

---

# Iteration symmetrischer Polynome

---

Martin Hülsmann

# Iteration symmetrischer Polynome

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften

Der Fakultät für Mathematik  
der Technischen Universität Dortmund  
vorgelegt von

Martin Hülsmann

Juli 2008

Promotionsausschuss:

Vorsitzender:	Prof. Dr. M. Möller
Erster Gutachter:	Prof. Dr. N. Steinmetz
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. R. Brück
zusätzlicher Prüfer:	Prof. Dr. M. Voit
Beisitzer:	Dr. M. Scheer

Tag der mündlichen Prüfung: 19. November 2008

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Einführung in die Iteration von Polynomen</b>	<b>4</b>
1.1 Eigentliche Abbildungen . . . . .	4
1.2 Iteration von Polynomen . . . . .	5
1.3 External Rays . . . . .	9
1.4 Quasikonforme Abbildungen und quasikonforme Chirurgie	11
1.5 Polynomähnliche Abbildungen . . . . .	13
<b>2 Die Dynamische Ebene</b>	<b>15</b>
2.1 Erste Eigenschaften . . . . .	16
2.2 Konjugation . . . . .	21
2.3 Polynomähnliche Abbildungen . . . . .	24
<b>3 Die Parameterebene</b>	<b>33</b>
3.1 Einleitung . . . . .	33
3.2 Topologie der Menge $\mathcal{C}_d$ . . . . .	36
3.3 Die Parametrisierung der hyperbolischen Komponenten .	43
3.4 Die Greensche Funktion von $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d$ . . . . .	54
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>59</b>

# Einleitung

Iteration von Polynomen ist ein Spezialfall der Iteration rationaler Funktionen. Diese wurden erstmals um 1920 systematisch von Pierre Fatou (in [FAT]) und Gaston Julia (in [JUL]) untersucht. Sie haben unabhängig voneinander die Riemansche Zahlenkugel in zwei Mengen zerlegt, welche heute nach ihnen benannt sind. Die Fatoumenge einer rationalen Funktion  $f$  besteht aus all den Punkten, in denen die Menge  $\{f^n\}$  in einer Umgebung eine normale Familie im Sinne Montels bildet. Die Juliamenge ist ihr Komplement. Das lokale dynamische Verhalten von  $f$  ist in der Fatoumenge stabil, das heißt unanfällig gegen kleine Störungen. In der Juliamenge ist es nicht stabil. Die von Fatou und Cremer stammende vollständige Klassifizierung der stabilen Gebiete schloß Sullivan (in [SULL]) ab, indem er bewies, dass keine wandernden Gebiete existieren. Etwa zur gleichen Zeit untersuchten Douady und Hubbard (siehe zum Beispiel [DH1]) die quadratische Familie, das heißt Polynome der Form  $P(z) = z^2 + c$ . Viele ihrer Ideen und Methoden dienten als Motivation und Werkzeuge für diese Arbeit.

Wir untersuchen die Iteration symmetrischer Polynome  $P$  beliebigen Grades größer gleich 2. Unter einem symmetrischen Polynom verstehen wir ein Polynom, dessen Julia- und Fatoumenge invariant unter Drehungen eines fest vorgegebenen Winkels (genauer: invariant unter Multiplikation mit einer Einheitswurzel) ist. Für festen Winkel ist es möglich, solche Polynome als eine sogenannte Ein-Parameter-Familie, ähnlich der quadratischen Familie  $\{z^2 + c\}_{c \in \mathbb{C}}$ , aufzufassen. Ziel dieser Arbeit ist es sowohl die Dynamik dieser speziellen Polynome für einen festen Parameter, als auch das Verhalten bei Änderung des Parameters, möglichst gut zu verstehen. Dies begründet die Organisation dieser Arbeit.

Im ersten Kapitel werden wir eine (kurze) Einführung in die Theorie der Iteration von Polynomen geben. Dabei beschränken wir uns ausschließlich auf Ergebnisse und Methoden, wie sie in dieser Arbeit benötigt werden. Sie stellt einen Ausschnitt der Theorie der Iteration rationaler Funktion dar.

Im zweiten Kapitel untersuchen wir die dynamischen Eigenschaften eines symmetrischen Polynoms  $P$ . Wir nutzen die Symmetrie, um die Dynamik genauer zu beschreiben. Das Hauptergebnis des zweiten Kapitel ist die Beschreibung der Juliamenge der Polynome (beliebig hohen Grades). Wir zeigen, dass unter gewissen Voraussetzungen die Juliamenge von  $P$  aus Juliamengen quadratischer Polynome zusammengesetzt ist. Dazu konstruieren wir eine Jordankurve  $\Gamma$ , die einen geeigneten Teil der Juliamenge umfasst. Eine Kombination aus einer Drehung und einer Iterierten von  $P$  besitzt ein Urbild  $\gamma$  von  $\Gamma$ , welches kompakt im Innengebiet von  $\Gamma$  enthalten ist. Der Abbildungsgrad dieser zusammengesetzten Abbildung eingeschränkt auf das Innengebiet von  $\gamma$  ist 2, so dass diese Funktion dort eine polynomähnliche Abbildung vom Grad 2 ist. Insbesondere ist die aufgefüllte Juliamenge hybrid äquivalent (das heißt, unter einer quasikonformen Abbildung konjugiert) zu der aufgefüllten Juliamenge eines quadratischen Polynoms.

Im dritten Kapitel untersuchen wir den sogenannten Connectedness Locus  $\mathcal{C}_d$ , der als Analogon zur Mandelbrot-Menge gesehen werden kann. Das sind all die Parameter  $c$ , für die die Juliamenge von  $P$  topologisch zusammenhängend ist. Durch die Zweiteilung in zusammenhängende und nicht zusammenhängende Parameter entsteht eine äußerst interessante Menge, die genauer untersucht wird. Wir zeigen, dass  $\mathcal{C}_d$  kompakt und zusammenhängend ist. Zweiteres ist eines der Hauptergebnisse dieses Kapitels. Dazu konstruieren wir eine eigentliche Abbildung des Außengebietes von  $\mathbb{C}$  auf das Außengebiet des abgeschlossenen Einheitskreises. Wir bestimmen den Abbildungsgrad (im Fall der Mandelbrotmenge ist diese Abbildung konform) und erhalten mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen den Zusammenhang von  $\mathcal{C}_d$ .

Im folgenden Abschnitt untersuchen wir die hyperbolischen Komponenten von  $\mathcal{C}_d$ . Das sind Zusammenhangskomponenten des Inneren von  $\mathcal{C}_d$ , in welchen die Dynamik von  $P$  sich bei Änderungen des Parameters innerhalb dieser Komponenten stabil verhält. Wir parametrisieren diese durch die sogenannte Multiplikatorabbildung. Im letzten Abschnitt von

Kapitel 3 konstruieren wir die Greensche Funktion des Außengebietes von  $C_d$  durch einen approximativen Prozeß.

# Kapitel 1

## Einführung in die Iteration von Polynomen

In diesem Kapitel werden wir eine Übersicht über die Theorie der Iteration von Polynomen geben, so weit wir sie in dieser Arbeit verwenden. Die Darstellung ist kurz und bei weitem nicht vollständig. Iteration von Polynomen ist ein Spezialfall der Iteration von rationalen Funktionen. Wir verzichten auf Ergebnisse, die ausschließlich rationale Funktionen betreffen, und werden uns auf Ergebnisse konzentrieren, die wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit benötigen werden. Leser, die an ausführlicheren und weitergehenden Darstellungen über Iteration interessiert sind, werden auf die Bücher [STEIN], [BEA] und [CARL] verwiesen. Informationen über quasikonforme Abbildungen finden sich in [LEH]. Die Ergebnisse und Methoden der quasikonformen Chirurgie und der polynomähnlichen Abbildungen stammen aus den Arbeiten [SHI] und [DH3].

### 1.1 Eigentliche Abbildungen

Zwei Gebiete  $G, H$  werden durch die analytische Abbildung  $\varphi$  eigentlich aufeinander abgebildet, wenn jedes  $w \in H$  unter  $\varphi$  genau  $k \in \mathbb{N}$  Urbilder (mit Vielfachheit) hat. Die Zahl  $k$  wird auch (topologischer) Grad von  $\varphi$  genannt. Wir werden in diesem Fall die Notation

$$\varphi : G \xrightarrow{k:1} H$$



verwenden. Eine äquivalente Charakterisierung ist, dass der Rand von  $G$  auf den Rand von  $H$  abgebildet wird, in dem Sinne, dass zu jeder Folge  $(z_n) \subset G$  mit  $z_n \rightarrow z_0 \in \partial G$  für  $n \rightarrow \infty$  auch alle Häufungspunkte von  $\{\varphi(z_n) : n \in \mathbb{N}\}$  im Rand von  $H$  enthalten sind.

Für eigentliche Abbildungen gilt die *Formel von Riemann-Hurwitz*. Sie stellt einen Zusammenhang zwischen den Zusammenhangszahlen  $m, n$  von  $G, H$ , dem Abbildungsgrad  $k$  von  $\varphi$  und den  $r$  in  $G$  enthaltenen kritischen Punkten von  $\varphi$  dar. Sie lautet

$$(m - 2) = k(n - 2) + r.$$

## 1.2 Iteration von Polynomen

Es sei  $P : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  ein Polynom vom Grad  $d \geq 2$ . Unter der Iteriertenfolge  $P^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  verstehen wir die rekursiv definierte Folge

$$P^0 = \text{id} \text{ und } P^n = P^{n-1} \circ P.$$

Ein Punkt  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  heißt *normal* (im Sinne Montels), falls eine Umgebung  $U$  von  $z$  existiert, in der die Iteriertenfolge  $P^n$  eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge (möglicherweise gegen unendlich) besitzt. Mit dieser Eigenschaft können wir die Zahlenkugel  $\widehat{\mathbb{C}}$  in die *Juliamenge*  $\mathcal{J}$  und *Fatoumenge*  $\mathcal{F}$  aufteilen

$$\mathcal{F} := \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : z \text{ ist normal}\} \text{ und } \mathcal{J} := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}.$$

Die Fatoumenge ist stets offen und (speziell bei Polynomen) nie leer. Sie besteht aus einer, zwei oder unendlich vielen Zusammenhangskomponenten. Diese werden *stabile Gebiete* genannt. Ein stabiles Gebiet  $V$  ist einfach oder unendlichfach zusammenhängend und wird eigentlich auf ein stabiles Gebiet  $W = P(V)$  abgebildet.

Die Juliamenge ist ebenfalls nie leer, und sie stimmt mit der Menge ihrer Häufungspunkte überein. Somit ist sie eine *perfekte* Menge.

Die Julia- und Fatoumenge ist vorwärts und rückwärts invariant unter  $P$ , das heißt, es gilt

$$\mathcal{J} = P(\mathcal{J}) = P^{-1}(\mathcal{J}) \text{ und } \mathcal{F} = P(\mathcal{F}) = P^{-1}(\mathcal{F}).$$

Insbesondere können wir  $P$  durch  $P^n$  ersetzen, ohne die Fatou- oder Julia-enge zu ändern.

Ein *Fixgebiet*  $V$  einer iterierten  $P^k$  ist ein stabiles Gebiet, für welches  $P^k(V) = V$  gilt. Ist  $k$  minimal, so heißt  $V$  *periodisch* mit Zykellänge  $k$ . Dies bedeutet, dass es  $k$  disjunkte Gebiete  $V = V_0, \dots, V_{k-1}$  gibt, mit  $P(V_j) = V_{j+1}$ , wobei die Indizes modulo  $k$  gerechnet werden. Diese Gebiete werden eigentlich aufeinander abgebildet.

Seit dem *no wandering domain theorem* von Sullivan (in [SULL]) sind die stabilen Gebiete vollständig klassifiziert. Sullivan bewies, dass jedes stabile Gebiet nach endlich vielen Iterationen schließlich auf ein periodisches Gebiet abgebildet wird. Es gibt also keine *wandernden* Gebiete.

Mit jedem periodischen Zykel von Gebieten  $V_0, \dots, V_{l-1}$  ist auch ein Zykel  $\{z_0, \dots, z_{k-1}\}$  von Punkten assoziiert, die Fixpunkte von  $P^k$  sind. Es gilt  $P(z_j) = z_{j+1}$  (Indizes modulo  $k$ ). Der Multiplikator  $\lambda$  eines Zykel ist durch

$$\lambda := (P^k)'(z_0)$$

(unabhängig von der Wahl des Zykelpunktes) definiert. Dies bedeutet, dass man nicht zwischen einem Zykel von  $P$  und einem Fixpunkt von  $P^k$  zu unterscheiden braucht. Der Punkt  $z = \infty$  nimmt bei Polynomen eine Sonderrolle ein, da er stets Fixpunkt ist. Um den Multiplikator  $\lambda_\infty$  von  $\infty$  zu bestimmen, wird zunächst mit  $\frac{1}{z}$  konjugiert. Damit gilt

$$\lambda_\infty = \frac{d}{dz} \frac{1}{P(\frac{1}{z})} \Big|_{z=0} = 0.$$

Der Punkt  $\infty$  ist somit nicht nur Fixpunkt, sondern er ist auch kritischer Punkt von  $P$ . Ein Fixpunkt (oder Zykel) heißt

$$\left. \begin{array}{l} \textit{superattraktiv}, \\ \textit{attraktiv}, \\ \textit{neutral}, \\ \textit{abstoßend}, \end{array} \right\} \text{ falls } \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0. \\ 0 < |\lambda| < 1. \\ |\lambda| = 1. \\ |\lambda| > 1. \end{array} \right.$$

Der Punkt  $\infty$  ist also stets ein superattraktiver Fixpunkt eines Polynoms. Ist ein Fixpunkt neutral, so wird eine weitere Unterscheidung getroffen. Er heißt *Leau-Punkt*, falls  $\lambda$  eine Einheitswurzel ist. Er heißt

Siegel-Punkt, falls  $z_0 \in \mathcal{F}$  und er heißt Cremer-Punkt, falls  $z_0 \in \mathcal{J}$  und  $\lambda$  keine Einheitswurzel ist.

Es ist nun möglich alle stabilen Gebiete zu klassifizieren. Da keine wandernden Gebiete existieren, wird jedes stabile Gebiet  $V$  nach endlichen vielen Schritten in ein Gebietszykel  $\{V_0, V_1 = P(V_0), \dots, V_{k-1} = P^{k-1}(V)\}$  mit  $P^k(V_j) = V_j$  abgebildet. Es ist also ausreichend alle Fixgebiete (das heißt  $P(V) = V$ ) zu beschreiben (ersetze im Fall eines periodischen Gebietes  $P$  durch  $P^k$ ). Bei Polynomen wird zwischen vier Fixgebieten unterschieden. Es gibt drei verschiedene sogenannte *Fatougebiete* und ein *Rotationsgebiet*. Ein Fixgebiet  $V$  heißt

1. *Böttchergebiet*, falls es einen superattraktiven Fixpunkt enthält,
2. *Schrödergebiet*, falls es einen attraktiven Fixpunkt enthält,
3. *Leaugebiet*, falls ein Fixpunkt mit Multiplikator  $\lambda = 1$  im Rand von  $V$  enthalten ist und
4. *Siegelscheibe*, falls es einen neutralen Fixpunkt enthält.

Die obige (von Fatou und Cremer stammende) Klassifikation ist vollständig. Die ersten drei Gebiete heißen Fatougebiete. Das vierte heißt Rotationsgebiet.

An den kritischen Punkten eines Polynoms ist es möglich wesentliche dynamischen Eigenschaften abzulesen. So enthält ein Fatougebiet eines (super-) attraktiven Fixpunktes sowie ein Leaugebiet stets (mindestens) einen kritischen Punkt, während der Rand einer Siegelscheibe, für einen geeigneten kritischen Punkt  $\zeta$ , in der Menge  $\{P^n(\zeta) : n \in \mathbb{N}_0\}$  enthalten ist. Wenn wir sagen, dass ein Fixpunkt  $z_0$  (oder Zykel) einen kritischen Punkt  $\zeta$  *anzieht*, so heißt das, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(\zeta) = z_0$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{kn}(\zeta) = z_0$ ) gilt.

Sind alle kritischen Punkte von  $P$  in der Fatoumenge enthalten und werden von (super-)attraktiven Zykeln angezogen, so heißt  $P$  *hyperbolisch*. In diesem Fall ist die Juliamenge eine Kurve und hat Lebesguemaß 0.

Da bei jedem Polynom der Punkt  $z = \infty$  ein superattraktiver Fixpunkt ist, gibt es stets ein Böttchergebiet um  $z = \infty$ . Dieses Gebiet spielt eine

besondere Rolle. Es wird mit  $\mathcal{A}_\infty$  bezeichnet und auch das *Außengebiet* genannt. Es gilt

1.  $\mathcal{A}_\infty = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : P^n(z) \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty\}$ ,
2.  $\mathcal{J} = \partial\mathcal{A}_\infty$ ,
3. das Gebiet  $\mathcal{A}_\infty$  ist genau dann einfach zusammenhängend, falls kein (endlicher) kritischer Punkt von  $P$  in  $\mathcal{A}_\infty$  enthalten ist,
4. ist wenigstens ein (endlicher) kritischer Punkt in  $\mathcal{A}_\infty$  enthalten, so ist  $\mathcal{A}_\infty$  unendlichfach zusammenhängend,
5. sind alle kritischen Punkte in  $\mathcal{A}_\infty$  enthalten, so ist  $\mathcal{J}$  total unzusammenhängend (also eine Cantor-Menge) und
6. das Komplement von  $\mathcal{A}_\infty$  wird *aufgefüllte Julia-Menge* genannt und mit  $\mathcal{K}$  bezeichnet. Es gilt  $\mathcal{K} = \{z \in \mathbb{C} : (P^n(z)) \text{ ist beschränkt für } n \rightarrow \infty\}$ .

In  $\mathcal{A}_\infty$  kann die Greensche Funktion mit Pol in  $\infty$  erklärt werden. Das ist eine harmonische Funktion  $G$  in  $\mathcal{A}_\infty$ , für die  $G(z) \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow \partial\mathcal{A}_\infty$  und  $G(z) = \log |z| + O(1)$  bei  $\infty$  gilt. Sie kann auf  $\mathcal{K}$  als subhyperbolische Funktion durch 0 fortgesetzt werden.

Die Gleichung

$$\varphi \circ P = (\varphi)^d \tag{1.1}$$

heißt Böttcher-Funktionalgleichung. Sie besitzt in einer geeigneten Umgebung  $U$  von  $\infty$  eine konforme Lösung. Dies besagt, dass sich bei  $\infty$  das Polynom wie  $z^d$  verhält. Durch die Normierung  $\varphi(z) = z + O(1)$  bei  $\infty$  ist sie eindeutig bestimmt und kann durch (1.1) sukzessive in das Urbild  $U'$  von  $U$  unter  $P$  fortgesetzt werden, welches  $U$  enthält, solange kein endlicher kritischer Punkt von  $P$  in diesen Urbildern enthalten ist. Sie existiert in  $\mathcal{A}_\infty$ , falls alle endlichen kritischen Punkte in  $\mathcal{K}$  enthalten sind. In diesem Fall ist  $\mathcal{A}_\infty$  einfach zusammenhängend, und es gilt für die Greensche Funktion

$$G(z) = \log |\varphi(z)|.$$

Aus der Funktionalgleichung folgt für  $z \in \mathcal{A}_\infty$

$$G(P(z)) = dG(z).$$

Weiter bildet  $\varphi$  die Menge  $\mathcal{A}_\infty$  genau dann konform auf das Äußere des Kreises  $\overline{K_r(0)}$  mit Radius  $r = |a_d|^{\frac{1}{1-d}}$  ab, falls  $\mathcal{A}_\infty$  einfach zusammenhängend ist.

### 1.3 External Rays

Es sei  $K \subset \mathbb{C}$  eine kompakte und zusammenhängende Menge, deren Komplement einfach zusammenhängend ist. In diesem Fall existiert eine konforme Abbildung  $\varphi$  mit

$$\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \setminus K \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}.$$

Für ein  $t \in [0, 1)$  ist die Menge  $\{r \exp(2\pi it) : 1 < r < \infty\}$  ein radialer Strahl. Ein *external Ray* für die Menge  $K$  ist das Urbild dieser Menge unter  $\varphi$

$$R_t := \varphi^{-1}(\{r \exp(2\pi it) : 1 < r < \infty\}).$$

Der Begriff *external Ray* oder in gleicher Bedeutung *Strahl* wird, abhängig davon, welcher Ausdruck geeigneter für die Lesbarkeit des Textes erscheint, verwendet werden.

Ein Strahl *landet* in  $z \in \partial K$ , falls der Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow 1} \varphi^{-1}(r \exp 2\pi it)$$

existiert.

Ab jetzt seien die Polynome  $P$  durch  $a_d = 1$  normiert mit einfach zusammenhängendem Außengebiet  $\mathcal{A}(\infty)$ . Die Riemann-Abbildung  $\varphi : \mathcal{A}(\infty) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  sei bei Unendlich durch  $\varphi(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \dots$  normiert. Die aufgefüllte Juliamenge  $\mathcal{K}$  ist dann kompakt und zusammenhängend. Ist zusätzlich  $\mathcal{J}$  eine Kurve, so landet nach dem Satz von Carathéodory jeder Strahl. Ein Kriterium unter obigen Voraussetzungen ( $\mathcal{J}$  zusammenhängend), wann die Juliamenge eine Kurve ist, findet sich in [MAT]:

*Die Juliamenge ist sicher dann eine Kurve, wenn*

$$\{P^n(\zeta) : \zeta \in \mathcal{J} \text{ und } P'(\zeta) = 0 \text{ mit } n \in \mathbb{N}\}$$

*endlich ist.*

Dies ist sicher dann der Fall, wenn jeder endliche kritische Punkt von einem (super-) attraktivem endlichen Zykel angezogen wird, aber ebenso, wenn alle in der Juliamenge enthaltenen kritischen Punkte präperiodisch sind.

Mit obiger Normierung stimmt  $\varphi$  mit der Böttcherabbildung überein, das heißt, das in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}$  die Konjugation  $\varphi \circ P = (\varphi)^d$  gilt. Für die external Rays folgt aus dieser Konjugation, dass  $P$  einen external Ray wieder auf einen external Ray abbildet. Es gilt  $P(R_t) = R_{dt}$ , wobei der Index modulo 1 gerechnet wird. Ein external Ray ist periodisch, falls  $P^n(R_t) = R_t$  gilt, also genau dann, wenn  $t = d^n t \pmod{1}$  ist. Das Abbildungsverhalten der Strahlen durch das Polynom wird durch die Abbildung

$$\sigma : [0, 1) \rightarrow [0, 1) \text{ mit } \sigma(t) = dt \pmod{1}$$

beschrieben.

Douady und Hubbard (in [DH2a] und [DH2b]) (siehe [MIL] für eine Zusammenfassung der Ergebnisse) bewiesen, dass jeder periodische Strahl in einem parabolischen oder abstoßenden Punkt eines Zyklus landet. Genauso landet in jedem parabolischen und abstoßendem periodischen Punkt ein periodischer Strahl. Dabei ist die Periode des Punkt-Zyklus ein Teiler der Periode des Strahl-Zyklus.

Goldberg und Milnor (in [GM]) folgend, ist der Typ  $\mathcal{T}$  eines Fixpunktes  $z_0$  die Menge aller Winkel  $t$  ( $\mathcal{T} = \{\theta_0, \dots, \theta_{m-1}\} \subset [0, 1)$ ), so dass  $R_t$  in  $z_0$  landet. Da die Winkel mit den Strahlen identifiziert werden können und ein in  $z_0$  landender Strahl auf einen in  $z_0$  landenden Strahl abgebildet wird, gilt  $\sigma(\theta_j) \in \mathcal{T}$  für  $0 \leq j < m$ . So bilden die Winkel also Zykel. Es ist möglich, dass in  $\mathcal{T}$  verschiedene Zykel enthalten sind, die dann allerdings die gleiche Länge besitzen.

Die Vereinigung der  $m$  Strahlen, die in  $z_0$  landen, vereinigt mit  $\{z_0\}$  definiert  $m$  (abgeschlossene) Sektoren  $S_0, \dots, S_{m-1}$  sowie  $m$  Intervalle  $I_0, \dots, I_{m-1} \subset [0, 1)$  mit  $I_j = [\theta_j, \theta_{j+1}]$  (Indizes modulo  $m$ ). Dabei wird das Intervall  $[0, 1)$  mit dem Kreis  $S^1$  identifiziert, um dem Intervall  $I_{m-1} = [\theta_{m-1}, \theta_0]$  gerecht zu werden. Die Länge  $l$  eines Intervalls ist  $l(I_j) = \theta_{j+1} - \theta_j$ , falls  $0 \leq j \leq m-2$  und  $l(I_{m-1}) = 1 - \theta_{m-1} + \theta_0$  sonst. Die Summe aller Intervalllängen ist 1. Goldberg und Milnor (ebenfalls in [GM]) bewiesen unter anderem

**Satz 1.3.1** *Es sei  $n$  die Anzahl der kritischen Punkte von  $P$ , die in  $S_j$  enthalten sind. Dann gilt:*

- a) *Für  $n = 0$  bildet  $P$  einen Sektor  $S_j$  homöomorph auf einen Sektor  $S_k$  ab. Genauso wird das Intervall  $I_j$  durch  $\sigma$  homöomorph auf ein Intervall  $I_k$  abgebildet. Es gilt  $l(I_k) = dl(I_j)$ .*
- b) *Ist  $n > 0$ , dann gilt  $P(S_j) = \mathbb{C}$  und  $l(\sigma(I_j)) = l(I_k) + n$ . Dabei ist  $I_k$  das Intervall  $[\sigma(\theta_j), \sigma(\theta_{j+1})]$ . Jedes  $t \in I_k$  hat genau  $n + 1$  Urbilder in  $I_j$ .*

## 1.4 Quasikonforme Abbildungen und quasikonforme Chirurgie

Quasikonforme Abbildungen werden in der Iterationstheorie verwendet, um etwas zu tun, was eigentlich unmöglich ist. In manchen Situationen ist es hilfreich, zwei analytische Funktionen zu verkleben. Aufgrund des Identitätssatzes ist dies (es sei denn, sie sind identisch) eigentlich unmöglich. Was hilft, ist die folgende (kurz skizzierte) Methode, die in der Literatur unter dem Namen *quasikonforme Chirurgie* bekannt ist. Sie wurde erfolgreich von Douady und Hubbard entwickelt und ist von Shishikura in [SHI] verwendet und formalisiert worden, um zum Beispiel eine scharfe Abschätzung für die maximale Anzahl nicht abstoßender Zyklen bei rationalen Funktionen zu finden.

Gegeben seien zwei rationale Funktion  $f$  und  $g$ . Sie sind auf zwei disjunkten Gebieten definiert, die durch einen (nicht trivialen) topologischen Kreisring getrennt sind. Nun verklebt man diese Funktionen hinreichend glatt und erhält somit eine Funktion, die nicht mehr holomorph ist. Unter passenden Voraussetzungen existiert ein quasikonformer Koordinatenwechsel, so dass die konjugierte Funktion analytisch ist und Eigenschaften von  $f$  und  $g$  erhalten hat.

Eine *quasikonforme Abbildung* eines Gebietes  $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$  auf  $G' \subset \widehat{\mathbb{C}}$  ist ein orientierungserhaltender Homöomorphismus  $f : G \rightarrow G'$  mit folgenden Eigenschaften. Die Abbildung  $f$  ist ACL (absolut stetig auf Geraden) auf fast allen Geraden, die parallel zu den Achsen sind. Weiter existiert

eine messbare Abbildung (der *Beltrami-Koeffizient*)  $\mu : G \rightarrow \mathbb{C}$ , mit

$$\mu = \frac{\partial_{\bar{z}}}{\partial_z} \text{ und } \|\mu\| \leq k < 1 \text{ fast überall.}$$

Dabei ist  $\partial_z$  durch

$$\partial_z f = \frac{1}{2} (\partial_x f - i \partial_y f)$$

und  $\partial_{\bar{z}}$  durch

$$\partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2} (\partial_x f + i \partial_y f)$$

erklärt. Es gilt dann wegen der Cauchy-Riemann Differentialgleichungen, dass  $f$  genau dann holomorph in einem Gebiet  $G$  ist, falls dort  $\partial_{\bar{z}} f = 0$  ist.

Eine quasikonforme Abbildung ist durch eine geeignete Normierung eindeutig bestimmt. Eine mögliche (und in dieser Arbeit angewandte) Normierung für eine quasikonforme Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  lautet  $f(0) = 0$  und  $f(z) = z + o(1)$  für  $z \rightarrow \infty$ .

Es ist  $K = \frac{k+1}{k-1}$  ein *Maß* für die Verzerrung von  $f$ . Eine konforme Abbildung bildet (infinitesimal) kleine Kreise auf kleine Kreise ab. Eine (glatte) quasikonforme Abbildung bildet kleine Kreise auf kleine Ellipsen ab, wobei  $K$  das (maximale) Verhältnis der Halbachsen begrenzt. Eine *quasireguläre Abbildung* ist eine Abbildung, die lokal als Verknüpfung einer quasikonformen und einer analytischen Funktion dargestellt werden kann. Eine Variante von Shishikuras *qc-Lemma* (welches als Zusammenfassung der Methode der quasikonformen Chirurgie gesehen werden kann) ist der folgenden Satz.



**Satz 1.4.1** *Es sei  $g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  eine quasireguläre Abbildung und  $E \subset \mathbb{C}$  eine offene Menge. Es sei  $\Phi : E \rightarrow E'$  eine quasikonforme Abbildung und für ein festes  $N \geq 0$  gelte*

1.  $g(E) \subset E$ ,
2.  $\Phi \circ g \circ \Phi^{-1}$  ist auf  $E'$  analytisch,
3.  $\partial_{\bar{z}}g = 0$  fast überall auf  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus g^{-N}(E)$ .

*Dann existiert eine quasikonforme Abbildung  $\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , so dass  $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$  eine rationale Funktion ist. Weiter ist  $\varphi \circ \Phi^{-1}$  in  $E'$  analytisch und  $\partial_{\bar{z}}\varphi = 0$  fast überall in  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} g^{-n}(E)$ .*

Eine Anwendung (siehe [SHI]) des  $qc$ -Lemmas ist der folgende Abschnitt.

## 1.5 Polynomähnliche Abbildungen

In [DH3] führten Douady und Hubbard die Idee der polynomähnlichen Abbildungen ein. Sie beobachteten, dass sich Funktionen, eingeschränkt auf geeignete Teilmengen ihres Definitionsbereiches, oft wie ein Polynom bestimmten Grades verhalten.

Es seien  $U, V \subset \mathbb{C}$  einfach zusammenhängende Gebiete mit hinreichend glatten Rändern (genauer: diese müssen Nullmengen in  $\mathbb{C}$  sein) und  $\bar{U} \subset V$ . Eine *polynomähnliche Abbildung*  $(f, U, V)$  vom Grad  $k$  ist eine eigentliche Abbildung  $f : U \xrightarrow{k:1} V$ . Wenn Verwechslungen auszuschließen sind, wird das Tripel  $(f, U, V)$  durch  $f$  abgekürzt.

Die aufgefüllte Juliamenge von  $f$  ist  $\mathcal{K} := \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V)$ . Dies sind die Punkte in  $U$ , die unter Iteration mit  $f$  die Menge  $U$  nicht verlassen. Die Juliamenge ist dann  $\partial\mathcal{K}$ .

Polynomähnliche Abbildungen besitzen sehr nützliche Eigenschaften. So gilt folgender von Douady und Hubbard stammender Satz, der auch den Namen von  $(f, U, V)$  rechtfertigt.

**Satz 1.5.1** *Es sei  $(f, U, V)$  eine polynomähnliche Abbildung vom Grad  $d \geq 2$ . Dann existiert ein Polynom  $P$  vom Grad  $d$  und eine quasikonforme Abbildung  $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit*

$$\Phi \circ P(z) = P \circ \Phi(z) \text{ für } z \in U.$$

*Dabei gilt  $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = 0$  im Inneren von  $\mathcal{K}(f)$ , das heißt,  $\Phi$  ist dort konform.*

Funktionen  $f$  und  $P$  aus obigem Satz heißen *hybrid äquivalent*. Der Satz besagt, dass eine polynomähnliche Abbildung stets hybrid äquivalent zu einem Polynom gleichen Grades ist. Wesentliche dynamische Eigenschaften bleiben erhalten. So gilt  $\Phi(\mathcal{J}(P)) = \mathcal{J}(f)$  und  $\Phi(\mathcal{K}(P)) = \mathcal{K}(f)$  und  $\mathcal{K}(f)$  ist genau dann zusammenhängend, wenn

$$\{f^n(\zeta) : n \in \mathbb{N} \text{ und } \zeta \text{ kritischer Punkt von } f\} \subset \mathcal{K}(f)$$

gilt.

Eine Möglichkeit diese Methode anzuwenden ist sich ein geeignetes Gebiet  $V$  vorzugeben und eine Urbildkomponente  $V$  unter einer analytischen Abbildung (z.B. einem Polynom) zu betrachten. Die Schwierigkeit liegt dann in der Regel darin zu zeigen (bzw.  $V$  geeignet zu wählen), dass  $\bar{U} \subset V$  gilt.

# Kapitel 2

## Die Dynamische Ebene

Wir werden die Iteration symmetrischer Polynome untersuchen, also solcher Polynome, deren Juliamenge unter Wirkung der Gruppe

$$\Sigma_d = \{\omega z : \omega^d = 1\}$$

invariant ist. Das heißt, für  $\omega \in \Sigma_d$  gilt  $\omega \circ P = P \circ \omega$  oder

$$P(\omega z) = \omega P(z) \tag{2.1}$$

für  $z \in \mathbb{C}$ . Für die Julia- und Fatoumenge folgt  $\mathcal{F} = \omega \mathcal{F}$  und  $\mathcal{J} = \omega \mathcal{J}$ .

Aus (2.1) folgt für eine  $d$ -te Einheitswurzel  $\omega$

$$\sum_{k=0}^n \omega^k a_k z^k = \sum_{k=0}^n \omega a_k z^k.$$

Somit ist  $a_k \neq 0$  genau dann, wenn  $k = 1 + sd$  (für  $s \in \mathbb{N}_0$ ) gilt. Um eine Darstellung für  $P$  zu erhalten, normieren wir die Leitkoeffizienten der Polynome zu 1 und wählen für  $P$  den kleinstmöglichen Grad (größer 1). Es ergibt sich als Darstellung

$$P_c(z) = z(z^d - c) \tag{2.2}$$

für ein geeignetes  $c \in \mathbb{C}$ . Der Grad von  $P_c$  ist  $d + 1$ .

Für festes  $c \in \mathbb{C}$  fassen wir nun einige grundlegende Eigenschaften der Polynome  $P_c$  zusammen.

## 2.1 Erste Eigenschaften

Elementares Rechnen liefert die folgenden Eigenschaften. Die Fixpunkte von  $P_c$  sind  $0, \infty$  und die  $d$ -ten Wurzeln aus  $1 + c$ . Die kritischen Punkte sind Lösungen der Gleichung  $z^d = \frac{c}{d+1}$  und werden mit  $\zeta_j := \omega_j \zeta$  (oder auch  $\zeta_c$ , falls wir die Abhängigkeit vom Parameter betonen wollen) bezeichnet. Für die Multiplikatoren der Fixpunkte gilt

$$\lambda_0 = P'_c(0) = -c \text{ und } \lambda_k = P'_c(z_k) = d + 1 + cd. \quad (2.3)$$

Die dynamischen Eigenschaften eines Polynoms hängen wesentlich von den kritischen Punkten ab. Wir werden diese genauer untersuchen.

**Lemma 2.1.1** *Es sei  $\zeta$  ein endlicher kritischer Punkt von  $P_c$ . Dann existieren von  $\zeta$  unabhängige Polynome  $Q_n$  mit  $P_c^n(\zeta) = \zeta Q_n(c)$ . Für die Polynome  $Q_n$  gilt*

$$d_n := \deg Q_n = \sum_{j=0}^{n-1} (d+1)^j = \frac{1}{d}((d+1)^n - 1)$$

mit Leitkoeffizient

$$a_n = \frac{(-d)^{(d+1)^{n-1}}}{(d+1)^{d_n}}.$$

**Beweis:** Wir definieren die Polynome rekursiv durch

$$Q_1(c) = \frac{c}{d+1} - c \text{ und } Q_{n+1}(c) = \frac{c}{d+1}(Q_n(c))^{d+1} - cQ_n(c).$$

Dann gilt (Induktionsanfang)  $P_c(\zeta) = \zeta Q_1(c)$  und (Induktionsschritt)

$$\begin{aligned} P^{n+1}(\zeta) &= P(\zeta Q_n(c)) \\ &= (\zeta Q_n(c))^{d+1} - c\zeta Q_n(c) \\ &= \zeta Q_{n+1}(c). \end{aligned}$$

Aus der rekursiven Definition von  $Q_n$  folgt, dass  $d_n$  der Rekursion

$$d_1 = \deg Q_1 = 1 \text{ und } d_{n+1} = d_n(d+1) + 1$$

genügt. Der Induktionsanfang ist erfüllt. Der Induktionsschritt ist

$$d_{n+1} = d_n(d+1) + 1 = \sum_{j=0}^n (d+1)^j = \frac{(d+1)^{n+1} - 1}{d+1-1}.$$

Dabei wurde die geometrische Summenformel verwendet. Die Aussage über den Leitkoeffizienten  $a_n$  folgt aus der Rekursionsgleichung der Polynome und ebenfalls mit Induktion. Der Leitkoeffizient von  $Q_1$  ist  $\frac{-d}{d+1}$  und es gilt  $a_{n+1} = \frac{(a_n)^{d+1}}{d+1}$ . Das heißt, der Exponent im Nenner erfüllt genau die Rekursionsgleichung von  $d_n$ , der Exponent im Zähler wird jeweils mit  $d+1$  multipliziert.  $\square$

Der erste Teil des Lemma bedeutet, dass das Verhalten der kritischen Punkte unter Iteration unabhängig von der Wahl des kritischen Punktes ist. Ist beispielsweise ein endlicher kritischer Punkt in  $\mathcal{A}(\infty)$  enthalten, so sind alle kritischen Punkte in  $\mathcal{A}(\infty)$  enthalten. Insbesondere ist der Orbit aller endlichen kritischen Punkte beschränkt, wenn der Orbit eines endlichen kritischen Punkte beschränkt ist.

Die Juliamenge eines Polynoms ist zusammenhängend oder besteht aus unendlich vielen Zusammenhangskomponenten. Ist sie nicht zusammenhängend, so kann sie aus unendlich vielen nicht degenerierten Zusammenhangskomponenten bestehen (Ein solches Beispiel findet man in [BEA], Seite 261). Letzteres ist für  $P_c$  ausgeschlossen.

**Korollar 2.1.2** *Die Juliamenge  $\mathcal{J}(P_c)$  ist entweder zusammenhängend oder eine Cantormenge.*

**Beweis:** Nach Lemma 2.1.1 liegen entweder alle kritischen Punkte in  $\mathcal{A}(\infty)$  oder der Orbit aller endlichen kritischen Punkte ist beschränkt. Im ersten Fall ist die Juliamenge eine Cantormenge, im zweiten Fall zusammenhängend.  $\square$

**Lemma 2.1.3** *Für  $c \in \mathbb{C}$  gilt  $\mathcal{J}(P_c) \subset \overline{K_r(0)}$  mit  $r = \sqrt[d]{1+|c|}$ .*

**Beweis:** Es sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| > r$ . Dann gilt

$$|P_c(z)| > |z|(|1+|c|| - |c|) = |z|.$$

Somit ist  $z \in \mathcal{A}(\infty)$ .  $\square$

Im Falle  $c > 0$  ist  $\sqrt[d]{1+c} \in \mathcal{J}$ , da er ein abstoßender Fixpunkt ist (Es gilt  $P'(\sqrt[d]{1+c}) = d+1+cd > 1$ ). Dies zeigt, dass der Radius  $r$  aus obigem Lemma im allgemeinen nicht verbessert werden kann.

**Satz 2.1.4** Für  $j = 0, \dots, d - 1$  seien  $\zeta_j$  die (endlichen) kritischen Punkte. Es wird genau dann ein kritischer Punkt  $\zeta_j$  von einem Zykel angezogen, wenn alle kritischen Punkte von einem Zykel (nicht notwendigerweise der gleiche Zykel) angezogen werden. Insbesondere haben alle attraktiven/parabolischen Zykel die gleiche Länge.

**Beweis:** Wir nehmen an, dass  $\zeta_0$  von einem Zykel der Länge  $m$  angezogen wird. Somit konvergiert die Iteriertenfolge  $P_c^{nm}(\zeta_0)$  gegen einen Punkt  $z_0$  des Zyklus. Wegen Lemma 2.1.1 gilt  $P_c^{nm}(\zeta_j) = \zeta_j Q_{nm}(c)$  für  $j = 0 \dots d - 1$ , wobei die Polynome  $Q_n$  unabhängig von den kritischen Punkten sind. Für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert  $Q_{nm}(\zeta_0)$  gegen  $\frac{z_0}{\zeta_0}$ . Für jeden kritischen Punkt gilt

$$P_c^{nm}(\zeta_j) = \zeta_j Q_{nm}(c) \rightarrow \frac{\zeta_j}{\zeta_0} z_0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Aus  $P_c\left(\frac{\zeta_j}{\zeta_0} z_0\right) = \frac{\zeta_j}{\zeta_0} P_c(z_0)$  folgt, dass  $P_c^m\left(\frac{\zeta_j}{\zeta_0} z_0\right) = \frac{\zeta_j}{\zeta_0} z_0$  gilt und damit Punkt eines Zyklus der Länge kleiner gleich  $m$  ist, der einen kritischen Punkt anzieht. Zu zeigen ist noch, dass die Länge des Zyklus genau  $m$  ist. Angenommen, sie ist es nicht. Dann existiert ein  $l$  mit  $1 \leq l \leq m - 1$  mit  $P_c^l\left(\frac{\zeta_j}{\zeta_0} z_0\right) = \frac{\zeta_j}{\zeta_0} z_0$ . Es folgt  $P_c^l(z_0) = z_0$ , was der Voraussetzung widerspricht.  $\square$

**Lemma 2.1.5** Zieht ein attraktiver oder parabolischer Zykel  $k$  kritische Punkte an, so zieht jeder attraktive oder parabolische Zykel  $k$  kritische Punkte an.

**Beweis:** Dies folgt aus Formel (2.1) und Satz 2.1.4. Denn zieht ein Zykel die  $k$  kritischen Punkte  $\zeta_j$  ( $j = 0 \dots k - 1$ ) an, so zieht der mit  $\omega \in \Sigma_d$  gedrehte Zykel (nicht notwendigerweise verschieden) genau die  $k$  kritischen Punkte  $\omega\zeta_j$  an.

Da durch Multiplikation mit einer Einheitswurzel alle endlichen kritischen Punkte betrachtet werden, kann es auch keine weiteren attraktiven oder parabolischen Zykel geben.  $\square$

**Lemma 2.1.6** *Es sei  $c \in \mathbb{C}$  so gewählt, dass*

1. *0 abstoßender oder parabolischer Fixpunkt ist, und*
2. *ein attraktiver/parabolischer Zykel existiert, der kritische Punkte anzieht.*

*Dann enthält jedes Fatougebiet maximal einen kritischen Punkt.*

*Ist 0 ein attraktiver Fixpunkt, so enthält das Fatougebiet, welches 0 enthält, auch alle kritischen Punkte von  $P_c$ .*

**Beweis:** Nach Voraussetzung existiert ein Fatougebiet, welches einen kritischen Punkt enthält. Damit sind alle kritischen Punkte in  $\mathcal{F}$  enthalten. Da  $O$  abstoßender oder parabolischer Fixpunkt ist, landet in  $O$  mindestens ein external Ray. Aufgrund der Symmetrie landen dann mindestens  $d$  (symmetrische) external Rays in  $O$ . Diese trennen die kritischen Punkte (ebenfalls symmetrisch) voneinander. Das heißt, dass  $\mathcal{K} \setminus \{0\}$  in mindestens  $d$  Komponenten zerfällt, in denen jeweils maximal ein kritischer Punkt enthalten ist.

Die letzte Aussage folgt aus Satz 2.1.4 und der Tatsache, dass das Fatougebiet, welches  $0$  enthält, und die kritischen Punkte die gleiche Symmetrie respektieren.  $\square$

**Satz 2.1.7** *Das Polynom  $P_c$  habe einen Zykel der Länge  $m$ , der nicht aus der  $0$  besteht und der  $k$  kritische Punkte anzieht. Es sei  $n$  die Anzahl der verschiedenen Zyklen von  $P_c$ , die kritische Punkte anziehen. Dann gilt:*

$$nk = d \text{ und } k \text{ teilt } m.$$

**Beweis:** Die erste Gleichung folgt aus der Tatsache, dass es genau  $d$  (endliche) kritische Punkte gibt und dass nach Lemma 2.1.5 keine weiteren Zyklen existieren, die kritische Punkte anziehen könnten.

Die Gesamtzahl der stabilen Gebiete  $U$ , die einen Zykelpunkt enthalten, ist  $nm$ . Da die Fatoumenge invariant unter Drehungen mit  $\omega \in \Sigma_d$  ist, ist  $\omega U$  ebenfalls ein Zykelgebiet. Es sei  $V$  ein weiteres solches Gebiet mit  $V \neq \omega U$ . Falls ein solches Gebiet  $V$  existiert, führt die Symmetrie aber auf genau  $d$  neue Gebiete. Insgesamt existieren  $nm$  solche Gebiete und es gilt somit  $d|nm$ .

Da  $d = nk$  ist, teilt  $nk$  auch  $nm$ . Dies beweist  $k|m$ .  $\square$

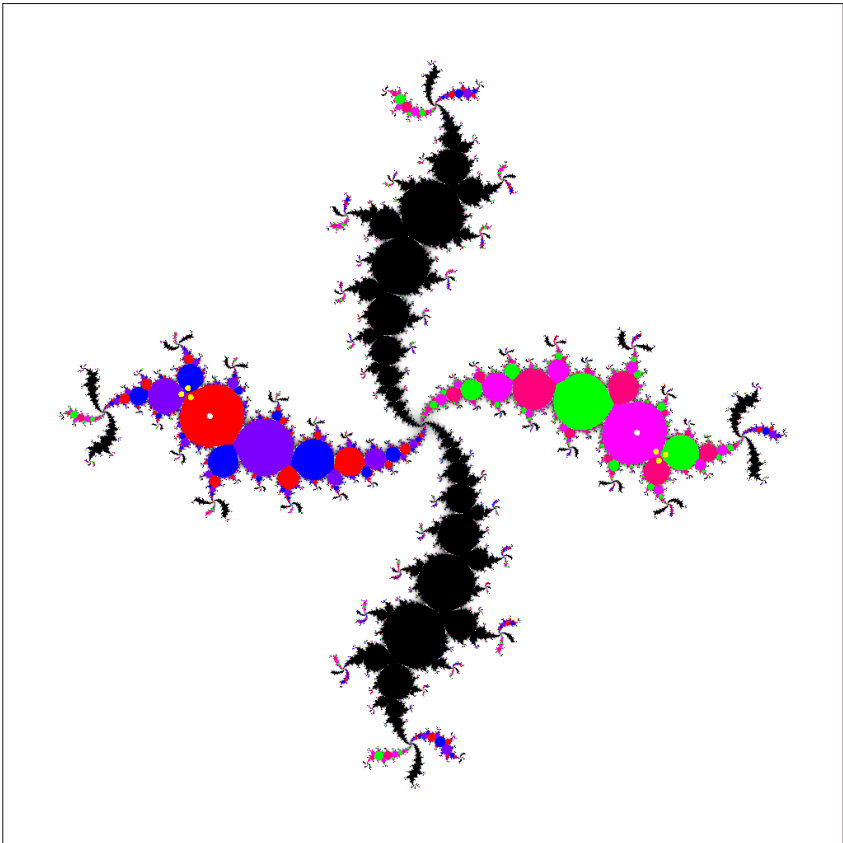


Abbildung 2.1: Gelbe Punkte entsprechen den Zykluspunkten, weiße den kritischen Punkten. Die stabilen Gebiete, die der gelb markierte Zykel anzieht, sind farbig gekennzeichnet.

**Beispiel 2.1** Wir betrachten ein Beispiel (Abbildung 2.1). Es sei  $d = 4$  und  $c = 1,375125 + i0,216722$ . Mit den Bezeichnungen aus Satz 2.1.7 gilt dann  $m = 6$  und  $n = 2$ . Es gibt 4 kritische Punkte, 2 attraktive Zyklen der Länge 6 (damit 12 Zykelgebiete) und jeder Zykel zieht 2 kritische Punkte an. Der zweite (gedrehte) Zykel besteht aus den symmetrischen schwarz gefärbten Gebieten.



Wir beweisen nun, dass sich die Symmetrie der Polynome auch in der Böttcherfunktion widerspiegelt. Diese Aussage werden wir sowohl in Zusammenhang mit der dynamischen Ebene als auch mit der Parameterebene benötigen.

**Lemma 2.1.8** *Es sei  $\omega \in \Sigma_d$  und  $\varphi$  die (eindeutige) Böttcherfunktion zum Polynom  $P_c$  mit Normierung  $\varphi \sim z$  für  $z \rightarrow \infty$ . Dann gilt*

$$\varphi(\omega z) = \omega \varphi(z). \quad (2.4)$$

**Beweis:** Die Funktion  $\varphi$  erfüllt die Böttcherfunktionalgleichung, das heißt für  $\varphi$  gilt

$$(\varphi(z))^{d+1} = P_c(\varphi(z)) \quad \text{und} \quad \varphi(z) \sim z \text{ bei } \infty.$$

Wir definieren  $\Psi$  durch  $\Psi(z) = \omega^{-1}\varphi(\omega z)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (\Psi(z))^{d+1} &= \omega^{-1}(\varphi(\omega z))^{d+1} \\ &= \omega^{-1}P_c(\varphi(\omega z)) \\ &= P_c(\Psi(z)). \end{aligned}$$

Also erfüllt  $\Psi$  die Böttcherfunktionalgleichung. Zudem gilt  $\Psi \sim z$  bei  $\infty$ . Damit gilt  $\varphi = \Psi$  und die Behauptung.  $\square$

## 2.2 Konjugation

Wir konjugieren  $P_c$  mit  $z^d$ . Dadurch lösen wir die Symmetrien, so dass nur noch ein freier kritischer Punkt (mit Vielfachheit 1) existiert. Einem attraktiven Zykel in der konjugierten Ebene entsprechen dann möglicherweise mehrere attraktive Zyklen in der ursprünglichen dynamischen Ebene. Die Zykellänge kann sich ebenfalls verändern, allerdings nicht beliebig. Sie muss gewissen Teilbarkeitsrelationen genügen.

Durch die Gleichung

$$f_c \circ q = q \circ P_c \quad (2.5)$$

wird mit  $q(z) = z^d$  eine Funktion  $f_c$  erklärt, die wegen

$$(P_c(z))^d = z^d (z^d - c)^d = q(z)(q(z) - c)^d$$

der Darstellung  $f_c(z) = z(z - c)^d$  genügt. Elementares Rechnen liefert folgende Eigenschaften über  $f_c$ .

**Lemma 2.2.1** *Die Fixpunkte von  $f_c$  sind  $z = 0$  und  $z_j = c + \omega_j$  (mit  $\omega_j \in \Sigma_d$ ). Die endlichen kritischen Punkte sind  $c$  ( $(d-1)$ -fach) und  $\frac{c}{d+1}$ .*

*Der Orbit unter Iteration mit  $f_c$  von  $c$  ist  $c \xrightarrow{f_c} 0 \xrightarrow{f_c} 0 \dots$ . Der kritische Punkt  $\frac{c}{d+1}$  ist frei und bestimmt somit die Dynamik.*

Diese neue Darstellung erweist sich als nützlich um die hyperbolischen Komponenten des Connectedness Locus in Kapitel 3.3 zu beschreiben. Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen den konjugierten Ebenen.

**Satz 2.2.2** *Die Juliamenge  $\mathcal{J}(P_c)$  ist genau dann zusammenhängend, wenn die Juliamenge  $\mathcal{J}(f_c)$  zusammenhängend ist. Weiter gilt  $z \in \mathcal{A}^P(\infty)$  genau dann, wenn  $q(z) \in \mathcal{A}^f(\infty)$  ist. Insbesondere folgt  $q(\mathcal{J}(P_c)) = \mathcal{J}(f_c)$ .*

**Beweis:** Aus (2.5) folgt

$$f_c^n \left( \frac{c}{d+1} \right) = f_c^n (q(\zeta_j)) = q \circ P_c^n (\zeta_j).$$

Somit ist der Orbit des freien kritischen Punktes von  $f_c$  genau dann beschränkt, wenn der Orbit eines kritischen Punktes von  $P_c$  beschränkt ist.

Ist  $z \in \mathcal{A}^P(\infty)$ , so gilt  $P_c^n(z) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Damit gilt auch  $q \circ P_c^n(z) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Aufgrund der Konjugation (2.5) gilt  $f_c^n(q(z)) \rightarrow \infty$ .

Angenommen, es existiert ein  $z \in \mathcal{A}^f(\infty)$ , so dass  $q^{-1}(z) \notin \mathcal{A}^P(\infty)$  ist. Dann folgt ebenfalls aus (2.5), dass  $z \notin \mathcal{A}^f(\infty)$ . Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

**Beispiel 2.2** *In Abbildung 2.2 betrachten wir den gleichen Parameter wie in Beispiel 2.1. Die attraktiven Zyklen werden übereinander geschoben. Aus zwei attraktiven Zykeln der Länge 6 wird einer der Länge 3. Es existiert kein weiterer attraktiver Zykel. Der freie (einfache) kritische Punkt ist markiert.*

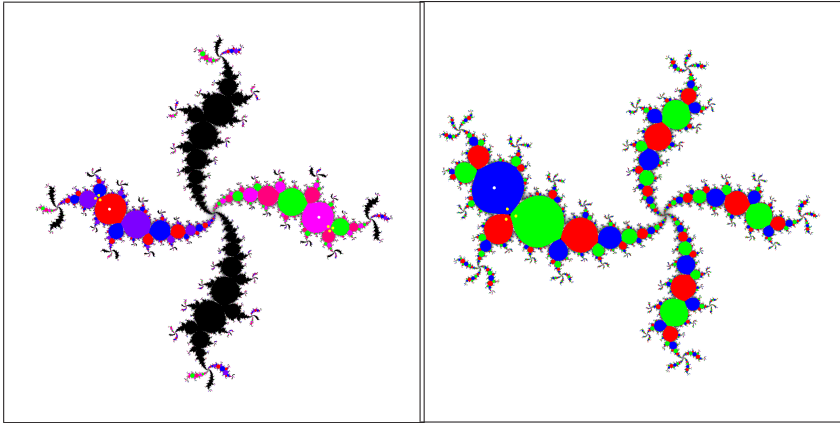


Abbildung 2.2: In der ursprünglichen Ebene:  $P_c$       Abbildung 2.3: In der konjugierten Ebene:  $f_c$

**Satz 2.2.3** *Es sei  $z_0$  ein Zykelpunkt eines attraktiven oder parabolischen Zyklus der Länge  $m$ . Der Zykel ziehe  $k$  kritische Punkte an. Dann ist  $z_0^d$  ein Zykelpunkt von  $f_c$  eines attraktiven oder parabolischen Zyklus der Länge  $\frac{m}{k}$ .*

**Beweis:** Nach Voraussetzung gilt  $P_c^m(z_0) = z_0$ . Aus (3.4) folgt

$$f_c^m \circ q(z_0) = q \circ P_c^m(z_0) = q(z_0).$$

Also ist  $q(z_0) = z_0^d$  ein Zykelpunkt eines Zyklus von  $f_c$  der Länge  $n \leq m$ . Es seien  $\zeta_1, \dots, \zeta_k$  die  $k$  kritischen Punkte von  $P_c$ , die der attraktive oder parabolische Zykel anzieht. Es ist  $\zeta = q(\zeta_j) = \frac{c}{d+1}$  für  $j = 1, \dots, k$  der kritische Punkt von  $f_c$ , der vom Zykel angezogen wird. Unter  $q$  werden die stabilen Gebiete von  $P_c$  auf die stabilen Gebiete von  $f_c$  abgebildet. Das heißt, jedes Fatougebiet von  $P_c$ , welches einen kritischen Punkt enthält (und nur diese!), werden auf das Fatougebiet von  $f_c$  abgebildet, welches  $\zeta$  enthält. Folglich ist  $\frac{m}{k}$  die Länge des Zyklus von  $f_c$ .  $\square$

## 2.3 Polynomähnliche Abbildungen

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie  $\mathcal{J}(P_c)$  aus Juliamengen von quadratischen Polynomen zusammengesetzt ist. Damit gilt ab jetzt  $d > 1$ , da für den Fall  $d = 1$  nichts zu zeigen ist.

Eine Jordankurve  $\gamma$  zerlegt die komplexe Ebene in zwei Zusammenhangskomponenten. Wir bezeichnen mit  $\text{int } \gamma$  die beschränkte offene Komponente.

**Satz 2.3.1** *Es sei  $|c| > 1$  (das heißt, 0 ist abstoßender Fixpunkt von  $P_c$ ), alle kritischen Punkte seien in beschränkten stabilen Gebieten enthalten und die Juliamenge sei eine Kurve. Dann existieren analytische Jordankurven  $\gamma$ ,  $\Gamma$  und ein Polynom  $\tilde{P}$  mit:*

1.  $\gamma \subset \text{int } \Gamma$ ,
2.  $\tilde{P}(\gamma) = \Gamma$  und
3.  $\tilde{P} : \text{int } \gamma \xrightarrow{2:1} \text{int } \Gamma$ .

*Insbesondere ist  $(\tilde{P}, \text{int } \gamma, \text{int } \Gamma)$  eine polynomähnliche Abbildung vom Grad 2 und hybrid äquivalent zu einem quadratischen Polynom.*

Der Beweis dieses Satzes wird sich über den Rest des Kapitels erstrecken. Er gliedert sich wie folgt. Zunächst definieren wir die Abbildung  $\tilde{P}$  als Kombination aus einer Iterierten von  $P_c$  und einer Drehung, die in Zusammenhang zur Symmetrie der Polynome steht. Anschließend konstruieren wir  $\Gamma$ . Dies ist ein recht technischer Prozess mit vielen Bezeichnungen. Wir verweisen auf Abbildung 2.3 für eine schematische Darstellung von  $\Gamma$  und auf Abbildung 2.3 für eine schematische Darstellung des Satzes. Danach wählen wir das *richtige* Urbild  $\gamma$  von  $\Gamma$  unter  $\tilde{P}$ . Die Innengebiete werden dann eigentlich aufeinander abgebildet, und wir bestimmen den Abbildungsgrad. Dann nutzen wir die Eigenschaften der Kurven, um zu zeigen, dass das Innengebiet von  $\gamma$  kompakt im Innengebiet von  $\Gamma$  enthalten ist. Diese Kurven sind allerdings nicht analytisch. Im letzten Schritt stellen wir die Analytizität mit Hilfe eines Approximationsarguments her.

Um  $\tilde{P}$  zu definieren, bedarf es einiger Vorbereitungen. Da 0 ein abstoßender Fixpunkt ist, landet mindestens ein external Ray in 0. Aufgrund der Symmetrie ist die Anzahl der in 0 landenden Strahlen ein Vielfaches von  $d$ . Es seien  $R_j$  die  $ld$  (mit  $l \in \mathbb{N}$ ) external Rays (der Lesbarkeit halber identifizieren wir die Landewinkel mit ihren Indizes:  $R_{\theta_0} = R_0$ ), die in 0 landen. Wir fixieren einen endlichen kritischen Punkt  $\zeta$  von  $P_c$ . Es seien  $R_0$  und  $R_1$  die Strahlen, die den kritischen Punkt  $\zeta$  von den übrigen endlichen kritischen Punkten trennen. Es sei  $k$  die kleinste natürliche Zahl, so dass ein Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi)$  existiert mit  $e^{id\alpha} = 1$  und  $e^{i\alpha} P_c^k(R_0) = R_0$  ( $\alpha$  respektiert die Symmetrie von  $P_c$ ). Möglicherweise existiert ein *identischer* Strahlen  $P^b(R_0)$  mit  $b \in \mathbb{N}$ , der aber nicht durch Symmetrie mit  $R_0$  assoziiert ist, das heißt  $P^b(R_0) = e^{i\tilde{\alpha}} R_0$  und  $e^{id\tilde{\alpha}} \neq 1$ . Da wir die Symmetrie benötigen, müssen wir die Wahl von  $\alpha$  einschränken).

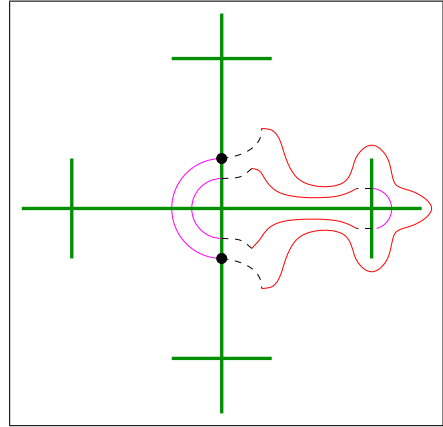


Abbildung 2.4: schematische Darstellung von Satz 2.3.1

**Lemma 2.3.2** *Die obige Konfiguration existiert.*

**Beweis:** Das Polynom  $P_c$  bildet den in 0 landenden Strahl  $R_0$  auf einen in 0 landenden Strahl  $R'$  ab. Wir prüfen, ob wir diesen Strahl unter Berücksichtigung der Symmetrie der Juliamenge auf  $R_0$  drehen können. Falls ja, dann sind  $\alpha$  und  $k$  gefunden. Falls nicht, wenden wir  $P_c$  erneut auf  $R'$  an. Wegen [GM] bildet  $P_c$  nach endlich vielen Iterationen  $R_0$  auf  $R_0$  ab. In diesem Falle setzen wir  $\alpha = 0$ .  $\square$

Wir können jetzt die Abbildung  $\tilde{P}$  definieren. Der Vorteil von  $\tilde{P}$  ist, dass wir die Juliamenge nicht verändern, allerdings die Kombinatorik der external Rays. Alle in 0 landenden Strahlen (z.B.  $R_0$ ) sind jetzt Fixstrahlen, da (ebenfalls [GM]) alle Winkel in  $\mathcal{T}$  dieselbe Periode haben. Vorher konnten sie periodisch sein, so haben in Beispiel 2.1 die in 0

landenden Strahlen die Periode 2. Dort ist  $\alpha = \pi$  und  $k = 1$ .

**Definition 2.3.3** Wir definieren  $\tilde{P}$  durch

$$\tilde{P}(z) := e^{i\alpha} P_c^k(z). \quad (2.6)$$

Insbesondere ist  $k$  in dem Sinne minimal gewählt, dass  $k$  die kleinste natürliche Zahl ist, so dass  $P^k(R_0) \cup \{0\} \cup P^k(R_1)$  einen endlichen kritischen Punkt von  $P_c$  von den anderen endlichen kritischen Punkten trennt.

Das folgende Lemma stellt eine weitere Eigenschaft von  $\tilde{P}$  dar. Die Abbildung *überdeckt* (nicht als eigentliche Abbildung!) einen Sektor, der einen kritischen Punkt enthält, doppelt.

**Lemma 2.3.4** *In  $G$  existiert je genau ein Urbildstrahl unter  $\tilde{P}$  von  $R_0$  und  $R_1$ .*

**Beweis:** Die Abbildung  $\tilde{P}$  ist durch  $\tilde{P}(z) = e^{i\alpha} P_c^k(z)$  definiert. Wir suchen also Urbilder von  $e^{-i\alpha} R_0$  (genauso  $R_1$ ) unter  $P_c^k$ , die in  $G$  enthalten sind. Dazu sei  $\mathcal{T} = \{\theta_0, \dots, \theta_{m-1}\}$  der Typ des Fixpunktes 0. Ohne Einschränkung wählen wir  $R_0 = R_{\theta_0}$ . Es entspricht  $\overline{G}$  dem Sektor  $S_0$ . Dem Strahl  $e^{-i\alpha} R_0$  entspricht der Winkel  $\theta_j = d^k \theta_0 \pmod{1}$ . Aufgrund der Symmetrie enthält der Sektor  $S_j$  (genau wie der Sektor  $S_0$ ), der mit dem Intervall  $I_j = [\theta_j, \theta_{j+1}]$  assoziiert ist, genau einen kritischen Punkt von  $P_c$ . Ist  $k = 1$ , so enthält  $S_0$  wegen Satz 1.3.1 genau 2 Urbilder jedes Winkels aus  $S_j$ . Der Winkel  $\theta_j$  hat  $\theta_0$  und einen weiteren Winkel  $\vartheta \in (\theta_0, \theta_1)$  (nicht  $\theta_1$ , denn  $d\theta_1 \pmod{1} = \theta_{j+1}$ ) als Urbild. Dem Winkel  $\vartheta$  entspricht der gesuchte Urbildstrahl.

Ist  $k > 1$ , so enthält der dem Intervall  $[d^{k-1}\theta_0, d^{k-1}\theta_1]$  assoziierte Sektor keinen kritischen Punkt von  $P_c$ , da  $k$  nach Definition minimal gewählt ist. Das Intervall wird also homöomorph auf  $I_j$  abgebildet. Dies gilt sukzessive für alle, außer dem ersten Intervall. Das einzige Intervall, welches nicht homöomorph abgebildet wird, ist  $I_0$ , und obige Argumentation ist anwendbar.  $\square$

Die Urbildstrahlen landen notwendigerweise in einer Nullstelle von  $\tilde{P}$ , welche in  $G$  enthalten ist.

Nun werden wir die Kurve  $\Gamma$  definieren. Dazu sei  $\varepsilon > 0$  so klein, dass der Kreis  $K_{2\varepsilon}(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\varepsilon\}$  keinen kritischen Punkt von  $\tilde{P}$  enthält (insbesondere ist  $K_{2\varepsilon}(0)$  in einem Gebiet enthalten, in dem eine konforme Umkehrfunktion von  $\tilde{P}$  existiert). Es sei  $\delta = \max G|_{K_\varepsilon(0)}$ , wobei  $G$  die Greensche Funktion des Außengebietes sei (mit Pol in  $\infty$  und auf der aufgefüllten Juliamenge  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(P_c)$  durch 0 fortgesetzt).

Die Menge  $\mathcal{K} \setminus \{0\}$  zerfällt in  $ld$  Zusammenhangskomponenten  $\mathcal{K}_j$ . Diese nummerieren wir (mathematisch positiv), so dass  $R_j \cup \{0\} \cup R_{j+1}$  (Indizes mod  $ld$ ) die Komponente  $\mathcal{K}_j$  von den anderen Komponenten trennt. Es ist dann  $\zeta \in \mathcal{K}_0$ .

Es sei  $\mathcal{R}_j$  die Zusammenhangskomponente von  $\mathcal{A}(\infty) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\varepsilon\}$ , deren Schnitt mit  $R_j$  nicht leer ist. Wir definieren die Menge  $K$  als Zusammenhangskomponente von  $K_\varepsilon(0) \setminus \{\mathcal{R}_0 \cup \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{R}_1\}$ . Deren Endpunkte erfüllen  $z_0 \in \mathcal{K}_{ld-1}$  und  $z_1 \in \mathcal{K}_1$  (im Fall  $d = 2$  ist  $\mathcal{K}_{ld-1} = \mathcal{K}_1$  möglich). Insbesondere ist kein Punkt von  $K$  in  $R_0$  enthalten.

Nach Voraussetzung ist die Juliamenge eine Kurve. In  $z_0$  und in  $z_1$  landen demnach external Rays. Es seien  $S_0$  und  $S_1$  Teilstücke dieser landenden Strahlen, welche  $z_0$  bzw.  $z_1$  und die Niveaulinie  $N_\delta := \{z \in \mathbb{C} : G(z) = 2\delta\}$  verbinden. Die Schnittpunkte der Strahlen mit  $N_\delta$  sind eindeutig. Es sei  $\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  die Böttcherabbildung. Damit definieren wir  $N \subset N_\delta$  durch

$$N = \{z \in N_\delta : \text{Arg } \varphi(S_0) \leq \text{Arg } \varphi(z) \leq \text{Arg } \varphi(S_1)\}.$$

**Definition 2.3.5** Mit den obigen Bezeichnungen sei

$$\Gamma := K \cup S_1 \cup N \cup S_2$$

und  $\gamma$  die Zusammenhangskomponente des Urbildes von  $\Gamma$  unter  $\tilde{P}_c$ , welches  $K$  ins Innengebiet von  $K_\varepsilon$  abbildet (Abbildung 2.3).

Offenbar ist  $\Gamma$  eine Jordankurve, die keinen kritischen Wert von  $\tilde{P}_c$  enthält. Damit ist auch  $\gamma$  eine geschlossene Jordankurve. Noch sind zwei Dinge zu zeigen. Zum Einen werden wir zeigen, dass  $\Gamma$  und  $\gamma$  keinen Schnittpunkt haben. Des Weiteren sind die Kurven  $\Gamma$  und  $\gamma$  nicht analytisch. Wir werden die beiden Kurven anschließend durch geeignete analytische Approximationen ersetzen.

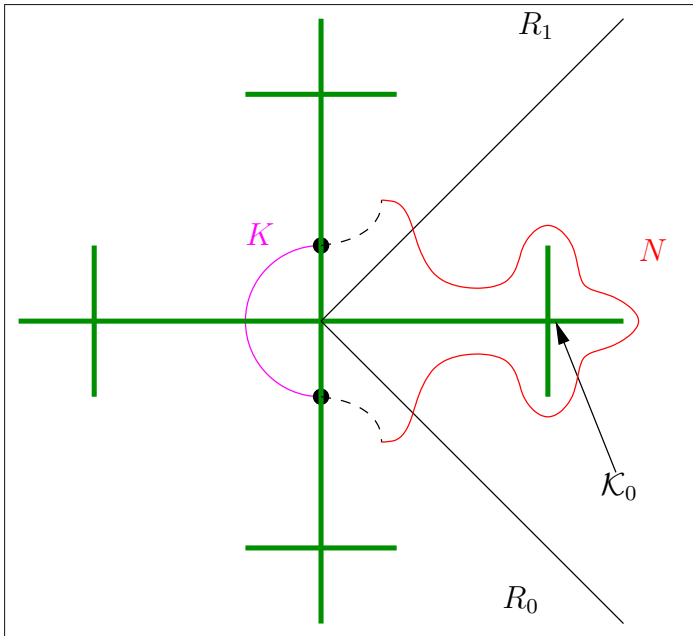


Abbildung 2.5: Schematische Darstellung von  $\Gamma$ . Das grüne Kreuz symbolisiert die aufgefüllte Juliamenge  $\mathcal{K}$ .

**Lemma 2.3.6** Die Abbildung  $\tilde{P}$  ist eine eigentliche Abbildung vom Grad 2 von  $\text{int } \gamma$  auf  $\text{int } \Gamma$ .

**Beweis:** Nach Konstruktion ist  $\tilde{P}$  eigentlich. Wie im Beweis von Lemma 2.3.4 untersuchen wir zunächst den Fall  $k = 1$ . In  $\text{int } \gamma$  hat  $P$  nach Konstruktion genau einen kritischen Punkt. Ist  $k > 1$ , so enthält  $P^l(\text{int } \gamma)$  für  $1 \leq l < k$  keinen kritischen Punkt von  $P$ .  $\square$

**Lemma 2.3.7** Es gilt  $\Gamma \cap \gamma = \emptyset$ .

**Beweis:** Angenommen, es existiert  $z' \in \Gamma \cap \gamma$ . Nach Konstruktion gilt für die Greensche Funktion  $G|_{\Gamma} \leq 2\delta$ . Für  $\gamma$  bedeutet dies  $G|_{\gamma} \leq \frac{2\delta}{(d+1)^k} < \delta$ , da  $d \geq 2$  und  $k \geq 1$ . Insgesamt folgt  $G(z') < \delta < 2\delta$ , damit ist  $z' \notin N$ . Insbesondere ist  $z'$  in der Komponente der durch  $R_0 \cup \{0\} \cup R_1$  zerlegten



Ebene enthalten, die nicht  $K_0$  enthält.

Es sei  $g$  die in einer Umgebung von 0 definierte Umkehrabbildung von  $\tilde{P}$ , die 0 auf 0 abbildet. Da 0 attraktiver Fixpunkt für  $g$  ist, gilt  $g(K) \cap K = \emptyset$ .

Die Strahlstücke  $S_0$  und  $S_1$  können sich nicht mit ihren Urbildern unter  $\tilde{P}$  schneiden, da sie nicht Teilstücke von Fixstrahlen sind.

Was bleibt zu untersuchen: (Wir betrachten jeweils die Urbilder, die in  $\gamma$  enthalten sind.)

1. Ein Urbild von  $N$  könnte  $S_0$  oder  $S_1$  schneiden.
2. Ein Urbild von  $N$  oder ein Urbild von  $S_0$  oder  $S_1$  könnte  $K$  schneiden.
3. Ein Urbild von  $K$  könnte  $S_0$  oder  $S_1$  schneiden.

Es sei  $\tilde{N} = N \cup S_0 \cup S_1$ . Diese Kurve verbindet  $z_0$  mit  $z_1$ . Betrachte  $\tilde{N}$  in Böttcherkoordinaten. Es sei  $G$  das Gebiet aus Lemma 2.3.4. Es

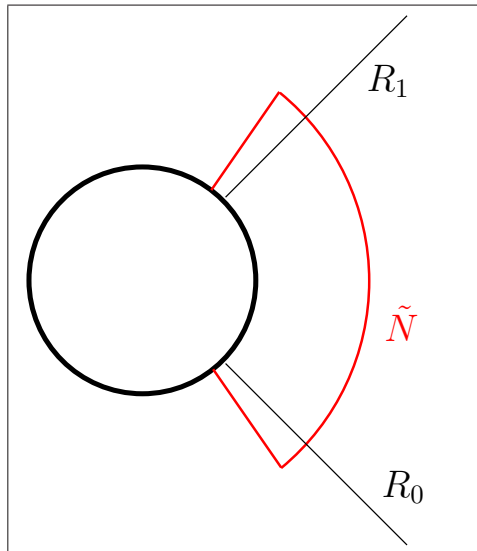


Abbildung 2.6:  $\tilde{N}$  in Böttcherkoordinaten.

enthält nach Lemma 2.3.4 je ein Urbild  $R'_0$  von  $R_0$  und  $R'_1$  von  $R_1$  (mit  $R_j \neq R'_j$ ), die in der in  $G$  enthaltenden Nullstelle landen. Da  $\tilde{P}$  orientierungserhaltend ist, gilt für die Argumente ( $\text{Arg } R_t = \text{Arg } z = t$  mit  $z \in \varphi(R_t)$  beliebig,  $\varphi$  die Böttcherabbildung) in Böttcherkoordinaten:

$$\text{Arg } R_0 < \text{Arg } R'_0 < \text{Arg } R'_1 < \text{Arg } R_1.$$

Hierbei verstehen wir  $a < b < c$  in  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  so, dass  $b$  zwischen (bzgl. mathematisch positiver Richtung)  $a$  und  $c$  liegt. Also existieren zwei disjunkte Urbilder von  $\tilde{N}$ , die zu  $\gamma$  gehören. Das Urbild eines Bogens (in Böttcherkoordinaten)  $N$  schneidet die Strahlen  $R'_0$  und  $R_1$  oder  $R_0$  und  $R'_1$ . Diese Urbilder sind im Innengebiet der geschlossenen Kurve (in Böttcherkoordinaten)

$$\tilde{N} \cup \{|z| = 1 : \text{Arg } S_0 \leq z \leq \text{Arg } S_1\}$$

enthalten. Falls dies nicht so wäre, dann existierte ein Schnittpunkt  $s$  (ohne Einschränkung  $s \in S_1$ ) von  $S_1$  mit einem Urbild von  $N$ . Für die Argumente gilt:

$$\text{Arg } R_1 < \text{Arg } S_1 < \text{Arg } S'_1$$

und entsprechend für das Bild unter  $\sigma$  (insbesondere für  $N$ ):

$$\text{Arg } R_1 < (d+1)^k \text{Arg } S_1 \pmod{1} < \text{Arg } S_1.$$

Dann wäre  $N$  aber ein Vollkreis, weil die Länge des Bildintervalls unter  $\sigma$  kleiner als die Länge des ursprünglichen Intervalls wäre. Dies ist ein Widerspruch und zeigt Punkt 1.

Die zu  $\gamma$  gehörenden Urbilder von  $\tilde{N}$  sind in  $\mathcal{A}(\infty)$  enthalten. Nach Konstruktion sind alle in  $A_\infty$  enthaltenden Komponenten von  $K$  nicht in  $R_0$  enthalten. In Böttcherkoordinaten betrachtet liegen sie im Außengebiet der Kurve

$$\tilde{N} \cup \{|z| = 1 : \text{Arg } S_0 \leq z \leq \text{Arg } S_1\}.$$

Folglich kann es keinen Schnittpunkt zwischen Urbildern von  $N$ ,  $S_0$  oder  $S_1$  und dem Kreissegment  $K$  geben, was Punkt 2 zeigt.

Für die Mengen  $\mathcal{R}_j$  ( $j = 0, 1$ ) und die Funktion  $g$  (in einer Umgebung um 0, die  $K_{2\varepsilon}(0)$  enthält, definierte Umkehrfunktion von  $\tilde{P}$ ) gilt  $g(\mathcal{R}_j) \subset \mathcal{R}_j$ ,

da die Strahlen, die in 0 landen, unter  $\tilde{P}$  und damit auch unter  $g$  fix sind. Deshalb gilt

$$g(K) \cap S_0 = \emptyset \text{ und } g(K) \cap S_1 = \emptyset,$$

weil  $S_j \subset \mathcal{R}_j$ . Dies zeigt Punkt 3.  $\square$

**Lemma 2.3.8** *Es seien  $\Gamma$  und  $\gamma$  wie in Definition 2.3.5. Dann existieren analytische Jordankurven  $\gamma'$  und  $\Gamma'$  mit*

$$\tilde{P} : \text{int } \gamma' \xrightarrow{2:1} \text{int } \Gamma'$$

und  $\gamma' \cap \Gamma' = \emptyset$ .

**Beweis:** Es sei  $\varphi$  die Riemannabbildung, die  $\text{int } \Gamma$  konform auf  $\mathbb{D}$  abbildet und für die  $\varphi(0) = 0$  gilt. Für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  ist

$$\Gamma' := \varphi^{-1}(\{|z| = 1 - \varepsilon\})$$

eine analytische Jordankurve mit analytischem Urbild  $\gamma'$  unter  $\tilde{P}$ , so dass die Aussagen aus Lemma 2.3.4 gelten.  $\square$

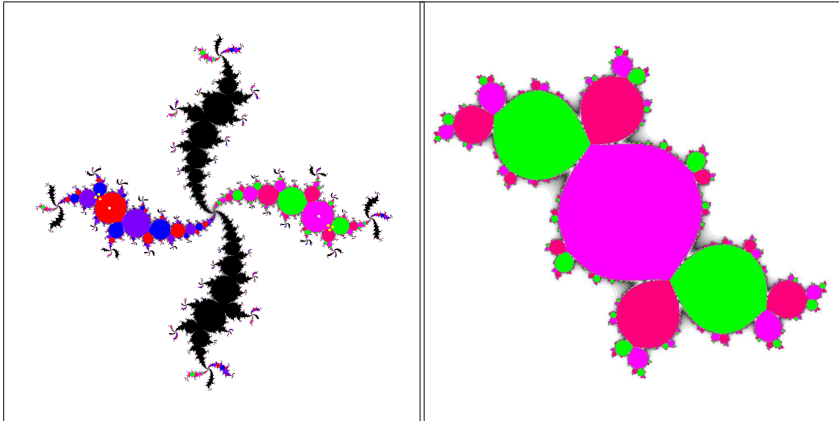


Abbildung 2.7: Das Polynom 5ten Grades.      Abbildung 2.8: Das Polynom 2ten Grades

Die obigen Aussagen beweisen Satz 2.1.7. Das heißt, die Abbildung  $\tilde{P}$  ist eine polynomähnliche Abbildung zwischen den Innengebieten von  $\gamma$

und  $\Gamma$ . Betrachten wir die aufgefüllte Juliamenge der polynomähnlichen Abbildung  $\mathcal{K} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{P}^{-n}(\overline{\text{int } \gamma})$  oder die Juliamenge, als ihr Rand, so ist diese konjugiert zu der (aufgefüllten) Juliamenge eines quadratischen Polynoms.

Die von uns zu dem Beweis von Satz 2.3.1 angewandte Methode kann als Variation der Methode der Renormalisierung verstanden werden (siehe [McM2]). Im Gegensatz dazu betrachten wir nicht ausschließlich Iterierte, sondern nutzen noch die Symmetrien der Familie  $P_c$  aus.

# Kapitel 3

## Die Parameterebene

### 3.1 Einleitung

Nachdem wir im vorigen Kapitel die Dynamik eines hyperbolischen Polynoms  $P_c$  für ein festes  $c$  beschrieben haben, werden wir in diesem Kapitel untersuchen, wie sich die Juliamenge verändert, wenn wir den Parameter  $c$  variieren. Wir teilen die Parameterebene in Parameter, in denen die Juliamenge zusammenhängend ist und in solche, in denen sie nicht zusammenhängend ist, ein. Auf diese Weise erhalten wir den so genannten *Connectedness Locus*. Im quadratischen Fall ( $d = 1$ ) wird diese Menge auch Mandelbrotmenge genannt. Wesentliche Eigenschaften dieser Menge gehen auf systematische Untersuchungen von Douady und Hubbard (vgl. [DH1]) zurück. Einige ihrer Ideen werden wir übertragen.

**Definition 3.1.1** Es sei  $d \in \mathbb{N}$ . Wir definieren die Menge  $\mathcal{C}_d \subset \mathbb{C}$  als die Menge aller Parameter  $c \in \mathbb{C}$ , so dass die Juliamenge  $\mathcal{J}(P_c)$  zusammenhängend ist.

Mit den Bezeichnungen und der Aussage von Lemma 2.1.1 ( $\zeta Q_n(c) = P_c^n(\zeta)$  für einen kritischen Punkt  $\zeta$ ) erhalten wir die folgende Charakterisierung von  $\mathcal{C}_d$ :

**Folgerung 3.1.2** *Es gilt  $c \in \mathcal{C}_d$  genau dann, wenn die Menge*

$$\{Q_n(c) : n \in \mathbb{N}\}$$

*beschränkt ist*

Wir untersuchen die Menge  $\mathcal{C}_d$  auf Symmetrien. Auch hier sind die Polynome  $Q_n$  nützlich, um die Aussagen zu beweisen. Wie im vorherigen Abschnitt bezeichne  $\Sigma_d$  die Menge  $\{\omega z : \omega^d = 1\}$ .

**Lemma 3.1.3** *Für jedes  $d \in \mathbb{N}$  ist  $\mathcal{C}_d$  symmetrisch zur reellen Achse. Für die Menge  $\mathcal{C}_d$  gilt  $\omega\mathcal{C}_d = \mathcal{C}_d$  für  $\omega \in \Sigma_d$ . Für jedes  $d$  gilt  $\mathbb{D} \subset \mathcal{C}_d$ .*

**Beweis:** Die erste Aussage folgt aus der Tatsache, dass  $Q_n$  ein Polynom mit reellen Koeffizienten ist. Deshalb gilt  $|Q_n(\bar{z})| = |Q_n(z)| = |Q_n(z)|$ . Aus der Darstellung der  $Q_n$  folgt  $Q_n(\omega c) = \omega Q_n(c)$ . Damit gilt

$$|Q_n(c)| = |\omega Q_n(c)| = |Q_n(\omega c)|.$$

Insbesondere gilt  $c \in \mathcal{C}_d$  genau dann, wenn  $\omega c \in \mathcal{C}_d$  ist.

Wegen (2.3) werden für  $|c| < 1$  alle kritischen Punkte von dem attraktiven Fixpunkt 0 angezogen. Insbesondere ist ihr Orbit beschränkt und damit ist  $\mathbb{D} \subset \mathcal{C}_d$   $\square$

Folgerung 3.1.2 können wir noch einen quantitativen Charakter geben, der insbesondere eine Schranke zum Erstellen von Bildern am Computer durch *escape-time-Algorithmen* liefert.

**Lemma 3.1.4** *Es sei  $c \in \mathbb{C}$  und  $d \in \mathbb{N}$ . Ist  $|c| > 6$ , dann ist  $c \notin \mathcal{C}_d$ . Insbesondere gilt*

$$\mathcal{C}_d = \{c \in \mathbb{C} : |Q_n(c)| \leq 6 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

**Beweis:** Wir nutzen die in Lemma 2.1.1 definierten Polynome  $Q_n$  und zeigen, dass für  $|c| > 6$  die Abschätzung  $|Q_n(c)| \geq 3^n$  gilt.

Da  $d \geq 1$  ist, gilt (Induktionsanfang)

$$|Q_1(c)| = \frac{d}{d+1}|c| \geq \frac{1}{2} \cdot 6 = 3^1.$$

Weiter gilt (Induktionsschritt)

$$\begin{aligned} |Q_{n+1}(c)| &= \frac{1}{d+1} |cQ_n(c)| |(Q_n(c))^d - 1| \\ &\geq \frac{1}{d+1} 6 \cdot 3^n (3^{dn} - 1) \\ &\geq 3^{n+1}. \end{aligned}$$

Für  $|c| < 1$  gilt stets  $c \in \mathcal{C}_d$  nach Lemma 3.1.3. Sei also  $|c| \geq 1$ . Gilt für  $n \in \mathbb{N}$  und  $c \in \mathbb{C}$ , dass  $|Q_n(c)| > 6$  ist, so folgt aus der rekursiven Definition der  $Q_n$  und der obigen Induktion, dass die Menge  $\{Q_n(c) : n \in \mathbb{N}\}$  unbeschränkt ist. Nach Folgerung 3.1.2 zeigt dies die Darstellung.  $\square$

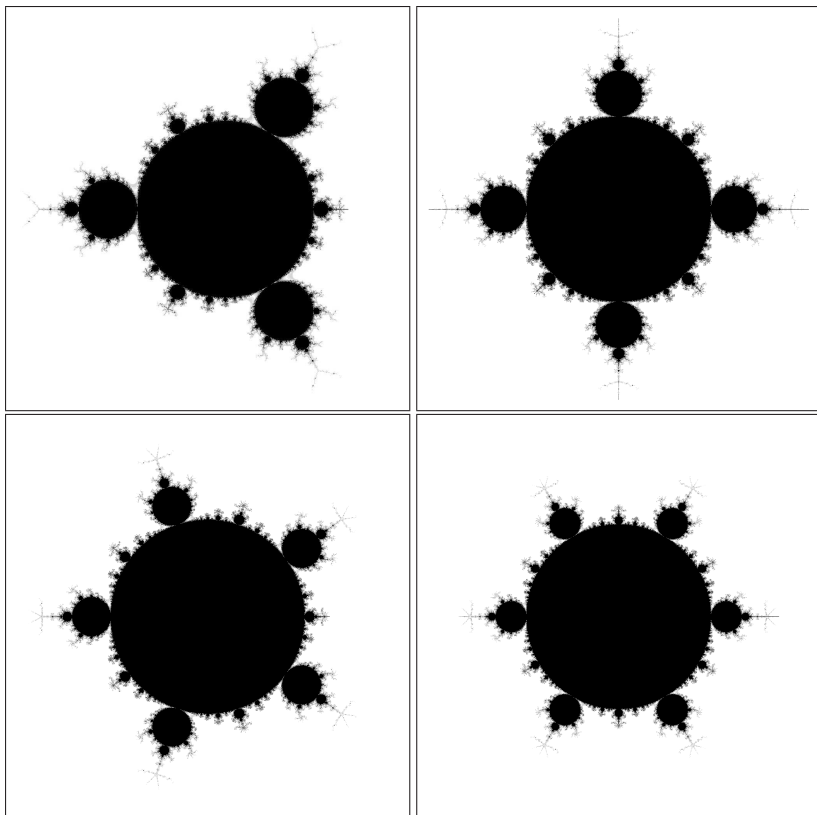


Abbildung 3.1: Connectedness Locus für  $d = 3, 4, 5, 6$ .

## 3.2 Topologie der Menge $\mathcal{C}_d$

In diesem Abschnitt werden wir topologische Eigenschaften der Menge  $\mathcal{C}_d$  studieren. Wir werden zeigen (vgl. Mandelbrotmenge), dass für jedes  $d \in \mathbb{N}$  die Menge  $\mathcal{C}_d$  eine kompakte und zusammenhängende Menge ist. Hierfür modifizieren wir den Beweis von Douady und Hubbard, den sie für die Mandelbrotmenge entwickelt haben. Sie konstruieren eine Funktion, die das Äußere der Mandelbrotmenge auf das Äußere des Einheitskreises konform abbildet.

**Satz 3.2.1** *Es sei  $d \in \mathbb{N}$ . Dann gilt*

1.  $\mathcal{C}_d$  ist kompakt, und
2.  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d$  ist ein Gebiet.

**Beweis:** Wegen Lemma 3.1.4 ist noch zu zeigen, dass die Menge  $\mathcal{C}_d$  abgeschlossen ist. Dies gilt, da

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_d &= \{c \in \mathbb{C} : |Q_n(c)| \leq 6 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{c \in \mathbb{C} : |Q_n(c)| \leq 6\}. \end{aligned}$$

Damit ist  $\mathcal{C}_d$  kompakt.

Falls  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d$  nicht zusammenhängend ist, existiert eine beschränkte Zusammenhangskomponente  $U$  von  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d$ . Für  $\zeta \in \partial U \subset \mathcal{C}_d$  gilt aufgrund von Lemma 3.1.4 dann  $|Q_n(\zeta)| < 6$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Aufgrund des Maximumprinzips gilt dann auch  $|Q_n(u)| < 6$  für alle  $u \in U$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Das hieße aber  $U \subset \mathcal{C}_d$ , was ein Widerspruch ist.  $\square$

Wir zeigen jetzt, dass die Mengen  $\mathcal{C}_d$  zusammenhängend sind, indem wir den Douady-Hubbard Beweis für die klassische Mandelbrotmenge modifizieren. Um eine einfache Parametrisierung für die kritischen Punkte zu erlangen, betrachten wir bis zum Ende dieses Abschnitts Polynome, die durch die Formel

$$z^{d+1} - c^d z$$

definiert werden. Der Lesbarkeit halber werden wir ebenfalls die Bezeichnung  $P_c$  wählen. Ohne Beweis fassen wir die folgenden Eigenschaften zusammen.



**Satz 3.2.2** Die endlichen kritischen Punkte von  $z^{d+1} - c^d z$  erfüllen die Gleichung  $z^d = \frac{c^d}{d+1}$ . Der Orbit eines kritischen Punktes unter Iteration ist genau dann beschränkt, wenn der Orbit aller kritischen Punkte beschränkt ist.

Für einen kritischen Punkt  $\zeta$  gilt  $P_c^n(\zeta) = \zeta Q_n(c^d)$  mit den in Lemma 2.1.1 definierten Polynomen  $Q_n$ .

Die Symmetrie der Mengen  $\mathcal{C}_d$  (nicht der Juliamengen) hat sich jetzt verändert. War sie vorher invariant unter Multiplikation mit  $\omega \in \Sigma_d$ , so ist sie nun invarinat unter Multiplikation mit  $\omega \in \Sigma_{d^2}$  (siehe Abbildung 3.2).

**Lemma 3.2.3** Für  $\omega \in \Sigma_{d^2}$  gilt  $\omega \mathcal{C}_d = \mathcal{C}_d$ .

**Beweis:** Es sei  $c \in \mathcal{C}_d$  und  $\omega \in \Sigma_{d^2}$ . Dann gilt  $\omega^d \in \Sigma_d$  und damit

$$P_{\omega c}(\zeta) = Q_n((\omega c)^d) = \omega^d Q_n(c^d).$$

Die Behauptung folgt wie in Lemma 3.1.3. □

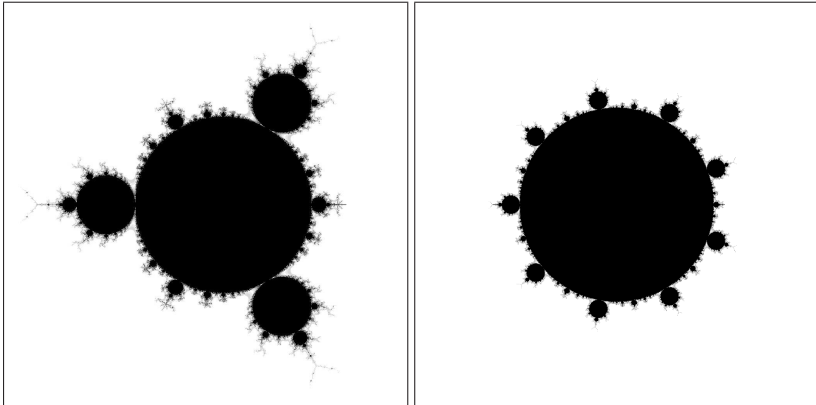


Abbildung 3.2: Connectedness Locus für  $d = 3$  bzgl.  $z(z^d - c)$  (linkes Bild) und bzgl.  $z(z^d - c^d)$  (rechtes Bild).

Wir werden nun die eingangs besprochene Abbildung erklären. Dazu benötigen wir die Böttcherfunktion  $\varphi_c$ , die in einer Umgebung von Un-

endlich die Lösung der Böttcher-Funktionalgleichung

$$\varphi_c \circ P_c \circ \varphi_c^{-1}(z) = z^{d+1} \quad (3.1)$$

ist. Sie ist durch  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\varphi_c(P_c(z))}{z^{d+1}} = 1$  normiert. Die Funktion  $\varphi$  ist mit diesen Voraussetzungen eindeutig bestimmt und in den Variablen  $z$  (in einer von  $c$  abhängigen Umgebung von Unendlich) und  $c$  (in ganz  $\mathbb{C}$ , da  $P_c$  holomorph in  $\mathbb{C}$  von  $c$  abhängt) holomorph.

**Definition 3.2.4** Es sei  $\Phi : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  durch

$$\Phi(c) = \varphi_c(P_c(\zeta_c))$$

definiert. Dabei parametrisiert  $\zeta_c = c \sqrt[d]{\frac{1}{d+1}}$  einen kritischen Punkt.

Als erstes zeigen wir, dass die Funktion  $\Phi$  wohldefiniert ist.

**Lemma 3.2.5** *In  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d$  ist  $\Phi$  wohldefiniert.*

**Beweis:** Es sei  $r > 0$  so groß gewählt, dass  $\varphi_c$  in  $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$  existiert. Wir definieren rekursiv das Gebiet  $D_n$  als die Komponente von  $P_c^{-1}(D_{n-1})$ , die  $D_{n-1}$  enthält. Aus der Riemann-Hurwitz-Formel folgt, dass die Gebiete  $D_n$  einfach zusammenhängend sind, solange kein kritischer Punkt in  $D_n$  enthalten ist. Wir wählen  $n_0$  als die größte natürliche Zahl, so dass das Gebiet  $D_{n_0}$  noch einfach zusammenhängend ist:

$$n_0 := \max\{n \in \mathbb{N} : \zeta_c \notin D_n\}.$$

In  $D_0$  ist  $\varphi_c$  definiert. Mit (3.1) setzen wir  $\varphi_c$  durch

$$\varphi_c(z) = \sqrt[d+1]{\varphi_c(P_c(z))} \quad (3.2)$$

sukzessive nach  $D_{n_0}$  fort. Da  $P_c(\zeta_c) \in D_{n_0}$  gilt, ist  $\Phi$  für  $c \notin \mathcal{C}_d$  wohldefiniert.  $\square$

**Lemma 3.2.6** *Die Funktion  $\Phi$  ist eine eigentliche Abbildung von  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d$  auf  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ .*

**Beweis:** Wir zeigen, dass für  $c \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d$  und  $c \rightarrow \partial\mathcal{C}_d$  auch  $\Phi(c) \rightarrow \partial\mathbb{D}$  gilt. Dazu wählen wir die Zahl  $r$  aus Lemma 3.2.5 so groß, dass  $|\varphi_c(z)| > 1$  in  $D_0$  ist. Aus (3.2) folgt  $|\Phi(c)| > 1$  für  $c \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d$ . Für  $c_0 \in \partial\mathcal{C}_d$  ( $r$  hinreichend groß) ist  $P_{c_0}(\overline{D_0}) \subset D_0$ . Wähle ein  $\delta > 0$ , so dass für  $|c - c_0| < \delta$  auch  $P_c(\overline{D_0}) \subset D_0$  gilt. Es sei

$$M_c := \max\{|\varphi_c(z)| : z \in \overline{D_0} \setminus P_c(D_0)\}$$

und

$$M := \sup\{M_c : |c - c_0| < \delta\} > 1. \quad (3.3)$$

Für hinreichend kleines  $\delta$  ist  $M$  endlich. Für  $c \notin \mathcal{C}_d$  definieren wir  $k(c)$  durch

$$k(c) = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : P_c^k(\zeta_c) \in D_0\}. \quad (3.4)$$

Falls  $c \rightarrow \partial\mathcal{C}_d$ , folgt auch  $k(c) \rightarrow \infty$ . Denn angenommen nicht, dann existiert eine Folge  $(c_j)$  und ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit  $c_j \rightarrow c_0 \in \partial\mathcal{C}_d$  und  $k(c_j) \leq k_0$ . Somit ist  $P_{c_j}^{k_0}(\zeta_{c_j}) \in D_0$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Nach Grenzübergang ( $j \rightarrow \infty$ ) folgt  $P_{c_0}^{k_0}(\zeta_{c_0}) \in \overline{D_0}$ , was hieße, dass der Orbit dieses kritischen Punktes unbeschränkt ist. Damit wäre  $c_0 \notin \mathcal{C}_d$ , was ein Widerspruch ist. Aufgrund der Böttcher-Funktionalgleichung gilt

$$\Phi(c) = {}^{(d+1)^k} \sqrt{\varphi_c(P_c^k(\zeta_c))}.$$

Da  $P_c^{k(c)}(\zeta_c) \in \overline{D_0} \setminus P_c(D_0)$  ist, folgt mit (3.3), (3.4)

$$\begin{aligned} 1 < |\Phi(c)| &= {}^{(d+1)^{k(c)}} \sqrt{|\varphi_c(P_c^{k(c)}(\zeta_c))|} \\ &\leq {}^{(d+1)^{k(c)}} \sqrt{M}. \end{aligned}$$

Aus  $k(c) \rightarrow \infty$  für  $c \rightarrow \partial\mathcal{C}_d$  folgt die Behauptung.  $\square$

Im Folgenden bestimmen wir den Abbildungsgrad der Abbildung  $\Phi$ .

**Lemma 3.2.7** *Es sei  $\varphi_n(z) = {}^{(d+1)^n} \sqrt{P_c(z)}$  die  $n$ -te Approximation an die Böttcher-Funktion. Dann gilt für  $|z| \geq 2|c|$  mit*

$$e_n = \frac{(d+1)^n - 1}{d(d+1)^{n-1}} \sim 1 + \frac{1}{d} \quad (\text{für } n \rightarrow \infty)$$

die Abschätzung

$$|\varphi_n(z)| \leq |z| \left(1 + \frac{1}{d(2^d - 1)}\right)^{e_n}.$$

Inbesondere ist für  $|z| \geq 2|c|$

$$|\varphi_c(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(z)| \leq |z| 2^{(d+1)/d} \leq 4|z|.$$

**Beweis:** Für  $|z| < 1$  folgt die Reihenentwicklung von

$${}^{d+1}\sqrt{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{d+1}}{k} z^k$$

aus der Binomischen Reihe. Für die Koeffizienten gilt

$$\begin{aligned} \left| (-1)^k \binom{\frac{1}{d+1}}{k} \right| &= \left| \frac{\frac{1}{d+1}}{1} \right| \left| \frac{\frac{1}{d+1} - 1}{2} \right| \cdots \left| \frac{\frac{1}{d+1} - k + 1}{k} \right| \\ &\leq \frac{1}{d+1}. \end{aligned}$$

Wir nutzen die rekursive Darstellung

$$\varphi_1(z) = {}^{d+1}\sqrt{P_c(z)} \quad \text{und} \quad \varphi_{n+1}(z) = {}^{d+1}\sqrt{\varphi_n(P_c(z))}. \quad (3.5)$$

Wegen der obigen Abschätzung der Koeffizienten und unter der Voraussetzung  $|z| > 2|c|$  gilt für  $n = 1$  (Induktionsanfang)

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= |z| \left| {}^{d+1}\sqrt{1 - \frac{c^d}{z^d}} \right| \\ &\leq |z| \left( 1 + \left| \frac{1}{d+1} \right| \left| \frac{c}{z} \right|^d + \left| \frac{1}{d+1} \right| \left| \frac{c}{z} \right|^{2d} \cdots \right) \\ &\leq |z| \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{d 2^{kd}} \right) \\ &= |z| \left( 1 + \frac{1}{d(2^d - 1)} \right)^{e_1}. \end{aligned}$$

Weiter gilt für  $n \in \mathbb{N}$  (Induktionsschritt)

$$\begin{aligned}
 |\varphi_{n+1}(z)| &= \left| {}^{d+1}\sqrt{\varphi_n(P_c(z))} \right| \\
 &\leq {}^{d+1}\sqrt{|P_c(z)| \left(1 + \frac{1}{d(2^d - 1)}\right)^{e_n}} \\
 &= |z| \left(1 + \frac{1}{d(2^d - 1)}\right)^{\frac{e_n}{d+1}} {}^{d+1}\sqrt{\left|1 - \frac{c^d}{z^d}\right|} \\
 &\leq |z| \left(1 + \frac{1}{d(2^d - 1)}\right)^{\frac{e_n}{d+1}} \left(1 + \frac{1}{d(2^d - 1)}\right) \\
 &= |z| \left(1 + \frac{1}{d(2^d - 1)}\right)^{e_{n+1}}.
 \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \frac{d+1}{d}$ . □

**Lemma 3.2.8** *Für die Entwicklung und Abschätzung der Koeffizienten von  $\varphi_c$  gilt*

1.  $\varphi_c(z) = z + \frac{a_1}{z^{d-1}} + \frac{a_2}{z^{2d-1}} + \dots = z \left(1 + \frac{a_1}{z^d} + \frac{a_2}{z^{2d}} + \dots\right)$  und
2.  $|a_n| \leq 4|2c|^{nd}$ .

**Beweis:**

1. Für die Böttcherfunktion gilt die Entwicklung

$$\varphi_c(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots$$

Nach Lemma 2.1.8 ist  $\varphi_c(\omega z) = \omega \varphi_c(z)$  mit  $\omega \in \Sigma_d$ . Aus  $\frac{1}{\omega^{d-1}} = \omega$  und einem Koeffizientenvergleich folgt die Behauptung.

2. Mit 1. gilt

$$z^{nd-2} \varphi_c(z) = z^{nd-1} + a_1 z^{(n-1)d-1} + \dots + a_n z^{-1} + \dots$$

Integrieren wir nun über einen Kreis mit Radius  $2|c|$ , so gilt für die Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2|c|} z^{nd-2} \varphi_c(z) dz.$$

Aus Lemma 3.2.7 folgt schließlich die Behauptung

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \cdot 2|c| |2c|^{nd-2} \max_{|z|=2|c|} |\varphi_c(z)| \leq 4|c|^{nd}.$$

□

In Lemma 3.2.6 hatten wir gezeigt, dass  $\Phi$  eine eigentliche Abbildung ist. Mit den obigen Vorbereitungen sind wir in der Lage den Abbildungsgrad von  $\Phi$  zu bestimmen, in dem wir sie bei  $\infty$  auswerten.

**Lemma 3.2.9** *Die Abbildung*

$$\Phi : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \quad (3.6)$$

ist eine eigentliche Abbildung vom Grad  $d + 1$ .

**Beweis:** Für den kritischen Wert

$$\omega_c = P_c(\zeta_c) = c^{d+1} \sqrt[d]{\frac{1}{d+1} \frac{-d}{d+1}}$$

gilt für hinreichend große  $c$  die Abschätzung

$$|\omega_c| = |c|^{d+1} \underbrace{\frac{d}{(d+1)^{1+\frac{1}{d}}}}_{:=K_d} \geq 2|c|.$$

In  $\varphi_c$  eingesetzt bedeutet dies (vgl. Lemma 3.2.8) für die Entwicklung von  $\Phi$

$$\Phi(c) = -K_d c^{d+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(c)}{c^{(d+1)(nd-1)} (-K_d)^{nd-1}}$$

für von  $c$  abhängige Koeffizienten  $a_n$ . Wir schätzen diese Koeffizienten ab, um zu zeigen, dass sie keinen Einfluss auf die Ordnung der Polstelle bei  $\infty$  haben, die durch den Summanden  $-K_d c^{d+1}$  erzeugt wird. Aus Lemma 3.2.8 und der Generalvoraussetzung  $d \geq 2$  folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n(c)}{c^{(d+1)(nd-1)} (-K_d)^{nd-1}} \right| &\leq \left| \frac{K(2c)^{nd}}{c^{(d+1)(nd-1)} (-K_d)^{nd-1}} \right| \\ &\leq K \left( \frac{1}{|c|^d} \right)^n. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Funktion einen  $(d+1)$ -fachen Pol bei  $\infty$  hat. Mit Lemma 3.2.6 folgt die Behauptung.  $\square$

Wir zeigen nun, dass wie bei der Mandelbrotmenge auch die Menge  $\mathcal{C}_d$  zusammenhängend ist.

**Satz 3.2.10** *Für jedes  $d \in \mathbb{N}$  ist  $\mathcal{C}_d$  zusammenhängend.*

**Beweis:** Für den Fall  $d = 1$  ist nichts zu zeigen. Für  $d > 1$  ist der Abbildungsgrad nach Lemma 3.2.9 von  $\Phi$  gleich  $d+1$ . Aus  $\Phi : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$  folgt, dass  $\mathcal{C}_d$  aus maximal  $d+1$  disjunkten Zusammenhangskomponenten besteht.

Nach Lemma 3.1.3 gilt  $\mathbb{D} \subset \mathcal{C}_d$ . Es bezeichne  $C_0$  die Zusammenhangskomponente, die  $\mathbb{D}$  enthält. Nehmen wir an, dass es mindestens eine weitere Zusammenhangskomponente  $C_1$  von  $\mathcal{C}_d$  existiert. Nach Lemma 3.2.3 ist  $\mathcal{C}_d$  symmetrisch. Genauer gilt  $\omega\mathcal{C}_d = \mathcal{C}_d$  für  $\omega \in \Sigma_{d^2}$ . Von  $C_1$  existieren also entweder insgesamt  $d^2$  symmetrische Komponenten, oder  $C_1$  ist invariant unter Drehungen mit dem Winkel  $\alpha = \frac{2\pi}{d^2}$ . Ersteres bedeutet aber, dass mindestens  $d^2 + 1$  Zusammenhangskomponenten existieren, was ein Widerspruch ( $d > 1$ ) ist. Das Zweite bedeutet, dass  $C_1$  ein Kreisring ist. Auch das ist ein Widerspruch, weil nach Satz 3.2.1  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d$  zusammenhängend ist.  $\square$

### 3.3 Die Parametrisierung der hyperbolischen Komponenten

Das nächste Lemma trifft eine strukturelle Aussage über den Connectedness Locus. Wir lassen den Beweis aus, da er unverändert aus [CARL] (Seite 127) übernommen werden kann.

**Lemma 3.3.1** *Für  $c_0 \in \mathcal{C}_d$  habe das Polynom  $P_{c_0}$  einen (super-)attraktiven Zykel der Länge  $m$ . Dann ist  $c_0 \in \mathcal{C}_d^o$ . Es sei  $\mathcal{H}$  die Zusammenhangskomponente von  $\mathcal{C}_d^o$ , die  $c_0$  enthält. Dann hat  $P_c$  für alle  $c \in \mathcal{H}$  einen (super-) attraktiven Zykel  $(z_1(c), \dots, z_m(c))$  der Länge  $m$ . Die Abbildung  $c \mapsto z_j(c)$  hängt analytisch von  $c$  ab.*

Mit Lemma 3.3.1 können wir jetzt erklären, was wir unter einer hyperbolischen Komponente verstehen. Der Name rechtfertigt sich aus der Tatsache, dass für jeden Parameter  $c$  aus einer solchen Komponente  $P_c$  ein hyperbolisches Polynom ist.

**Definition 3.3.2** Die Zusammenhangskomponenten  $\mathcal{H}$  aus Lemma 3.3.1 heißen die *hyperbolischen Komponenten* von  $\mathcal{C}_d$ . Wir nennen  $c \in \mathcal{H}$  einen *hyperbolischen Parameter*.

**Lemma 3.3.3** *Es sei  $\mathcal{H}$  wie in Lemma 3.3.1. Dann ist  $\mathcal{H}$  einfach zusammenhängend.*

**Beweis:** Die Polynome  $Q_n$  aus Lemma 2.1.1 beschreiben die Iteration des kritischen Punktes. Für sie gilt  $|Q_n(c)| \leq 6$  auf dem Rand jeder hyperbolischen Komponente  $\mathcal{H}$ . Falls  $\mathcal{H}$  nicht einfach zusammenhängend ist, so folgt aufgrund des Maximumprinzips  $|Q_n(c)| \leq 6$  auch für jede beschränkte Komplementärkomponente von  $\mathcal{H}$ . Das ist ein Widerspruch.  $\square$

Es sei  $c$  ein hyperbolischer Parameter und  $\{z_0, \dots, z_{m-1}\}$  ein attraktiver Zykel. Wir definieren die Multiplikatorabbildung  $\rho: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\rho(c) = (P_c^m)'(z_0(c)). \quad (3.7)$$

Aufgrund von Satz 2.1.4 ist die Definition der hyperbolischen Komponenten unabhängig von der Wahl des Zyklus (da auch mehrere attraktive Zyklen für einen Parameter  $c$  auftreten können). Dies gilt zunächst nicht für die Multiplikatorabbildung. Sie scheint abhängig von der Wahl des speziellen Zyklus zu sein. Allerdings gilt das folgende Lemma.

**Lemma 3.3.4** *Die Multiplikatorabbildung ist wohldefiniert.*

**Beweis:** Zu zeigen ist, dass  $\rho$  nicht von der Wahl des Zyklus abhängt. Dazu seien  $c$  ein hyperbolischer Parameter und  $\{z_0, \dots, z_{m-1}\}$  und  $\{w_0, \dots, w_{m-1}\}$  zwei verschiedene attraktive Zyklen von  $P_c$ . Ohne Einschränkung (Zykel sind symmetrisch und für den Multiplikator ist es unerheblich, welcher Zykelpunkt ausgewählt wird) sei  $z_0 = e^{2\pi i \frac{j}{d}} w_0$  für ein  $1 \leq j \leq d-1$ . Es



gilt

$$\begin{aligned}
 (P_c^m)'(z_0) &= \prod_{j=0}^{m-1} P_c'(z_j) \\
 &= \prod_{j=0}^{m-1} P_c'(w_j) \\
 &= (P_c^m)'(w_0),
 \end{aligned}$$

da wegen  $P_c'(z) = (d+1)z^d - c$  auch  $P_c'(z_j) = P_c'(w_j)$  ist.  $\square$

**Lemma 3.3.5** *Die Multiplikatorabbildung  $\rho$  bildet eine hyperbolische Komponente eigentlich auf den Einheitskreis ab.*

**Beweis:** Es sei  $\mathcal{H}$  eine hyperbolische Komponente und  $\{z_0, \dots, z_{m-1}\}$  ein attraktiver Zykel der Länge  $m$ . Wir wenden den Satz über implizite Funktionen auf

$$P_c^n(z) - z = 0 \quad \text{mit} \quad (P_c^n)'(z_0(c)) - 1 \neq 0$$

an. Lokal existiert also eine analytische Funktion  $c \mapsto z(c)$ , die einen Parameter  $c$  auf einen Zykelpunkt abbildet (vgl. Lemma 3.3.1). Dort, wo  $(P_c^n)'(z) \neq 1$  ist, ist die Multiplikatorabbildung  $\rho$  als analytische Funktion erklärt. Für  $c \in \mathcal{H}$  ist  $z(c)$  wegen Lemma 3.3.1 Punkt eines attraktiven Zyklus. Folglich ist  $|\rho(c)| < 1$  für  $c \in \mathcal{H}$ .

Die Singularitäten von  $\rho$  sind die endlich vielen  $c$  mit  $\rho(c) = 1$ . Für  $c \in \partial\mathcal{H}$  ist  $|\rho(c)| = 1$ . Denn angenommen nicht, dann existiert eine Umgebung  $U$  eines Randpunktes mit  $|\rho(c)| < 1$  für  $c \in U$ , was  $U \subset \mathcal{C}_d$  und insbesondere  $U \subset \mathcal{H}$  hieße. Folglich wird  $\mathcal{H}$  von  $\rho$  eigentlich auf  $\mathbb{D}$  abgebildet, und der Rand von  $\mathcal{H}$  ist eine algebraische Kurve.  $\square$

Um den Abbildungsgrad zu bestimmen, ist es nützlich, die Polynome  $P_c$  durch  $q(z) = z^d$  zu konjugieren, wie wir es in Kapitel 2.2 beschrieben haben. Wir erhalten Polynome  $f_c$  mit  $f_c(z) = z(z-c)^d$ . Der Connectedness Locus und die hyperbolischen Komponenten bleiben in diesem Fall (als geometrische Punktmenge) nach Satz 2.2.2 die gleichen. Die Multiplikatorabbildung verändert sich, steht aber in einem engen Zusammenhang (siehe Satz 3.3.9) mit der Multiplikatorabbildung für die

Familie  $\{P_c\}$ . Um zu unterscheiden, werden wir ab jetzt die Notation  $\rho_P$  und  $\rho_f$  verwenden.

Das folgende Lemma folgt aus Satz 2.2.2, und die Aussagen gelten analog zu Lemma 3.3.1 und Lemma 3.3.5.

**Lemma 3.3.6** *Es sei  $f_c$  wie in Lemma 2.2.1. Dann ist  $\mathcal{C}_d$  gerade der Connectedness Locus der Familie  $\{f_c\}$ , also die Menge der Parameter, so dass  $\mathcal{J}(f_c)$  zusammenhängend ist. Ist  $\mathcal{H}$  eine hyperbolische Komponente bezüglich der Familie  $\{P_c\}$ , so ist  $\mathcal{H}$  auch eine hyperbolische Komponente bezüglich der Familie  $\{f_c\}$  (Zykellängen stimmen im allgemeinen nicht überein). Durch*

$$\rho_f(c) := (f_c^m)'(z_0(c))$$

wird die Multiplikatorabbildung definiert. Sie bildet  $\mathcal{H}$  eigentlich auf den Einheitskreis ab.

**Satz 3.3.7** *Der Abbildungsgrad der Multiplikatorabbildung  $\rho_f$  ist entweder*

- $d$ , falls  $\mathcal{H} = \mathbb{D}$ , oder
- $1$  sonst.

**Beweis:** Es sei  $c \in \mathbb{D}$ . Dann gilt

$$|f_c'(0)| = |(-1)^d c^d| = |c^d| < 1.$$

Das heißt, dass  $0$  attraktiver Fixpunkt ist mit  $\rho_f(c) = (-1)^d c^d$ . Insbesondere ist der Abbildungsgrad der Multiplikatorabbildung  $d$ .

Es sei  $\mathcal{H} \neq \mathbb{D}$  eine hyperbolische Komponente und  $c \in \mathcal{H}$  mit attraktivem Zykel  $\{z_0, \dots, z_{m-1}\}$  der Länge  $m$ . Es seien  $U_0, \dots, U_{m-1}$  die Fatoukomponenten, die die Zykelpunkte enthalten. Wir wählen die Indizes so, dass  $z_j \in U_j$ , für  $j = 0, \dots, m-1$  gilt. Weiter sei der freie kritische Punkt  $\frac{c}{d+1} \in U_0$ . Damit ist

$$f_c : U_0 \xrightarrow{2:1} U_1 \text{ und } f_c : U_j \xrightarrow{1:1} U_{j+1} \text{ mit } j = 1, \dots, m.$$

Es sei  $\varphi$  die Riemann-Abbildung, die die Fatoukomponente  $U_0$  konform auf den Einheitskreis abbildet, wobei sie durch  $\varphi(z_0) = 0$  normiert sei. Damit ist

$$\varphi \circ f_c^m \circ \varphi^{-1}$$

für  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Blaschke-Produkt vom Grad 2, welches 0 fixiert:

$$B_\lambda(z) := \varphi \circ f_c^m \circ \varphi^{-1}(z) = e^{i\alpha} z \frac{z + \lambda}{1 + \bar{\lambda}z} \text{ für } |z| < 1. \quad (3.8)$$

Für die Multiplikatorabbildung gilt

$$\rho_f(c) = B'_\lambda(0) = e^{i\alpha}\lambda. \quad (3.9)$$

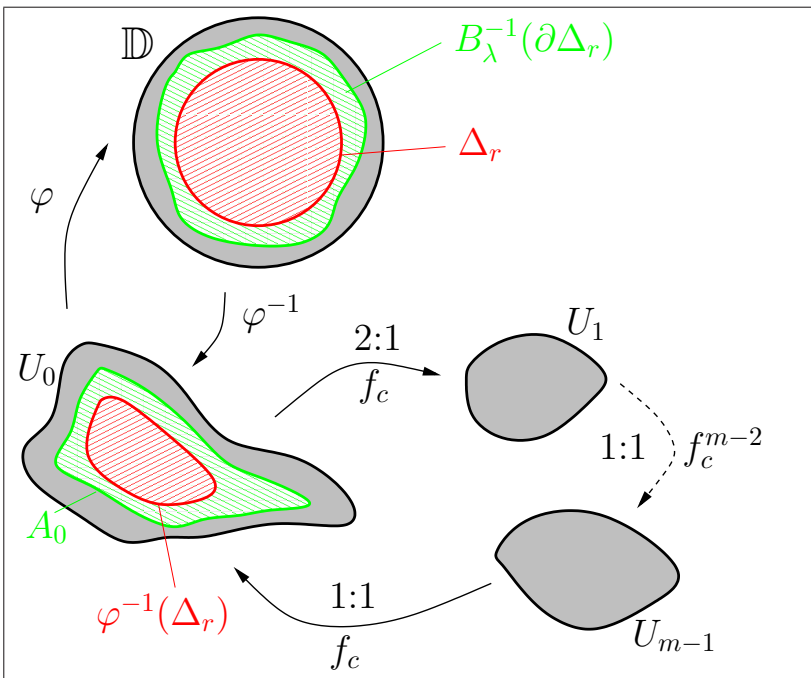


Abbildung 3.3: Zykel und Konjugation

Wir werden (3.9) jetzt umkehren, um zu zeigen, dass die Abbildung  $\rho$  konform ist. Das heißt, für **vorgebenes**  $\lambda \in \mathbb{D}$  suchen wir mittels quasikonformer Chirurgie ein Polynom aus der Familie  $\{f_c\}$  mit attraktiven Zykel und  $\lambda$  als Multiplikator des Zyklus. Diese Zuordnung wird stetig sein. Daraus werden wir folgern, dass  $\rho$  umkehrbar und insbesondere

eine konforme Abbildung ist. Die Idee dazu ist, das Polynom  $f_c$  außerhalb der Fatoukomponente, die den freien kritischen Punkt enthält, unverändert zu lassen. Innerhalb dieser Komponente behalten wir den Zyklpunkt bei, ändern aber seinen Multiplikator zu  $\lambda$ . Der Zykel ist damit weiterhin ein (super-)attraktiver Zykel gleicher Länge mit neuem Multiplikator. Dadurch entsteht lokal eine andere Abbildung, die wir quasiregular an die ursprüngliche Abbildung  $f_c$  ankleben werden.

Dazu sei zu vorgegebenem  $\lambda \in \mathbb{D}$  ein  $1 > \varepsilon > 0$  so groß gewählt, dass  $|\lambda| < 1 - \varepsilon$  ist. Weiter sei  $1 - \varepsilon < r < 1$  so groß, dass der kritische Punkt

$$\frac{\sqrt{1 - |\lambda|^2} - 1}{\bar{\lambda}} \in \mathbb{D}$$

von  $B_\lambda$  in  $\Delta_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$  enthalten ist. Damit ist  $B_\lambda^{-1}(\partial\Delta_r)$  eine Jordankurve mit

$$B_\lambda^{-1}(\partial\Delta_r) \subset \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}.$$

Wir setzen  $A_0 := U_0 \cap f_c^{-m}(\varphi^{-1}(\Delta_r))$  (siehe Abbildung 3.3). Es gilt

$$\varphi^{-1}(\Delta_r) \subset A_0 \text{ und } f_c^m : A_0 \xrightarrow{2:1} \varphi^{-1}(\Delta_r).$$

Die Abbildung  $\varphi_\lambda : \overline{A_0} \rightarrow \overline{B_\lambda^{-1}(\Delta_r)}$  sei eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- Auf  $\partial A_0$  gelte  $B_\lambda \circ \varphi_\lambda = \varphi \circ f_c^m$ , wobei der Zweig der Umkehrfunktion von  $B_\lambda$  so gewählt wird (in Abhängigkeit von  $\lambda$ ), dass  $\varphi_\lambda$  stetig in  $\lambda$  ist.
- Auf  $\varphi^{-1}(\Delta_r)$  sei  $\varphi_\lambda = \varphi$ .
- Auf  $A_0 \setminus \varphi^{-1}(\Delta_r)$  setzen wir  $\varphi_\lambda$  als quasikonforme Abbildung fort, so dass diese stetig von  $\lambda$  abhängt.

Dass dies möglich ist, zeigen wir in Lemma 3.3.8. Auf diese Weise erhalten wir eine quasikonforme Abbildung  $\varphi_\lambda : A_0 \rightarrow B_\lambda^{-1}(\delta_r)$ , die stetig auf dem Rand von  $A_0$  ist. Diese Abbildung verwenden wir jetzt, um eine weitere Abbildung zu erklären, die wie  $f_c$  aussieht, aber einen von uns vorgegebenen Multiplikator besitzt. Dazu sei  $g_\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$g_\lambda(z) = \begin{cases} f_c(z) & , z \in \mathbb{C} \setminus A_0 \\ (f_c^{-m+1} \circ \varphi^{-1} \circ B_\lambda \circ \varphi_\lambda)(z) & , z \in A_0 \end{cases} \quad (3.10)$$

definiert. Wir wählen für  $f_c^{-m+1}$  immer die eindeutige Umkehrfunktion, so dass  $A_0$  in  $U_1$  abgebildet wird. Die Funktion  $g_\lambda$  ist quasiregulär und hängt stetig von  $\lambda$  ab. Sie ist analytisch in  $\mathbb{C} \setminus \overline{A_0}$  und in  $\overline{\varphi^{-1}(\Delta_r)}$  und der Kreisring  $A_0 \setminus \overline{\varphi^{-1}(\Delta_r)}$  ist nicht trivial. Für  $z \in A_0 \setminus \overline{\varphi^{-1}(\Delta_r)}$  gilt wegen (3.10)

$$\begin{aligned} g_\lambda^m(z) &= f_c^{m-1} (f_c^{-m+1} \circ \varphi^{-1} \circ B_\lambda \circ \varphi_\lambda) (z) \\ &= \varphi^{-1} \circ \underbrace{B_\lambda \circ \varphi_\lambda(z)}_{\in \Delta_r} \\ &\in \varphi^{-1}(\Delta_r). \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass dieser Kreisring unter Iteration nur *einmal getroffen* wird, dass also  $g_\lambda^m \left( A_0 \setminus \overline{\varphi^{-1}(\Delta_r)} \right) \cap A_0 \setminus \overline{\varphi^{-1}(\Delta_r)} = \emptyset$  gilt. Folglich ist das  $qc$ -Lemma von Shishikura (siehe Abschnitt 1.4) mit  $E = A_0$  und  $\Phi = \varphi_\lambda$  anwendbar: Es existiert eine quasikonforme Abbildung  $\Psi_\lambda$  mit

$$F_\lambda = \Psi_\lambda \circ g_\lambda \circ \Psi_\lambda^{-1}. \quad (3.11)$$

Die Abbildung  $F_\lambda$  ist eine analytische Funktion auf  $\mathbb{C}$ . Wir normieren die Abbildung  $\Psi_\lambda$  so, dass

$$\Psi_\lambda(0) = 0 \text{ und } \Psi_\lambda(z) = z + o(1) \text{ für } z \rightarrow \infty$$

gilt. Dadurch ist  $\Psi_\lambda$  eindeutig bestimmt. Die Funktion  $F_\lambda$  verhält sich bei unendlich wie  $\Psi_\lambda \circ f_c(z) \circ \Psi_\lambda^{-1} \sim z^{d+1}$ . Also ist  $F_\lambda$  ein Polynom vom Grad  $d+1$ .

Wir fassen einige Fakten zusammen:

- Es existiert ein  $(d-1)$ -facher kritischer Punkt  $k(\lambda) \in \mathbb{C}$  von  $F_\lambda$ , da  $f_c$  einen  $(d-1)$ -fachen kritischen Punkt besitzt.
- $F_\lambda(0) = \Psi_\lambda \circ g_\lambda \circ \Psi_\lambda^{-1}(0) = \Psi_\lambda(0) = 0$
- Für  $z \rightarrow \infty$  gilt  $F_\lambda(z) = z^{d+1} + o(1)$ .

Da  $F_\lambda$  ein Polynom vom Grad  $d+1$  ist, folgt aus den obigen Eigenschaften die Darstellung

$$F_\lambda(z) = z(z - k(\lambda))^d = f_{k(\lambda)}(z).$$

Es gehört  $F_\lambda$  also wieder zur ursprünglichen Familie. Wir untersuchen weiter, wie die Abbildung  $k : \lambda \mapsto k(\lambda)$  von  $\lambda$  abhängt. Es hängt  $g_\lambda$  stetig von  $\lambda$  ab, und daher folgt aus Shishikuras  $qc$ -Lemma, dass  $\Psi_\lambda$  auch stetig von  $\lambda$  abhängt. Für  $c \neq 0$  gilt  $\Psi_\lambda(c) \neq 0$ . Wegen  $c \notin A_0$  ( $c$  ist kritischer Punkt, der unter  $f_c$  stets in den Fixpunkt 0 abgebildet wird) gilt  $g_\lambda(c) = f_c(c) = 0$ . Damit folgt aus

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda(c) (\Psi_\lambda(c) - k(\lambda))^d &= (f_{k(\lambda)} \circ \Psi_\lambda)(c) \\ &= (\Psi_\lambda \circ g_\lambda)(c) \\ &= \Psi_\lambda(f_c(c)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

dass  $k(\lambda) = \Psi_\lambda(c)$  ist ( $c \notin A_0$ ). Insbesondere hängt  $k$  stetig von  $\lambda$  ab. Die dynamischen Eigenschaften haben sich von  $g_\lambda$  auf  $f_{k(\lambda)}$  übertragen. Denn es gilt  $f_{k(\lambda)}^m(z) = z$  genau dann, wenn  $g_\lambda^m(w) = w$  mit  $w = \Psi_\lambda^{-1}(z)$ . Wir berechnen den Multiplikator des Zyklus von  $f_{k(\lambda)}$ . Dabei sei  $z_0$  ein Zykelpunkt von  $f_{k(\lambda)}$  und  $w_0 = \Psi_\lambda^{-1}(z_0)$ . Wir erhalten nach Kettenregel

$$\begin{aligned} (f_{k(\lambda)}^m)'(z_0) &= \Psi'_\lambda(g_\lambda^m(\Psi^{-1}(z_0))) \frac{(g_\lambda^m)'(\Psi_\lambda^{-1}(z_0))}{\Psi'_\lambda(\Psi_\lambda^{-1}(z_0))} \\ &= \frac{\Psi'_\lambda(\Psi_\lambda^{-1}(z_0))}{\Psi'_\lambda(\Psi_\lambda^{-1}(z_0))} (g_\lambda^m)'(\Psi_\lambda^{-1}(z_0)) \\ &= (g_\lambda^m)'(w_0). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist der Multiplikator des attraktiven Zyklus von  $g_\lambda$  gerade  $\lambda$ . Für die Multiplikatorabbildung folgt die bemerkenswerte Formel

$$\rho_f(k(\lambda)) = \lambda.$$

Wir wissen jetzt, dass

1.  $\rho_f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{D}$  eigentlich abbildet, und
2.  $k : \mathbb{D} \longrightarrow \mathcal{H}$  stetig ist.

**Behauptung:** In  $\mathbb{D}$  existiert eine Umkehrfunktion  $\rho_f^{-1}$  von  $\rho_f$ .

**Beweis:** Es sei  $\lambda \in \mathbb{D}$  beliebig. Wir wählen eine offene Umgebung  $U \subset \mathcal{H}$  von  $k(\lambda)$ . Es sei  $V$  die Komponente des Urbilds von  $U$  unter  $k$ , die  $\lambda$  enthält. Da  $k$  stetig ist, ist sie offen. In  $V$  definieren wir (formal)  $\rho_f^{-1} : V \rightarrow U$  durch  $\rho_f^{-1}(\lambda) = k(\lambda)$ . Dann gilt  $\rho_f(\rho_f^{-1}(\lambda)) = \rho_f(k(\lambda)) = \lambda$ , was die Behauptung beweist.

Wie in Satz 3.2.1 folgt aus dem Maximumsprinzip, dass jede hyperbolische Komponente  $\mathcal{H}$  einfach zusammenhängend ist. Das heißt, die Multiplikatorabbildung ist eine eigentliche Abbildung eines einfach zusammenhängenden Gebietes auf den Einheitskreis und ist in jedem Punkt  $\lambda \in \mathbb{D}$  umkehrbar. Also ist  $\rho_f$  konform.  $\square$

**Lemma 3.3.8** *Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 3.3.7 existiert eine quasikonforme Abbildung  $\varphi_\lambda$  mit  $\varphi_\lambda : A_0 \rightarrow B_\lambda^{-1}(\Delta_r)$ .*

**Beweis:** Auf  $\partial\varphi^{-1}(\Delta_r)$  und  $\partial A_0$  sind die Randwerte vorgegeben. Wir konstruieren einen orientierungserhaltenen Diffeomorphismus von  $A_0 \setminus \overline{\varphi^{-1}(\Delta_r)}$  auf  $B_\lambda^{-1}(\Delta_r) \setminus \Delta_r$ , der eine stetige Fortsetzung von  $\varphi$  ist und auf  $\partial A_0$  die vorgegebenen Randwerte annimmt.

Dazu sei  $\Phi$  eine konforme Abbildung mit

$$\Phi : A_0 \setminus \overline{\varphi^{-1}(\Delta_r)} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < R\}$$

und  $\Phi_\lambda$  eine konforme Abbildung

$$\Phi_\lambda : B_\lambda^{-1}(\Delta_r) \setminus \overline{\Delta_r} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < R_\lambda\}.$$

Da die Ränder der Kreisringe aus analytischen Jordankurven bestehen, können wir aufgrund des Spiegelungsprinzips die Abbildungen konform über sie hinaus fortsetzen. Insbesondere sind die Abbildungen  $\Phi$  und  $\Phi_\lambda$  auf den Rändern der Kreisringe definiert.

Für  $z = re^{i\alpha} \in \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < R\}$  definieren wir  $\tilde{\varphi}_\lambda$  durch

$$\tilde{\varphi}_\lambda(z) = r^\rho \exp i \left( \frac{r-1}{R-1} \alpha_2 + \frac{R-r}{R-1} \alpha_1 \right).$$

Dabei ist  $\alpha_1 = \text{Arg } \Psi_\lambda(\varphi(\Phi^{-1}(e^{i\alpha})))$  und  $\alpha_2 = \text{Arg } \Phi_\lambda(\varphi_\lambda(\Phi^{-1}(Re^{i\alpha})))$  ( $\varphi_\lambda$  ist auf dem Rand von  $A_0$  vorgegeben) sowie  $\rho = \frac{\log R_\lambda}{\log R}$ . Die Abbildung  $\tilde{\varphi}_\lambda$  ist nach Konstruktion im Kreisring  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < R\}$

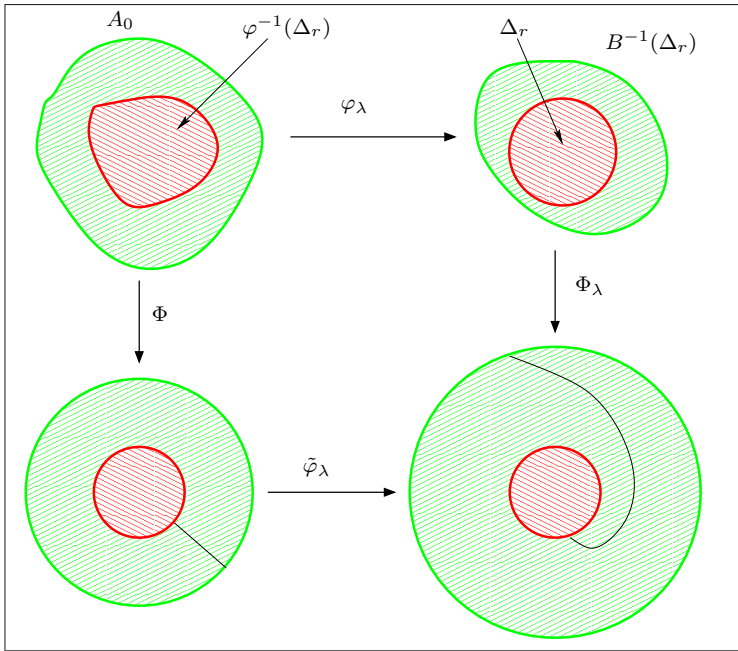


Abbildung 3.4: Schematische Darstellung. Auf dem roten Bereich ist die Abbildung konform. Im grünen Bereich wird sie durch  $\tilde{\varphi}_\lambda$  quasikonform verklebt.

eine  $C^\infty$ -Abbildung, injektiv und, da die Randwerte durch orientierungserhaltende Abbildungen vorgeben wurden, orientierungserhaltend. Nun erklären wir  $\varphi_\lambda$  für  $z \in A_0$  durch

$$\varphi_\lambda(z) = \begin{cases} \varphi(z) & , z \in \overline{\varphi^{-1}(\Delta_r)} \\ \Phi_\lambda^{-1}(\tilde{\varphi}_\lambda(\Phi(z))) & , z \in A_0 \setminus \overline{\varphi^{-1}(\Delta_r)}. \end{cases}$$

Die Abbildung  $\varphi_\lambda$  ist stetig, injektiv und orientierungserhaltend. Weiter ist sie fast überall  $C^\infty$ , da  $\partial\varphi^{-1}(\Delta_r)$  eine analytische Kurve (und damit eine Nullmenge in  $\mathbb{C}$  ist) ist. Die Abbildung  $\tilde{\varphi}_\lambda$  kann durch Spiegelung an den Kreisen quasikonform fortgesetzt werden. Insbesondere ist dadurch der Beltrami-Koeffizient von  $\tilde{\varphi}_\lambda$  in  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < R\}$  durch eine Konstante beschränkt. Also ist  $\varphi_\lambda$  eine quasikonforme Abbildung in  $A_0$ .

□



**Satz 3.3.9** *Es seien  $P_c$  das Polynom aus (2.2) und  $f_c$  das durch (2.5) konjugierte Polynom. Weiter sei  $\mathcal{H} \neq \mathbb{D}$  eine hyperbolische Komponente. Für  $c \in \mathcal{H}$  sei  $k$  die Anzahl der kritischen Punkte von  $P_c$ , die ein attraktiver Zykel anzieht. Dann gilt für die Multiplikatorabbildungen  $\rho_P$  und  $\rho_f$*

$$\rho_P = (\rho_f)^k.$$

**Beweis:** Es sei  $\{z_1, \dots, z_m\}$  ein attraktiver Zykel der Länge  $m$  von  $P_c$ . Aus der Konjugation (2.5)

$$(P_c(z))^d = f_c(z^d)$$

folgt sofort

$$(P_c^m(z))^d = f_c^m(z^d) \quad (3.12)$$

und damit

$$z_1^d = (P_c^m(z_1))^d = f_c^m(z_1^d).$$

Aus Satz 2.2.3 folgt, dass  $\{z_1^d, \dots, z_m^d\}$  ein Zykel der Länge  $n = \frac{m}{k}$  von  $f_c$  ist. Differenzieren nach  $z$  von (3.12) liefert

$$d(P_c^m(z))^{d-1} (P_c^m)'(z) = dz^{d-1} (f_c^m)'(z^d).$$

Setzen wir nun  $z = z_1$ , so folgt

$$\rho_P(c) \frac{(P_c^m(z_1))^{d-1}}{z_1^{d-1}} = \prod_{j=1}^{nk} f_c'(z_j^d).$$

Insgesamt folgt

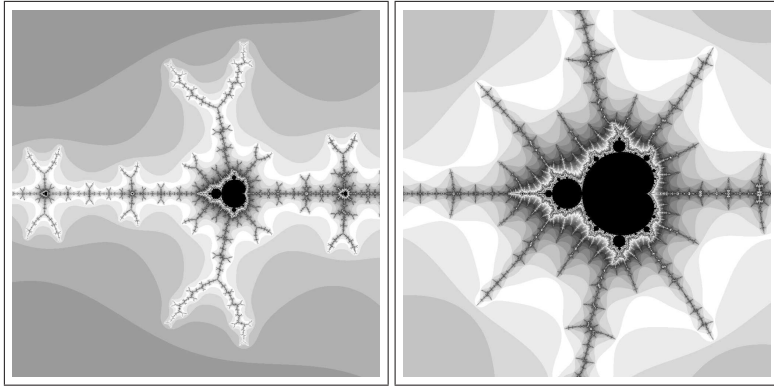
$$\rho_P(c) = \left( \prod_{j=1}^n f_c'(z_j^d) \right)^k = (\rho_f(c))^k.$$

□

Für eine hyperbolische Komponente  $\mathcal{H} \neq \mathbb{D}$  gilt  $\rho_f : \mathcal{H} \xrightarrow{1:1} \mathbb{D}$  wegen Satz 3.3.7. Deshalb existiert genau ein  $c_0 \in \mathcal{H}$ , so dass  $f_{c_0}$  einen superattraktiven Zykel besitzt. Somit ist aber auch  $\rho_P(c) = 0$  genau dann, wenn  $c = c_0$  ist.

**Korollar 3.3.10** *Es seien die Bezeichnungen wie in Satz 3.3.9. Die Multiplikatorabbildung  $\rho_P$  ist eine eigentliche Abbildung vom Grad  $k$  auf den Einheitskreis. In jeder hyperbolischen Komponente gibt es genau ein  $c$ , so dass der attraktive Zykel superattraktiv ist.*

Wie im Falle der klassischen Mandelbrotmenge oder anderer Ein-Parameter-Familien wissen wir nicht, ob die Vereinigung aller hyperbolischen Komponenten genau das Innere des Connectedness Locus ist. In der Arbeit



[McM1] bewies McMullen, dass, falls die Bifurkationsmenge (in unserem Fall ist die Bifurkationsmenge  $\partial\mathcal{C}_d$ ) nicht leer ist, dann sind quasikonforme Kopien vom Rand der Mandelbrotmenge (genauer: die Bifurkationsmengen der Familien  $\{z^n + c\}$  mit  $n \geq 2$  fest) in der Bifurkationsmenge enthalten. Diese liegen sogar dicht im Rand. Da die Bifurkationsmenge von  $\{P_c\}$  nicht leer ist, sind auch hier solche Kopien enthalten. Die obigen Abbildungen sind Ausschnittsvergrößerungen (jeweils etwa um den Faktor  $10^6$ ) von  $\mathcal{C}_3$  und  $\mathcal{C}_4$ , die diese Aussage verdeutlichen.

In dieser Arbeit wurde ebenfalls bewiesen (dies war allerdings ein schon bekanntes Ergebnis), dass die Hausdorffdimension einer nicht leeren Bifurkationsmenge immer *maximal* ist. Das heißt, dass die Hausdorffdimension von  $\partial\mathcal{C}_d$  gerade 2 ist.

### 3.4 Die Greensche Funktion von $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d$

In Satz 3.2.10 haben wir gezeigt, dass  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_d$  einfach zusammenhängend ist. Also existiert die Riemannabbildung  $\varphi : \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_d \xrightarrow{1:1} \mathbb{C} \setminus$

*overlineID* (bei  $\infty$  durch  $\varphi(z) \sim z$  normiert). Die Greensche Funktion von  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_d$  mit Pol in  $\infty$  ist dann durch  $G(c) = \log |\varphi(c)|$  gegeben.

Da wir keine Entwicklung für  $\varphi$  kennen, werden wir in diesem Abschnitt einen alternativen Beweis für die Existenz von  $G$  angeben. Als weitere Anwendung bestimmen wir die logarithmische Kapazität von  $\mathcal{C}_d$ .

Zunächst schöpfen wir das Gebiet  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_d$  aus.

**Lemma 3.4.1** *Für die Polynome  $Q_n$  aus Lemma 2.1.1 sei  $A_n := \{c \in \mathbb{C} : |Q_n(c)| > 6\}$ . Dann gilt*

1. Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist  $A_n$  ein Gebiet,
2.  $\overline{A_n} \subset A_{n+1}$ , und
3.  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

**Beweis:** Offenbar ist  $A_n$  offen. Wie in Satz 3.2.1 folgt aus dem Maximumprinzip der Zusammenhang von  $A_n$ .

Es sei  $c \in \overline{A_n}$ . Dann ist aufgrund der Definition von  $A_n$  auch  $|Q_n(c)| \geq 6$  (Induktionsanfang). Es folgt (Induktionsschritt)

$$\begin{aligned} |Q_{n+1}(c)| &= \frac{1}{d+1} |cQ_n(c)| |(Q_n(c))^d - 1| \\ &> \frac{1}{d+1} |Q_n(c)| |(Q_n(c))^d - 1| \\ &\geq 6 \frac{6^d - 1}{d+1} \\ &\geq 6. \end{aligned}$$

Somit ist 2. gezeigt.

Damit ist  $A_n \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d$ . Falls  $c \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_d$  ist, folgt  $|Q_j(c)| \rightarrow \infty$  für  $j \rightarrow \infty$ . Also existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $c \in A_n$ .  $\square$

Mit den Polynomen  $Q_n$  erhalten wir nun für jedes  $A_n$  eine Darstellung ihrer Greenschen Funktion. Ab jetzt setzen wir die Greenschen Funktionen stets durch 0 in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus A_n$  fort. Die Folge dieser Funktionen ist

gleichmäßig konvergent. Die Greensche Funktion von  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_d$  ist dann die Grenzfunktion dieser Folge.

Im Folgenden werden wir wieder von den in Lemma 2.1.1 definierten Polynomen  $Q_n$  Gebrauch machen.

**Lemma 3.4.2** *Die Greensche Funktion  $g_n$  für  $A_n$  mit Pol in  $\infty$  ist durch*

$$g_n(c) = \frac{1}{d_n} \log \left| \frac{Q_n(c)}{6} \right|$$

gegeben, wobei  $d_n = \deg Q_n$  ist.

**Beweis:** i) Die Funktion  $g_n$  ist harmonisch in  $A_n$ , da  $Q_n \neq 0$  in  $A_n$  ist.

ii) Wir zeigen, dass  $g_n(c) - \log |c|$  für  $c \rightarrow \infty$  beschränkt ist. Aus

$$\begin{aligned} g_n(c) - \log |c| &= \frac{1}{d_n} \left( \log \left| \frac{Q_n(c)}{6} \right| - d_n \log |c| \right) \\ &= \frac{1}{d_n} \left( \log \left| \frac{Q_n(c)}{|c|^{d_n}} \right| - \log 6 \right) \\ &= \frac{1}{d_n} \left( \log \left| \frac{a_{d_n} c^{d_n} + \dots + a_0}{|c|^{d_n}} \right| - \log 6 \right) \end{aligned}$$

folgt  $\lim_{c \rightarrow \infty} (g_n(c) - \log |c|) = \frac{1}{d_n} \left( \log \frac{|a_n|}{6} \right)$ .

iii) Da  $|Q_n(c)|$  in  $\mathbb{C}$  stetig ist, folgt  $\lim_{c \rightarrow \partial A_n} |Q_n(c)| = 6$ , also insbesondere  $g_n(c) \rightarrow 0$  für  $c \in A_n$  und  $c \rightarrow \partial A_n$ .  $\square$

**Lemma 3.4.3** *Die Folge  $(g_n)$  konvergiert lokal gleichmäßig in  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_d$ .*

**Beweis:** Wir untersuchen zunächst die Differenzen  $g_{n+1} - g_n$ . Für  $c \in A_n$

gilt

$$\begin{aligned}
 g_{n+1}(c) - g_n(c) &= \frac{1}{d_{n+1}} \log \left| \frac{Q_{n+1}(c)}{6} \right| - \frac{1}{d_n} \log \left| \frac{Q_n(c)}{6} \right| \\
 &= \frac{1}{d_{n+1}} \log \left( \frac{|c(Q_n(c))^{d+1} - cQ_n(c)|}{d+1} \frac{6^{d+\frac{1}{d_n}}}{|(Q_n(c))^{d+1+\frac{1}{d_n}}|} \right) \\
 &\leq \frac{1}{d_{n+1}} \log \left( \left( \frac{|c|}{d+1} |Q_n(c)|^{-\frac{1}{d_n}} + \frac{|c|}{|Q_n(c)|^{d+\frac{1}{d_n}}} \right) 6^{d+1} \right) \\
 &\leq \frac{1}{d_{n+1}} \log \underbrace{\left( \left( \frac{|c|}{6(d+1)} + \frac{|c|}{6^{d+1}} \right) 6^{d+1} \right)}_{:= C}
 \end{aligned}$$

wobei  $C$  eine von  $n$  unabhängige Konstante ist. Aus der geometrischen Summenformel folgt nun

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} g_{n+k+1}(c) - g_{n+k}(c) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{d_{n+k+1}} \\
 &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(d+1)^{n+k}} \\
 &= \frac{C}{(d+1)^{n-1}d}.
 \end{aligned}$$

Für eine beliebige kompakte Menge  $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_d$  existiert wegen Lemma 3.4.1 ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $K \subset A_n$ . Für  $c \in K$  gilt dann

$$\begin{aligned}
 g(c) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( g_{n+1}(c) + \sum_{k=1}^N g_{n+k+1}(c) - g_{n+k}(c) \right) \\
 &\leq \frac{1}{d_{n+1}} \log \left| \frac{Q_{n-1}(c)}{6} \right| + \frac{C}{(d+1)^{n-1}d} \\
 &\leq \frac{\log M_K}{d_{n+1}} + \frac{C}{(d+1)^{n-1}d}
 \end{aligned}$$

mit  $M_K = \max\{|Q_{n+1}(c)| : c \in K\}$ . Also konvergiert die Folge  $(g_n)$  gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge  $K$ . Insbesondere ist sie lokal gleichmäßig konvergent in  $\widehat{\mathbb{C}}$ .  $\square$

**Satz 3.4.4** Die durch  $G(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(c)$  definierte Funktion  $G$  ist die Greensche Funktion von  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d$  mit Pol in  $\infty$ .

**Beweis:** Aufgrund des Maximumprinzips gilt  $g_n < g_{n+1}$ . Mit Lemma 3.4.2, Lemma 3.4.3 und dem Harnackschen Prinzip (siehe [AHL]) ist  $g$  entweder harmonisch oder konstant unendlich.

Wir zeigen, dass  $g(c) \rightarrow 0$  für  $c \rightarrow \partial \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d$  gilt. Damit ist dann  $g \neq \infty$ , und der Satz ist bewiesen.

Es sei  $n(c) := \max\{n \in \mathbb{N} : c \notin A_n\}$ . Wegen  $\overline{A_n} \subset A_{n+1}$  (Lemma 3.4.1) gilt  $n(c) \rightarrow \infty$  für  $c \rightarrow \partial \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d$ . Für  $c \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d$  und  $|c| < 6$  mit  $n = n(c)$  gilt  $|Q_n(c)| \leq 6 < |Q_{n+1}(c)|$  und die Abschätzung

$$|Q_{n+1}(c)| \leq \left| \frac{c}{d+1} (Q_n(c))^d \right| + |c Q_n(c)| \leq \frac{1}{d+1} 6^{d+1} + 6^2 =: K.$$

Wie im Beweis von Lemma 3.4.3 gilt

$$\begin{aligned} g(c) &= g_{n+1}(c) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{n+k+1}(c) - g_{n+k}(c)) \\ &\leq \frac{1}{d_{n+1}} \log \left| \frac{K}{6} \right| + \frac{C}{d(d+1)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Für  $c \rightarrow \partial \mathcal{C}_d$  gilt nun  $n \rightarrow \infty$ . Aus Lemma 2.1.1 folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 3.4.5** Die Robinsche Konstante von  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_d$  ist  $\gamma = -\frac{\log d}{d+1}$ . Die logarithmische Kapazität ist  $\text{Cap } \mathcal{C}_d = d^{\frac{1}{d+1}}$ .

**Beweis:** Die Robinsche Konstante für  $A_n$  ist durch

$$\gamma_n = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{d_n} \log \left| \frac{Q_n(c)}{6} \right| - \log(c) = \frac{1}{d_n} \log \frac{|a_n|}{6}$$

gegeben, wobei  $Q_n(c) = a_n c^{d_n} + \dots$  ist. Da die Folge  $g_n$  lokal gleichmäßig gegen  $G$  konvergiert, gilt

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n \\ &= \frac{d}{d+1} \log d - \log d. \end{aligned}$$

Es gilt  $\text{Cap } \mathcal{C}_d = e^{-\gamma}$ .  $\square$

# Literaturverzeichnis

- [AHL] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
- [BEA] Alan F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [CARL] Carleson Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [DH1] A. Douady, J. Hubbard, *Itération des polynômes quadratiques complexes*, C.R. Acad. Sci. Paris, **294**, 1982, pp. 123-126.
- [DH2a] A. Douady, J. Hubbard, *Étude dynamique des pôlynomes complexes, (Premiere Partie)*, Publ. Math. d'Orsay, 1984
- [DH2b] A. Douady, J. Hubbard, *Étude dynamique des polynômes complexes, (Deuxieme Partie)*, Publ. Math. d'Orsay, 1985
- [DH3] A. Douady, J. Hubbard, *On the dynamics of polynomial-like mappings*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **18**, 1985, pp. 287-343.
- [FAT] P. Fatou, *Sur les équations fonctionelles*, Bull. Soc. Math. France, **47**, 1919, pp. 161-271
- [GM] L. Goldberg, J. Milnor, *Fixed Points of Polynomial Maps. Part II Fixed Point Portraits*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **26**, 1993, pp. 51-98.
- [JUL] G. Julia, *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles et les fonctions de Poincaré*, J. Math. Pures Appl., **8**, 1918, pp. 47-245.

- 
- [LEH] O. Lehto, K. Virtanen, *Quasiconformal Mappings*, Springer-Verlag, New York, 1965.
- [MAT] C. Mattler, *Juliamengen und lokaler Zusammenhang*, Dissertation, Dortmund 1997
- [McM1] C. McMullen, *Complex Dynamics and Renormalization*, Princeton University Press, Princeton, 1994
- [McM2] C. McMullen, *The Mandelbrot set is universal* in *The Mandelbrot Set, Themes and Variations*, Herausg. Tan Lei, University Press, Cambridge, 2000, pp. 1-17
- [MIL] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1999
- [SHI] M. Shishikura, *On the quasiconformal surgery of rational functions*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **20**, 1987, pp. 1-29.
- [STEIN] N. Steinmetz, *Rational Iteration*, de Gruyter, Berlin/New York, 1993.
- [SULL] D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, Annals of Math., **122**, 1985, pp. 401-418.