

Christoph TRUMMER, Salzburg

## **Approximation als Fundamentale Idee der Reellen Analysis**

Bei diesem Tagungsbeitrag handelt es sich um die Vorstellung meines Dissertationsprojekts, das sich bereits in der fortgeschrittenen Phase befindet.

Im Rahmen der Dissertation wird geklärt, ob die Approximation eine Fundamentale Idee darstellt und inwiefern sich auf Approximation basierende Unterrichtskonzepte erstellen und gewinnbringend einsetzen lassen.

## **Fundamentale Ideen Allgemein**

Zu Beginn wird der Begriff der Fundamentalen Idee definiert bzw. erklärt. Es werden dabei Werke zu Fundamentalen Ideen aus verschiedenen Jahren analysiert und miteinander verglichen. Darüber hinaus wird auch der Bezug zu Lokalen Ideen und Globalen Ideen, die in ihrer Bedeutung den Fundamentalen Ideen ähnlich sind, hergestellt. Der Einsatz der Fundamentalen Ideen wird aus fachdidaktischer Sicht vorerst theoretisch beleuchtet und anschließend durch die Anführung einzelner Beispiele untermauert.

Zusammenfassend wurden folgende Punkte im Laufe des Dissertationsvorhabens eruiert:

Für viele Schülerinnen und Schüler ist die Mathematik oft schwer begreifbar. Mit Hilfe eines auf Fundamentalen Ideen basierenden Unterrichtskonzepts kann auf die Alltagserfahrungen der Lernenden eingegangen werden, da die Ideen einen so genannten „Archetypen“ menschlichen Denkens darstellen sollen. Diese Anknüpfung an alltägliche Vorgänge kann einerseits sinnstiftend und andererseits verständnisfördernd wirken.

Die Schülerinnen und Schüler begreifen, dass die Mathematik keine starre Wissenschaft ist, sondern sich im Laufe der Zeit dynamisch entwickelt hat, denn anhand Fundamentalener Ideen ist die historische Progression der Mathematik aufzeigbar. Auch diese Tatsache hat eine sinnstiftende Wirkung auf die Lernenden ist im Wesentlichen auch für deren intrinsische Motivation mit verantwortlich.

Bereits bei der Erstellung der Curricula sollen Fundamentale Ideen als konzeptionelles Mittel Anwendung finden, damit in die Lehrpläne es auch ermöglichen, entsprechende Ideen in den Unterricht einzubauen. Die didaktischen Ziele dieser neuen Curricula sollen in erster Linie durch Fachdidaktikerinnen und –didaktiker ausgearbeitet werden, da diese am ehesten Zielsetzungen des Konzepts sowie deren Auswirkungen auf die potentielle Unterrichtsgestaltung beurteilen können.

Des Weiteren stellen Fundamentale Ideen die Möglichkeit zur Verfügung, verschiedene Bereiche, wie etwa die Inhalte, die Handlungen und die Genese zu vernetzen. Diese Vernetzung gilt auch für die verschiedenen Inhaltsbereiche untereinander. Es soll auf die Grundvorstellungen der Schülerinnen und Schüler eingegangen werden, wobei auch deren Persönlichkeit berücksichtigt werden soll. Durch derartige Vernetzungen können Motivation und Verständnis verbessert werden.

Es ist aus pädagogischer Sicht nach Jerome S. Bruner wichtig, dass man Kindern den Stoff immer ihrer aktuellen Entwicklungsstufe entsprechend beibringt. Daher ist es wichtig, dass die Fundamentalen Ideen sich auf allen Niveaus gewinnbringend einsetzen lassen. Dieses so genannte Spiralprinzip lässt sich mit Hilfe eines auf Fundamentalen Ideen basierenden Unterrichtskonzepts umsetzen.

### **Approximation als Fundamentale Idee:**

Des Weiteren wird nach einer kurzen Beschreibung des Begriffs „Approximation“ geklärt, warum die Approximation eine Fundamentale Idee darstellt. Dazu werden sämtliche Kriterien nach Bruner nachgeprüft. Der Begriff wird auch grundlegend aus fachdidaktischer Sicht beleuchtet. In jedem Bereich des Lehrplans werden Anwendungen des Aspektes der Approximation gesucht und detailliert anhand von verschiedenen Beispielen dargelegt. Nicht nur im Bereich der Analysis, der den Fokus dieser Arbeit darstellt, sondern auch in den Bereichen der Stochastik, der Zahlen und Maße sowie der Algebra und Geometrie. Darüber hinaus wurden auch Anwendungen des Approximationsaspektes in der Primarstufe und in der Sekundarstufe I diskutiert.

Bisher wurden folgende Aspekte herausgefunden bzw. zusammengetragen:

Bereits in der Primarstufe kommen Approximationsprozesse etwa bei Rundungsprozessen und beim Überschlagsrechnen vor. In der Sekundarstufe I kommen zusätzlich zu den weiter vertieften Rundungsprozessen noch diverse Näherungsverfahren, wie etwa das Heron-Verfahren oder das Intervallschachtelungsverfahren vor, bei denen Approximationsprozesse eine entscheidende Rolle spielen. In der Sekundarstufe II wurde die Idee der Approximation in verschiedenen Inhaltsbereichen des Kompetenzmodells Mathematik für die Berufsbildenden Höheren Schulen (BHS) gesucht: Im Bereich „Zahlen und Maße“ wurden dafür wiederum Rundungsprozesse als relevant herausgefunden, da diese auch in manchen Aufgaben für die sRDP (Standardisierte Reife- und Diplomprüfung) vorkommen. Im Bereich „Algebra und Geometrie“ kommt beispielsweise die Fehlerrechnung in den Höheren Technischen Lehranstalten (BHS) vor, jedoch auch allgemein für alle

Schultypen lassen sich etwa diverse Formelherleitungen wie etwa die Kugeloberfläche über infinitesimale Pyramiden finden, die den Approximationsaspekt für das Verständnis erfordern. In der Stochastik lassen sich einige Beispiele für die Relevanz der Approximation finden, wie etwa das Gesetz der großen Zahlen oder die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung. Auf den Bereich der Analysis bzw. funktionalen Abhängigkeiten wird in meinem Dissertationsprojekt der Schwerpunkt gelegt. So werden beispielsweise verschiedene Herangehensweisen an das Grenzwertproblem sowohl für Folgen als auch für Funktionen diskutiert. Klarerweise steht auch der Übergang vom Differenzen- zum Differentialquotient in klarem Bezug zum Approximationsaspekt. Darüber hinaus werden die Begriffe der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit unter dem Licht des Approximationsaspekts beschrieben. Auch Näherungen wie etwa durch die Taylor- oder Fourierreihenentwicklung werden im Rahmen dieser Arbeit beleuchtet.

### **Approximation in der Fachmathematik:**

Darüber hinaus wird die Approximation aus Sicht der Mathematik dargestellt. Es werden wichtige Begriffe definiert sowie Anwendungen in der Analysis, der numerischen Mathematik, der Geometrie und der Stochastik behandelt. Dieses Kapitel befindet sich erst in der Entstehungsphase.

In der Analysis werden voraussichtlich im Bereich der elementaren Zahlentheorie der Dirichletsche Approximationssatz, der Satz von Hurwitz, der Approximationssatz von Kronecker, der Approximationssatz von Liouville, der Approximationssatz für  $p$ -adische Zahlen sowie der Satz von Taylor behandelt. Darüber hinaus wird der Approximationsaspekt bei der Konvergenz von Folgen und Reihen sowie bei der Definition von Stetigkeit und Differenzierbarkeit beleuchtet. Insbesondere soll auch in diesem Kontext der schulrelevante Übergang vom Differenzenquotient zum Differentialquotient behandelt werden.

### **Empirischer Teil: Approximation im Schulunterricht der Analysis:**

Der letzte Abschnitt dieser Dissertation beschäftigt sich mit der Evaluation einerseits einer Umsetzung der Fundamentalen Idee der „Approximation“ im Schulunterricht der Analysis sowie andererseits mit der Frage, ob in der Praxis Schülerinnen und Schüler von der Orientierung an der Fundamentalen Idee profitieren können. Es wird ein Unterrichtskonzept für den Analysisunterricht in der Oberstufe (Sekundarstufe II) der Allgemeinbildenden Höheren Schule (AHS) entworfen, das auf der Fundamentalen Idee der Approximation basiert. Dafür werden sowohl langfristige Planungen als auch detaillierte Stundenbilder erstellt und erklärt. Insgesamt umfasst die Planung in etwa 25 Unterrichtseinheiten. Daraus werden drei Unterrichtseinheiten

(d.h. ca. drei Unterrichtsstunden) in einer 7. Klasse (11. Schulstufe) abgehalten und in Form einer qualitativ-empirischen Studie ausgewertet. Mittels eines Vor- und Nachtests sowie durch Einzelinterviews aller an der Studie teilnehmenden Schülerinnen und Schüler soll festgestellt werden, ob das Konzept der Approximation gewinnbringend eingesetzt werden kann.

Im Konkreten handelt es sich hierbei nach derzeitigem Plan um drei Unterrichtseinheiten zur Einführung der Differentialrechnung. In der ersten Einheit erfolgt, ausgehend vom Differenzenquotienten, die Einführung des Differentialquotienten. Die zweite Einheit umfasst eine Übungsstunde zur Berechnung der Werte für Differentialquotienten. Die dritte Einheit beschäftigt sich schließlich mit dem Aspekt der linearen Approximation. In allen drei Einheiten soll zur Visualisierung der Begriffsbildungsprozesse der Computer mit der Software GeoGebra zum Einsatz kommen.

## Literatur

- Schweiger, F. (1992): *Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik*. In: Journal für Mathematikdidaktik, 13(2/3), 199-214.
- Greefrath, G.; Oldenburg, R.; Siller, H.-S.; Ulm, V.; Weigand, H.-G. (2016): *Didaktik der Analysis*. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Vollrath, H. (1978): *Rettet die Ideen*. In: Der Mathematisch Naturwissenschaftliche Unterricht 31, S. 449-455.
- Blum, W.; Kirsch, A. (1979): *Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen*. In: Der Mathematikunterricht 25, S. 6-24.
- Bruner, J. (1976). *Der Prozess der Erziehung*. Berlin, Düsseldorf: Pädagogischer Verlag Schwann.
- Blum, W. & Törner, G. (1983). *Didaktik der Analysis*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.