SZŰCS, Kinga
Erfurt

Beliefs mit Bezug zum Beweis(en) im Mathematikunterricht - Ergebnisse einer empirischen Studie unter Lehrkräften

Beweise spielen in der Fachwissenschaft Mathematik eine essenzielle, identitätskonstituierende Rolle (Heintz, 2000), dennoch werden sie in der Schule aktuell - bis auf wenige Ausnahmen - kaum vermittelt (Brunner, 2014). Um dieses Missverhältnis langfristig aufzuheben, braucht es Lehrkräfte, die nicht nur über ausreichende fachliche sowie fachdidaktische Kenntnisse und Fähigkeiten mit Bezug zu Beweisen verfügen, sondern auch von der Wichtigkeit der Auseinandersetzung mit Beweisen im Mathematikunterricht überzeugt sind. In diesem Sinne wird in der vorliegenden Arbeit bei Lehrkräften untersucht, über welche Beliefs sie mit Bezug zu Beweisen verfügen.

Theoretischer Hintergrund

Beliefs in der Mathematikdidaktik sind solche latenten, unbewussten, nicht direkt beobachtbaren Faktoren, die auf Erfahrungen mit Mathematik und Mathematikunterricht basieren (Törner, 1996; Stoppel, 2019) und die eine entscheidende Rolle bei der Planung, Gestaltung und Bewertung sowie Wahrnehmung und Rezeption (Grigutsch, Raatz & Törner, 1998) von mathematischen Lehr- und Lernprozessen spielen. Es geht hierbei um persönliche Überzeugungen, die sich auf einen bestimmten - mathematischen - Gegenstand beziehen. Einen theoretischen Rahmen, welcher mit Bezug zu Mathematik am meisten verbreitet war und aktuell Grundlage für weitere Ausdifferenzierungen liefert, stellt die sog. Dreikomponententheorie dar (Hannula, 2012). Diese Theorie besagt (Rokeach, 1989), dass Beliefs eine kognitive, eine affektive und eine konative Komponente besitzen. In der vorliegenden Arbeit wird ausschließlich die kognitive Komponente von Beliefs mit Bezug zum Beweis als mathematisches Objekt sowie zum Beweisen als mathematische Tätigkeit fokussiert. In Anlehnung an die Arbeit von Grigutsch, Raatz und Törner (1998) und im Einklang mit der Arbeit von Szűcs (2023) geht es hierbei um Überzeugungen (1) über Beweise als Teil der Mathematik als Wissenschaft sowie der Mathematik als Schulfach, (2) darüber, wie Beweise gelernt werden (sollen), (3) darüber, wie Beweise gelehrt werden (sollen) sowie (4) über sich selbst und andere, die Beweise führen.

Forschungsfragen

Die vorliegende Arbeit versteht sich als Fortsetzung der empirischen Studie unter Lehramtsstudierenden der Mathematik von Szűcs (2023) und stellt folgende Fragen in den Mittelpunkt:

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

- (A) Welche Erfahrungen haben Mathematiklehrkräfte in ihrer Schulzeit, im Studium sowie als Lehrpersonen mit Beweisen gemacht?
- (B) Über welche Beliefs verfügen sie mit Bezug zu einem wissenschaftlichen bzw. zu einem schulischen Beweisbegriff? (1)
- (C) Welche Beliefs haben sie im Hinblick auf das Lernen von Beweisen? (2) und (4)
- (D) Welche Beliefs haben sie bezogen auf das Lehren von Beweisen? (3)

Datenerhebung

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurde die schriftliche Befragung als Erhebungsinstrument eingesetzt. Der hierbei verwendete Fragebogen lehnte sich stark an den in einem langjährigen Prozess entwickelten und sich bereits bewährten Fragebogen aus der Studie von Szűcs (2023) an, das Kategoriensystem und die entsprechenden Items wurden allerdings unter Beachtung der unterschiedlichen Zielpopulation - Lehramtsstudierende vs. Lehrkräfte - geringfügig modifiziert. Die Durchführung erfolgte mit Hilfe eines digitalen Fragebogens im Zeitraum August 2022 - Februar 2023. Es liegen 64 Datensätze vor, die Beantwortungsquote einzelner Items variiert zwischen 55% und 95%. Neben persönlichen Angaben zum eigenen Werdegang wurden Daten zu Erfahrungen mit Beweisen (Forschungsfrage (A)) auf nominalen Skalen sowie Daten zu Beliefs mit Bezug zum Beweisen (Forschungsfragen (B), (C) und (D)) auf 4-Punkte-Likert-Skalen erhoben.

Auswertung der Daten

Bei den erhobenen nominalen Daten wurde eine Charakterisierung derselben unter Rückgriff auf die relative Häufigkeit der Antwortmöglichkeiten sowie auf den Modalwert unternommen. Die erhobenen ordinalen Daten wurden im Rahmen eines mehrschrittigen Verfahrens ausgewertet, welches in Szűcs (2023) ausführlich beschrieben ist. Hierbei erfolgte zuerst eine kategorienweise Ermittlung der relativen Häufigkeiten der einzelnen Antwortmöglichkeiten auf der Likert-Skala, anschließend wurden die Kategorien - abhängig von der beobachteten Antworttendenz - im Sinne einer Clusterbildung zu Gruppen von Kategorien zusammengefasst. Aus Platzgründen wird nachfolgend lediglich eine Auswahl an Forschungsbefunden dargelegt.

Ergebnisse

Trotz der kleinen Größe (N=64) repräsentiert die Stichprobe die Lehrerschaft vor allem an Gymnasien gut: Den Fragebogen haben überwiegend Lehrkräfte an Gymnasien (84%) ausgefüllt, unter denen sowohl die Berufserfahrung als auch die von ihnen unterrichteten Klassenstufen ausgewogen verteilt sind. Geographisch gesehen ist die Stichprobe ebenfalls ausgeglichen

(13 von 16 Bundesländer vertreten), somit kann aus den Ergebnissen - auch wenn man die Stichprobe keineswegs als repräsentativ ansehen kann - durchaus auf Tendenzen mit Bezug zu Beliefs über Beweise geschlossen werden.

Mit Bezug zur Forschungsfrage (A) kann konstatiert werden, dass die überwiegende Mehrheit (73%) bereits in ihrer Schulzeit vielfältige Erfahrungen mit Beweisen gemacht hat, was sich einerseits in der hohen Anzahl an aus der Schule bekannten konkreten Beweisen, andererseits in dem hohen Bekanntheitsgrad (70% - 91%) der aus der Schule bekannten Beweisverfahren zeigt. Diese Erfahrungslage wird im Studium durch weitere Erfahrungen mit verschiedenen Beweisverfahren (84% - 89%) sowie entsprechenden heuristischen Strategien (58% - 88%) ergänzt. 64% der Befragten gibt zudem an, als Lehrkraft im aktuellen Mathematikunterricht Beweise zu thematisieren.

Die Ergebnisse bezogen auf Beliefs mit Bezug zu einem wissenschaftlichen sowie schulischem Beweisbegriff (Forschungsfrage B) zeigen ein insgesamt ausgeglichenes und mit diesen Beweisbegriffen im Einklang stehendes Bild: Die Probanden sind vor allem von der Verifizierungs- (97% Zustimmung),Verallgemeinerungs- (92%) und Erklärungsfunktion (83%) von Beweisen überzeugt und wissen, dass sich Beweise einerseits auf eine Aussage beziehen (73%), die von der Voraussetzung zur Behauptung führt (74%), anderseits sich auf Axiome, Begriffe und bereits bewiesene Sätze (81%) unter der Beachtung der Regeln der logischen Schlussfolgerung (95%) stützen. Nennenswert ist, dass lediglich 28% der Antwortenden die formale Abfassung eines Beweises für wichtig hält, was mit einem schulischen Beweisbegriff vereinbar ist. Hervorgehoben werden soll allerdings, dass - ähnlich zu den Befunden bei Lehramtsstudierenden (Szűcs, 2023) - 42% der Antwortenden induktives, und nicht deduktives Schließen als Beweis einstuft.

Die Befunde mit Bezug zu Beliefs über das Lernen von Beweisen (Forschungsfrage C) spiegeln vor allem die aus der Fachliteratur (z. B. Brunner, 2014; Reid & Knipping, 2010) bekannten Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen von Lernenden beim Beweisen wider: Die Probanden sind z. B. voll davon überzeugt, dass Lernenden schwer fällt, einen Satz zu finden (92% Zustimmung), die Beweisnotwendigkeit einzusehen (90%), die Beweisidee zu finden (89%) und den Beweis festzuhalten (91%). Interessant, da widersprüchlich ist der Befund, dass trotz der Überzeugung, dass Beweise zur Förderung des logischen Denkens (88%), des Verständnisses (82%) sowie der Kreativität (79%) beitragen, nur 16% der Befragten dafür stimmten, dass durch die Auseinandersetzung mit Beweisen auch andere mathematische Tätigkeiten wie Problemlösen gefördert werden können.

Die Ergebnisse bezogen auf Beliefs über das Lehren von Beweisen (For-

schungsfrage D) sind teils mit den vorherigen Befunden vereinbar, teils stehen sie im Widerspruch zu ihnen. Im Einklang mit dem schulischen Beweisbegriff (Forschungsfrage B) steht beispielsweise der Befund, dass aus der Anschauung heraus begründete Aussagen laut 84% der Befragten in der Schule als Stützung verwendet werden dürfen. Ebenso mit dem schulischen Beweisbegriff übereinstimmend geben zwei Drittel der Probanden an, die formale Verfassung von Beweisen in der Schule nicht für wichtig zu halten. Im Gegensatz zum Befund mit Bezug zum Lernen von Beweisen (Forschungsfrage C) steht das Ergebnis, dass laut 83% der Befragten durch Beweise die Problemlösekompetenz gefördert werden kann. Die Probanden stimmten zudem überwiegend voll zu, dass im Rahmen einer umfassenden mathematischen Bildung (86%) Beweise trotz des Zeitaufwands (75%) thematisiert werden müssen bzw. dass sie auf das Studium vorbereiten (79%). Im Widerspruch zu diesem Befund sprachen sich lediglich 47% für die durchgehende Thematisierung von Beweisen in der Schule aus. Insgesamt zeigt sich ein sehr differenziertes Bild über die Beliefs von Lehrkräften mit Bezug zum Beweis(en), welches einerseits durch die Erhöhung der Stichprobengröße weiter auszudifferenzieren bzw. durch die Aufdeckung der Gründe für die befundenen Widersprüche zu vervollständigen gilt.

Literatur

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-41864-8

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematikdidaktik, 19*(1), 3–45.

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education, 14*(2), 131–161.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Springer Verlag.

Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching*. Sense Publishers.

Rokeach, M. (1989). *Beliefs, attitudes and values: A theory of organization and change*. Jossey-Bass.

Stoppel, H.-J. (2019). *Beliefs und selbstreguliertes Lernen. Eine Studie in Projektkursen der Mathematik in der gymnasialen Oberstufe*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-24913-7

Szűcs, K. (2023). Beliefs über Beweise(n) im Mathematikunterricht – eine empirische Studie unter Lehramtsstudierenden. *Mathematica Didactica, 46*. https://doi.org/10.18716/ojs/md/2023.1849

Törner, G. (1996). Mathematische Weltbilder von Lehrern. In K.-P., Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 433–436). Franzbecker.