung der Isospin-Invarianz) (siehe Kap.5.3):

$$\hat{C}\hat{P} | \pi^+\pi^- \rangle = + | \pi^+\pi^- \rangle.$$

Deshalb gilt:

$$K_1^0 \rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0.$$

3π -System:

$$\hat{C}\hat{P} | \pi^0\pi^0\pi^0 \rangle = \eta_p^3\eta_c^3(-1)^l | \pi^0\pi^0\pi^0 \rangle = (-1)^3(+1)^3(-1)^l | \pi^0\pi^0\pi^0 \rangle = -(-1)^l | \pi^0\pi^0\pi^0 \rangle.$$

Da $(m(K^0) - m(3\pi))c^2 = 497 \text{ MeV} - 415 \text{ MeV} = 82 \text{ MeV}$ gilt, ist nur der Drehimpuls $l = 0$ möglich ($R = 1 \text{ fm}$, siehe Argumentation in Kap.5.2.1)

$$\Rightarrow K_2^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0, \pi^0\pi^-\pi^+$$

$$\eta_{cp}(K_1^0) = +1, \quad \eta_{cp}(K_2^0) = -1.$$

Wegen des kleineren Phasenraumes ist der 3π -Zerfall unterdrückt (siehe Kap.3.2) und wir haben

$$\tau_1(K_1^0) = 8.9 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

$$\tau_2(K_2^0) = 5.2 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

Wir erwarten also, daß nach der Erzeugung von K^0 -(\bar{K}^0)-Mesonen in der starken Wechselwirkung man den Zerfall (durch schwache Wechselwirkung) von 2 verschiedenen Teilchen K_1^0 (K_2^0) mit den Halbwertszeiten τ_1 (τ_2) beobachtet

$$| K_i^0(t) \rangle = e^{\frac{iE_i t}{\hbar}} e^{-\frac{\Gamma_i t}{2\hbar}} | K_i^0(0) \rangle$$

$$I(t) = \langle K_i^0(0) | K_i^0(t) \rangle = e^{-\Gamma_i t/\hbar} \sim e^{-t/\tau_i}.$$

Wenn wir jetzt aber zur Zeit $t = 0$ durch die Reaktion

$$\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda$$

mit einem reinem K^0 -Strahl beginnen, dann gilt wegen

$$| K^0(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| K_1^0(t) \rangle + | K_2^0(t) \rangle) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{-iE_1 t}{\hbar}} e^{-\frac{\Gamma_1 t}{2\hbar}} | K_1^0(0) \rangle + e^{\frac{iE_2 t}{\hbar}} e^{-\frac{\Gamma_2 t}{2\hbar}} | K_2^0(0) \rangle \right)$$

und für die $| K_0 \rangle$ -Intensität folgt:

$$I(K^0) = \langle K^0(t) | K^0(t) \rangle = \frac{1}{4} \left(e^{-\frac{\Gamma_1 t}{\hbar}} + e^{-\frac{\Gamma_2 t}{\hbar}} + 2e^{-\frac{\Gamma_1 t + \Gamma_2 t}{2\hbar}} \cos \frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar} \right).$$

Für \bar{K}^0 gibt es analoge Beziehung allerdings mit einem negativen Vorzeichen im **Interferenzterm**. Im **Ruhsystem** des Teilchens gilt:

$$I(K^0) = \frac{1}{4} (e^{-t/\tau_1} + e^{-t/\tau_2} + 2e^{-2t/(\tau_1 + \tau_2)} \cos \frac{\Delta m t}{\hbar})$$

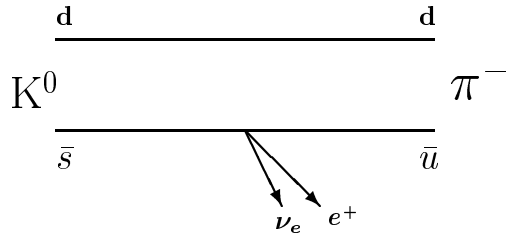


Abbildung 5.2: Feynmangraph für den semileptonischen Zerfall des $K^0(\bar{K}^0)$ -Mesons

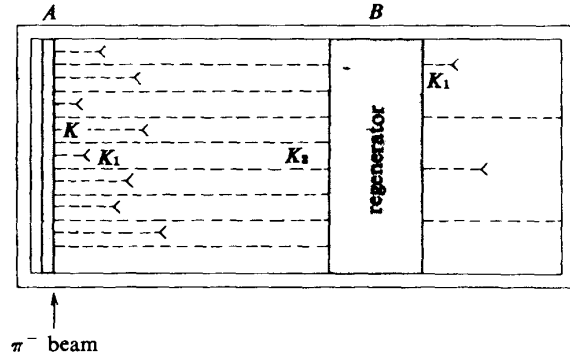


Abbildung 5.3: Schema der K_1^0 -Regeneration in einem reinem K_2^0 -Strahl, der mit Materie wechselwirkt (A = primärer Erzeugungsort, B = Regenerator, $AB \gg \tau(K_1^0) c \gamma(K_1^0)$)

$$I(\bar{K}^0) = \frac{1}{4} (e^{-t/\tau_1} + e^{-t/\tau_2} - 2e^{-2t/(\tau_1+\tau_2)} \cos \frac{\Delta mt}{\hbar}) .$$

Auf Quark-Ebene (siehe Kap.5.4 und Abb.5.2) kann man durch semileptonische Zerfälle K^0 und \bar{K}^0 unterscheiden (siehe auch Kap.7.3.1)

$$d\bar{s} (K^0) \rightarrow d\bar{u}(\pi^-) + e^+ + \nu_e$$

$$K^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e$$

$$\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e .$$

Man spricht von der $\Delta S = +\Delta Q_l$ -Regel für schwache Zerfälle. Dies ist ein Beispiel für eine (exakt gültige) Auswahlregel ladungsartiger Quantenzahlen.

Regeneration:

Man untersucht den Strahl für $t \gg \tau$; das heißt man erhält einen reinen K_2^0 -Strahl (siehe Abb.5.3)

$$K_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) .$$

Durchläuft er Materie, so können die K^0/\bar{K}^0 -Komponenten stark wechselwirken:

$$\bar{K}^0 p \rightarrow \Lambda \pi^+, \bar{K}^0 p, K^+ n$$

$$K^0 p \rightarrow -, K^0 p, K^- n ,$$

d. h. die Wechselwirkung der \bar{K}^0 -Komponente ist größer als die der K^0 -Komponente, das kohärente K_2^0 -System ist gestört (siehe Abb.5.3).

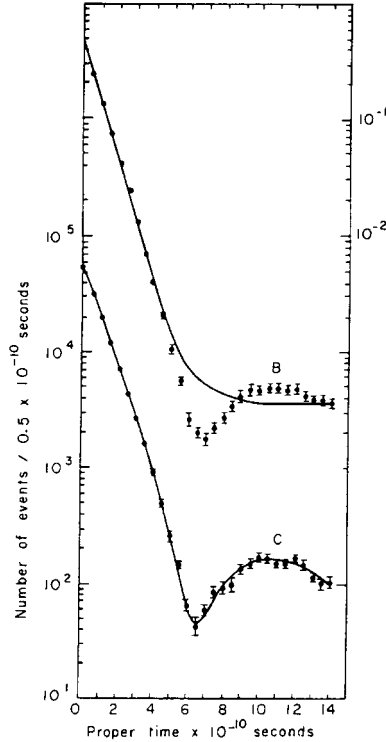


Abbildung 5.4: Meßergebnis der $K^0 - \bar{K}^0$ -Oszillation hinter einem Regenerator. In der **oberen** (unteren) durchgezogenen Kurve wurde angenommen, daß der quantenmechanische Interferenzterm **nicht existiert** (existiert)

Hinter dem Regenerator gibt es wieder K_1^0 -Zerfälle in $\pi^+\pi^-$ neben den $K_2^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ -Zerfällen. Sind f/\bar{f} die Streuamplituden für K^0/\bar{K}^0 -Mesonen in Materie, dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \xrightarrow{WW} \frac{1}{\sqrt{2}}(f|K^0\rangle + \bar{f}|\bar{K}^0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}((f + \bar{f})|K_2^0\rangle + (f - \bar{f})|\bar{K}_1^0\rangle)$$

$$(f - \bar{f}) \neq 0 .$$

Man findet so bei Analyse des Oszillationsverhaltens (siehe Abb.5.4)

$$\Delta m = 3.5 \cdot 10^{-6} eV, \quad \frac{\Delta m}{m} = 0.7 \cdot 10^{-14} .$$

Man beobachtet quantenmechanische Interferenzphänomene, man spricht von Strangeness-Oszillationen.

1987 wurden vom ARGUS-Experiment auch erstmals auch Oszillationen im $B^0\bar{B}^0$ -System beobachtet. Die Bedeutung des Resultats wird in Kap.7.3 besprochen.

5.2.5 $\hat{C}\hat{P}$ -Verletzung

Die Beobachtungen, die in Kap.5.2.3 beschrieben wurden, sind aber nicht das Ende der Geschichte. Christinson, Fitch, Cronin und Turlay schauten sich einen K_2^0 -Strahl an, um zu überprüfen, ob auch im **Vakuum** Zerfälle

$$K_2^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$$

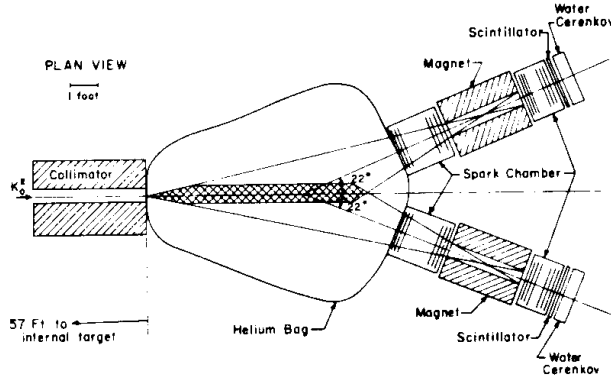


Abbildung 5.5: Aufbau des Experiments zum Nachweis der $\hat{C}\hat{P}$ -Verletzung im 2π -Zerfall des K_2^0 -Mesons. Das Koinzidenzsignal des Čerenkov- und des Flugzeitzählers dient zum Triggern des Experiments. Die Spuren werden vor und nach dem Magnetfeld vermessen.

auftreten, in denen die $\hat{C}\hat{P}$ -Symmetrie verletzt wäre (Abb.5.5 zeigt die verwendete Apparatur). Sie fanden

$$|\eta_{+-}| = \frac{\text{Anzahl } K_2^0 \rightarrow \pi^+\pi^-}{\text{Anzahl } K_1^0 \rightarrow \pi^+\pi^-} = (2.27 \pm 0.02) \cdot 10^{-3},$$

d.h. $\hat{C}\hat{P}$ ist schwach verletzt, und wir müssen schreiben:

$$|K_S^0\rangle \sim (|K_1^0\rangle + \epsilon |K_2^0\rangle)$$

$$|K_L^0\rangle \sim (|K_2^0\rangle + \epsilon |K_1^0\rangle).$$

Man kann zeigen (Isospin-Formalismus, siehe Kap.5.3, 4. Beispiel), daß für die komplexen Amplituden gilt:

$$\eta_{+-} = \frac{\langle \pi^+\pi^- | H_s | K_L^0 \rangle}{\langle \pi^+\pi^- | H_s | K_S^0 \rangle} = \epsilon + \epsilon'$$

$$\eta_{00} = \frac{\langle \pi^0\pi^0 | H_s | K_L^0 \rangle}{\langle \pi^0\pi^0 | H_s | K_S^0 \rangle} = \epsilon - 2\epsilon'.$$

Experimentell wurden folgende Werte bestimmt:

$$|\eta_{+-}| = (2.285 \pm 0.019) \cdot 10^{-3}$$

$$|\eta_{00}| = (2.275 \pm 0.019) \cdot 10^{-3}$$

$$|\Phi_{+-}| = (43.5 \pm 0.06)^\circ$$

$$|\Phi_{00}| = (43.4 \pm 1.0)^\circ$$

$$\frac{\epsilon'}{\epsilon} = (2.1 \pm 0.6) \cdot 10^{-3}.$$

Wenn $\hat{C}\hat{P}$ verletzt ist, dann sollte auch

$$K_L^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e$$

$$K_L^0 \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e$$

verschieden häufig vorkommen. Es zeigt sich in der Tat, daß

$$\Delta = \frac{\text{Rate}(K_L^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e) - \text{Rate}(K_L^0 \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)}{\text{Rate}(K_L^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e) + \text{Rate}(K_L^0 \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)} = (0.327 \pm 0.012) \cdot 10^{-2}.$$

Diese Tatsache erlaubt es, das Vorzeichen der Ladung absolut zu definieren (Materie = Kerne haben gleiches Vorzeichen wie das häufiger auftretende Lepton im K_L^0 -Zerfall; siehe Übungsaufgabe).

Anmerkung: Hier hat man einen Unterschied zwischen Materie und Antimaterie beobachtet, der eventuell genutzt werden kann, um die Asymmetrie zwischen Materie/Antimaterie zu erklären: $n(p) \gg n(\bar{p})$ im Kosmos ([86]).

Theoretisch ist die Größe der $\hat{C}\hat{P}$ -Verletzung für das K^0 -System nicht präzise vorhersagbar. Geklärt werden kann es im $B^0\bar{B}^0$ -System (siehe Kap.7.3). Ein Experiment zu dieser wichtigen Frage wird z. Zt. am DESY in Hamburg aufgebaut (HERA-B).

5.2.6 \hat{T} -Invarianz und das $\hat{T}\hat{C}\hat{P}$ -Theorem

Die klassische Physik ist invariant gegen Zeitumkehr.

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = m \frac{d^2 \vec{r}}{d(-t)^2} .$$

Überträgt man diese Operation auf die Quantenmechanik, dann gelangt man zum Zeitumkehr-Operator, der durch einen antilinearen Operator dargestellt wird:

$$\hat{T}\Psi(\vec{r}, t) =: \Psi^*(\vec{r}, -t) \quad , \quad [\hat{T}, \hat{H}] = 0 .$$

Warum muß die Wellenfunktion komplex konjugiert werden? \hat{T} vertauscht den End- und den Anfangszustand, die bekanntermaßen in Matrixelementen immer als konjugierte Größen auftreten:

$$\hat{T}e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t} = (e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega(-t)})^* = e^{-i\vec{k}\vec{r}-i\omega t} .$$

Das bedeutet, daß die Welle in $-\vec{k}$ Richtung läuft.

Der Zeitumkehr-Operator ist antilinear:

$$\hat{T}(\alpha_1\Psi_1(\vec{r}, t) + \alpha_2\Psi_2(\vec{r}, t)) = \alpha_1^*\hat{T}\Psi_1(\vec{r}, t) + \alpha_2^*\hat{T}\Psi_2(\vec{r}, t) \neq \alpha_1\hat{T}\Psi_1(\vec{r}, t) + \alpha_2\hat{T}\Psi_2(\vec{r}, t) .$$

Mit \hat{T} ist **kein** Erhaltungssatz verbunden.

Aber: Aus der Forderung der \hat{T} -Invarianz folgen Aussagen über Matrixelemente.

Gegenüberstellung der Wirkung von \hat{P} und \hat{T} :

Operator \hat{O}	$\hat{T}\hat{O}\hat{T}^{-1}$	$\hat{P}\hat{O}\hat{P}^{-1}$
\hat{p}	$-\hat{p}$	$-\hat{p}$
\hat{r}	\hat{r}	$-\hat{r}$
$\hat{\sigma}$	$-\hat{\sigma}$	$\hat{\sigma}$
\hat{E}	\hat{E}	$-\hat{E}$
\hat{B}	$-\hat{B}$	\hat{B}
$\hat{\sigma} \hat{B}$ (magn. Dipolm.)	$\hat{\sigma} \hat{B}$	$\hat{\sigma} \hat{B}$
$\hat{\sigma} \hat{E}$ (elektr. Dipolm.)	$-\hat{\sigma} \hat{E}$	$-\hat{\sigma} \hat{E}$
$\hat{\sigma} \hat{p}$ (long. Polar.)	$\hat{\sigma} \hat{p}$	$-\hat{\sigma} \hat{p}$
$\hat{\sigma} (\hat{p}_1 \times \hat{p}_2)$ (transv. Polar.)	$-\hat{\sigma} (\hat{p}_1 \times \hat{p}_2)$	$\hat{\sigma} (\hat{p}_1 \times \hat{p}_2)$

Falls die Wechselwirkung invariant gegen \hat{T}, \hat{P} ist, dann verschwinden die Matrixelemente verschiedener Operatoren bzw. man zeigt für andere, daß sie reell sind

$$\text{mit } [\hat{H}, \hat{T}] = 0 \text{ und } \hat{H} = \hat{H}^* \Rightarrow$$

$$\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{T}^{-1} \hat{T} \hat{H} \hat{T}^{-1} \hat{T} | \Psi \rangle = \langle \Psi^* | \hat{H} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle^* = \text{reell} .$$

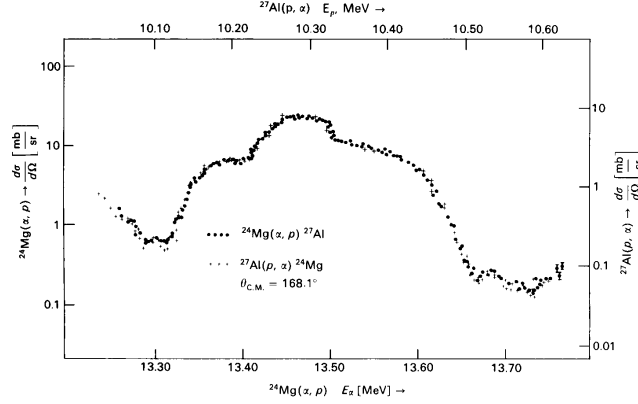


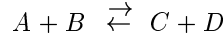
Abbildung 5.6: Wirkungsquerschnitt der Reaktion $^{24}\text{Mg}(\alpha, p)^{27}\text{Al}$ und der inversen Reaktion

Beispiele:

Das elektrische Dipolmoment eines Elementarteilchens verschwindet, falls \hat{T} und/oder \hat{P} -Invarianz gilt. Gemessen wurde:

$$\bar{\mu}_e(n) < 11 \cdot 10^{-45} \text{Ccm} \ll 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C} \cdot 10^{-13} \text{cm} .$$

Eine weitere Prüfung der Zeitumkehrinvarianz ist möglich, wenn man die Wirkungsquerschnitte für die Reaktionen



vergleicht (siehe Abb.5.6).

Es gelte $[\hat{H}, \hat{T}] = [\hat{H}, \hat{P}] = 0$. Bei Anwendung von \hat{T} und \hat{P} folgt dann:

$$\begin{aligned} M_f &= \langle \Psi_f(\vec{p}_C, \vec{p}_D, \vec{S}_C, \vec{S}_D) | \hat{H} | \Psi_i(\vec{p}_A, \vec{p}_B, \vec{S}_A, \vec{S}_B) \rangle \rightarrow \\ &\langle \Psi_i(\vec{p}_A, \vec{p}_B, -\vec{S}_A, -\vec{S}_B) | \hat{H} | \Psi_f(\vec{p}_C, \vec{p}_D, -\vec{S}_C, -\vec{S}_D) \rangle . \end{aligned}$$

Falls man über alle Spins summiert, folgt:

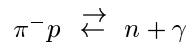
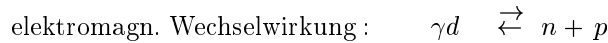
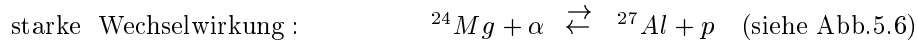
$$| M_{AB} |^2 = | M_{CD} |^2 .$$

Für $E_{AB}^{SP} = E_{CD}^{SP}$ (Schwerpunktsenergie) erhält man:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^{SP}} (AB \rightarrow CD) = \frac{d\sigma}{d\Omega^{SP}} (CD \rightarrow AB)$$

(detailliertes Gleichgewicht)

Beispiele:



Die beobachtete Übereinstimmung der Wirkungsquerschnitte zeigt, daß für die starke und elektromagnetische Wechselwirkung die Zeitumkehr erfüllt ist. In allen Reaktionen, die durch die starke bzw. elektromagnetische Wechselwirkung initiiert werden, zeigt sich, daß die Zeitumkehr erhalten ist.

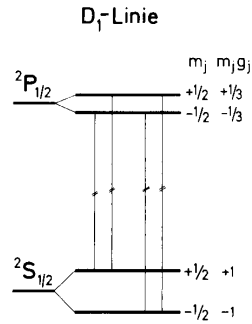


Abbildung 5.7: Zusammenfassung von Orbitalen zu Multipletts und deren Aufspaltung durch ein äußeres Magnetfeld – hier am Beispiel der Natrium D_1 -Linie erläutert. Es handelt sich um ein Beispiel für Niveaufspaltung bei Symmetrieverletzung (Punktsymmetrie \rightarrow Zylindersymmetrie)

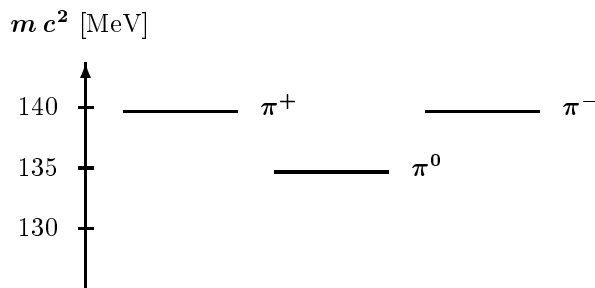


Abbildung 5.8: Beispiele für die Aufhebung der Entartung durch die elektromagnetische Wechselwirkung in der Elementarteilchenphysik

5.3 Isospin

5.3.1 Allgemeine Überlegungen

Wir orientieren uns weiter an den Erfahrungen der Atomphysik. Dort erweist es sich als zweckmäßig, Zustände nahezu gleicher Energie zu einem Multiplett zusammenzufassen (siehe Abb.5.7).

Falls man in der Atomphysik die dominierende Coulombwechselwirkung allein betrachtet, dann sind Zustände zu unterschiedlichen magnetischen Quantenzahlen m_j entartet (Kugelsymmetrie). Wird diese Symmetrie gebrochen durch das Anschalten der schwachen zylindersymmetrischen magnetischen Wechselwirkung, dann wird die Entartung aufgehoben (siehe Abb.5.7).

Übertragen auf Hadronen heißt das: Solange man nur die starke Wechselwirkung betrachtet, sind Teilchen, die sich allein durch die Ladung unterscheiden ($p - n, \pi^0 - \pi^+ - \pi^-, \Delta^- - \Delta^0 - \Delta^+ - \Delta^{++}, \dots$) entartet. Durch die elektromagnetische Wechselwirkung wird diese Entartung aufgehoben (siehe Abb.5.8).

Die Analogie deutet an, daß man zweckmäßigerweise eine neue Quantenzahl einführt, die analog zum Spin zu sehen ist. Sie wird Isospin genannt. Beiden liegt die gleiche kontinuierliche Symmetriegruppe zugrunde. Um die Tragfähigkeit dieser Vermutung zu prüfen, müssen wir sie quantitativ formulieren und daraus Vorhersagen ableiten, die mit experimentellen Resultaten zu vergleichen sind.

5.3.2 Gell-Mann–Nishijima–Formel

Wenn man die Beispiele aus Kap.5.3.1 anschaut, folgt:

$$\begin{aligned} \langle Q(\text{Meson}) \rangle &= 0 && \text{falls } S = \tilde{C} = \tilde{B} = 0 \\ \langle Q(\text{Meson}, \text{Baryon}) \rangle &\neq 0 && \text{falls eine der additiven Quantenzahlen (außer } Q) \neq 0. \end{aligned}$$

Hinter dieser Beobachtung verbirgt sich eine Gesetzmäßigkeit, die als nächstes formuliert werden soll. I sei der Isospin, I_3 die Komponente projiziert auf die Quantisierungsachse in einem abstrakten Isospin-Raum.

- π -Meson

$$\pi^+, \pi^0, \pi^-. \text{ Multiplizität} = 3 = 2 I + 1 \rightarrow I = +1, I_3 = -1, 0, 1$$

$$\text{Definiere } I_3 \text{ durch } I_3 = \frac{Q}{|e|}; \langle Q \rangle = 0$$

- η -Meson

$$m c^2 = 548.8 \text{ MeV}, J^\pi = 0^-, S = B = \tilde{C} = \tilde{B} = 0. \text{ Multiplizität} = 1 = 2 I + 1 \\ \rightarrow I = 0, I_3 = 0$$

$$\text{Definiere } I_3 \text{ durch } I_3 = \frac{Q}{|e|}; \langle Q \rangle = 0$$

- ρ -Meson

$$\rho^+, \rho^0, \rho^-. \text{ Multiplizität} = 3 = 2 I + 1 \rightarrow I = +1, I_3 = -1, 0, 1 \text{ (wie bei } \pi^+, \pi^0, \pi^-).$$

- K -Meson

$$K^+, K^0, S = +1, \text{ Multiplizität} = 2 = 2 I + 1$$

$$\rightarrow I = 1/2, I_3 = \underbrace{-1/2}_{K^0}, \underbrace{1/2}_{K^+}$$

$$\text{Man vermutet zunächst } \frac{Q}{|e|} = I_3 + \frac{S}{2}$$

Um aber die herausgehobene Stellung der Baryonladung zu vermeiden, macht man den Ansatz (Gell-Mann–Nishijima–Formel):

$$\frac{Q}{|e|} = I_3 + \frac{B + S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2}$$

$$Y = B + S = \text{Hyperladung.}$$

Wir definieren:

- Nukleonen: n, p

$$2 = 2 I + 1 \rightarrow I = 1/2 \rightarrow I_3 = \underbrace{1/2}_p, \underbrace{-1/2}_n$$

$$\frac{Q}{|e|} = I_3 + \frac{B + S}{2} = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & n \end{cases}$$

- Λ -Teilchen

$$S = -1, J^\pi = 1/2^+, m(\Lambda) c^2 = 1115.6 \text{ MeV}$$

$$1 = 2 I + 1 \rightarrow I = 0 \rightarrow I_3 = 0$$

$$\frac{Q}{|e|} = 0 + \frac{B + S}{2} = 0 + \frac{1 - 1}{2} = 0$$

- $\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$

$$S = -1, \quad J^\pi = 1/2^+, \quad m(\Sigma^\pm) c^2 = 1189.4 \text{ MeV}, \quad m(\Sigma^0) c^2 = 1192.5 \text{ MeV}$$

$$3 = 2I + 1 \rightarrow I = 1 \rightarrow I_3 = \underbrace{\pm 1}_{\Sigma^\pm}, \underbrace{0}_{\Sigma^0}$$

$$\frac{Q}{|e|} = I_3 + \frac{B+S}{2} = \begin{cases} 1 & \Sigma^+ \\ 0 & \Sigma^0 \\ -1 & \Sigma^- \end{cases}$$

- Ξ^-, Ξ^0

$$S = -2, \quad J^\pi = 1/2^+, \quad m(\Xi^-) c^2 = 1321.32 \text{ MeV}, \quad m(\Xi^0) c^2 = 1314.9 \text{ MeV}$$

$$2 = 2I + 1 \rightarrow I = \frac{1}{2} \rightarrow I_3 = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\Xi^0}, \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\Xi^-}$$

$$\frac{Q}{|e|} = I_3 + \frac{B+S}{2} = \begin{cases} 0 & \Xi^0 \\ -1 & \Xi^- \end{cases}$$

Es gibt kein Ξ^+ -Teilchen

- Ω^-

$$S = -3, \quad J^\pi = 3/2^+, \quad m(\Omega^-) c^2 = 1672.5 \text{ MeV}$$

$$1 = 2I + 1 \rightarrow I = 0 \rightarrow I_3 = 0$$

$$\frac{Q}{|e|} = I_3 + \frac{B+S}{2} = -1$$

Es gibt kein Ω^0 -Teilchen.

Allgemein gilt für ein Isospinmultiplett:

$$\frac{\langle Q \rangle}{|e|} = \frac{1}{2I+1} \sum_{I_3=-I}^I \frac{Q_i}{|e|} = \frac{1}{2I+1} \left(\sum I_3 + \frac{Y}{2}(2I+1) \right) = \frac{Y}{2}.$$

Die Hyperladung legt in einem Multiplett den Ladungsschwerpunkt fest. Diese erste Verwendung des Isospinbegriffs führt also:

- zu einer nichttrivialen Verknüpfung der additiven Quantenzahlen
- zum Begriff der Hyperladung als Charakteristikum des Ladungsschwerpunkts

Verallgemeinerung der Gell-Mann–Nishijima-Formel:

$$\frac{Q}{|e|} = I_3 + \frac{B+S+\tilde{C}+\tilde{B}}{2}.$$

Hinweis: Wie in Kap.5.1 betont, wurden S, \tilde{C}, \tilde{B} geeignet definiert, um diese allgemeine Formel zu erfüllen.

5.3.3 Isospin–Algebra

Wir wollen in diesem Abschnitt explizit die Analogie des Isospins zum Spin ausnutzen. Ziel dieser Untersuchung ist es, quantitativ zu formulieren

- wie man Isospins zusammensetzt,
- wie die Spin–Wellenfunktionen des zusammengesetzten Systems aussehen.

Der entwickelte Algorithmus wird in der Spektroskopie der Atomhülle, der Kerne, der Elementarteilchen und der Festkörper genutzt. Im Quark–Modell (siehe Kap.5.4) werden wir ihn verwenden, um Wellenfunktionen zu konstruieren.

Der Formalismus wurde bereits in Physik IV behandelt, daher sollen hier nur die wesentlichen Eigenschaften wiederholt werden.

Drehimpuls ($\hbar = 1$)	Isospin
$\hat{J}^2 j, m \rangle = j(j+1) j, m \rangle \hbar^2$	$\hat{I}^2 I, I_3 \rangle = I(I+1) I, I_3 \rangle$
$\hat{J}_z j, m \rangle = m j, m \rangle \hbar$	$\hat{I}_3 I, I_3 \rangle = m I, I_3 \rangle$
$[\hat{J}_j, \hat{J}_k] = i\epsilon_{jkl} \hat{J}_l \hbar$	$[\hat{I}_j, \hat{I}_k] = i\epsilon_{jkl} \hat{I}_l$

Es erweist sich als zweckmäßig, Schiebeoperatoren einzuführen:

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y \quad , \quad \hat{I}_\pm = \hat{I}_1 \pm i\hat{I}_2 .$$

Die Schiebeoperatoren genügen den Vertauschungsregeln:

$$[\hat{I}_3, \hat{I}_\pm] = \pm \hat{I}_\pm$$

$$[\hat{I}^2, \hat{I}_\pm] = 0 .$$

Beweis:

$$[\hat{I}_1 + i\hat{I}_2, \hat{I}_3] = \hat{I}_1\hat{I}_3 + i\hat{I}_2\hat{I}_3 - \hat{I}_3\hat{I}_1 - i\hat{I}_3\hat{I}_2 = \hat{I}_3\hat{I}_1 - i\hat{I}_2 + i\hat{I}_3\hat{I}_2 - \hat{I}_1 - \hat{I}_3\hat{I}_1 - i\hat{I}_3\hat{I}_2 =$$

$$-(\hat{I}_1 + i\hat{I}_2) = -\hat{I}_+ = [\hat{I}_+, \hat{I}_3] = -[\hat{I}_3, \hat{I}_+] .$$

Die weiteren Relationen werden analog bewiesen (Übungsaufgabe).

Die Schiebeoperatoren haben folgende Eigenschaften:

$$\hat{I}_+(\hat{I}_+ | I, I_3 \rangle) = \hat{I}_+\hat{I}_3 | I, I_3 \rangle + \hat{I}_+ | I, I_3 \rangle = (I_3 + 1)\hat{I}_+ | I, I_3 \rangle$$

$$\hat{I}_+ | I, I_3 \rangle = \text{Norm} | I, I_3 + 1 \rangle .$$

Analog zeigt man

$$\hat{I}_- | I, I_3 \rangle = \text{Norm} | I, I_3 - 1 \rangle$$

$\hat{I}_- \qquad \hat{I}_+$
 $\longleftarrow \qquad \longrightarrow$

Die Schiebeoperatoren \hat{I}_- (\hat{I}_+) erlauben es, in einem Multiplett den Übergang zwischen den Zuständen $| I, I \rangle, | I, I - 1 \rangle \dots | I, -I \rangle$ zu induzieren, implizit haben wir diesen Operator bereits in Kap.3.2 verwendet, um den Zerfall $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$ zu beschreiben. Dabei ist die Normierung:

$$\text{Norm} | I, I_3 \rangle = \hat{I}_-(\hat{I}_+ | I, I_3 \rangle) = (\hat{I}_1 - i\hat{I}_2)(\hat{I}_1 + i\hat{I}_2) | I, I_3 \rangle = (\hat{I}_1^2 + \hat{I}_2^2 + i(\hat{I}_1\hat{I}_2 - \hat{I}_2\hat{I}_1)) | I, I_3 \rangle$$

$$= (\hat{I}_1^2 + \hat{I}_2^2 + \hat{I}_3^2 - \hat{I}_3^2 - \hat{I}_3) | I, I_3 \rangle = (I(I+1) - I_3^2 - I_3) | I, I_3 \rangle .$$

Erwartungswert

$$\begin{aligned} \langle I, I_3 | \hat{I}_- \hat{I}_+ | I, I_3 \rangle &= \langle I, I_3 | \hat{I}_+^* \hat{I}_+ | I, I_3 \rangle = \text{Norm}^2 \langle I, I_3 + 1 | I, I_3 + 1 \rangle = \\ &= (I(I+1) - I_3(I_3 + 1)) \langle I, I_3 | I, I_3 \rangle = (I(I+1) - I_3(I_3 + 1)) , \end{aligned}$$

da $\langle I, I_3 | I, I_3 \rangle = 1$ vorausgesetzt wurde.

Also gilt

$$\hat{I}_\pm | I, I_3 \rangle = \sqrt{I(I+1) - I_3(I_3 \pm 1)} | I, I_3 \pm 1 \rangle .$$

Anwendungen:

$$\hat{I}_+ | I, I \rangle = \sqrt{I(I+1) - I(I+1)} | I, I+1 \rangle = 0 \rightarrow -I \leq I_3 \leq I .$$

Damit gilt:

$$| I_3 | \leq I .$$

5.3.4 Zusammensetzung von Isospins

Wir wollen den Formalismus nutzen, um zwei Fragen zu beantworten:

- wie setzt man Isospins (Drehimpulse) zusammen?
- wie sieht die Wellenfunktion des zusammengesetzten Zustands aus?

Zusammensetzen von Drehimpulsen/Isospins

Zwei Protonen befinden sich im Isospinzustand:

$$| 1, 1 \rangle = | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle_1 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle_2$$

Begründung: $\frac{Q(2p)}{|e|} = 2$, $B(2p) = 2$

Gell-Mann–Nishijima-Formel:

$$\begin{aligned} I_3(pp) &= \frac{Q}{|e|} - \frac{B}{2} = 2 - 1 = 1 \\ I &\geq I_3(2p) , \end{aligned}$$

aber nach dem Vektormodell ist $I \leq 1$. Welche Teilchen befinden sich im gleichen Multiplett?

$$\begin{aligned} \hat{I}_- | 1, 1 \rangle &= (\hat{I}_-^1 + \hat{I}_-^2) | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle_1 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle_2 = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right) \left(| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle_1 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle_2 + | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle_1 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle_2 \right)} \\ &\stackrel{!}{=} \sqrt{1(1+1) - (1-1)1} | 1, 0 \rangle = \sqrt{2} | 1, 0 \rangle \\ | 1, 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle_1 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle_2 + | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle_1 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle_2 \right) \end{aligned}$$

- Dieser Zustand ist aus n und p zusammengesetzt.
- Er ist symmetrisch gegen Teilchenvertauschung.

Analog folgt:

$$| 1, -1 \rangle = | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle_1 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle_2 = | nn \rangle .$$

Mit Hilfe dieser Methode kann man die Clebsch–Gordon–Koeffizienten bestimmen (siehe z.B.: Edmonds, Drehimpulse / Messiah, Quantenmechanik). Für die einfachsten Fälle kann man die im Particle Booklet 1998, S.232/233 angegebenen Tabellen benutzen (Abb.5.9).

Es sollen jetzt einige Beispiele für die Anwendung des Isospin-Formalismus gegeben werden. Weitere findet man in den Übungen.

- **1. Beispiel:** Zusammensetzung des $|0, 0\rangle$ -Zustandes aus Isospin $1/2$ -Zuständen.

$$|0, 0\rangle = a \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_2 + b \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_2$$

$$\text{aus Tabelle : } a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_2$$

- antisymmetrisch bei $1 \leftrightarrow 2$
- orthogonal zu $|1, 0\rangle$
- Deuteron s -Zustand, $J^\pi = 1^+$, Isospin $I = 0$, wird beschrieben durch

$$\Psi(1, 2) = \Psi_{ort} \Psi_{Spin} \Psi_{Isospin} =$$

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \underbrace{\left(\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_2 \right)}_{Spin} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_2 - \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_2 \right) \right)}_{Isospin}$$

Es gilt für den np -Zustand $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ (s -Welle)

$\Rightarrow \Psi(1, 2) = -\Psi(2, 1)$, d.h. bei Nutzung des Isospin kann ein verallgemeinertes Pauli-Prinzip für Nukleonen formuliert werden: **Die Gesamtwellenfunktion der Nukleonen (keine Unterscheidung zwischen p und n !) ist antimetrisch gegen Teilchenvertauschung.**

- **2. Beispiel:** Zerfall von ρ^0 -Mesonen.

Zerfällt ρ^0 zu $\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$ oder nur in $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$?

$\rho^+, \rho^0, \rho^- : S = B = \tilde{B} = \tilde{C} = 0 \rightarrow I = 1, I_3(\rho^0) = 0$ (aus Gell-Mann-Nishijima-Formel).

$$|1, 0\rangle = a |1, 1\rangle_1 |1, -1\rangle_2 + b |1, 0\rangle_1 |1, 0\rangle_2 + c |1, -1\rangle_1 |1, 1\rangle_2$$

$$\text{Tabelle : } a = c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = 0$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 1\rangle_1 |1, -1\rangle_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} |1, -1\rangle_1 |1, 1\rangle_2$$

$$\frac{w(\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0)}{w(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)} = \frac{b^2}{a^2 + c^2} = \frac{0}{1} = 0.$$

Das heißt: das ρ^0 -Meson zerfällt **nicht** in $\pi^0 \pi^0$ in Übereinstimmung mit dem Experiment. Vorausgesetzt wurde dabei Isospin-Symmetrie bei der starken Wechselwirkung.

Hinweis: Im Particle-Data-Booklet sind Zerfälle in unterschiedliche Ladungszustände nicht angegeben. Sie können mit Hilfe der Isospinerhaltung und der Clebsch-Gordon-Koeffizienten berechnet werden.

- **3. Beispiel:** Zerfall der Δ^+ -Resonanz

$$\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^- \rightarrow I = \frac{3}{2}, I_3 = \frac{Q}{e} - \frac{B}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ für den } \Delta^+ \text{ Zustand}$$

$$|\Delta^+\rangle = a |p\rangle |\pi^0\rangle + b |n\rangle |\pi^+\rangle$$

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = a \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle |1, 0\rangle + b \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle |1, 1\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle |1, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle |1, 1\rangle$$

$$\frac{w(\Delta^+ \rightarrow p\pi^0)}{w(\Delta^+ \rightarrow n\pi^-)} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}^2}{\sqrt{\frac{1}{3}}^2} = 2$$

in Übereinstimmung mit dem Experiment.

Hinweis: Der Isospin ist für die **starke** Wechselwirkung erhalten. Für die schwache und elektromagnetische Wechselwirkung gelten nur Auswahlregeln. Trotzdem kann man den Formalismus auch in diesem Fall nutzbringend anwenden, wie das 4. Beispiel zeigt.

• **4. Beispiel:** Anwendung der Isospin-Symmetrie auf schwache Zerfälle

Wir wollen hier die in Kap.5.2 angegebenen Relationen ableiten:

$$\eta_{+-} = \epsilon + \epsilon'$$

$$\eta_{00} = \epsilon - 2\epsilon'.$$

Wir betrachten dazu den 2π -Endzustand, der beim K^0 -Zerfall beobachtet wird. Das 2π -System kann sich wegen des verallgemeinerten Pauli-Prinzips nur in einem $I = 0$ oder $I = 2$ Zustand befinden: $\pi^+\pi^-$ ($\pi^0\pi^0$)-System mit $I_3 = I_{31} + I_{32} = 0$ (siehe Abb.5.9).

$$\begin{aligned} |2,0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{6}}|1,1\rangle|1,-1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle|1,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}|1,-1\rangle|1,1\rangle \\ |1,0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}|1,1\rangle|1,-1\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}|1,-1\rangle|1,1\rangle \\ |0,0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|1,1\rangle|1,-1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1,0\rangle|1,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1,-1\rangle|1,1\rangle \end{aligned}$$

Beweis: Verallgemeinertes Pauli-Prinzip:

$$\Psi_{\pi\pi}(1,2) = \Psi_{ort}\Psi_{spin}\Psi_{Iso} = \Psi_{ort}\Psi_{Iso} \stackrel{Boson}{=} \Psi_{\pi\pi}(2,1)$$

ferner

$$\begin{aligned} \Psi_{ort}(1,2) &= \Psi_{ort}(2,1) \quad , \text{da } s\text{-Welle } (J^\pi(K) = O^-) \\ \rightarrow \Psi_{iso}(1,2) &= \Psi_{iso}(2,1) \quad \rightarrow |1,0\rangle \text{ tritt } \mathbf{nicht} \text{ auf.} \end{aligned}$$

Ohne starke Wechselwirkung der π -Mesonen untereinander gilt (WI = schwache Wechselwirkung = weak interaction)

$$\begin{aligned} \langle 2\pi, I=0 | \hat{H}_{WI} | K^0 \rangle &=: A_0 \\ \langle 2\pi, I=0 | \hat{H}_{WI} | \bar{K}^0 \rangle &=: -A_0^* \\ \langle 2\pi, I=2 | \hat{H}_{WI} | K^0 \rangle &=: A_2 \\ \langle 2\pi, I=2 | \hat{H}_{WI} | \bar{K}^0 \rangle &=: -A_2^* \end{aligned}$$

Da die π -Mesonen im Endzustand noch aneinander streuen können, ist jede Amplitude noch mit einem Phasenfaktor $e^{i\delta_0}$ ($e^{i\delta_2}$) zu multiplizieren; denn wegen der kleinen Energien sind bei diesen Streuungen keine inelastischen Reaktionen möglich. Nutzt man jetzt noch den Zusammenhang von Kap.5.2:

$$\begin{aligned} |K_S^0\rangle &= |K_1^0\rangle + \epsilon |K_2^0\rangle \\ |K_L^0\rangle &= |K_2^0\rangle + \epsilon |K_1^0\rangle, \end{aligned}$$

dann findet man durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} \langle \pi^+\pi^- | \hat{H}_{WI} | K_L^0 \rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\delta_2}(\epsilon Re(A_2) + iIm(A_2)) + 2\sqrt{\frac{1}{3}}e^{i\delta_0}(\epsilon Re(A_0) + iIm(A_0)) \\ \langle \pi^0\pi^0 | \hat{H}_{WI} | K_L^0 \rangle &= 2\sqrt{\frac{1}{3}}e^{i\delta_2}(\epsilon Re(A_2) + iIm(A_2)) - \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\delta_0}(\epsilon Re(A_0) + iIm(A_0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \pi^+ \pi^- | H_{WI} | K_S^0 \rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} (e^{i\delta_2} (\epsilon \operatorname{Re}(A_2) + \sqrt{2} e^{i\delta_0} \operatorname{Re}(A_0))) \\ \langle \pi^0 \pi^0 | H_{WI} | K_S^0 \rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} (\sqrt{2} e^{i\delta_2} (\epsilon \operatorname{Re}(A_2) + e^{i\delta_0} \operatorname{Re}(A_0))). \end{aligned}$$

Experimentell hat man gefunden:

$$\frac{w(K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{w(K_S^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0)} = 2.16 \approx 2 \Rightarrow |A_0| \gg |A_2| .$$

Wir können dies ausnutzen und bei der folgenden Rechnung Terme $\epsilon \frac{A_2}{A_0}$ vernachlässigen. Man findet dann:

$$\begin{aligned} \eta_{+-} &= \frac{\langle \pi^+ \pi^- | H_{WI} | K_L^0 \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | H_{WI} | K_S^0 \rangle} = \epsilon + \epsilon' \\ \eta_{00} &= \frac{\langle \pi^0 \pi^0 | H_{WI} | K_L^0 \rangle}{\langle \pi^0 \pi^0 | H_{WI} | K_S^0 \rangle} = \epsilon - 2\epsilon' \end{aligned}$$

mit

$$\epsilon' = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{Im} A_2}{A_0} e^{i\frac{\pi}{2} - i\delta_0 + i\delta_2} ,$$

damit ist der Beweis für die in Kap.5.2 angegebenen Formeln skizziert. Wichtig ist, daß der Isospinformalismus zur Deutung des $K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$, $\pi^0 \pi^0$ Zerfallsverhältnisses und zur Definition der beteiligten Amplituden verwendet wurde (siehe auch Übungsaufgabe zur π - N -Streuung).

5.4 Quarkmodell I – Leichte Quarks u, d, s

LITERATUR: [90, 91, 92]

5.4.1 Motivation

In Kap.5.1 bis 5.3 haben wir folgende wichtige Beobachtungen gemacht:

- Die hadronischen „elementaren Systeme“ sind ausgedehnt (siehe auch Kap.2.1)
- es gibt im Sinne der Quantenmechanik diskrete Zustände; sie sind durch Quantenzahlen (J^π, I, S, \dots) und „scharfe“ Energie–(Massen–)Eigenwerte charakterisiert.
- Es gibt Übergänge zwischen den Zuständen z. B.:

$$\Delta^+ \rightarrow p\gamma, \quad \Lambda \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e, \quad \Delta^{++} \rightarrow p\pi^+ .$$

Wie in der Atom- und Kernphysik ist es daher naheliegend anzunehmen, daß diese hadronischen Systeme zusammengesetzt sind. In den letzten 30 Jahren hat sich dabei gezeigt, daß ein von Gell-Mann und Zweig eingeführtes Modell eine konsistente Beschreibung der Daten erlaubt: das **Quark-Modell**. Durch den Erfolg der Feldtheorien, die die Wechselwirkungen dieser Quarks miteinander beschreiben, der

- Quantenchromodynamik (QCD) – Zusammenhalt der Quarks
- Quantenflavordynamik (QFD) – Umwandlung der Quarks

ist dieses Modell in den letzten 20 Jahren experimentell abgesichert und wird heute in Kombination mit den Theorien der Wechselwirkung als **Standardmodell** der Teilchenphysik bezeichnet.

In diesem Paragraphen behandeln wir Hadronen mit $\vec{B} = \vec{C} = 0$. Sie sind aus den leichten u, d, s Quarks zusammengesetzt. In Kap.5.5 werden die schweren c, b Quarks behandelt, deren

Entdeckung 1974/1978 den endgültigen Durchbruch des Quarkmodells mit sich brachte. In der Vorlesung werden wir die Argumente im wesentlichen am Beispiel der Baryonen vorführen, da zur Beschreibung leichter Mesonen relativistische Wellenfunktionen (Klein–Gordon–Gleichung) benutzt werden müssen. Mesonen werden in Kap.5.5 am Beispiel der schweren Quarksysteme behandelt, da für sie umfangreiches experimentelles Material existiert und wegen der hohen Masse ihrer Konstituenten die nicht–relativistischen Wellengleichungen anwendbar sind.

Vorgehensweise:

In Kap.5.3 haben wir die Zustände mit gleichem B, S, J^π zu Isospinmultipletts (SU(2)–Multipllett) zusammengefaßt, falls die Masse nahezu gleich war (siehe Abb.5.8).

Wir haben Singulettts ($I = 0$: η, ω, Λ), Triplettts ($I = 1$, ρ^+, ρ^0, ρ^- ; π^+, π^0, π^-) und Quar–tetts ($\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$) kennengelernt. Innerhalb des Isospinmultipletts variiert I_3 zwischen $-I \leq I_3 \leq I$. Die Zusammenfassung in Isospinmultipletts führt zu Vorhersagen über:

- Verzweigungsverhältnisse,
- erlaubte Reaktionen – Auswahlregeln,
- Verhältnisse von Streuamplituden (siehe Übungen),
- Verhältnisse von Wirkungsquerschnitten,
- Teilchenklassifikation.

Die Symmetrie war nicht exakt, sie war durch die elektromagnetische Wechselwirkung gebrochen (siehe Abb.5.8). Die Massenaufspaltung innerhalb eines Isospinmultipletts ist ebenfalls eine Folge der Symmetriebrechung. Ein Blick auf das Niveauschema der Hadronen (Abb.5.11) legt nahe, einen weiteren Schritt bei der Zusammenfassung von Hadronen zu Multipletts zu machen:

Teilchen mit gleichem B, J^π , (\approx gleiche Masse)

werden zu Multipletts zusammengefaßt. Hadronen, die einem solchem „SU(3)–Multipllett“ angehören, unterscheiden sich durch

$$(I, I_3), S.$$

Es zeigt sich, daß diese Multipletts einer ganz einfachen Symmetrie genügen und aus folgenden Bausteinen zusammengesetzt sind (s. Abb.5.10). Die Quarks haben die folgenden Eigenschaften:

B	$\frac{Q}{ e }$	I	I_3	m_q	J^π/\hbar	S	Y	$\mu/\mu_B(q)$
u	1/3	2/3	1/2	$\approx 150 \text{ MeV}/c^2$	$1/2^+$	0	1/3	2/2
d	1/3	-1/3	1/2	$\approx 150 \text{ MeV}/c^2$	$1/2^+$	0	1/3	1/3
s	1/3	-1/3	0	$\approx 300 \text{ MeV}/c^2$	$1/2^+$	-1	-2/3	1/3

m_q ist die sogenannte Konstituenten–Quark–Masse, es ist die Masse gebundener Quarks.

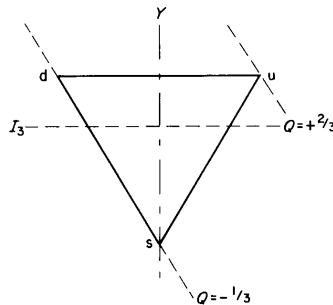


Abbildung 5.10: Spektrum der Quark–Zustände mit $\tilde{C} = \tilde{B} = 0$

Anmerkung:

Die Eigenschaften der Bausteine sind so gewählt, daß

- die Gell-Mann–Nishijima–Formel gilt

$$\frac{Q}{|e|} = I_3 + \frac{B+S}{2} .$$

- aus den Konstituentenspins mit Hilfe des Vektormodells alle Spinzustände der Hadronen konstruiert werden können, dabei sind gegebenenfalls Bahndrehimpulse mit zu berücksichtigen.
- $\frac{\mu}{\mu_B(q)} = \frac{Q}{e}$ minimale Kopplung siehe Kap.7.1 mit

$$\mu_B(q) = \frac{e}{2m_q c} \hbar \quad (\text{magnetisches Moment der Quarks}).$$

- Quark \rightarrow Antiquark: $Q \rightarrow -Q$, $\mu_q \rightarrow -\mu_q$, $\eta_q \rightarrow -\eta_q$, $I_3 \rightarrow -I_3$.
- Es werden Konstituenten–Quark–Massen (Currentquark–Massen + Wechselwirkungsfelder) zugrunde gelegt.

Um aus diesen „Postulaten“ Vorhersagen im Rahmen des Quarkmodells machen zu können, müssen noch einige allgemeine Annahmen gemacht werden, um das **Konstituenten–Quark–Modell** zu definieren.

Mesonen: $J/\hbar = 0, 1, 2, 3, \dots$ mit $I_q = 1/2, B_q = 1/3 \Rightarrow n = 2, 4, \dots$ $q\bar{q}$ -Paare

Man postuliert: $|Meson\rangle = |q\bar{q}\rangle$

Baryonen: $J/\hbar = 1/2, 3/2$ mit $I_q = 1/2, B_q = 1/3 \Rightarrow n = 3, 5, \dots$ Quarks

Man postuliert: $|Baryon\rangle = |q_i q_j q_k\rangle$

Wenn man jetzt – wie bei nahezu allen quantenmechanischen Systemen – annimmt, daß der Grundzustand ein s -Zustand ($l=0$) ist (Folge des Knotensatzes), dann sollte J^π für den niedrigsten Zustand des Mesons (Baryons) die folgenden Werte annehmen:

Meson: $J^\pi = 0^-, 1^-$ $| \hat{q}_1 \hat{q}_2 \rangle$ und $| \hat{q}_1 \hat{q}_2 \rangle$

$$\eta_p(Meson) = \eta_p(q)\eta_p(\bar{q})(-1)^l = (+1)(-1)(-1)^0 = -1 .$$

Baryon: $J^\pi = 1/2^+, 3/2^+$ $| \hat{q}_1 \hat{q}_2 \hat{q}_3 \rangle$ und $| \hat{q}_1 \hat{q}_2 \hat{q}_3 \rangle$

$$\eta_p(Baryon) = \eta_p(q)^3(-1)^l = +1 .$$

Hinweis: In Kap.5.4 wird mit \hat{q} ein Quark mit Spin $J_z = +\hbar/2$ und mit \bar{q} ein Quark mit dem Spin $J_z = -\hbar/2$ bezeichnet.

Wie bei vielen quantenmechanischen Systemen bewährt sich die Annahme, daß die Orts- und Spin-Wellenfunktion faktorisieren:

$$\Psi(1, 2, 3) = \Psi_{ort}(1, 2, 3)\chi_{Spin}(1, 2, 3) .$$

In den folgenden Abschnitten wollen wir folgende Probleme behandeln:

- Form des I_3, Y -Diagramms, Einfluß des Spins
- Zusammenhang der Massen innerhalb eines Multipletts (Gell-Mann–Okubo–Formel)
- Relationen zwischen den magnetischen Momenten innerhalb eines Multipletts

Diese Überlegungen beruhen allein auf Symmetrieargumenten, in ähnlicher Form nutzt man sie auch in der Atom- und Kernphysik aus.

- Vorhersagen über die Größe von Wirkungsquerschnitten

$$\sigma(\gamma p \rightarrow \Delta^{++}) \text{ und } \sigma(\pi p)/\sigma(pp) .$$

Es handelt sich um exemplarische Anwendungsbeispiele – viele weitere findet man in der Literatur (siehe [90]) und in den Übungsaufgaben.

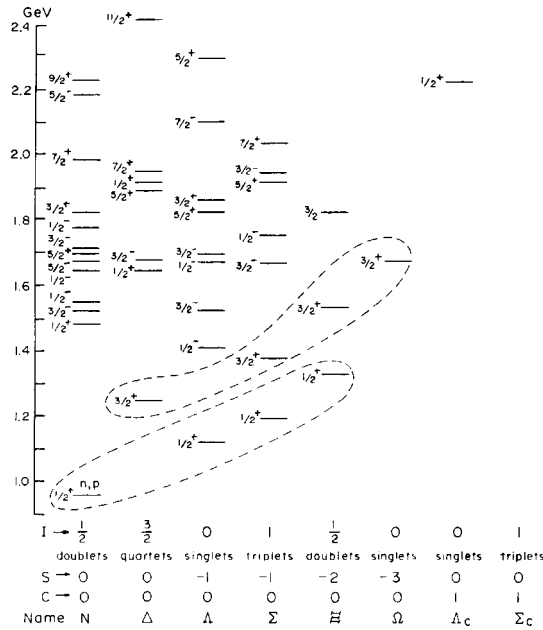


Abbildung 5.11: Das Baryonen-Spektrum und die Zusammenfassung in Multipletts

5.4.2 SU(3)-Dekuplett und Oktett der Baryonen

Wir wollen zeigen, daß sich die $|q_1 q_2 q_3\rangle$ -Zustände genau in 2 Multipletts einordnen lassen: $Y = B + S$ ist die Hyperladung für leichte Systeme aus leichten Quarks. Man kann diese Einordnung zunächst als eine praktische Zusammenfassung der Meßdaten ansehen (siehe Abb.5.11).

Dekuplett

$$J^\pi = \frac{3}{2}^+ \rightarrow \text{alle Quark-Spins müssen parallel sein } (l = 0)$$

$$| \text{Dekuplett} \rangle = | \hat{q}_1 \hat{q}_2 \hat{q}_3 \rangle .$$

Aufbau des Dekupletts:

$$| \Delta^{++}, J_z = 3/2 \hbar \rangle = | I = 3/2, I_3 = 3/2 \rangle = | \hat{u} \hat{u} \hat{u} \rangle$$

$$I_3(u) = \frac{1}{2} \quad I_3(d) = -\frac{1}{2} .$$

Die restlichen Zustände des Δ -Isospinquartetts erhält man mit Hilfe der in Kap.5.3 eingeführten Schiebeoperatoren:

$$\begin{aligned} \hat{I}_- | \Delta^{++} \rangle &= \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - 1 \right)} | \Delta^+ \rangle = \sqrt{3} | \Delta^+ \rangle = (\hat{I}_{-1} + \hat{I}_{-2} + \hat{I}_{-3}) | \hat{u} \hat{u} \hat{u} \rangle \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)} (| \hat{d} \hat{u} \hat{u} \rangle + | \hat{u} \hat{d} \hat{u} \rangle + | \hat{u} \hat{u} \hat{d} \rangle) \\ \rightarrow | \Delta^+ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (| \hat{d} \hat{u} \hat{u} \rangle + | \hat{u} \hat{d} \hat{u} \rangle + | \hat{u} \hat{u} \hat{d} \rangle) . \end{aligned}$$

Analog folgt aus $\hat{I}_- |\Delta^+ \rangle = 2 |\Delta^0 \rangle$

$$|\Delta^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|\hat{d}\hat{d}\hat{u} \rangle + |\hat{d}\hat{u}\hat{d} \rangle + |\hat{u}\hat{d}\hat{d} \rangle)$$

$$|\Delta^- \rangle = |\hat{d}\hat{d}\hat{d} \rangle$$

$$\hat{I}_- |\Delta^- \rangle = 0, \hat{I}_+ |\Delta^{++} \rangle = 0.$$

Zu einem weiteren Isospinmultiplett gelangen wir, wenn wir eines der u, d -Quarks durch ein s -Quark ersetzen (anderer Weg: \hat{U}, \hat{V} -Spinoperator)

$$|\Delta^{++} \rangle = |\hat{u}\hat{u}\hat{u} \rangle \rightarrow |\Sigma^+(1385) \rangle = |I=1, I_3=1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|\hat{s}\hat{u}\hat{u} \rangle + |\hat{u}\hat{s}\hat{u} \rangle + |\hat{u}\hat{u}\hat{s} \rangle).$$

$\Sigma^0(1385) \rangle$ und $|\Sigma^-(1385) \rangle$ erhält man wieder durch Anwendung von \hat{I}_- . Analog folgt:

$$\Xi^0(1530) \rangle \sim |\hat{s}\hat{s}\hat{u} \rangle$$

$$\Xi^-(1530) \rangle \sim |\hat{s}\hat{s}\hat{d} \rangle.$$

Im letzten Schritt erhalten wir:

$$\Omega^-(1673) \rangle = |\hat{s}\hat{s}\hat{s} \rangle.$$

Resultat:

- Wir können die Zustände eines Dekupletts konstruieren
- Es gibt nur diese Zustände in Übereinstimmung mit dem Experiment

Experimentum Crucis: Als Gell-Mann das Quark-Modell 1962 einführt, waren die $\Delta, \Sigma(1385)$ und $\Xi(1530)$ -Baryon Zustände bekannt, nicht aber das Ω^- -Baryon. Gell-Mann sagte voraus:

- Es gibt einen Baryonzustand mit $S = -3, Y = -2, J^\pi = \frac{3}{2}^+$,
- seine Masse kann aus derjenigen der $\Delta, \Sigma(1385), \Xi(1530)$ -Baryonen berechnet werden (siehe Kap.5.4.4),
- mögliche Zerfälle.

Eineinhalb Jahre später wurde dieser Zustand in einem dedizierten Blasenkammerexperiment beobachtet.

Anmerkungen:

- Bis heute wurden nur einige hundert Ω^- -Zerfälle beobachtet
- Im Zusammenhang mit dem Δ^{++} und Ω^- gibt es eine Schwierigkeit mit dem Pauli-Prinzip. Ansatz für die Δ^{++} -Wellenfunktion:

$$\Psi(1, 2, 3) = \underbrace{u(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)}_{s\text{-Welle}} \underbrace{\chi(\hat{1}\hat{2}\hat{3})}_{\hat{u}\hat{u}\hat{u}}.$$

Vertauscht man 1 und 2, ergibt sich: $\Psi(1, 2, 3) = \Psi(2, 1, 3)$, d.h. die Gesamtwellenfunktion ist **nicht** antisymmetrisch, wie vom Pauli-Prinzip gefordert.

Lösung des Problems: Wir führen einen neuen Freiheitsgrad „Farbe“ (color) ein:

$$u \rightarrow \begin{pmatrix} u_r \\ u_g \\ u_b \end{pmatrix}$$

und fordern, daß die Wellenfunktion antisymmetrisch bezüglich der Vertauschung der Farbfreiheitsgrade ist, d.h. über den Spin und Isospinanteil hinaus verallgemeinern wir:

$$|\Delta^{++} \rangle = |\hat{u}\hat{u}\hat{u} \rangle \rightarrow |\Delta^{++} \rangle = \epsilon_{ijk} |\hat{u}_i \hat{u}_j \hat{u}_k \rangle$$

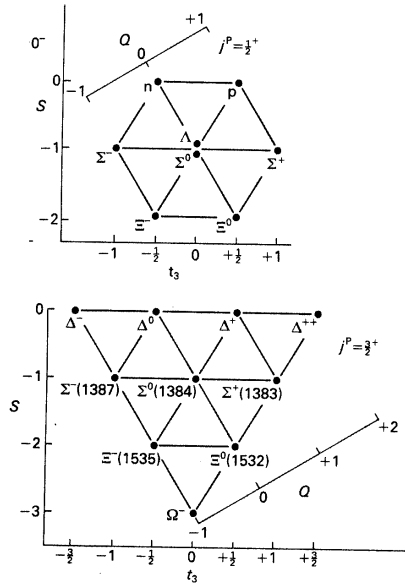


Abbildung 5.12: Zusammenfassung in Multipletts: Baryonen–Oktett und Baryonen–Dekuplett

Namensgebung: r,b,g = red, green, blue; r + g + b = weiß = farblos (Farbkreis in physiologischer Optik).

- Hätte man das Pauli–Prinzip in seiner heutigen Formulierung (antisymmetrische Wellenfunktion für identische Fermionen) bereits **vor** der Einführung des Spins gekannt, so hätte die Deutung des He –Spektrums in analoger Weise wie bei den Quarks zum neuen Freiheitsgrad „Spin“ geführt (Übungsaufgabe).
- Es wird sich zeigen, daß der neue Freiheitsgrad Farbe, den wir hier zur Rettung des Pauli–Prinzips eingeführt haben, eine wichtige dynamische Rolle im Zusammenhang mit den Kräften zwischen den Quarks spielt (siehe Kap.7.2, für den direkten experimentellen Nachweis siehe Kap.6.1.2).

Baryonen–Oktett

Als nächstes wollen wir untersuchen, welche Werte (I_3, Y) die 3 Quarkzustände (Baryonen) mit $J^\pi = \frac{1}{2}^+$ annehmen können. Die Konstruktion der Zustände ist in diesem Fall komplizierter als beim Dekuplett, da nach dem Vektormodell zwei Quarks entgegengesetzt gerichtete Spins besitzen müssen (siehe Abb.5.12).

In den Übungen wird gezeigt, daß das Proton durch den Zustand

$$\begin{aligned}
 |\hat{p}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} (2 |\hat{u}\hat{u}\hat{d}\rangle + 2 |\hat{u}\hat{d}\hat{u}\rangle + 2 |\hat{d}\hat{u}\hat{u}\rangle - |\hat{u}\hat{u}\hat{d}\rangle \\
 &\quad - |\hat{u}\hat{d}\hat{u}\rangle - |\hat{d}\hat{u}\hat{u}\rangle - |\hat{u}\hat{u}\hat{d}\rangle - |\hat{u}\hat{d}\hat{u}\rangle - |\hat{d}\hat{u}\hat{u}\rangle)
 \end{aligned}$$

beschrieben wird.

Die Quantenzahlen des Protons lauten:

$$J^\pi = \frac{1}{2}^+, \quad J_z = \frac{1}{2}, \quad I = \frac{1}{2}, \quad I_3 = \frac{1}{2}.$$

Beispiel für die Rechnung:

$$\begin{aligned} \hat{J}_z | \hat{p} \rangle &= (\hat{J}_{z1} + \hat{J}_{z2} + \hat{J}_{z3}) \frac{1}{\sqrt{18}} (2 | \hat{u}\hat{u}\hat{d} \rangle + 2 | \hat{u}\hat{d}\hat{u} \rangle + 2 | \hat{d}\hat{u}\hat{u} \rangle - | \hat{u}\hat{u}\hat{d} \rangle \\ &\quad - | \hat{u}\hat{d}\hat{u} \rangle - | \hat{d}\hat{u}\hat{u} \rangle - | \hat{u}\hat{u}\hat{d} \rangle - | \hat{u}\hat{d}\hat{u} \rangle - | \hat{d}\hat{u}\hat{u} \rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{18}} \left(2 \left(\frac{\hbar}{2} + \frac{\hbar}{2} - \frac{\hbar}{2} \right) | \hat{u}\hat{u}\hat{d} \rangle + 2 \left(\frac{\hbar}{2} - \frac{\hbar}{2} + \frac{\hbar}{2} \right) | \hat{u}\hat{d}\hat{u} \rangle + \dots \right) = \frac{\hbar}{2} | \hat{p} \rangle . \end{aligned}$$

Analog zeigt man (Übungen):

$$\hat{J}^2 | \hat{p} \rangle = (\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+ + \hat{J}_z^2) | \hat{p} \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 | \hat{p} \rangle .$$

Wir wollen als nächstes zeigen, daß im Quarkmodell für $J^\pi = \frac{1}{2}^+$ -Zustände die Eckpunkte ($Y = 1$, $I_3 = \frac{3}{2}$; ...) **nicht** existieren. Dazu zeigt man

$$\hat{I}_+ | p \rangle = 0 .$$

Wir nutzen aus $\hat{I}_+ | u \rangle = 0$, $\hat{I}_+ | d \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} + 1)} | u \rangle = | u \rangle$. Also

$$\begin{aligned} \hat{I}_+ | p \rangle &= (\hat{I}_{+1} + \hat{I}_{+2} + \hat{I}_{+3}) \frac{1}{\sqrt{18}} (2 | \hat{u}\hat{u}\hat{d} \rangle + \dots) = \\ &\frac{1}{\sqrt{18}} (2 (0 + 0 + | \hat{u}\hat{u}\hat{u} \rangle) + 2 (0 + | \hat{u}\hat{u}\hat{u} \rangle + 0)) + 2 (| \hat{u}\hat{u}\hat{u} \rangle + 0 + 0) - (0 + 0 + | \hat{u}\hat{u}\hat{u} \rangle) \\ &(0 - | \hat{u}\hat{u}\hat{u} \rangle + 0) - (| \hat{u}\hat{u}\hat{u} \rangle + 0 + 0) - (| \hat{u}\hat{u}\hat{u} \rangle + 0 + 0) - (0 + | \hat{u}\hat{u}\hat{u} \rangle + 0) - (| \hat{u}\hat{u}\hat{u} \rangle + 0 + 0) = 0 . \end{aligned}$$

Weitere Zustandsfunktionen:

$$\begin{aligned} | \hat{n} \rangle &= \hat{I}_- | p \rangle = -\frac{1}{\sqrt{18}} (2 | \hat{d}\hat{d}\hat{u} \rangle + 2 | \hat{d}\hat{u}\hat{d} \rangle + 2 | \hat{u}\hat{d}\hat{d} \rangle - | \hat{d}\hat{d}\hat{u} \rangle \\ &\quad - | \hat{d}\hat{u}\hat{d} \rangle - | \hat{u}\hat{d}\hat{d} \rangle - | \hat{d}\hat{d}\hat{u} \rangle - | \hat{d}\hat{u}\hat{d} \rangle - | \hat{u}\hat{d}\hat{d} \rangle) . \end{aligned}$$

Durch Ersetzen $u(d) \rightarrow s$ zeigt man (nur die Quarkzusammensetzung wird angegeben):

$$\begin{aligned} \Sigma^+ &\sim uus , & \Sigma^0 &\sim uds , & \Sigma^- &\sim dds \\ \Xi^0 &\sim uss , & \Xi^- &\sim dss . \end{aligned}$$

Einen Zustand $| sss \rangle$ mit $J^\pi = \frac{1}{2}^+$ kann man nicht konstruieren. Eine vollständige Tabelle der Wellenfunktionen findet man bei Thirring [93].

Ein Spezifikum des Oktetts ist das Auftreten von **zwei Zuständen bei $Y = I_3 = 0$** . In unserem Fall sind dies das Σ^0 - und das Λ -Baryon. Man bildet sie aus uds . Es ist möglich drei orthogonale Linearkombinationen aus $| \hat{u}\hat{d}\hat{s} \rangle$, $| \hat{u}\hat{s}\hat{d} \rangle$ und $| \hat{d}\hat{s}\hat{u} \rangle$ zu bilden mit $J_z = \frac{\hbar}{2}$.

Die Detailrechnung zeigt, daß

- ein Zustand mit $J = \frac{3}{2}\hbar$, $J_z = \frac{\hbar}{2}$ (Dekuplett)
- zwei Zustände mit $J = \frac{1}{2}\hbar$, $J_z = \frac{\hbar}{2}$ (Oktett)

existieren. Die explizite Konstruktion sei als Übungsaufgabe empfohlen (siehe Thirring in [93]). Zusammenfassend haben wir folgende Resultate erzielt und können zusätzliche Vorhersagen machen:

- $J = \frac{3}{2}\hbar$: Dekuplett
- $J = \frac{1}{2}\hbar$: Oktett

- ein Anti-Dekuplett gibt es nur für Antibaryonen, nicht für Baryonen
- Es gibt kein Baryon mit $S > 0$, dagegen aber Antibaryonen mit $S > 0$, aber nicht mit $S < 0$.

Alle diese Ergebnisse stimmen mit dem Experiment überein. Das Quarkmodell bewährt sich also als **Ordnungsschema**.

Hinweis:

- Baryonen mit $J = \frac{5}{2}\hbar, \frac{7}{2}\hbar, \dots$ können als Bahndrehimpuls-Anregungen interpretiert werden ($l \neq 0$).
- Mesonen als $|q_1\bar{q}_2\rangle$ -Zustände treten als Oktett und als Singulett-Zustände auf.

5.4.3 Magnetische Momente der Baryonen

Am Beispiel der magnetischen Momente von n und p soll eine weitere Vorhersage des Quarkmodells überprüft werden. In den Übungen findet sich ein weiteres Beispiel. Es gilt nach Kap.5.4.1:

$$\frac{\mu_z}{\mu_B(q)} \quad \left| \begin{array}{ccc} u & d & s \\ \hline 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{array} \right.$$

Wie in der Atom- und Kernphysik (Kap.2.2) gilt für die verschiedenen Spin-Zustände:

$$\frac{\mu_z}{\mu_B(q)} \quad \left| \begin{array}{cccc} \hat{u} & \check{u} & \hat{d} & \check{d} \\ \hline 2/3 & -2/3 & -1/3 & +1/3 \end{array} \right.$$

Man berechnet μ_z gemäß :

$$\mu_z = \langle \hat{p} | \hat{\mu}_z | \hat{p} \rangle = \langle \hat{p} | \hat{\mu}_{z1} + \hat{\mu}_{z2} + \hat{\mu}_{z3} | \hat{p} \rangle ,$$

wobei $\mu_{zi} \sim \sigma_{zi}$ mit σ_{zi} = Pauli-Spin-Matrix, die auf das i -te Quark wirkt. Mit der Proton-Wellenfunktion aus Kap.5.4.2:

$$\begin{aligned} |\hat{p}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} (2|\hat{u}\hat{u}\check{d}\rangle + 2|\hat{u}\check{d}\hat{u}\rangle) + 2|\check{d}\hat{u}\hat{u}\rangle - |\hat{u}\check{u}\hat{d}\rangle \\ &\quad - |\check{u}\hat{d}\hat{u}\rangle - |\hat{d}\hat{u}\check{u}\rangle - |\check{u}\hat{u}\hat{d}\rangle - |\hat{u}\hat{d}\check{u}\rangle - |\check{d}\hat{u}\hat{u}\rangle \end{aligned}$$

folgt für das 1. u -Quark mit Spin up das Gewicht:

$$w_1^\uparrow = \frac{4}{18} + \frac{4}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{5}{9} .$$

Das 1. u -Quark mit Spin $down$ hat das Gewicht:

$$w_1^\downarrow = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{9} .$$

Zusammengefaßt erhält man für die Gewichte:

Quark	\hat{u}	\check{u}	\hat{d}	\check{d}	Summe
1	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	1
2	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	1
3	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

$$\frac{\mu_z(p)}{\mu_B(q)} = 3 \left(\frac{5}{9} \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \frac{-2}{3} + \frac{1}{9} \frac{-1}{3} + \frac{2}{9} \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{9} .$$

Daraus folgt für

$$\Omega \sim sss, \quad \Xi \sim uss, \quad \Sigma \sim uus, \quad \Delta \sim uuu$$

	Modell	Experiment
$M(\Omega^-) - M(\Xi)$	$= m_s - m_u$	140.6 MeV
$M(\Xi) - M(\Sigma)$	$= m_s - m_u$	149.5 MeV
$M(\Sigma) - M(\Delta)$	$= m_s - m_u$	148.3 MeV

Diese Überlegungen führten Gell-Mann dazu, das Experimentum Crucis des Quarkmodells vorzuschlagen.

1962 bekannt: $\Delta, \Sigma(1385)$

Peyron gab auf einer Konferenz bekannt: $m_{\Xi(1530)} = 1530 \text{ MeV}$.

Gell-Mann machte in der nachfolgenden Diskussion folgende Vorhersagen:

- Es gibt ein Baryon mit $S = -3$, $J^\pi = \frac{3}{2}^+$ (Ω^-)
- Seine Masse ist $M = 1680 \text{ MeV}$ ($M(\Xi) + 150 \text{ MeV}$)
- Es hat wegen der starken Wechselwirkung (Strangeness erhalten) eine lange Lebensdauer:

$$M(\Omega^-)c^2 = 1680 \text{ MeV} < (m(K^-) + m(\Xi^0))c^2 = 1806.6 \text{ MeV}$$

$$\Omega^- \rightarrow \bar{K}^0 \Xi^- \quad (\Delta S = 0, \text{ starker Zerfall}) \text{ ist verboten (Energiesatz !)}$$

$$\Omega^- \rightarrow \Lambda K^- \quad \text{möglich (schwach, } \Delta S = -1 \text{ ist erlaubt).}$$

Hinweis:

Beim Baryonenoktett funktioniert der Ansatz nicht; man muß explizite Annahmen über die Spin-Bahn-Wechselwirkung (siehe Kap.5.5) machen, da sich beim Oktett deren Beitrag nicht heraushebt.

5.4.5 Vorhersagen von Wirkungsquerschnitten

- $\gamma p \rightarrow \Delta^+$

Die Ortswellenfunktion des Grundzustandes sollte für das Oktett (p) und das Dekuplett (Δ^+) gleich sein. Wegen $\Delta l = 0$ kann E1-Strahlung (siehe Kap.3.1) den Übergang nicht induzieren.

$$J^\pi = \frac{1}{2}^+ \quad \rightarrow \quad J^\pi = \frac{3}{2}^+$$

Man erwartet E2/M1-Strahlung aufgrund der Auswahlregeln (Kap.3.1). Im Quarkmodell muß ein Spin (Quarkmoment) umklappen, damit der Übergang stattfindet (Dynamik):

$$| \uparrow \uparrow \downarrow \rangle \rightarrow | \uparrow \uparrow \uparrow \rangle$$

d.h. die M1-Strahlung sollte dominieren. Das Experiment zeigt, daß (95±2 %) der Amplitude M1-Strahlung ist.

- $\sigma_{tot}(\pi p) / \sigma_{tot}(pp)$ (siehe Abb.5.14).

Wenn man davon ausgeht, daß jedes Quark mit jedem wechselwirkt, dann gilt:

$$q\bar{q} \text{ mit } qq\bar{q} \quad \rightarrow \quad \sigma_{tot} = 6\sigma_{qq}$$

$$qq\bar{q} \text{ mit } qq\bar{q} \quad \rightarrow \quad \sigma_{tot} = 9\sigma_{qq}.$$

Also

$$\frac{\sigma_{tot}(\pi p)}{\sigma_{tot}(pp)} = \frac{2}{3}.$$

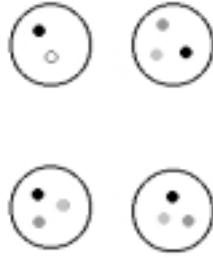


Abbildung 5.14: Zurückführung der $\pi - p$ und $p - p$ -Streuung auf $q - q$ und $q - \bar{q}$ -Streuung

Das Experiment ergibt:

$$\frac{\sigma_{tot}(\pi p)}{\sigma_{tot}(pp)} = \frac{26 \text{ mb}}{40 \text{ mb}} = 0.65.$$

Anmerkung: In allen Fällen ($\vec{\mu}, M, \sigma_{tot}$) haben wir angenommen, daß **additive** Operatoren den Prozeß beschreiben, man spricht daher vom **additiven Quarkmodell**

5.4.6 Kritische Abschlußbemerkung

Wir haben im Rahmen des additiven Quarkmodells die beobachteten Hadronen in der gleichen Näherung beschrieben, mit der wir in der nicht-relativistischen Quantenmechanik das H -Atom behandelt haben:

Hadron = System von Quarks, die durch ein Potential gebunden sind. Nun weiß man aber zum Beispiel von der Lamb-Shift, daß Elektron und Proton von einer Photonwolke und einer Elektron-Positron-Wolke umgeben sind (Physik IV); analog sind in Kernen die Nukleonen von einer Pion-Wolke umgeben. Von dieser Wolke sehen wir in der Atom- und Kernphysik im allgemeinen ab und schlagen ihre Wirkung in geeigneter Weise zum Potential bzw. zur Masse der Teilchen (in der Festkörperphysik wirkt sich die Kopplung des Elektrons an die Phononen des Gitters in ähnlicher Weise aus: man führt die effektive Masse des Elektrons ein).

Analog müßte man auch im Quarkmodell die Feldquanten berücksichtigen, die die Quarks aneinander binden. Wir haben sie bei den bisherigen Überlegungen dadurch berücksichtigt, daß wir ein effektives Potential zwischen den Quarks ansetzen und ihnen eine effektive Masse geben. Man spricht vom **Konstituenten-Quark-Modell** und von der **Konstituentenmasse**, die hier – wenn nicht anders explizit angegeben – benutzt werden.

Es sieht so aus, als ob auf diese Weise das Gluonenfeld, das Wechselwirkungsfeld der starken Wechselwirkung, berücksichtigt wird, wenn man

$$| M \rangle = | q_1 \bar{q}_2 \rangle$$

und

$$| B \rangle = | q_1 q_2 q_3 \rangle$$

Systeme untersucht. Der Versuch, die gleiche Näherung für

$$| q \bar{q} q \bar{q} \rangle, \quad | q q q q \rangle$$

zu verwenden, scheint nicht zu funktionieren (?), d.h. die Gluon-Dynamik dieser Systeme scheint komplizierter zu sein. Es bleibt abzuwarten, ob numerische **nichtperturbative** Methoden, die zur Zeit für die Quark-Quark Wechselwirkung entwickelt werden, dieses unterschiedliche Verhalten erklären können. Der Nachweis dieser 4-Quark-Zustände ist bisher nicht gelungen.

5.5 Quarkmodell II – Gebundene Zustände schwerer Quarks

LITERATUR: [94, 95, 96, 97]

Während wir uns in Kap.5.4 im wesentlichen mit Folgerungen aus der zugrunde liegenden Symmetriegruppe ($SU(3)$ -Flavor) beschäftigten, wollen wir in diesem Paragraphen untersuchen, welche Kräfte die Quarks zusammenhalten und wie das Potential $V(\vec{r})$ aussieht.

5.5.1 Quarkonium-Spektroskopie

Bei diesen Systemen handelt es sich um Mesonen, die aus einem $q\bar{q}$ -Paar gleicher Masse bestehen ($J_z = \hbar$ Zustände).

$$\left(\begin{array}{l} |\rho\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\hat{u}\hat{u}\rangle - |\hat{d}\hat{d}\rangle) \\ |\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\hat{u}\hat{u}\rangle + |\hat{d}\hat{d}\rangle) \\ |\Phi\rangle = |\hat{s}\hat{s}\rangle \\ |\Psi\rangle = |\hat{c}\hat{c}\rangle \\ |\Upsilon\rangle = |\hat{b}\hat{b}\rangle \end{array} \right)$$

Eigenschaften der schweren Quarks:

	J^π	I	S	\tilde{C}	\tilde{B}	\tilde{T}	B	$\frac{Q}{ e }$	$m_q c^2$ [GeV]
s	$\frac{1}{2}^+$	0	-1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0.3
c	$\frac{1}{2}^+$	0	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1.5
b	$\frac{1}{2}^+$	0	0	0	-1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	4.5
t	$\frac{1}{2}^+$	0	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	174 ± 6

Das s -Quark liegt auf der Grenze zwischen leichten und schweren Quarks, es wurde daher in Kap.5.4 behandelt. \tilde{T} ist die additive Quantenzahl „Truth“ oder „Top“, die dem 6. Quark zugeordnet ist. Das t -Quark wurde 1995 eindeutig nachgewiesen (siehe Kap.7.3). Es gilt die Gell-Mann-Nishijima-Formel:

$$\frac{Q}{|e|} = I_3 + \frac{Y}{2} \quad , \quad Y = B + S + \tilde{C} + \tilde{B} + \tilde{T} .$$

Warum ist die Untersuchung der Systeme schwerer Quarks besonders interessant?

- Wegen ihrer großen Masse haben diese Quarks kleine Geschwindigkeiten ($v \ll c$), man kann im Gegensatz zu den u, d -Systemen nicht-relativistisch rechnen.
- Man lernt sehr viel über die schwache Wechselwirkung (Kap.7.3).

In der nicht-relativistischen Quantenmechanik gilt das Virial-Theorem:

$$\beta_Q^2 = \frac{v_q^2}{c^2} = \frac{1}{2m_q c^2} \left\langle r \frac{dV}{dr} \right\rangle .$$

Beispiel: $m_b = 4.5 \text{ GeV}$ $V \approx -\frac{0.3 \text{ GeV} \cdot fm}{r}$ (siehe Kap.5.5.2)

$$\left\langle r \frac{dV}{dr} \right\rangle \approx \frac{0.3}{0.5} \text{ GeV} \approx 0.6 \text{ GeV} \quad \rightarrow \quad \beta_b = 0.26 .$$

Wir haben also wasserstoffähnliche Systeme vorliegen.
Vergleich mit der Quantenmechanik des Atoms:

	Atom	$Q\bar{Q}$
Wellengleichung	Schrödinger-Gleichung	Schrödinger-Gleichung
Potential	$V(r) = -e^2/r$	$V(r) = ?$ gesucht

Um $V(\vec{r})$ aufzufinden, macht man Ansätze für $V(\vec{r})$ und vergleicht die Vorhersagen mit Meßwerten (Energien, Übergangswahrscheinlichkeiten, ...).

Wir wollen jetzt einige Eigenschaften der Quarkonium-Zustände zusammenstellen:

Zahl der gebundenen Zustände

Nach dem Feynman-Hellmann-Theorem folgt, daß Zustände um so stärker gebunden sind, je schwerer die Bausteine sind (siehe auch e^- , μ^- in Kap.3.2):

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} \rangle ,$$

wenn λ ein Parameter (z. B. die Masse im Hamiltonoperator) ist. Aus:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_q} \nabla^2 + V(r)$$

folgt dann

$$\frac{\partial E}{\partial m_q} = -\frac{1}{m_q} (E - \langle V \rangle) < 0 .$$

Die Zahl der gebundenen Zustände sollte mit wachsendem m_q zunehmen.

Beispiele:

$s\bar{s}$ -System: **kein** gebundener Zustand ($\Phi \rightarrow K^+K^-$ erlaubt), $(m_\Phi - m_{K+K-})c^2 = 33$ MeV

$c\bar{c}$ -System: **zwei** gebundene $c\bar{c}^3S_1$ -Zustände

$b\bar{b}$ -System: **drei** gebundene $b\bar{b}^3S_1$ -Zustände

Das t -Quark zerfällt wegen seiner hohen Masse (Kap.7.3) in so kurzer Zeit, daß sich kein gebundener Zustand ausbilden kann.

5.5.2 Beobachtung gebundener Zustände

Ziel dieser Experimente ist die Beantwortung der Frage, wie das Kraftgesetz zwischen Quarks lautet. Die einfachste Methode, um gebundene $J^\pi = 1^-$ -Zustände zu erzeugen, ist die e^+e^- -Annihilation bei genügend hohen Energien:

$$e^+e^- \rightarrow c\bar{c}, \quad b\bar{b}$$

Meßgröße:

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

als Funktion der Schwerpunktsenergie.

$$\sqrt{s} = \sqrt{(p_+ + p_-)^2} = \sqrt{(4E_{sp}^2)}$$

für e^+e^- -Speicherringe.

Man beobachtet z.B. im $|b\bar{b}\rangle$ -System 4 Zustände mit $J^\pi = 1^-$, $l = 0$ (Abb.5.16). Das Niveauschema für das $b\bar{b}$ -System ist in Abb.5.20 gezeigt.

- Der Abstand der Niveaus mit unterschiedlichem n nimmt mit der Hauptquantenzahl ab \rightarrow kein harmonischer Oszillator.
- Der Abstand nimmt wesentlich schwächer ab als für das H -Atom \rightarrow kein Potential $V(r) \sim \frac{1}{r}$.

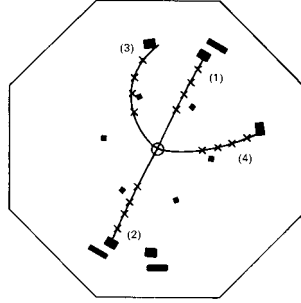


Abbildung 5.15: Zerfall des $\Psi(2S) \rightarrow \pi^+\pi^- + \Psi(1S)$, $\Psi(1S) \rightarrow \mu^+\mu^-$. Die geladenen Teilchen werden in Proportionalkammern nachgewiesen (Schnitt senkrecht zum Magnetfeld des Detektors).

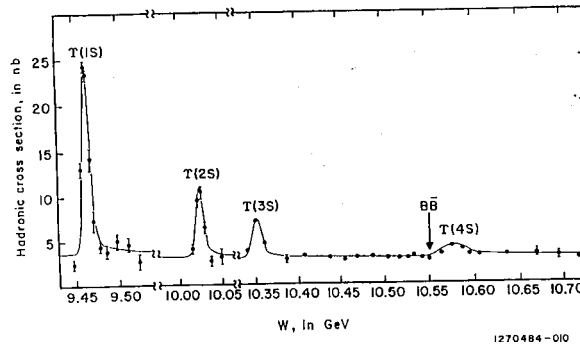


Abbildung 5.16: Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung von $q\bar{q}$ -Paaren in e^+e^- -Reaktionen im Bereich der Υ -Resonanzen

Weitere Informationen erhält man, wenn man die P -Zustände ($l = 1$) in ihrer Lage festlegt. Diese versuchen wir mit Hilfe der beiden wichtigsten Potentiale (harmonischer Oszillator, Coulombpotential) qualitativ zu deuten.

Bezeichnung:

- $S, P, D \iff l = 0, 1, 2$
- $n = n_r + n_l + 1 = (\text{Anzahl der Knoten in } 0 \leq r \leq \infty) + l$.

Nur beim H -Atom ist diese Quantenzahl direkt mit der Energie verknüpft. Man kann zeigen, daß die Anzahl der Knoten invariant gegenüber dem Exponenten α beim Ansatz $V(r) \sim r^\alpha$ ist.

Daher erwarten wir, daß, falls das Potential die Form $V(r) \sim r^\alpha$ mit $-1 \leq \alpha \leq 2$ hat, das Potential durch eine Interpolation zwischen Coulomb- und Oszillatorpotential gewonnen werden kann (siehe Abb.5.17, diese Annahme kann mit Hilfe der WKB-Methode gerechtfertigt werden):

Der Vergleich der Daten (Lage der Niveaus, Zerfallswahrscheinlichkeiten, Übergangswahrscheinlichkeiten) mit möglichen Ansätzen für das Potential ergibt eine gute Reproduktion für:

$$V(r) = -\frac{\alpha_s}{r} + a \cdot r .$$

Dieser Ansatz kann heute durch Lösungen der QCD (Kap.7.2) auf dem Gitter gerechtfertigt werden. Die Daten werden dabei an einem e^+e^- -Speicherring gewonnen, bei dem die Elektronen und

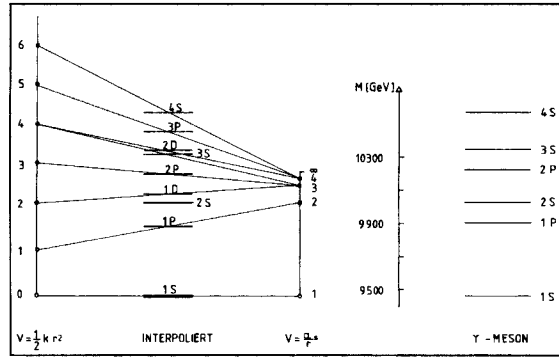


Abbildung 5.17: Interpolation zwischen Coulomb- und Oszillatorpotential

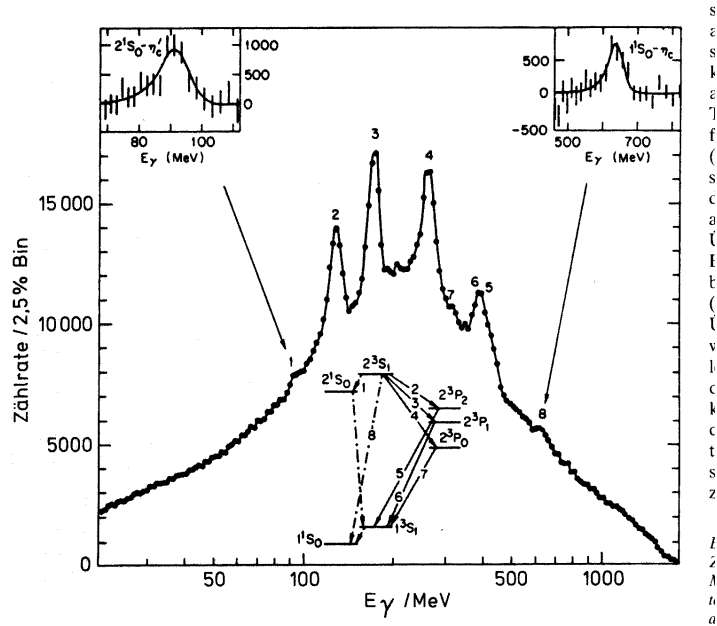


Abbildung 5.18: Mit einem $NaJ(Tl)$ -Detektor gemessenes γ -Spektrum für den Fall, daß der $\Psi(2^3S_1)$ -Zustand in einer e^+e^- -Reaktion erzeugt wurde. Die Zuordnung der Gammalinien zu den Übergängen kann dem Niveauschema entnommen werden

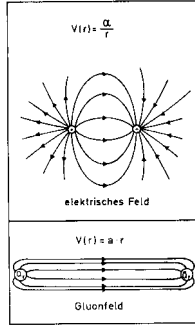


Abbildung 5.19: Schematische Darstellung der Farbfelder in der Umgebung eines Quarks

die Positronen mit vorgegebener Energie aufeinandertreffen; z. B. wählt man $E_{sp} = m(\Psi(2S))c^2$, um die Resultate in Abb.5.18 zu erhalten. Die emittierten Photonen werden mit $NaJ(Tl)$ -Kristallen nachgewiesen – die geladenen Teilchen in Driftkammern (siehe auch Kap.1.3).

Qualitative Interpretation des abgeleiteten Potentials (Abb.5.19) :

Bei kleinen Abständen verhalten sich die Feldquanten der starken Wechselwirkung wie Photonen, d. h. $V \sim -\frac{\alpha_s}{r}$. Bei großen Abständen wirkt sich aus, daß die Feldquanten der starken Wechselwirkung (Gluonen) Farbladung tragen (siehe Kap.7.2) – sie ziehen sich also an $\rightarrow \vec{F} = \vec{F}_0 = \text{const} \rightarrow V \sim r$. Die Daten werden durch diesen phänomenologischen Ansatz beschrieben. In Kap.7.2 werden wir eine vertiefte Interpretation besprechen (siehe auch Kap.6.1.3).

Aufspaltung der P-Zustände

Man beobachtet drei benachbarte P -Zustände (Feinstrukturaufspaltung) (siehe Abb.5.20).

Man bestimmt J aus $\gamma\gamma$ -Winkelkorrelationen bzw. aus den relativen Intensitäten der Übergänge $2\ ^3S_1 \rightarrow 1\ ^3P_J$ ($J = 0, 1, 2$) (siehe Übungsaufgabe).

Nach Abb.5.20 ist die $\vec{L}\vec{S}$ -Kopplung so zu wählen, daß der Zustand mit dem kleinsten J am stärksten gebunden ist (wie in der Atomphysik, aber entgegengesetzt wie in der Kernphysik) (siehe Kap.3.3).

Spin-Spin-Wechselwirkung

Vergleicht man Zustände mit gleichem Bahndrehimpuls aber unterschiedlichem Gesamtdrehimpuls J , dann erhält man Informationen über die Spin-Spin-Wechselwirkung. Da für das Ψ -System

$$E(n, \ ^3S_1) - E(n, \ ^1S_0) > 0$$

gilt, existiert ein Potential

$$V(r) = b \delta(\vec{r}) \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 .$$

Wie in der Atomphysik ist das Potential extrem kurzreichweitig (Dipol-Dipol-Wechselwirkung), es kann durch eine Delta-Funktion approximiert werden. Messungen der Hyperfeinstrukturaufspaltung liefern daher Informationen über die Wellenfunktion am Ursprung

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Psi(r) = \Psi(0) \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi/3 R_{q\bar{q}}^3}} .$$

Die detaillierte Beschreibung gelingt wie in der Atomphysik mit Hilfe des Breit-Fermi-Hamiltonoperators, den man durch Grenzübergang aus der Dirac-Gleichung ableiten kann.

Hinweis :

Das Ergebnis ist kompatibel mit den Beobachtungen in Kap.5.3, daß $m(p) < m(\Delta^+)$ gilt. Der $1\ ^1P_1(c\bar{c})$ -Zustand wurde in der Reaktion $p\bar{p} \rightarrow 1\ ^1P_1$ erstmals 1992 beobachtet (siehe [102]).

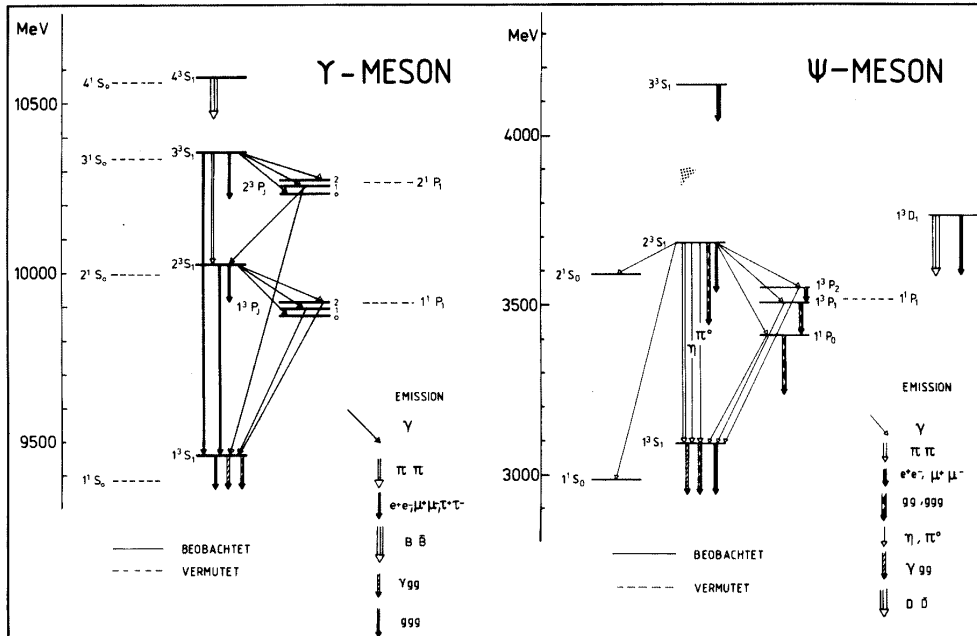


Abbildung 5.20: Niveauschema des $b\bar{b}$ - und des $c\bar{c}$ -Systems und der Übergänge, abgeleitet aus Messungen

5.5.3 Bestimmung der Quantenzahlen der Zustände

Anhand exemplarischer Beispiele sollen in diesem Abschnitt die Methoden diskutiert werden, mit deren Hilfe man die Quantenzahlen $J^{\pi C}, I$ ermitteln kann. Da für das Ψ -Meson besonders viel Information vorliegt, wollen wir dieses als exemplarisches Beispiel wählen. Wie sinnvoll die Benennung des Ψ -Mesons war, erkennt man übrigens aus Abb.5.15.

Man beachtet die in Abb.5.20 gezeigten Übergänge.

Wir wollen uns dabei auf die 3S_1 - und 3P_J -Zustände konzentrieren.

$$\Psi(1S), \quad J^{\pi C} = 1^{--}.$$

Dieser Zustand hat also die gleichen Quantenzahlen wie das Photon, daher kann er direkt an dieses koppeln. Zwei Feynmangraphen tragen zum Prozeß bei (siehe Abb.5.21)

$$A_1 = A(\gamma \rightarrow \Psi \rightarrow \mu^+ \mu^-) \sim \frac{\Gamma/2}{E - E_R - i\Gamma/2}.$$

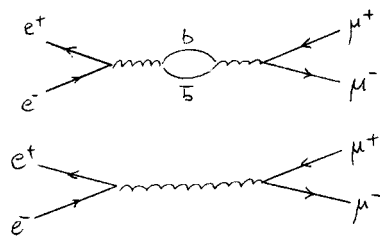


Abbildung 5.21: 2 Feynmangraphen für die Reaktion $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Das Analogon wäre eine erzwungene Schwingung. Im 2. Fall koppelt das μ -Paar direkt an das Photon

$$A_2 = A(\gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-) \sim A_{QED} \quad (\text{die Amplitude ist reell})$$

$$\sigma \sim |A_1 + A_2|^2 .$$

Man erwartet Interferenz, wenn der Zwischenzustand $J^\pi = 1^-$ besitzt

$$\sigma \sim |A_1|^2 + |A_2|^2 + \frac{2A_{QED} \Gamma/2 (E - E_R)}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4} .$$

Der letzte Term ist < 0 (> 0) für $E < E_R$ ($E > E_R$). Die Vorhersage stimmt mit dem Experiment (Abb.5.22) überein. Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß Strahlungskorrekturen die Form des Spektrums ebenfalls beeinflussen.

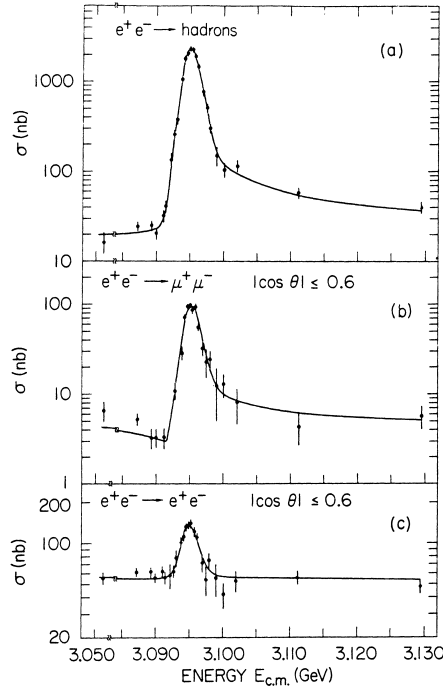


Abbildung 5.22: Ψ/J -Resonanz bei 3.1 GeV durch e^+e^- -Vernichtungsreaktion. Die Reduktion des Wirkungsquerschnitts unterhalb des Resonanzmaximums ist eine Folge der Interferenz der beiden Amplituden (siehe Abb.5.21)

Als nächstes ermitteln wir den Isospin der erzeugten Resonanz. Dazu untersucht man die Zerfälle:

$$I = 0 \quad \Psi \rightarrow \Lambda \bar{\Lambda} \quad \text{beobachtet und} \quad I(\Lambda) = 0$$

$$\eta_c \quad \Psi \text{ koppelt an Photon und} \quad \eta_c(\gamma) = -1 .$$

Das Ψ hat zusammengefaßt damit die Quantenzahlen: $J^{\pi C} = 1^{--}$, $I(\text{sospin}) = 0$.

3P_J -Zustände – man beobachtet:

$$^3P(3.55) \rightarrow \pi^0 \pi^0, K \bar{K}$$

$$^3P(3.51) \rightarrow K \bar{K} \pi, \rightarrow \gamma \gamma$$

$$^3P(3.43) \rightarrow \pi^0 \pi^0, K \bar{K}$$

$$Br(\Psi(2S) \rightarrow \gamma \ ^3P_J) \approx 7.8\% \dots 9.3\% \quad (\text{häufig, da der Prozeß mit der starken Wechselwirkung konkurriert}).$$

Aus diesen Beobachtungen folgt:

- $\Psi(2S) \rightarrow \gamma \ ^3P_J \Rightarrow \eta_c(\ ^3P_J) = 1$ (E1-Übergang)
- $\ ^3P(3.55, 3.41) \rightarrow \pi^0\pi^0$ $I = 0, 2$ (Übungsaufgabe; siehe auch 2. Beispiel in Kap.5.3)
- $\ ^3P(3.55, 3.41) \rightarrow K\bar{K}$ $I = 0, 1$ ($I(K) = 1/2$, Vektormodell)
- $\Rightarrow I(\text{sospin}) = 0$ für den 3.55, 3.41 Zustand.

Aus $I = 0$ folgt für $\pi^0\pi^0$ -System:

$$\Psi_{iso}(1, 2) = +\Psi_{iso}(2, 1) \quad (\text{Übungsaufgabe})$$

Die Bose-Statistik fordert für die Gesamtwellenfunktion:

$$\Psi(1, 2) = +\Psi(2, 1) \rightarrow \Psi_{ort}(1, 2) = +\Psi_{ort}(2, 1) \rightarrow l = 0, 2, 4, \dots$$

$$J^{\pi C} = 0^{++}, 2^{++}, 4^{++}, \dots \text{ erlaubt für die } \ ^3P_J(3.41, 3.55)\text{-Zustände.}$$

Hinweis: der Beweis zeigt, daß das Resultat immer gilt, wenn zwei identische pseudoskalare Teilchen (*hier*: $\pi^0\pi^0$) im Endzustand auftreten.

Aus $\ ^3P(3.51) \rightarrow \pi^0 K\bar{K}$ folgt:

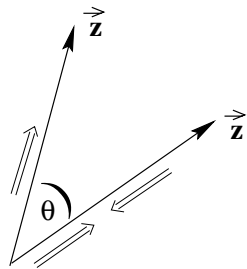
- $J^\pi = 0^+$ ist nicht möglich, denn die Parität ist bei starken Zerfällen erhalten und $\eta_p(\ ^3P) = (-1)^0 \eta_p(K)\eta_p(\bar{K})\eta_p(\pi) = -1$ – Widerspruch!
- $\ ^3P(3.51)$ ist ein sehr **schmaler** Zustand ($\Gamma(3.51) < 1.3$ MeV im Vergleich zu $\Gamma(3.41) = 13.5$ MeV); daher müßten die seltenen $\ ^3P(3.51) \rightarrow 2\gamma$ Zerfälle beobachtbar sein, wenn der Zustand $J^{\pi C} = 0^{++}, 2^{++}$ besitzt.

Beobachtung: Diese Zerfälle treten nicht auf $\rightarrow J^\pi = 0^{++}, 2^{++}$ ausgeschlossen.

- $\Rightarrow J^\pi = 1^{++}$ ist kompatibel zu allen Beobachtungen (insbesondere auch den gemessenen Winkelkorrelationen).

5.5.4 Rotationsmatrizen

Wir werden im folgenden häufiger die Projektionen eines Zustands auf ein Koordinatensystem mit gedrehter Quantisierungsachse betrachten.



Die Frage ist nun, wie groß zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit ist, ein Photon in z' -Richtung zu beobachten, die mit der z -Achse den Winkel θ einschließt, wenn das Photon sich im Zustand $|j, m\rangle$ bezüglich der z -Achse befindet. Dazu wenden wir eine Drehung um die y -Achse an:

$$e^{-i\theta \hat{J}_y} |j, m\rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle \langle j, m' | e^{-i\theta \hat{J}_y} |j, m\rangle = \sum_{m'} d_{m'm}^j(\theta) |j, m'\rangle .$$

Die Wahrscheinlichkeit $w(\theta)$, daß das Photon in z' -Richtung zu beobachten ist:

$$w(\theta) = |d_{m'm}^j|^2 ,$$

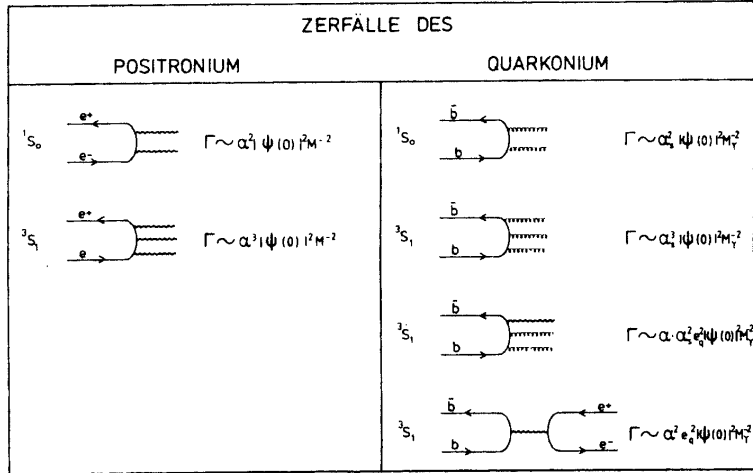


Abbildung 5.23: Zerfälle unterschiedlicher Zustände des Positronium und des Quarkonium in verschiedene Zerfallskanäle

wobei $d_{m'm}^j$ die Drehmatrizen sind. Sie sind tabelliert in Büchern zu finden (siehe auch Abb.5.9). Zum Beispiel:

$$d_{11}^1 = \frac{1 + \cos \theta}{2}, \quad d_{-11}^1(\theta) = \frac{1 - \cos \theta}{2}.$$

Wir wollen dies nutzen, um die Winkelverteilung für den Zerfall $^3S_1 \rightarrow ^3P_0 + \gamma$ zu berechnen. Das Photon hat bezüglich der e^+e^- -Achse (z -Achse) die Zustände $|1, 1\rangle$ und $|1, -1\rangle$, nur diese werden bei der e^+e^- -Reaktion erzeugt (Helizitätserhaltung). Jeder dieser Zustände tritt mit der Wahrscheinlichkeit 50 % auf. Die Wahrscheinlichkeit, das Photon unter dem Winkel θ zu beobachten, ist dann (in bezug auf die z' -Achse können Photonen im $|1, 1\rangle$ - und im $|1, -1\rangle$ -Zustand auftreten)

$$w(\cos \theta) = \frac{1}{2} |d_{11}^1(\theta)|^2 + \frac{1}{2} |d_{-11}^1(\theta)|^2 \sim 1 + \cos^2 \theta$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\gamma \sim 1 + \cos^2 \theta$$

in Übereinstimmung mit dem Experiment. Daraus folgt, daß der 3.41 GeV-Zustand in der Tat den Spin 0 hat. In Kap.7.3.1 wird eine weitere Methode zur Bestimmung der Drehimpulsquantenzahl von Teilchen diskutiert.

5.5.5 Hadronische Zerfälle

Die Überlegungen in Kap.5.5.3 werden in Analogie zur Kern- und Atomspektroskopie durchgeführt. Wesentliche zusätzliche Information über die Art der Bausteine und ihre Wechselwirkung folgt für hadronische Systeme aus der Analyse der hadronischen Endzustände. Wir orientieren uns dabei am Analogfall Atomphysik speziell Positronium (siehe Abb.5.23). Neben den möglichen Zerfällen sind die Zerfallsbreiten (mittlere Lebensdauern) angegeben:

$$e^+e^- \longrightarrow q\bar{q}.$$

Die Experimente erlauben

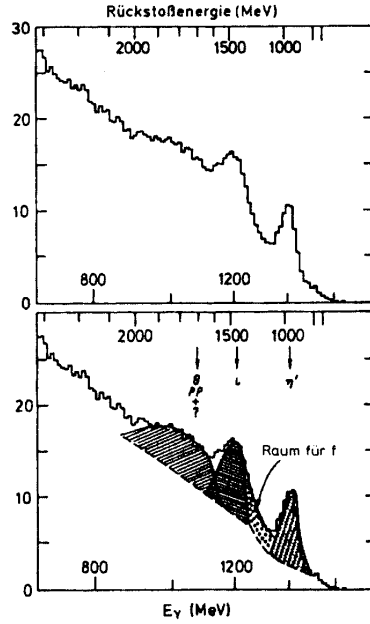


Abbildung 5.24: Gemessenes γ -Spektrum aus dem Zerfall $\Psi(1S) \rightarrow \gamma\gamma\gamma$

- die Messung der Kopplungskonstanten der starken Wechselwirkung $\alpha_s(M_Y) = 0.168 \pm 0.012$
- den direkten Nachweis der Feldquanten der starken Wechselwirkung (DORIS 1978)
- die Messung des Spins der Feldquanten ($J = \hbar$ wie beim Photon, war theoretisch vorhergesagt worden).
- besonders interessant sind die $\gamma\gamma\gamma$ -Endzustände (siehe auch Abb.5.24):

$$\frac{\Gamma(\Upsilon \rightarrow \gamma 2g)}{\Gamma(\Upsilon \rightarrow 3g)} \rightarrow \alpha_s(0.2 M_Y) = 0.225 \pm 0.011$$

siehe [101] und Abb.5.23.

- Die Erzeugung und der Nachweis von glueballs (gebundene Zustände von Feldquanten) wäre der direkte Nachweis der Selbstwechselwirkung der Feldquanten der starken Wechselwirkung. Man würde sie für große E_γ erwarten, da in diesem Fall aus kinematischen Gründen die Gluonen in benachbarte Bereiche emittiert werden und „lange Zeit“ miteinander wechselwirken können. Bislang ist dies experimentell nicht überzeugend gelungen (siehe Abb.5.24).

5.5.6 Zustände mit offenem Charm und Beauty

Folgende Zustände sind nach dem Quarkmodell möglich, sie wurden auch beobachtet.

Meson	$J^\pi = 0^- : mc^2 [MeV]$	$J^\pi = 1^- : mc^2 [MeV]$
$I = \frac{1}{2} \quad u\bar{c}\rangle$	D_u^0 1864.5	D^{0*} 2006.7
$I = \frac{1}{2} \quad d\bar{c}\rangle$	D_d^- 1869.3	D^{-*} 2010
$I = 0 \quad s\bar{c}\rangle$	D_s^- 1968.5	D_s^{-*} 2110
$I = \frac{1}{2} \quad u\bar{b}\rangle$	B^+ 5279.8	B^{+*} 5324.8
$I = \frac{1}{2} \quad d\bar{b}\rangle$	B_d^0 5279.2	B_d^{0*} 5324.8
$I = \frac{1}{2} \quad s\bar{b}\rangle$	B_s^0 5369.3	B_s^{0*} ?

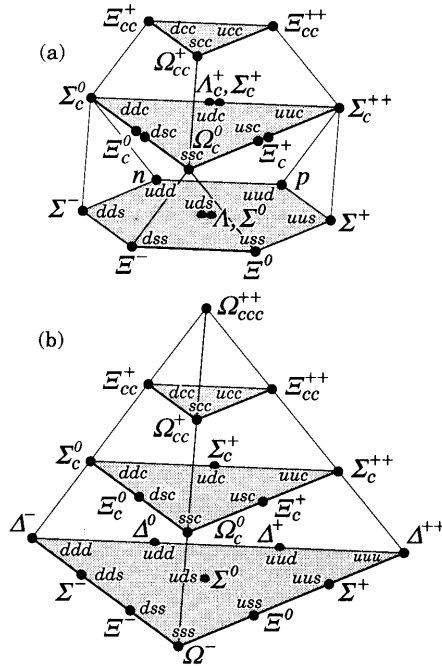


Abbildung 5.25: Multiplett-Polyeder für Baryon-Systeme, die aus u^-, d^-, s^-, c -Quarks zusammengesetzt sind. (a) Zustände mit $J^\pi = 1/2^+$, (b) Zustände mit $J^\pi = 3/2^+$

Nach Kap.5.4 können die $|q\bar{q}\rangle$ -Zustände Spin und Parität $J^\pi = 0^-$ (Spin der Quarks entgegengesetzt) und $J^\pi = 1^-$ (Spin der Quarks parallel) im Grundzustand (Bahndrehimpuls $l=0$) annehmen. Diese Zustände können wieder auf den Ecken eines einfachen geometrischen Körpers angeordnet werden (Abb.5.25). Auch die Eigenschaften dieser Mesonen werden durch das Potential $V(r) = -\frac{\alpha_s}{r} + ar$ beschrieben. Neben den spektroskopischen Daten liefern diese Teilchen wichtige Informationen über die schwache Wechselwirkung der Quarks (siehe Kap.7.3). Man findet für die Lebensdauer der Quarks $\tau(c) \approx 5 \cdot 10^{-13} s$ und $\tau(b) \approx 10^{-12} s$. Neben den Mesonen gibt es Baryonen ($Q =$ schweres Quark)

$$|Q, q_1 q_2 \rangle, |Q_1 Q_2 q \rangle \text{ und } |Q_1 Q_2 Q_3 \rangle$$

$$|\Omega \rangle = |sss \rangle \rightarrow \Omega_c^0 = |ssc \rangle \rightarrow |\Omega_{cc}^+ \rangle = |ccs \rangle \rightarrow \Omega_{ccc}^{++} = |ccc \rangle .$$

Analog zum Oktett/Dekuplett gibt es einen Polyeder der Baryon-Zustände. Eine Reihe dieser Baryonen, theoretisch vorhergesagt, wurden bereits beobachtet (siehe Particle-Data-Booklet 1998, S.162-164 und Abb.5.25).