

## Multimodal algebraischen Struktursinn erwerben

### Ausbildung algebraischen Struktursinns im Klassenunterricht

Das Erkennen von Termstrukturen wird in der mathematikdidaktischen Diskussion schon seit Langem als eine zentrale Kompetenz im algebraischen Denken diskutiert (vgl. Malle, 1993; Arcavi, 1994). Hoch (2005) hat das von Linchevski und Livneh (1999) geäußerte Bedürfnis nach einer genaueren Beschäftigung mit *algebraischem Struktursinn* aufgegriffen und eine operationalisierte Definition vorgelegt. Sie konnte zeigen, dass algebraischer Struktursinn zwar nur bei wenigen der untersuchten Elftklässler vorliegt, aber in individueller Förderung erlernbar ist. In meiner Dissertation (Janßen, 2016) wurde die Ausbildung algebraischen Struktursinns im Klassenunterricht in den Blick genommen. Dabei zeigte sich zunächst, dass die unterschiedlichen Termstrukturen, die typischerweise in der achten Klasse behandelt werden, jeweils einen eigenen Umgang mit ihnen erfordern: Bei linearen Gleichungen in einer Unbekannten geht es darum, diese zu lösen; bei linearen Funktionen muss an einzelnen Stellen ausgewertet und die allgemeine Entwicklung begriffen werden (vgl. Vollrath, 1989)<sup>1</sup>; quadratische Ausdrücke werden zunächst ausschließlich in Hinblick darauf betrachtet, wie zwischen Summen- und Produktform gewechselt werden kann. Diese Feststellung lässt bezweifeln, dass es überhaupt einen übergreifenden algebraischen Struktursinn gibt. Vielmehr muss der adäquate Umgang mit jeder einzelnen algebraischen Struktur erlernt werden.<sup>2</sup>

Dies geschieht in ausgewählten (inner- oder außermathematischen) Kontexten. Diese entfalten für die Sicht der Schülerinnen und Schüler auf die jeweilige Struktur eine besondere Bedeutung. Es konnte gezeigt werden, dass auf den Kontext der Einführung in Metaphern und Gesten auch dann noch zurückgegriffen wird, wenn dieser Kontext längst verlassen wurde. Bezüglich Gleichungen, die anhand des Streichholzschachtelmodells eingeführt wurden, wurde auch dann noch von „wegnehmen“ gesprochen, als gar nicht mehr physische Gegenstände bewegt, sondern symbolisch dargestellte Gleichungen umgeformt wurden (vgl. dazu auch die Beobachtungen von Melzig, 2013). Dass beim Lösen von Gleichungen mittels Äquivalenzumformungen stets beide Seiten der gleichen Umformung unterzogen werden müssen, manifestierte sich in einer wiederkehrenden Geste (siehe Abbildung 1). Auch die zentrale Handlung des gleichmäßigen Hinzugebens von Flüssigkeit in

---

<sup>1</sup> Dass die Wertepaare einer linearen Funktion genau die Lösungsmenge der Funktionsgleichung ausmachen, wird zumindest an Gesamtschulen selten explizit thematisiert; der Fokus liegt meistens auf der Ermittlung von Funktionswerten in Abhängigkeit von vorgegebenen Werten aus der Definitionsmenge.

<sup>2</sup> Dies schließt nicht aus, dass diese Lernprozesse miteinander interagieren. Insbesondere ist keiner von ihnen ohne ein gewisses Variablenverständnis denkbar, und alle unterstützen seine Weiterentwicklung.

ein Gefäß, anhand derer lineare Funktionen eingeführt wurden, erhielt sich über diesen konkreten Kontext hinaus.



Abbildung 1: Die zentrale Eigenschaft von Äquivalenzumformungen, dass dabei stets auf beiden Seiten die gleiche Operation ausgeführt wird, manifestiert sich in einer bei Lehrerin und Schüler\_innen wiederkehrenden Geste.

Diese Analyse beruht auf einer Auffassung von Lernen, wie sie sich aus einer Anwendung der kulturhistorischen Tätigkeitstheorie ergibt: Lernen findet dann statt, wenn die Schülerin oder der Schüler das Motiv der zugrundeliegenden Tätigkeit für sich entdeckt. Radford (2013) spricht diesbezüglich von *Objectification*. Da die zu erlernende Tätigkeit – etwa das Lösen von Gleichungen – aber kulturell verwurzelt ist, gelingt dies in der Regel nur im Austausch mit einer bereits mit dieser Tätigkeit vertrauten Person – in der Regel der Lehrerin oder dem Lehrer. Dabei konnte folgender Dreischritt nachgezeichnet werden:

1. Die Schülerinnen und Schüler orientieren sich in der Situation.
2. Es erfolgt (in der Regel mit der Lehrkraft) eine Klärung der Ziele und der zu ihrer Erreichung erlaubten Handlungen.
3. Nach und nach entwickeln die Schülerinnen und Schüler einen Umgang mit dem Gegenstand, wobei sie sich untereinander und mit der Lehrkraft abstimmen.

### Multimodal Algebra lernen: Das MAL-Projekt<sup>3</sup>

Die beschriebenen Erkenntnisse zur Ausbildung algebraischen Struktursinns fügen sich ein in die traditionsreiche mathematik- und allgemeindidaktische Forschung, die dem Handeln eine zentrale Rolle einräumt. Auf das Potential eines aktiven Umgangs mit veränderbaren Situationen kann auch in computergestützten Lernumgebungen zurückgegriffen werden. In ihnen ist es möglich, viele Varianten zu erkunden und Vermutungen zu überprüfen. In der

<sup>3</sup> Das MAL-Projekt wird durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung im Rahmen des Förderungsschwerpunktes *Erfahrbares Lernen* ermöglicht. Mehr Informationen unter [www.mal-projekt.de](http://www.mal-projekt.de).

Regel simulieren solche Lernumgebungen reale Zusammenhänge und es der unmittelbare händische Umgang wird durch die Bedienung der Eingabegeräte Maus und Tastatur oder durch Berührungen der Bildschirmfläche ersetzt. Im Zuge der technischen Entwicklung bieten sich nun aber neue Möglichkeiten der Ein- und Ausgabe, etwa die von Spielekonsolen bekannte Bewegungssteuerung. So wird es möglich, im Raum bewegliche Lernobjekte in eine digitale Umgebung einzubetten. Im MAL-Projekt sollen solche sogenannten *Smart Objects* für Inhalte der Algebra entwickelt werden. Dies geschieht in Form von Design Research, wobei hier nicht nur Aufgaben entwickelt werden, sondern gleichzeitig die bei deren Bearbeitung zu nutzende Technik. Um das Zusammenspiel bestmöglich zu gestalten, arbeiten Forscherinnen und Forscher aus der Mathematikdidaktik mit Informatikerinnen und Informatikern zusammen.

### Erste Erfahrungen im MAL-Projekt

Die meisten bestehenden Ansätze, Inhalte der Algebra körperlich erfahrbar zu machen, beschränken sich auf ein Themengebiet, beispielsweise lineare Gleichungen (siehe oben). Da das zu entwickelnde System aber diverse Inhalte der Schulalgebra abdecken soll, wurde ein hinreichend von den spezifischen Strukturen abstrahierenden Kontext gesucht. Die Wahl fiel auf die in Nordamerika verbreitet eingesetzten *Algebra Tiles* (siehe z. B. Dietiker, Kysh, Sallee & Hoey, 2010). In diesem System werden sowohl Zahlen als auch Variablen konsequent als Objekte aufgefasst (siehe Abbildung 2).

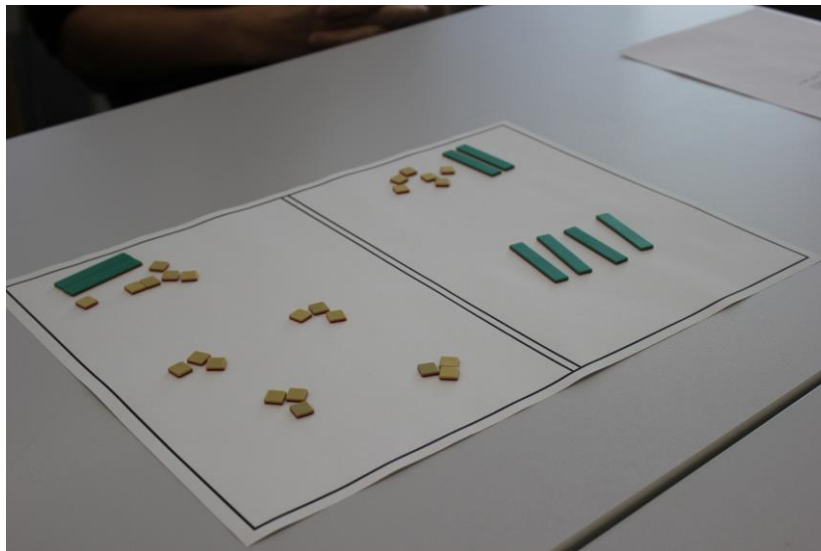


Abbildung 2: Lösen einer Gleichung mit Algebra Tiles: Die Unbekannte wird hier durch die länglichen Rechtecke dargestellt, während jedes Quadrat für die Zahl 1 steht. Zu lösen war hier die Gleichung  $2x + 18 = 6x + 6$ , was durch gleichmäßiges Beiseitelegen (oben) und anschließendes Aufteilen gelungen ist.

In einer Pilotuntersuchung mit Studierenden konnte wie schon in der oben beschriebenen Studie beobachtet werden, dass das aktive Erkunden und der Erfolg dabei zu einer sichtbaren emotionalen Einbindung führte, die die Studierenden selbst im Nachgespräch als motivierend bewerteten.

### **Ausblick: Kontinuitäten und Neues**

In der weiteren Forschung, in der sowohl Schülerinnen und Schüler der Mittelstufe als auch Lehramtsstudierende mit den neu entwickelten Objekten konfrontiert werden sollen, können die oben beschriebenen Erkenntnisse zur Ausbildung algebraischen Struktursinns vertieft werden. Insbesondere ist zu untersuchen, welche neuen Möglichkeiten sich bieten, um bestimmte strukturelle Merkmale hervorzuheben, und wie dabei die Verantwortung zwischen Lernenden, Lehrkräften und Lernsystem verteilt wird. In welcher Form kann automatisches Feedback Lernprozesse fördern und wo liegen diesbezüglich Probleme? Wie müssen die dazugehörigen Aufgaben gestellt werden? Die Entwicklung der Smart Objects erfordert aber auch den Blick auf Fragestellungen, die die materielle Gestaltung (Form, Farben und Farbänderung, Haptik, Größe, Möglichkeiten der Beschriftung) der Materialien betreffen, die abstrakte Konzepte verkörpern sollen.

### **Literatur**

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24–35.
- Dietiker, L., Kysh, J., Sallee, T. & Hoey, B. (2010). *Making Connections: Foundations for Algebra, Course 1*. Sacramento, CA: CPM Educational Program.
- Hoch, M. (2007). *Structure sense in high school algebra*. Dissertation. Tel Aviv: Tel Aviv University.
- Janßen, T. (2016). *Ausbildung algebraischen Struktursinns im Klassenunterricht. Lernbezogene Neudeutung eines mathematikdidaktischen Begriffs*. Dissertation. Bremen: Universität Bremen. Abrufbar unter <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:46-00105386-17>
- Leontjew, A. N. (1982). *Tätigkeit, Bewußtsein, Persönlichkeit*. Köln: Pahl-Rugenstein.
- Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 173–196.
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*: Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.
- Melzig, D. (2013). *Die Box als Stellvertreter. Ursprüngliche Erfahrungen zum Variablenbegriff*. Dissertation. Duisburg, Essen: Universität Duisburg-Essen. Abrufbar unter <http://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:464-20131223-121322-3>
- Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7–44.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, 10, 3-37.