DIESER, Daniel
Wuppertal

Number connect - Erfindung und Erkundung eines kombinatorischen Spiels

Der folgende Beitrag behandelt ein Zweipersonen connect-it Spiel, das der Autor ausgehend von dem bekannten graphentheoretischen Gas-Wasser-Elektro-Versorgerproblem ($K_{3,3}$ ist nicht plättbar (Aigner, 2015, S. 53)) entwickelt hat. Es werden drei verschiedene Varianten des Spiels vorgestellt. Diese werden jeweils bezüglich möglicher Gewinnstrategien analysiert. Bei der ersten Spielvariante wird eine Gewinnstrategie präsentiert, die auf dem Schubfachprinzip beruht. Bei der zweiten Spielvariante wird eine Gewinnstrategie vorgelegt, die wie eine Schleife im Sinne der Programmierung funktioniert. Die Analyse der dritten Spielvariante führt schließlich in die kombinatorische Spieltheorie hinein.

Die Spielregeln von Number connect

Nachdem sich die Spielenden auf eine natürliche Zahl n geeinigt haben, werden die Zahlen von 1 bis n in aufsteigender Reihenfolge in einer Zeile aufgeschrieben. Nun soll eine darüberstehende (erste) Zeile entstehen, die ebenfalls jede der ersten n natürlichen Zahlen genau ein Mal enthält. In *Spielvariante 1* besetzen die Spielenden dazu die n Stellen der ersten Zeile abwechselnd. Für eine Besetzung darf eine beliebige unbesetzte Stelle ausgewählt werden. In *Spielvariante 2* wird dazu die erste Zeile von links nach rechts, d.h. in der Reihenfolge von der ersten bis zur letzten Stelle, (ebenfalls abwechselnd) von den Spielenden besetzt. Sobald die erste Zeile (je nach Spielvariante) vollständig besetzt ist, beginnen die Spielenden (unter Einhalten der bisherigen Zugreihenfolge) gleiche Zahlen der beiden Zeilen durch ihre Verbindungsstrecke miteinander zu verbinden. Die entstehenden Verbindungsstrecken dürfen sich nicht schneiden. Wer keine Verbindungsstrecke mehr ziehen kann, verliert das Spiel. Bei *Spielvariante 3* wird die Besetzungsphase der ersten Zeile übersprungen. Die Zahlen von 1 bis n in der ersten Zeile werden den Spielenden in zufällig permutierter Reihenfolge vorgegeben. Die Spielenden steigen direkt mit dem Verbinden der Zahlenpaare in das Spiel ein. Zuerst werden die ersten beiden Spielvarianten hinsichtlich Gewinnstrategien analysiert.

Schubfächer und Schleifen

Möchte man Gewinnstrategien von kombinatorischen Spielen herausarbeiten, dann kann es hilfreich sein, nach Spielsituationen zu suchen, in denen der Gewinner offensichtlich festgelegt werden kann. Dazu überspringen wir

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

an der ersten Stelle befindet, dann kann die Person, die als nächstes dran ist, das Spiel durch Verbinden der Zahl n in beiden Zeilen beenden. Dasselbe gilt, wenn 1 die letzte Stelle besetzt. Falls $n-1$ an der zweiten Stelle der ersten Zeile steht, dann gewinnt die nächstziehende Person ebenfalls, indem sie die Zahl $n-1$ in beiden Zeilen miteinander verbindet. Dadurch ist das Spiel dann entweder bereits beendet (falls n an erster Stelle steht) oder es endet nach genau zwei weiteren Zügen (falls eine kleinere Zahl als $n-1$ an der ersten Stelle steht). Diese Beobachtungen können für Gewinnstrategien der ersten beiden Spielvarianten genutzt werden. Für beide Varianten gilt: Ist n gerade, dann besetzt Spieler 1 zuerst eine Stelle der ersten Zeile und verbindet auch zuerst ein Zahlenpaar. Somit muss Spieler 1 nichts weiter tun, als die erste, zweite oder letzte Stelle, im obigen Sinne, richtig zu besetzen. Für den Fall, dass n ungerade ist, beginnt zwar Spieler 1 mit dem Besetzen der ersten Zeile, aber Spielerin 2 fängt an ein Zahlenpaar zu verbinden. Sie hat dann für beide Varianten jeweils eine Gewinnstrategie:

Spielvariante 1. Spieler 1 kann in seinem allerersten Zug (der Besetzung) höchstens zwei der drei für Spielerin 2 oben beschriebenen gewinnbringenden Besetzungen verhindern (Schubfachprinzip). Spielerin 2 kann somit stets die erste, zweite oder letzte Stelle auf passende Weise besetzen und damit eine Vorentscheidung herbeiführen.

Spielvariante 2. Da die Spielenden die erste Zeile in dieser Variante von links nach rechts besetzen, kann Spieler 1 eine für Spielerin 2 gewinnbringende Besetzung der ersten oder zweiten Stelle nur verhindern, indem er die erste Stelle mit $n-1$ besetzt. Durch eine anschließende Besetzung der zweiten Stelle mit n sorgt Spielerin 2 dafür, dass sich die dritte und vierte Zeilenstelle wie die erste und zweite Stelle in einem Spiel mit $n-2$ Zahlen verhalten: Denn wenn $n-2$ die dritte Stelle besetzt, dann kann Spielerin 2 (unabhängig von der restlichen Zeile rechts davon) das Spiel im ersten Verbindungszug beenden. Sollte sich $n-3$ an der vierten Stelle befinden, dann kann Spielerin 2 das Spiel gewinnen, indem sie als erstes die Zahl $n-3$ in beiden Zeilen verbindet: Dadurch ist das Spiel entweder direkt beendet (falls $n-2$ sowieso an dritter Stelle steht) oder es endet nach genau zwei weiteren Zügen (falls eine kleinere Zahl als $n-3$ an dritter Stelle steht). Spieler 1 kann diese für Spielerin 2 gewinnbringende Besetzung erneut nur dann verhindern, wenn er die dritte Stelle mit $n-3$ besetzt, woraufhin Spielerin 2 die vierte Stelle mit $n-2$ besetzt. Die fünfte und sechste Stelle verhalten sich dann wie die erste und zweite in einem Spiel mit $n-4$ Zahlen. Induktiv fortschreitend erkennt man: Spieler 1 muss stets die zweitgrößte Zahl aus der

Menge der verbleibenden zu wählenden Zahlen nehmen, während Spielerin 2 jedes Mal mit der größten Zahl erwidert. Schließlich ist Spieler 1 dazu gezwungen, die letzte Stelle mit 1 zu besetzen. Die Gewinnstrategie von Spielerin 2 mag an eine Schleife in der Programmierung erinnern, die man schematisch, wie in Abbildung 1, darstellen kann.

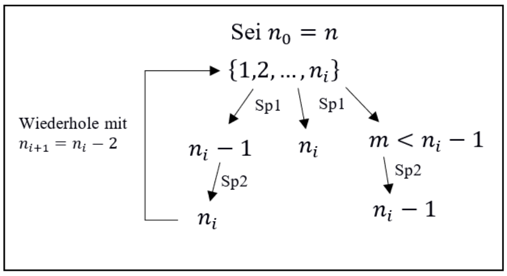


Abbildung 1: Die Gewinnstrategie von Spielerin 2 als Pseudocode

P- und N-Positionen

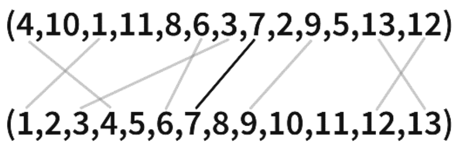
Für die ersten beiden Spielvarianten existieren also Gewinnstrategien für Spieler 1 und Spielerin 2. Im Allgemeinen spricht man von:

- N-Positionen = Gewinnposition für die nächstziehende Person (von „next Player wins") und
- P-Positionen = Gewinnposition für die Person, die als zweites zieht (von „previous Player wins").

Es gilt, dass von einer P-Position jeder mögliche Zug in eine N-Position führt. Umgekehrt existiert mindestens ein Zug in einer N-Position, der die Spielsituation in eine P-Position überführt (siehe Berlekamp et al., 1985, S. 83).

Die Summe zweier Spiele

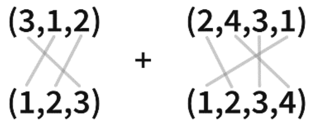
Für *Spielvariante 3* erweist es sich als schwierig universelle Gewinnstrategien zu formulieren. Number connect hat jedoch die Eigenschaft, dass es sich durch den ersten Verbindungszug in zwei kleinere Spiele - genauer: die Summe zweier Spiele - aufteilt. Bei der Summe zweier Spiele, wählt ein Spieler, wenn er dran ist, eine der beiden Komponenten und macht darin einen für ihn gültigen Zug. Das Spiel endet, wenn ein Spieler nicht mehr ziehen kann (Berlekamp et al., 1985, S. 32). Man kann ein Spiel der *Spielvariante 3* durch seine erste (obere) Zeile beschreiben. In dem Spiel (4,10,1,11,8,6,3,7,2,9,5,13,12) hätte der erste Verbindungszug der Zahl 7 zur Folge, dass das Spiel in die Summe von (3,1,4,2) und (1,3,2) zerfällt. Bei beiden Komponenten handelt es sich jeweils um eine P-Position, denn die Spiele enden nach genau zwei Zügen. Die Summe zweier P-Positionen ist erneut eine P-Position: Denn die Person, die als zweites zieht muss lediglich darauf achten, die von der anderen Person zuvor ausgewählte Komponente



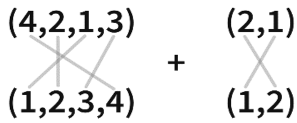
(Mögliche verbleibende Züge in grau)

(von einer N-Position) in eine P-Position zurückzuüberführen. Dadurch gewinnt sie beide Einzelspiele und schließlich die gesamte Summe. Da es in (4,10,1,11,8,6,3,7,2,9,5,13,12) einen Zug gibt (nämlich das Verbinden der 7 in beiden Zeilen), der eine P-Position hinterlässt, muss das Spiel selbst eine N-Position sein. Die Analyse eines Spiels der *Spielvariante 3* lässt sich also auf die Summen von kleineren Spielen zurückführen. Wie steht es um ein Spiel, in dem jeder mögliche erste Zug in eine Summe aus einer P- und einer N-Position führt? Die Summe einer P- und N-Position ist eine N-Position: Die nächstziehende Person kann das Teilspiel, das der N-Position entspricht, in eine P-Position und somit das gesamte Spiel in die Summe zweier P-Positionen, d.h. in eine P-Position insgesamt, überführen. Da jeder mögliche Zug in eine N-Position führt, muss das ursprüngliche Spiel also eine P-Position sein. Die Ausnahme bildet die Summe zweier N-Positionen, die nur anhand der Gewinnklassen nicht eindeutig als P- oder N-Position bestimmt werden kann:

- (3,1,2) und (2,4,3,1) sind beides N-Positionen. Die Summe ist eine P-Position, da für jeden Zug in einem dieser Teilspiele ein äquivalenter Zug mit derselben Wirkung im jeweiligen anderen Spiel gefunden werden kann: Die 3 im linken Spiel und die 1 im rechten Spiel haben denselben Effekt; es sind keine weiteren Verbindungen mehr möglich. Die 1,2 im linken Spiel und die 2,4,3 im rechten Spiel sind äquivalent, da die Spiele anschließend nach einem Zug enden.



- (4,2,1,3) und (2,1) sind zwei N-Positionen, deren Summe ebenfalls eine N-Position ist: In (2,1) (rechts) ist genau eine Verbindung möglich. Verbindet man in (4,2,1,3) (links) als erstes die 2,1 oder 3, dann endet das Spiel nach einem weiteren Zug. Die Summe zweier Spiele, in denen jeweils genau eine Verbindung möglich ist, ist trivialerweise eine P-Position. Da es einen Zug in eine P-Position gibt, muss das ursprüngliche Gesamtspiel eine N-Position sein.



Literatur

Berlekamp E. R., Conway J. H., Guy R. K. (1985): *GEWINNEN – Strategien für mathematische Spiele, Band 1: Von der Pike auf* (S. 32, 83), Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn.

Aigner M. (2015): *Graphentheorie – Eine Einführung aus dem 4-Farben Problem* (S. 53), 2. überarbeitete Auflage, Wiesbaden: Springer.