DONNER, Lukas & BÜCHTER, Andreas
Essen

Von der Behauptung zum Befund? Zur Entwicklung ausgewählter mathematikdidaktischer Diskursstände

In mathematikdidaktischen Lehrbüchern und praxisorientierten Zeitschriften lassen sich zu vielen fachlichen Gegenständen vermeintliche oder tatsächliche Gewissheiten über zentrale gedankliche Herausforderungen für Lernende und dazu passende Vorschläge zur Gestaltung des Unterrichts finden. Dabei wird selten reflektiert, inwieweit die jeweilige Gewissheit zu so etwas wie einer konsolidierten Wissensbasis der Mathematikdidaktik gezählt werden kann. Im vorliegenden Beitrag gehen wir anhand zweier ausgewählter zentraler Unterrichtsinhalte der Sekundarstufe I exemplarisch folgenden Fragen nach: *(1) Wie hat sich die Gewissheit zu dieser spezifischen Frage des Lehrens und Lernens von Mathematik entwickelt? (2) Welche kritischen Rückfragen an diese Gewissheit sind weitgehend offen?*

Fallbeispiel A: Wege zur algebraischen Termumformung

Einen wesentlichen Anstoß zu unseren Überlegungen gab Gerstner (2023), der sich im Rahmen seiner Dissertation intensiv mit der Frage nach möglichen Wegen von Schüler:innen in den algebraischen Kalkül auseinandersetzt. Bereits im Theorieteil der Arbeit hinterfragt der Autor bei der Aufbereitung des Diskursstandes scheinbare mathematikdidaktische Gewissheiten. Dazu zählt u. a. die Tragfähigkeit der Idee der Generalisierung, bei der davon ausgegangen wird, dass der Weg vom Aufstellen von Termen zur Beschreibung von Figurenfolgen erfolgreich bis zur Etablierung algebraischer Termumformung führt. Zweifel an der behaupteten Tragfähigkeit dieses Wegs basieren dabei sowohl auf eigener Unterrichtserfahrung als auch auf dem Umstand, dass die fachdidaktische Literatur, die diesen Weg vorschlägt, keine Antwort auf die Frage gibt, wie genau der Weg vom symbolischen Beschreiben hin zum algebraischen Kalkül beschritten werden kann (vgl. ebd., S. 63 ff.). Vielmehr finden sich häufig lapidare Kommentare dazu, dass sich die Umformungsregeln „zwanglos“ (Malle, 1993, S. 239) ergeben.

Auf Basis eigener empirischer Untersuchungen arbeitet Gerstner (2023) heraus, dass einer Unterrichtsreihe nach der Idee der Generalisierung zentrale Lernhürden hin zum algebraischen Kalkül inhärent sind, welche in der Literatur, die diesen Weg quasi als Königsweg propagiert, nicht berücksichtigt werden. Zu den herausgearbeiteten Hürden zählen die Notwendigkeit des Kollabierens des mühsam aufgebauten Narrativs des aufgestellten Terms (z. B. fixieren Klammern eine gedankliche Einheit, die nicht einfach aufgelöst werden kann), das nötige Ausblenden der kontextuellen Bedeutung der

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Variablen als Figurennummer sowie das gleichzeitige Auftreten beliebig komplexer Termstrukturen, welche ineinander übergeführt werden sollen. All diese Lernhürden legen die Notwendigkeit eines intensiven, kritischen und ergebnisoffenen Beleuchtens des im aktuellen didaktischen Diskurses geltenden Grundsatzes „Inhalt vor Kalkül“ für den algebraischen Anfangsunterricht nahe. Gerstner (ebd.) führt auch begründete Zweifel bezüglich der Legitimität weiterer vermeintlicher mathematikdidaktischer Gewissheiten zur Einführung in die elementare algebraische Formelsprache an. Dazu zählen Aussagen über fortschreitende Schematisierung, die Orientierung an der Gleichwertigkeit als hinter Termumformungen liegendes strukturelles Konzept oder die Nützlichkeit von Visualisierungen zum Verstehen algebraischer Zusammenhänge, welche sich auch in aktuellen Lehrwerken wiederfinden (z. B. Weigand et al., 2022). Dabei scheint dieser Diskursstand zumindest zum Teil durch vorschnelles Aufgreifen und Zitieren geäußerter Vermutungen zustande gekommen zu sein – auch unter Ausblendung gegenläufiger Betrachtungen und Befunde (vgl. dazu Gerstner, 2023).

Fallbeispiel B: Das Phänomen der vergrößernden Division

Im Rahmen einer eigenen Studie (Büchter & Donner, i. Vorb.) zur Herleitung der Regel zur Bruchdivision sind wir in der jüngeren Literatur mit einem ebenfalls einheitlichen Bild davon konfrontiert worden, was eine – wenn nicht die – zentrale Schwierigkeit bei der Bruchdivision ist: Bei der Division von positiven rationalen Zahlen kann der Quotient größer sein als der Dividend, was im Bereich der natürlichen Zahlen nicht möglich ist. Ist die entsprechende Weiterentwicklung der Vorstellungen zu den Operationseigenschaften tatsächlich eine (oder gar *die*) zentrale Schwierigkeit für Schüler:innen beim Erlernen der Bruchdivision?

Im deutschsprachigen mathematikdidaktischen Diskurs wird mehrmals anekdotisch auf Schüler:innen verwiesen, die sich bei der Division von natürlichen Zahlen durch (Stamm)brüche darüber verwundert zeigen, dass der Quotient größer als der Dividend ist (vgl. Prediger, 2004). Die theoretische Fundierung hinsichtlich der herausfordernden Vorstellungsentwicklung greift auf die beiden Studien Bell et al. (1981) und Fischbein et al. (1985) zurück. Blicken wir in diese Studien, so findet sich darin jedoch keine einzige Diagnoseaufgabe, in die gemeine Brüche involviert sind. Untersuchungsgegenstand war bei beiden Arbeiten vielmehr die Auswirkung des Auftretens von Dezimalzahlen bei der Identifikation der richtigen Rechenoperation zu gegebenen Sachsituationen. Fischbein et al. (ebd.) führen die besonders häufig auftretenden Schwierigkeit von Schüler:innen der fünften und siebten Schulstufe bei der Identifikation der Division darauf zurück, dass das primäre, intuitive Modell der Division, das Verteilen, in all diesen Fällen

nicht trägt, im Gegensatz zum Modell des Aufteilens (bzw. Messens), welches sich offenbar erst zu einem späteren Zeitpunkt der Schullaufbahn etabliert. Die Vermutung, dass die vorrangige Herausforderung darin liegen könnte, dass Division vergrößert, verfolgen die Autor:innen nicht weiter. Inwieweit ein Transfer von Aussagen über Divisionen mit Dezimalzahlen hin auf gemeine Brüche aus fachdidaktischer Perspektive ohne gesonderte empirische Vergewisserung möglich ist, wird in beiden Arbeiten nicht thematisiert und bleibt dadurch ungeklärt. Anders als bei der Multiplikation (vgl. Prediger, 2011) gibt es bezüglich der Division keine Übertragung der Erkenntnisse von Fischbein et al. (ebd.) hin auf gemeine Brüche.

Liegt die Schwierigkeit möglicherweise im syntaktischen Umgang mit der Dezimalzahldarstellung begründet oder in der bekannten Herausforderung des Identifizierens mathematischer Inhalte auf Basis von gegebenen Sachsituationen? Selbst wenn Fischbeins Befunde transferierbar auf die Zahldarstellung als gemeine Brüche wäre, bleibt völlig offen, ob die Ursachen für die Schwierigkeit des Spezialfalls der Division einer positiven ganzen Zahl durch einen (Stamm)bruch tatsächlich auf die nötige Vorstellungsentwicklung zu Eigenschaften der Bruchdivision zurückgeführt werden kann: Bekannt ist die Tatsache, dass bei der Bruchrechnung bei allen Rechenoperationen, und insbesondere auch bei der Bruchdivision, der kombinierte Fall (Bruch und natürliche Zahl treten auf) weit fehleranfälliger ist als der Standardfall („Bruch durch Bruch“). Padberg (1986) führt dies auf syntaktische Herausforderungen der Einbettung der natürlichen Zahlen in den neuen Zahlbereich zurück. Bei der Division einer natürlichen Zahl durch einen Stammbruch handelt es sich zunächst einmal um eine (mathematisch sinnvolle, weil erweiterbare) Setzung. Ohne ausreichende unterrichtliche Erschließung dieser Konvention könnte ein Unbehagen bei der Division in diesem Spezialfall auf fehlende Vertrautheit mit der Einbettung des alten Zahlbereichs in den neuen Zahlbereich erklärbar sein und muss nicht ursächlich in fraglichen Eigenschaften der Bruchdivision liegen. Verweise auf Schüler:innen, die sich bei Quotienten der Form „Bruch durch Bruch“, wie $\frac{2}{5}:\frac{3}{7}=\frac{14}{15}$, im Gegensatz zu Quotienten wie $\frac{3}{7}:\frac{15}{14}=\frac{2}{5}$ verwundert darüber zeigen, dass im ersten Fall der Quotient sowohl größer als der Dividend als auch der Divisor ist, sucht man in der fachdidaktischen Diskussion vergeblich. Auch ein Blick in die Unterrichtspraxis bestärkt den bestehenden Befund nicht ohne weiteres: Im Rahmen von Interviews mit Lehrkräften zu deren eigenen unterrichtlichen Inszenierung der Bruchdivision wird auf die offene Frage nach Herausforderungen für Schüler:innen im Lehrgang zur Bruchdivision nur randständig auf die Herausforderung verwiesen, dass die Division nun auch vergrößern kann (vgl. Büchter & Donner, i. Vorb.).

Fazit

Gemein ist den beiden dargestellten Diskursständen, dass scheinbare Gewissheiten zumindest zum Teil aus vorschnellem Aufgreifen und Zitieren geäußerter Vermutungen zustande gekommen sein können. Neben die zum Teil oberflächliche oder generalisierende Nutzung von Quellen tritt manchmal auch die Ausblendung „irritierender" Befunde. Scheinbare Gewissheiten entstehen dann anscheinend durch hinreichend häufiges Zitieren, ohne dass zusätzliche theoretische Plausibilität oder empirische Evidenz die Vermutung (oder starke Behauptung) weiter absichern.

Da hieraus potenziell eine nicht tragfähige Unterrichtsgestaltung resultiert, ist häufig eine seriösere wissenschaftliche Praxis erforderlich. Eine typische Anforderung dabei ist, auf die Ursprünge von Ideen und Vermutungen zurückzugehen, entsprechende Quellen tatsächlich inhaltlich zu berücksichtigen und diese kritisch zu hinterfragen. In einer Einzeluntersuchung solide gewonnene Ergebnisse können dabei auch dem konkreten Untersuchungskontext geschuldet sein und somit noch keine Befunde darstellen. Hier wären Replikation und Triangulation wichtiger als die Wiederholung von ggf. nicht substantiierten Ausführungen.

Literatur

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 399-420.

Büchter, A., & Donner, L. (i. Vorb.). Herleitung der Bruchdivisionsregel: revisited.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, *16*(1), 3-17.

Gerstner, E. (2023). *Weg vom / Wege in den Kalkül: Herausforderungen auf dem Weg zu Termumformung und Gleichungslehre und Ansätze zu ihrer Bewältigung. Design Based Research zum Einstieg in die Elementare Algebra*. https://doi.org/10.17185/duepublico/78130

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg.

Padberg, F. (1986). Über typische Schülerschwierigkeiten in der Bruchrechnung – Bestandsaufnahme und Konsequenzen. *Der Mathematikunterricht*, *32*(3), 58-77.

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen? *Mathematik lehren*, *123*, 10-13.

Prediger, S. (2011). Why Johnny can't apply multiplication? Revisiting the choice of operations with fractions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *6*(2), 65-88.

Weigand, H. G., Schüler-Meyer, A., & Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra: nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath.* Springer Spektrum.