

Felix LENSING, Berlin

»Aber Papa, die 1 ist doch gerade!« – Reflexionen zur Frage der Repräsentation am Beispiel von Zahl- und Funktionsbegriff

Hauke: »Weißt du schon, was gerade und ungerade Zahlen sind?«

Madita (5 J.): »Nö, was ist das?«

Hauke: »Naja, so 2, 4, 6 und 8 sind zum Beispiel gerade Zahlen. 1, 3, 5 und 7 sind ungerade«

Madita (5 J.): »Nein Papa, das kann nun wirklich nicht sein.«

Hauke: »Doch, doch. Jede zweite Zahl ist gerade. Und die 2 ist gerade und die 4 dann auch.«

Madita (5 J.): »Aber Papa, die 1 ist doch gerade, dann kann das also nicht stimmen!«

Der Ausgangspunkt dieses Beitrags [1] liegt in der folgenden These: *Die Konfusion von Repräsentant und Referent*, die sich auch in Maditas letzter Aussage ausdrückt, *sollte nicht vorschnell als Abweichung von einer gelingenden mathematischen Praxis abgetan, sondern im Gegenteil als produktiver Bestandteil der psychischen und sozialen Genese mathematischer Begriffe angesehen werden*. Diese These wird Folgenden in drei Schritten entfaltet: Im ersten Schritt wird auf die semiotische Struktur reflektiert, die sich in dem Eingangsdialog manifestiert (I.); in einem zweiten Schritt soll durch einen Blick in die Geschichte des Funktionsbegriffs aufgezeigt werden, dass selbst Leonard Euler noch Schwierigkeiten damit hatte, die Eigenschaften des Funktionsterms von den Eigenschaften der Funktion zu trennen (II.); in einem dritten und letzten Schritt werden dann zwei Thesen zum Lehren und Lernen mathematischer Begriffe vorgestellt, die sich als Konsequenz aus den Überlegungen in den ersten beiden Abschnitten ergeben (III.).

I.

Maditas Urteil, dass die 1 keine *ungerade Zahl* sei, geht unmittelbar in eine wahre Aussage über, sobald die Unterscheidung zwischen der *Ziffer* und der *dargestellten Zahl* eingeführt wird. Im Kontext dieser Unterscheidung wird nämlich deutlich, dass der Referent ihres Urteils nicht die dargestellte Zahl, sondern die Ziffer war und die arabische Ziffer »1«, an die Madita vermutlich gedacht haben wird, da kann man ihr nur beipflichten, ist sogar ziemlich gerade. Demgegenüber sind wir es in diesem Kontext gewohnt, die Wörter »gerade« und »ungerade« als Eigenschaften aufzufassen, die wir der dargestellten Zahl zu- bzw. absprechen, nicht aber ihrer Ziffer. Allgemein gespro-

chen: Es handelt sich um Eigenschaften des Referenten und nicht um Eigenschaften des Repräsentanten. In dem Eingangsdialog manifestiert sich damit das, was ich das ›Grundverhältnis der Repräsentation‹ nennen möchte: *Eine Repräsentation ist eine Beziehung zwischen einem Repräsentanten und einem Referenten*. In einem Repräsentationsverhältnis muss also immer zwischen *drei* Positionen unterschieden werden: (1) dem Repräsentanten (hier: die Ziffer »1«), (2) dem Referenten (hier: die Zahl 1) und (3) der Repräsentation, d. h. der Beziehung von Repräsentant und Referent (hier: die Zahlendarstellung als Beziehung *zwischen* der Ziffer »1« und der Zahl 1).

Um dieses Verhältnis, also die *Beziehung* zwischen einem Repräsentanten und einem Referenten, genauer analysieren zu können, unterscheidet Quine (1974, S. 64ff) zwischen »Nennen« und »Gebrauchen«: Wenn wir kommunizieren, dann *gebrauchen* wir immer nur die Repräsentanten, also Entitäten *innerhalb* einer Sprache, aber wir *gebrauchen* sie *nur*, um damit Sachverhalte *außerhalb* der Sprache zu *benennen*. Wenn wir zum Beispiel sagen, »1 ist eine ungerade Zahl«, dann *gebrauchen* wir die Worte und Ziffern, um eine begriffliche Beziehung zu *benennen*. Wir treffen nämlich die Aussage, dass die Zahl 1 unter den Begriff *ungerade Zahl* subsumiert werden kann. Dazu *gebrauchen* wir jedoch weder die Zahl 1 noch den Begriff *ungerade Zahl*. Die Zahl 1 oder den Begriff *ungerade Zahl* selbst zu *gebrauchen*, ist schon deswegen unmöglich, weil wir sie nicht wahrnehmen können. Sie können eben nur mittels ihrer Repräsentanten, also z. B. über den sprachlichen Ausdruck »ungerade Zahl« oder die Ziffer »1«, zum Gegenstand der Kommunikation und des Denkens gemacht werden.

Wer erfolgreich Arithmetik betreiben will, muss lernen, Aussagen über Zahlendarstellungen, die *darstellungsunabhängig* sind (z. B.: »1 ist eine ungerade Zahl« oder »3 ist ein Teiler von 9«), von solchen Aussagen über Zahlendarstellungen zu unterscheiden, die *darstellungsabhängig* sind (z. B.: »9 ist einstellig« oder »Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.«). Wann immer man es mit mathematischen Aussagen zu tun hat, sollte man sehr genau hinschauen, was denn nun eigentlich der *Referent* ist, über den bestimmte Eigenschaften und Beziehungen ausgesagt werden. Wird die Frage der Referenz missachtet, so entstehen Paradoxa. Sieht man nämlich in unserem Fall von der Unterscheidung zwischen Ziffer bzw. Zahlwort und dargestellter Zahl ab, so werden zwei *verschiedene* Referenten, die in *einer* Zahlendarstellung aufeinander bezogen werden, zu einem einzigen kondensiert. In unserem Fall würde dies zu der paradoxen Aussage führen, dass die Zahl 1 *sowohl* gerade *als auch* ungerade ist.

II.

In seiner *Introductio in analysin infinitorum* definierte Euler im Jahre 1748 eine Funktion wie folgt: »Eine Funktion einer veränderlichen Größe ist ein analytischer Ausdruck, der in beliebiger Weise aus dieser veränderlichen Größe und aus Zahlen oder konstanten Größen zusammengesetzt ist« (Euler, 1885, S. 4). Es fällt unmittelbar auf, dass Euler in seiner Definition, die Funktion mit dem Funktionsterm identifiziert. Er schreibt nämlich nicht, dass ein analytischer Ausdruck eine Funktion *darstellt*, sondern er schreibt, dass eine Funktion ein analytischer Ausdruck *ist*. Entsprechend nannte Euler dann auch gerade diejenigen Funktionen *stetig*, welche sich in einem einzigen analytischen Ausdruck (d. h. in einem geschlossenen Funktionsterm) darstellen lassen und bezeichnete alle diejenigen Funktionen als *unstetig*, für die keine solche geschlossene Darstellung existiert. Auf die Schwierigkeiten, die sich in diesem Fall aus der Identifikation von Repräsentant und Referent ergeben, hat Augustin-Louis Cauchy eindringlich hingewiesen: Die Stetigkeit als eine Eigenschaft aufzufassen, die in dieser Weise am Funktionsterm abgelesen werden kann, führt zu Paradoxien, da ein und dieselbe Funktion zugleich stetig und unstetig genannt werden kann, je nachdem, welche Darstellung jeweils gewählt wird. Cauchy (1844, S. 145f.) hat dies an dem folgenden Beispiel verdeutlicht:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x > 0 \\ -x & \text{falls } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \sqrt{x^2}.$$

Im Objektbereich der reellen Zahlen sind die beiden Funktionsterme *zwei* Darstellungen von *ein und derselben* Funktion (der Betragsfunktion), da die Funktionswerte für alle reellen Zahlen übereinstimmen. Die Funktion wäre daher als stetig zu bezeichnen, sofern man sich für die geschlossene Darstellung entscheidet, sie könnte jedoch ebenso gut unstetig genannt werden, sofern der andere, nicht-geschlossene Ausdruck präferiert wird.

Der entscheidende Schritt in der Entwicklung des Funktionsbegriffs lag nun darin, die Funktion mittels des Verfahrens der Definition durch Abstraktion als eigenständigen, abstrakten Gegenstand von ihren vielfältigen Erscheinungsformen bzw. Repräsentanten abzulösen: Eine *spezifische* Funktion wurde als Klasse *aller* einander funktional äquivalenten Funktionsterme aufgefasst. Zwei Terme können dann und nur dann als funktional äquivalent identifiziert werden, wenn ihre Funktionswerte für alle Elemente im Definitionsbereich übereinstimmen. Der Begriff der Funktion wird damit auf eine feste Kopplung von Input und Output innerhalb von zwei Objektbereichen reduziert, die dadurch charakterisiert werden kann, dass jedem Element aus dem einem Objektbereich genau ein Element aus dem anderen Objektbereich zugeordnet wird.

III.

Die beiden Unterscheidungen Zahl/Ziffer und Funktion/Funktionsterm, mit denen ich mich in diesem Beitrag exemplarisch auseinandergesetzt haben, verweisen damit auf eine grundlegende Schwierigkeit jeglicher mathematischen Tätigkeit: Mathematische Objekte sind uns niemals direkt, sondern immer nur indirekt mittels einer Repräsentation zugänglich. Wir *gebrauchen* nie die mathematischen Objekte selbst, sondern immer nur ihre Repräsentanten, aber wir gebrauchen ihre Repräsentanten *nur*, um damit die mathematischen Objekte zu *benennen*. Die Frage, was der *Referent* ist, über den bestimmte begriffliche Beziehungen ausgesagt werden können, stellt sich daher auf allen Ebenen mathematischer Theoriebildung immer wieder neu und auf jeder dieser Ebene läuft man auf ein Neues Gefahr, vorschnell die Repräsentanten mit dem zu verwechseln, was sie repräsentieren.

Die bisherigen Überlegungen konvergieren in einer doppelten These: (1) Das Lernen eines mathematischen Begriffs durchläuft zunächst eine Phase, in der gerade *nicht* durchschaut wird, dass die Repräsentanten eines Begriffes *nicht* der mathematische Begriff *sind*, sondern ihn nur *darstellen*. Anders ausgedrückt: Das Lernen eines Begriffs kann als Prozess des fortschreitenden Durchschauens derjenigen Merkmale beschrieben werden, die in der *systematischen Variation* einer oder mehrerer Repräsentanten als *Invarianten* her austreten; (2) Wenn dieser Prozess des fortschreitenden Durchschauens im Kontext von pädagogischer Kommunikation stattfindet, so ist anzunehmen, dass ein derartiges Begriffslehren dadurch erleichtert wird, *dass die Lehrende nicht nur durchschaut, sondern vor allem auch durchschaut, dass sie durchschaut, dass die vielfältigen Repräsentanten nicht die mathematischen Begriffe sind, sondern sie nur darstellen* und außerdem auch noch durchschaut, dass der Lernende dies gerade *nicht* durchschaut.

[1] Dieser Beitrag ist eine stark gekürzte Fassung des ursprünglichen Vortragsmanuskripts, das in voller Länge unter dem folgenden Link aufgerufen werden kann: https://www.researchgate.net/publication/323868914_Aber_Papa_die_1_ist_doch_gerade_-_Reflexionen_zur_Frage_der_Representation_am_Beispiel_von_Zahl-_und_Funktionsbegriff_Manuskript (DOI: 10.13140/RG.2.2.26684.13448).

Literatur

- Cauchy, A. L. (1844). Mémoire sur les fonctions continues. In A. L. Cauchy (Hrsg.), *Œuvres complètes, série 1, tome 8* (S. 145–160).
- Euler, L. (1885). *Einleitung in die Analysis des Unendlichen*. Berlin: Springer.
- Luhmann, N. (2015). *Die Gesellschaft der Gesellschaft*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Otte, M. (1994). *Das Formale, das Soziale und das Subjektive. Eine Einführung in die Philosophie und Didaktik der Mathematik*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Quine, W. V. (1974). *Grundzüge der Logik*. Frankfurt am Main: Suhrkamp