

UTSCH, Nina
Gießen

Vernetzungen von mathematischen Sätzen mit dem Concept Image – Praktiken der Aufgabenbearbeitung von Lehramtsstudierenden in der Analysis I

Das Bearbeiten von mathematischen Übungsaufgaben ist ein wesentlicher Bestandteil eines Mathematikstudiums. Dabei wird erwartet, dass Studierende die in der Vorlesung eingeführten Definitionen und Sätze verwenden. Um das Lernen der Studierenden beschreiben zu können, führten Tall und Vinner (1981) die Theorie von *Concept Image* und *Concept Definition* ein. Inwiefern Studierende ihr *Concept Image* beim Bearbeiten von Aufgaben nutzen und inwiefern sie dieses mit einer formalen Aufgabenbearbeitung mit Bezug zur *Concept Definition* oder mathematischen Sätzen vernetzen, wurde in einer qualitativen Studie an der JLU Gießen untersucht. Durch die Studie konnten verschiedene Praktiken von Aufgabenbearbeitungen identifiziert werden, wobei mit Praktiken keine einzelnen, individuellen Aktivitäten gemeint sind, sondern ein "umfassendere[s]", in der Untersuchungsgruppe "geteilte[s]" und "routinisiertes [...] Bündel von Aktivitäten" (Reckwitz, 2003, S. 289). Das Forschungsinteresse ist, diejenigen Praktiken zu identifizieren, die auf eine Vernetzung von *Concept Image* mit der *Concept Definition* bzw. mit mathematischen Sätzen hinweisen.

Um die Bezüge der Studierenden zu ihrem *Concept Image* und der *Concept Definition* beschreiben zu können, wurde die Theorie von Tall & Vinner (1981) adaptiert. Zum einen wurde das *Concept Image* präzisiert, indem theoretische Bestandteile eines *Concept Images* beschrieben wurden. Vorstellungen, verwandte Begriffe, Eigenschaften sowie graphische und numerische Darstellungen können Teile eines *Concept Images* sein, da diese zu der kognitiven Struktur gehören können, die mit einem Begriff verbunden wird (vgl. Utsch, Artikel angenommen). Zum anderen wurde die *Concept Definition* um eine *Concept Definition im weiteren Sinne* ergänzt, um ebenso formale Aufgabenbearbeitungen mit Bezug zu mathematischen Sätzen und der Verwendung von mathematischen Symbolen beschreiben zu können.

Als ein Ergebnis der Studie kann festgehalten werden, dass Studierende mathematische Sätze als Teil der *Concept Definition im weiteren Sinne* mit Vorstellungen, verwandten Begriffen und graphischen Darstellungen als Teile ihres *Concept Images* vernetzen. Die drei Praktiken *Vernetzung von mathematischen Sätzen mit Vorstellungen*, *Vernetzung von mathematischen Sätzen mit verwandten Begriffen* und *Vernetzung von mathematischen Sätzen mit graphischen Darstellungen* werden im Beitrag inhaltlich vorgestellt.

Methodisches Vorgehen

Im Sommersemester 2019 und Wintersemester 2019/2020 wurde an der JLU Gießen eine qualitative Studie mit sieben Studierenden des Realschullehramts und 19 Studierenden des Gymnasiallehramts durchgeführt. Die Studierenden haben in Einzelarbeit vier mathematische Übungsaufgaben zur Folgenkonvergenz bearbeitet. Dabei wurde die Methode des lauten Denkens eingesetzt, um Einblicke in die kognitiven Prozesse der Studierenden zu erhalten. Ein Überblick über die Aufgaben der Studie wird z. B. in Utsch (2023) gegeben. Die Studierenden wurden videographiert und ausgewählte Aufgabebearbeitungen transkribiert. Die Bearbeitungsprozesse wurden dann in einem zweistufigen Verfahren ausgewertet: Zunächst wurden die Transkripte in einer Übersichtsanalyse mithilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet und die Abfolge der Codierung in sogenannten Prozessmatrizen visualisiert. Anschließend wurden ausgewählte Transkripte in einer Detailanalyse mit mehreren Forschenden interpretiert.

Für die Übersichtsanalyse wurde ein Kategoriensystem entwickelt, welches zum einen Kategorien zu möglichen Bestandteilen des *Concept Images* wie den individuellen Vorstellungen der Lernenden, dem Umgang mit verwandten Begriffen und dem Umgang mit graphischen Darstellungen enthält. Zum anderen enthält das Kategoriensystem Kategorien, die auf eine formale Aufgabebearbeitung hinweisen, wie beispielsweise Kategorien zur Verwendung der *Concept Definition* oder zum Umgang mit mathematischen Sätzen. Das Kategoriensystem wurde um eine zeitliche Achse ergänzt, die durch die Einteilung der Codiereinheiten festgelegt wird. Die dadurch entstehende Matrix wird als Prozessmatrix bezeichnet. Mithilfe dieser Prozessmatrizen ist es möglich, die individuellen Bearbeitungsprozesse der Studierenden zu visualisieren und strukturell zu vergleichen. Es kann visuell erfasst werden, ob Kategorien des *Concept Images* zeitgleich oder im häufigen Wechsel mit Kategorien zum Umgang mit der *Concept Definition (im weiteren Sinne)* codiert werden, was auf eine Vernetzung von beidem hinweisen würde. Die Prozessmatrizen aller Studierenden wurden bezüglich solcher Vernetzungen untersucht und in Gruppen zusammengefasst. Zeigt sich eine Vernetzung bei verschiedenen Studierenden und in unterschiedlichen Aufgaben, kann von einem "umfassendere[n]", in der Untersuchungsgruppe "geteilte[n]" und "routinisierte[n] [...] Bündel von Aktivitäten", also einer Praktik der Aufgabebearbeitung, gesprochen werden (Reckwitz, 2003, S. 289).

Um die identifizierten Praktiken inhaltlich beschreiben zu können, wurden ausgewählte Transkripte in einer sich anschließenden Detailanalyse gemeinsam mit anderen Forschenden interpretiert, indem zu jeder Codiereinheit der Transkripte mehrere Deutungshypothesen aufgestellt wurden.

Ergebnisse

Durch die Analyse von 74 Studierendenbearbeitungen konnten bezüglich der Vernetzung mit mathematischen Sätzen als Teil der *Concept Definition im weiteren Sinne* die folgenden drei Praktiken identifiziert werden: *Vernetzung von mathematischen Sätzen mit Vorstellungen*, *Vernetzung von mathematischen Sätzen mit verwandten Begriffen* und *Vernetzung von mathematischen Sätzen mit graphischen Darstellungen*, wobei eine Vernetzung mit graphischen Darstellungen nur gemeinsam mit anderen Praktiken auftritt.

Darüber hinaus konnten als weitere Praktiken die Vernetzung der *Formal Concept Definition* mit Vorstellungen bzw. mit graphischen Darstellungen identifiziert werden (vgl. Utsch, Artikel angenommen).

Vernetzung von Sätzen mit Vorstellungen

Die Praktik *Vernetzung von mathematischen Sätzen mit Vorstellungen* zeigt sich in 32 von 74 Studierendenbearbeitungen. Dabei werden Vorstellungen sowohl vor, während als auch nach der Arbeit mit einem mathematischen Satz gezeigt. Die Vernetzung kann darin bestehen, dass eine intuitive, vorstellungsbasierte Vermutung durch einen mathematischen Satz gestützt wird, eine vorstellungsorientierte Sprache verwendet wird, während ein Satz angewendet wird oder Vorstellungen eingebunden werden, wenn Unklarheiten zu einem Satz geklärt werden müssen. Bezüglich der von Greefrath et al. (2016) beschriebenen Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff fällt auf, dass die Studierenden mathematische Sätze häufig mit einer Annäherungsvorstellung vernetzen. In keiner der ausgewerteten Bearbeitungen wird ein mathematischer Satz mit einer Umgebungsvorstellung vernetzt.

In der Bearbeitung der Studentin Ina zeigt sich die Vernetzung z. B. wie folgt: Ina gibt zuerst Einblicke in ihre Vorstellungen und beschreibt mit ihrer Annäherungsvorstellung die Vermutung, dass die von ihr untersuchte Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ „immer hin und her“ „springt“ und sich „keinem Grenzwert“ „nähert“. Unmittelbar danach stützt sie ihre Vermutung durch die Arbeit mit den mathematischen Sätzen, dass der Grenzwert a einer konvergenten Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eindeutig ist bzw. der einzige Häufungspunkt ist. Die Vernetzung von mathematischen Sätzen mit Vorstellungen besteht bei Ina also darin, dass sie ihre auf einer Annäherungsvorstellung basierende Beobachtung anschließend mithilfe eines mathematischen Satzes stützt.

Vernetzung von Sätzen mit verwandten Begriffen

Diese Praktik zeigt sich in 34 von insgesamt 74 untersuchten Studierendenbearbeitungen und ist damit die in der Untersuchungsgruppe am häufigsten geteilte Praktik. In diesen Bearbeitungen werden mathematische Sätze mit

verwandten Begriffen wie beispielsweise dem Teilfolgen- oder dem Häufungspunktbegriff als Teil des *Concept Images* zur Folgenkonvergenz vernetzt. Es fällt auf, dass meist zuerst ein verwandter Begriff genannt wird und kurz darauf mit einem Satz im Kontext des zuvor genannten verwandten Begriffs argumentiert wird. Dies weist darauf hin, dass der verwandte Begriff als Teil des *Concept Images* nicht losgelöst ist von dem mathematischen Satz. Das Nachdenken über einen verwandten Begriff kann möglicherweise das Finden eines mathematischen Satzes erleichtern und so einen Zugang zu einer deduktiv schließenden Aufgabenbearbeitung unterstützen.

Vernetzung von Sätzen mit graphischen Darstellungen

Die Praktik *Vernetzung von mathematischen Sätzen mit graphischen Darstellungen* zeigt sich in 11 von 74 untersuchten Bearbeitungen. Sie zeigt sich allerdings nur gemeinsam mit einer weiteren der oben genannten Praktiken. Durch die Analyse von Studierendenbearbeitungen konnte herausgearbeitet werden, dass einige Studierende mit einem mathematischen Satz argumentieren, unmittelbar nachdem sie eine graphische Darstellung erstellt haben. Es kann daher vermutet werden, dass graphische Darstellungen dazu anregen können, einen geeigneten mathematischen Satz zu finden. Darüber hinaus kann die graphische Darstellung auch eine zusätzliche Erklärung bieten, nachdem die Argumentation mit Bezug zu einem mathematischen Satz bereits ausgearbeitet wurde. Dann dient die graphische Darstellung zur Veranschaulichung der formalen Argumentation.

Literatur

- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5>
- Reckwitz, A. (2003). Grundelemente einer Theorie sozialer Praktiken. Eine sozialtheoretische Perspektive. *Zeitschrift für Soziologie*, 32 (4), 282–301.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.
- Utsch, N. (2023). Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zur Konvergenz von Folgen und Teilfolgen. In J. Härterich, M. Kallweit, K. Rolka & T. Skill (Hrsg.): *Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2021*, 274-288. <https://doi.org/10.37626/GA978392645.0>
- Utsch, N. (Artikel angenommen). Eine Praktik der Aufgabenbearbeitung von Lehramtsstudierenden zur Folgenkonvergenz in der Analysis I: Die Vernetzung von Definition, graphischer Darstellung und Vorstellung. *mathematica didactica*, 47.