

Regina BRUDER, Darmstadt; Timo LEUDERS, Markus WIRTZ, Freiburg

Ein diagnostisches Kompetenzstrukturmodell für ein heuristisches Arbeiten mit Repräsentationen von Funktionen und seine empirische Überprüfung

1. Ziele des Projektes HEUREKO und Fragestellung

Ziel des von der DFG im Schwerpunktprogramm „Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen“ seit 2007 geförderten Projektes ist die Konstruktion und Überprüfung eines Kompetenzmodells für das mathematische Problemlösen und Modellieren von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I in solchen Situationen, in denen Prozesse des Wachstums und der Veränderung mathematisch erfasst werden. Zentrale Bedeutung für Problemlösen und Modellieren in diesen Zusammenhängen besitzt die heuristische Verwendung der fundamentalen mathematischen Darstellungsarten „numerisch“, „graphisch“, „symbolisch“ und „verbal“ sowie der Wechsel zwischen ihnen. National und international bewährte theoretische Fähigkeitsmodelle aus der Mathematikdidaktik werden operationalisiert und in Form eines Kompetenzstrukturmodells empirisch überprüft. Langfristiges Ziel ist die Bereitstellung eines empirisch fundierten Instrumentariums für die Schulpraxis zur Diagnostik der Stärken und Schwächen von Lerngruppen und Individuen im Inhaltsbereich „Funktionale Veränderung“, eine Bestimmung von Förderbedarf und Abbildung von Kompetenzentwicklungen.

Das zu entwickelnde Modell fokussiert – im Gegensatz zu large scale Studien – auf einen engen aber curricular zentralen Teilbereich der mathematischen Kompetenzentwicklung. Über viele Schuljahre hinweg werden sukzessive verschiedene Darstellungsarten eingeführt und der Bereich der verfügbaren Modelle wird vom linearen bis zum exponentiellen Wachstum vergrößert. Zielperspektive des zu entwickelnden Instrumentes ist daher die Messung langfristiger Kompetenzentwicklungen.

Im Projekt HEUREKO soll folgende Frage beantwortet werden: Welche Kompetenzstruktur lässt sich im Inhaltsbereich „Funktionale Veränderung“ bezüglich der heuristischen Verwendung von funktionalen Repräsentationen aus theoretischen und empirischen Erkenntnissen gewinnen und mit Methoden der Item-Response-Theory psychometrisch modellieren?

3. Theoretischer Hintergrund

In der fachdidaktischen Literatur spielen mathematische Darstellungsformen und der Wechsel zwischen ihnen eine zentrale Rolle. Wesentliche

grundsätzliche Beiträge zu mathematischen Darstellungsformen liefern z.B. Kaput (1985), Goldin (1998) und bezogen auf Funktionen u.a. Sierpinski (1992). Die Interpretation und wechselseitige Übersetzung der Darstellungsformen Term, Tabelle, Graph und Wortvorschrift wird als mathematische Schlüsselfähigkeit angesehen (Swan, 1985) und ist damit auch im Fokus der meisten Lehr- und Lernkonzepte in diesem Bereich (Barzel, Hußmann & Leuders, 2005). Zur Begründung der Relevanz des gewählten Themenfeldes „Wachstum und Veränderung“ können Argumentationen von Winter (1995) herangezogen werden, zum funktionalen Denken insbesondere Vollrath (1989) und zu den Repräsentationsformen und -wechseln auch Ainsworth (1999). Die Nutzung von verschiedenen Darstellungsformen als heuristische Hilfsmittel zum mathematischen Problemlösen findet man bei Polya (1949). Insbesondere die Wechsel zwischen verbalen Repräsentationen der Realsituation und numerischen, grafischen und algebraischen mathematischen Modellen lassen sich anhand des Modellierungskreislaufs (Blum, 2002) beschreiben. Um die Schüleraktivitäten beim Umgang mit den verschiedenen Darstellungsformen differenziert beschreiben zu können, werden Erkenntnisse aus dem Tätigkeitskonzept (u.a. Lompscher & Irrlitz 1985, Bruder & Brückner 1989) herangezogen. Zur Variation der Aufgabenschwierigkeit sind ferner Parameter für kognitive Anforderungsniveaus hilfreich (Bruder 1981). Alle genannten Konzepte wurden genutzt, um Ansätze für mögliche Kompetenzstrukturen im fokussierten Themenfeld zu finden.

Für die Itemkonstruktion ergibt sich die folgende Tabelle als Orientierungsrahmen. In der ersten Projektphase mit Fokus auf Klasse 7 und 8 wurden aus curricularen Gründen der Bereich der symbolischen Darstellung sowie eher technische Darstellungswechsel zunächst ausgespart. Zudem war festzustellen, dass die meisten Aufgaben nicht eindeutig determinieren, welche Übersetzungsrichtungen bei der Bearbeitung stattfinden, daher wird z.B. nicht zwischen grafisch→situativ und situativ→grafisch unterschieden.

Repräsentationswechsel	Kognitive Elementarhandlungen		
	Erkennen	Erzeugen	Begründen
situativ – grafisch (S↔G)			
situativ – numerisch (S↔N)			
graphisch – graphisch (G↔G)			
numerisch – numerisch (N↔N)			
numerisch – graphisch (N↔G)			

Zusätzlich werden innerhalb der Zellen berücksichtigt: die Art des Kontextes und der Mathematisierungsaufwand, die verbale Komplexität der Aufgabenstellung, die Verarbeitungskomplexität (wie viele Verarbeitungsschritte sind notwendig) und die Entscheidungskomplexität (Grad der Of-

fenheit), sowie der Bekanntheitsgrad, der Ausführungsaufwand und die Fehleranfälligkeit.

4. Untersuchungsdesign

Im Sinne der curricularen Nähe wurden auf der Basis regulärer Schulbuchaufgaben Items für alle relevanten Darstellungswechsel konstruiert, durch think-aloud Interviews validiert und pilotiert. Es wurden u.a. passende Parallelitems erzeugt, etwa solche, die von derselben Realsituation ausgehend zur Problemlösung entweder mittels Tabelle oder Graf aufforderten. Die Items wurden in einem Multimatrix-Blockdesign in 40 Klassen in Baden-Württemberg und Hessen (N=872) zusammen mit einem Schüler- und Lehrerfragebogen zur Erfassung von Moderatorvariablen eingesetzt.

5. Ergebnisse

In einer Dimensionsanalyse wurden drei konkurrierende Modelle gegeneinander getestet.

Modell 1 „*Repräsentationswechsel*“ (4D) mit der Annahme: Die Kompetenz des Problemlösens mit funktionalen Repräsentationen wird bestimmt durch die spezifischen Wechsel zwischen Repräsentationstypen. Die Fähigkeit der Übersetzung zwischen grafischer respektive numerischer Darstellung und Situation sowie die Verarbeitung innerhalb der Repräsentationen lassen sich psychometrisch trennen.

Modell 2 „*Repräsentationstypen*“ (2D) mit der Annahme: Wesentliche, trennbare Komponenten der Kompetenz des Problemlösens mit funktionalen Repräsentationen sind durch den Repräsentationstyp bestimmt. Dabei spielt die Tatsache, ob eine Übersetzung zwischen Realsituation und mathematischem Modell stattfinden muss, keine entscheidende Rolle. Hieraus resultiert ein zweidimensionales Modell (im Wesentlichen G vs. N).

Modell 3 „*Repräsentationsunabhängige Kompetenz*“ (1D): Schließlich dient uns die Annahme, dass der betrachtete Bereich wesentlich als ein einziges Fähigkeitskonstrukt aufzufassen ist, als Vergleichsmodell.

Die empirische Überprüfung der Passung der konkurrierenden Modelle zu den Daten ergab folgendes Bild:

Modell	-2 log L	AIC _c
<i>Repräsentationsunabhängig</i> (1D)	29908.91	29985
<i>Repräsentationstypen</i> (2D)	29898.38	29975
<i>Repräsentationswechsel</i> (4D)	29866.82	29943

L bezeichnet die Likelihood des Modells, der informationstheoretische Kennwert AIC_c beschreibt die Modellpassung unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Zahl geschätzter Parameter. Er wird durch das passendere Modell minimiert. Der Abstand von 32 zum nächst schlechteren Modell ist signifikant auf dem 5%-Niveau.

Hinsichtlich der Modellpassung erweist sich im Vergleich mit den Alternativmodellen das vierdimensionale Modell als das beste Modell für den betrachteten Kompetenzbereich „Problemlösen mit Repräsentationen bei funktionaler Veränderung“. Die Unterscheidung der vier spezifischen Typen von Repräsentationswechseln erlaubt eine differenzierte Beschreibung der Kompetenzstruktur, die in der Folge auch für Zwecke pädagogischer Diagnostik genutzt werden kann. Weitere Analysen der Kompetenzstrukturen und -typen und deren Zusammenhang mit Moderatoren werden an anderer Stelle berichtet.

Literatur

- Ainsworth, S.E., (1999). A functional taxonomy of multiple representations. *Computers and Education*, 33(2/3), 131-152.
- Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (2005a). Der "Funktionenführerschein". *Praxis der Mathematik in der Schule*. 47 (2), 20-25.
- Blum, W. et al. (2002). Applications and Modelling in Mathematics Education – Discussion Document. In: *Educational Studies in Mathematics* 51, 149-171.
- Bruder, R. (1981). Zur quantitativen Bestimmung und zum Vergleich objektiver Anforderungsstrukturen von Bestimmungsaufgaben im Mathematikunterricht.- In: *Wiss. ZS d. PH Potsdam*, 25(1981)1, S.173-178
- Bruder, R. & Brückner, A. (1989). Zur Beschreibung von Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht - ein allgemeiner Ansatz.- In: *Pädagogische Forschung*, Berlin 30 (1989) 6, S.72-82
- Goldin, G.A. (1998): Representational systems, learning and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), 137-165.
- Kaput, J.J. (1985): Representation and problem solving, methodological issues related to modelling. In: E.A. Silver (Hrsg.). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. S. 381-398. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Lompscher, J. & Irrlitz, L. (1985). *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit*. Berlin: Volk und Wissen.
- Polya, G. (1949): *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Tübingen und Basel: Francke.
- Sierpinska, A. (1992): On understanding the notion of function. In: Dubinsky, E. & Harel, G. (Hrsg.). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. S. 25-58. USA: Mathematical Association of America.
- Swan, M. (1985). *The Language of Functions and Graphs*. Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematical Education.
- Vollrath, H.J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, (10), 3-37.
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61. 37-46.