TREIBER, Eva
Bamberg

Plättchen werfen: Was erwarten Grundschullehramtsstudierende bei diesem Zufallsexperiment?

Das Zufallsexperiment „Plättchen werfen“

Bei der Aktivität „Plättchen werfen“ wird eine bestimmte Anzahl Wendeplättchen in einem Becher gut geschüttelt, ausgekippt und bestimmt, wie viele Plättchen mit der roten bzw. blauen Seite nach oben liegen. Damit kann im Anfangsunterricht die Zerlegung von Zahlen thematisiert werden (z. B. Padberg & Benz, 2021), gleichzeitig können die Schülerinnen und Schüler Erfahrungen zum Zufall sammeln (z. B. Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018).

Der vorliegende Beitrag stellt die zukünftigen Lehrkräfte, die mit den Schülerinnen und Schülern möglicherweise dieses Zufallsexperiment durchführen, in den Mittelpunkt. Nach Batanero et al. (1998) sollten die Studierenden unter anderem verstanden haben, dass weder der Ausgang bei der einmaligen Durchführung noch die Folge der Ausgänge bei mehrmaliger Durchführung vorhersagbar oder beeinflussbar ist, dass aber dennoch globale Regelmäßigkeiten gefunden werden können. Beim Werfen von Wendeplättchen erwartet man, dass auf lange Sicht am seltensten der Fall eintritt, dass alle Plättchen die gleiche Farbe zeigen, und dass die Häufigkeiten zunehmen, wenn die Verteilung von Rot und Blau ausgeglichener wird.

Eine andere Erwartung würde sich basierend auf dem Equiprobability Bias (Lecoutre, 1992) ergeben. Diese häufig berichtete problematische Vorstellung im Bereich der Wahrscheinlichkeit (z. B. Fischbein & Schnarch, 1997, Hokor et al., 2022) bezeichnet die Annahme, dass alle Ausgänge eines Zufallsexperiments die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, und würde beim Werfen von Wendeplättchen zu dem Gedanken führen, dass alle Ausgänge etwa gleich häufig auftreten.

Fragestellung und Untersuchung

Im Beitrag geht es um die Frage, welche Häufigkeitsverteilung Grundschullehramtsstudierende beim häufigen Werfen von Wendeplättchen erwarten. 62 Studierende aus fünf Seminargruppen füllten jeweils in der ersten Seminarsitzung einen Fragebogen zur Wahrscheinlichkeit aus. Dieser enthielt die Frage:

> Stellen Sie sich vor, Sie lassen die Schülerinnen und Schüler Ihrer Klasse mehrfach den folgenden Versuch durchführen: Es werden jeweils sechs Wendeplättchen geworfen

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

und gezählt, wie viele Plättchen mit der roten Seite nach oben gelandet sind. Zum Schluss werden die Ergebnisse aller Kinder zusammengetragen.

Angenommen, in der Klasse wurde der Versuch insgesamt 350-mal durchgeführt: Wie könnte die Häufigkeitstabelle aussehen? Bitte tragen Sie die absoluten Häufigkeiten (Anzahlen) ein.

Zusätzlich war die Häufigkeitstabelle mit den möglichen Ausgängen vorgegeben, in die die Studierenden die Anzahlen eintragen sollten.

Im Prinzip könnte man zur Beantwortung dieser Frage die Erwartungswerte berechnen. Von Interesse waren jedoch weniger die konkret angegebenen Werte, sondern mögliche Patterns über alle Antworten bei jeder einzelnen Person hinweg. Daher wurde untersucht, ob und ggf. welche Patterns sich in den Antworten zeigen. Antworten, die vergleichbare Patterns aufwiesen, wurden zu einer Gruppe zusammengefasst.

Ergebnisse

Insgesamt ließen sich fünf verschiedene Gruppen identifizieren: *richtige Tendenz* sowie *Gleichverteilung*, die aufgrund der Literatur zu erwarten waren, sowie *eingedellte Glocke*, *keine Antwort* und *anderer Antworttyp*. Diese werden im Folgenden vorgestellt und in Tabelle 1 anhand von Beispielen konkretisiert. Für die einzelnen Ausgänge des Zufallsexperiments werden die Kurzschreibweisen mit 6b für 6-mal blau; 5b, 1r für 5-mal blau und einmal rot etc. verwendet.

richtige Tendenz: Eine Antwort wurde als tendenziell richtig betrachtet, wenn die Häufigkeiten für 6b bzw. 6r am geringsten waren und dann bis zum symmetrischen Ausgang 3b, 3r zunahmen. Tabelle 1 enthält mit rT1, rT2, rT3 drei der zwölf Studierendenantworten aus dieser Gruppe.

Gleichverteilung: Eine Antwort wurde dieser Gruppe zugeordnet, wenn sie für jeden Ausgang die gleiche Häufigkeit (Beispiel EB1) oder fast gleiche Häufigkeiten (Beispiel EB2) angaben. In diese Gruppe fallen 17 Antworten.

eingedellte Glocke: Die Antworten dieser Gruppe unterscheiden sich lediglich dadurch von den Antworten der Gruppe *richtige Tendenz*, dass für den symmetrischen Ausgang eine geringere Häufigkeit angegeben wurde als für die beiden fast symmetrischen Ausgänge 4b, 2r bzw. 2b, 4r. Die beispielhaften Antworten eG1 und eG2 in Tabelle 1 zeigen zwei der sechs Antworten aus dieser Gruppe.

keine Antwort: Hierunter fallen die 15 Antworten, bei denen für keinen der möglichen Ausgänge eine Häufigkeit angegeben war.

anderer Antworttyp: Die verbleibenden zwölf Antworten, wie Beispiel aA1, ließen sich keiner der genannten Gruppen zuordnen und auch innerhalb der

Antworten waren keine eindeutig vergleichbaren Patterns zu identifizieren, die die Bildung kleinerer Gruppen nahegelegt hätten. In diese Gruppe fallen auch einzelne Antworten, bei denen nur für einige der möglichen Ausgänge eine Häufigkeit angegeben wurde, wie im Beispiel aA2.

	6b	5b, 1r	4b, 2r	3b, 3r	2b, 4r	1b, 5r	6r
rT1	25	40	70	80	70	40	25
rT2	10	15	50	200	50	15	10
rT3	9	20	100	150	40	21	10
EB1	50	50	50	50	50	50	50
EB2	49	51	48	52	47	53	50
eG1	25	40	80	60	80	40	25
eG2	40	50	100	70	100	50	40
aA1	50	86	29	46	30	34	75
aA2	0	-	-	175	-	-	350

Tabelle 1: Ausgewählte Antworten und deren Zuordnung.

Fazit und Diskussion

Im vorliegenden Beitrag wurde untersucht, welche Häufigkeitsverteilung angehende Grundschullehrkräfte beim häufigen Werfen von sechs Wendeplättchen erwarten.

Bei über der Hälfte der Studierenden deuten die Antworten darauf hin, dass sie sich der von Batanero et al. (1998) genannten globalen Regelmäßigkeiten bewusst sind. Nur zwölf der 62 Antworten wurden jedoch der Gruppe *richtige Tendenz* zugeordnet, und wie in den Beispielen zu sehen ist, variieren die absoluten Werte bei den einzelnen Ausgängen des Zufallsexperiments deutlich zwischen den Studierenden. Außerdem zeigt sich, dass die Studierenden nicht unbedingt von einer (annähernd) symmetrischen Häufigkeitsverteilung ausgehen, auch wenn sie zunehmende Häufigkeiten von den Extremfällen bis zum symmetrischen Ausgang erwarten. Ein vorher nicht erwartetes Pattern war das der eingedellten Glocke - hier zeigten die Antworten der Studierenden zu einem großen Teil die richtige Tendenz, aber die angegebenen Werte für 3b, 3r waren jeweils (verglichen mit den Werten für 4b, 2r bzw. 2b, 4r) zu klein, was möglicherweise mit dem Gedanken erklärt werden kann, dass 3b, 3r „zu“ symmetrisch für den Zufall ist. Mehr als ein Viertel der Antworten legen zwar die Erwartung einer globalen Regelmäßigkeit nahe, scheinen allerdings vom Equiprobability Bias bestimmt zu sein.

Dass die Mehrheit der Studierenden auf lange Sicht ein Muster erwarten, kann man gemessen an Batanero et al. (1998) als positiv werten; wünschenswert wäre, wenn das erwartete Muster auch mit der Realität kompatibel ist. Als Unterstützungsmöglichkeit für Studierende liegt nahe, diese Erfahrungen mit Zufallsexperimenten sammeln zu lassen, insbesondere auch mit solchen Zufallsexperimenten, bei denen die verschiedenen Ausgänge nicht alle die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen. Bei theoretisch bestimmbaren Wahrscheinlichkeiten könnte man mit den theoretischen Wahrscheinlichkeiten oder empirisch ermittelten relativen Häufigkeiten beginnen - ob ein Zugang dem anderen überlegen ist, wäre zu untersuchen.

Bei den Antworten der Gruppe *anderer Antworttyp* ist hingegen nicht eindeutig zu beantworten, ob die Studierenden auf lange Sicht ein Muster erwarten. Einzelne Antworten könnte man als eine Überschätzung der Unvorhersagbarkeit deuten, wie sie beispielsweise auch schon von Batanero und Serrano (1999) oder Lecoutre und Durand (1988) berichtet wurde, also als Gedanke „beim Zufall kann alles rauskommen". Auch wenn keine Antwort gegeben wurde, wäre das eine mögliche Erklärung. In diesem Fall könnten praktische Erfahrungen mit Zufallsexperimenten unterstützen, zunächst ein Bewusstsein dafür zu entwickeln, dass auf lange Sicht durchaus Aussagen möglich sind.

Literatur

Batanero, C., Green, D. R. & Serrano, L. R. (1998). Randomness, its meanings and educational implications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29*(1), 113–123. https://doi.org/10.1080/0020739980290111

Batanero, C., & Serrano, L. (1999). The Meaning of Randomness for Secondary School Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(5), 558–567.

Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 96–105.

Hokor, E. K., Apawu, J., Owusu-Ansah, N. A. & Agormor, S. (2022). Preservice Teachers' Misconceptions in Solving Probabilistic Problems. *Pedagogical Research, 7*(1), 0112.

Lecoutre, M.-P. (1992). Cognitive Models and Problem Spaces in „Purely Random" Situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*(6), 557–568.

Lecoutre, M.-P., & Durand, J.-L. (1988). Jugements Probabilistes et Modeles Cognitifs: Etude d'une Situation Aleatoire. *Educational Studies in Mathematics, 19*(3), 357–368.

Padberg, F. & Benz, C. (2021). *Didaktik der Arithmetik: Fundiert, vielseitig, praxisnah* (5., überarbeitete Auflage). Springer Spektrum.

Rathgeb-Schnierer, E. & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln: Grundlagen—Förderung—Beispiele.* Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-57477-5