

Geometrie der Juliamenge und präperiodische kritische Punkte

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften

Dem Fachbereich Mathematik
der Universität Dortmund
im Januar 2005 vorgelegt von

JOCHEN HELMICH

Herrn PROF. DR. STEINMETZ danke ich sehr für die Hilfe bei der Themenauswahl und die engagierte Betreuung, die er mir während der Erstellung dieser Arbeit zukommen ließ. Zudem gilt mein Dank allen Kollegen am Lehrstuhl Funktionentheorie des Fachbereichs Mathematik der Universität Dortmund für die vielen hilfreichen Gespräche und die hervorragende Arbeitsatmosphäre.

Eingereicht im Januar 2005

Tag der mündlichen Prüfung: 17. März 2005

Vorsitzender:	Prof. Dr. J. Stöckler
Erster Gutachter:	Prof. Dr. N. Steinmetz
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. R. Brück
Weiterer Prüfer:	Prof. Dr. K. F. Siburg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Allgemeines	5
1.1 Grundlegendes zur Iteration rationaler Funktionen	5
1.2 Konjugation rationaler Funktionen	11
1.3 Quasikonforme Konjugation	12
2 Funktionen zweiten Grades	15
2.1 Definitionen und einleitende Sätze	15
2.2 Die Geometrie der JULIAMengen in \mathcal{G}_2^*	19
2.3 Klassifikation für \mathcal{G}_2^*	23
2.4 Beispiele	29
3 Fixpunkte und kritische Werte	33
3.1 Attraktive Fixpunkte mit kritischem Urbild	33
3.2 LEAUPunkte mit kritischem Urbild	37
3.3 LEAUBLumen mit ein oder zwei kritischen Punkten	42
4 Funktionen dritten Grades	47
4.1 Definitionen und einleitende Sätze	47
4.2 Invarianten der Äquivalenzklassen	49
4.3 Die Multiplikatoren der markierten Fixpunkte	53
4.4 Beispiel einer in \mathcal{G}_3^* enthaltenen Funktionenklasse	56
5 Klassifikation für die Menge \mathcal{G}_3^*	57
5.1 Hyperbolische Klassen	57
5.2 JORDANbögen und zusammenfallende kritische Punkte	60
5.3 Klassen mit ARNOL'D-HERMAN-Ringen	64
5.4 Markierte Fixpunkte und Geometrie der JULIAMenge	68
6 Ausblick auf Funktionen höheren Grades	75
Literaturverzeichnis	79

Einleitung

Zu Beginn des letzten Jahrhunderts begann mit den Arbeiten von FATOU und JULIA (siehe [6] und [7]) die systematische Untersuchung der Folge der Iterierten einer rationalen Funktion. Beide zerlegten unabhängig voneinander die RIEMANNSche Zahlenkugel in zwei heute nach ihnen benannte Mengen. In der FATOUmenge bildet die Iteriertenfolge definitionsgemäß eine im MONTELSchen Sinne normale Familie. Ihre lokalen dynamischen Eigenschaften sind dort unanfällig gegenüber kleinen Störungen von Startwerten. In der komplementären JULIAMenge ist das Verhalten der Iteriertenfolge dagegen „unvorhersagbar“, sozusagen chaotisch.

Ein wichtiges Ergebnis für die Untersuchung der stabilen Gebiete, das sind die größtmöglich zusammenhängenden Normalitätsbereiche, war die von FATOU begonnene Klassifikation der invarianten Gebiete, die aber noch längere Zeit unvollständig blieb. Denn erst SULLIVAN zeigte in den achtziger Jahren, dass es neben periodischen (stabilen) Gebieten und solchen, die unter einer Iterierten auf periodische Gebiete abgebildet werden, keine wandernden stabilen Gebiete gibt. Sein Beweis beruht auf der Methode der quasikonformen Konjugation, durch die sich topologische und geometrische Aussagen über die JULIAMenge einer Funktion auf deren Konjugierte übertragen lassen. Wir bedienen uns in der vorliegenden Arbeit dieser Methode nur insofern, dass wir eine daraus resultierende Anwendung benutzen.

Die Klassifikation der Fixgebiete verdeutlicht die Bedeutung des Zusammenspiels von periodischen Punkten mit kritischen Punkten, in denen die zugrunde liegende Funktion definitionsgemäß nicht lokal konform ist und deren endliche Anzahl durch den Funktionsgrad festgelegt ist. Die aus der Klassifikation resultierenden FATOU- und Rotationsgebiete binden in einer für sie typischen Weise nicht präperiodische kritische Punkte, was die Beschränktheit der Anzahl der periodischen Gebiete zur Folge hat.

Die Frage, unter welchen Voraussetzungen die JULIAMenge zusammenhängend oder lokal zusammenhängend ist, rückte in den letzten Jahrzehnten in den Mittelpunkt des Interesses. Dabei haben die kritischen Punkte einen großen Einfluss auf die Dynamik einer rationalen Funktion und die topologischen sowie geometrischen Eigenschaften ihrer JULIAMenge. Topologische Aussagen über Ränder von periodischen FATOUgebieten können je nach Anzahl der durch sie gebundenen kritischen Punkte getroffen werden. Je größer die Zahl aller vorhandenen kritischen Punkte ist, desto schwerer fällt es, allgemeingültige Aussagen über die JULIAMenge zu treffen. Schon bei einer rationalen Funktion dritten Grades mit ihren vier kritischen Punkten besteht diese Problematik.

Es liegt der Gedanke nahe, rationale Funktionen zu untersuchen, bei denen die

Anzahl der für die Dynamik entscheidenden kritischen Punkte, das sind gerade die nicht präperiodischen, reduziert ist. So setzt MILNOR in [11] diese Idee in der Art um, dass er die Anzahl verschiedener kritischer Punkte verringert und rationale Funktionen untersucht, die genau zwei kritische Punkte besitzen. Wir beschreiten einen anderen Weg und reduzieren in den Ausführungen zu dieser Arbeit die Anzahl der nicht präperiodischen kritischen Punkte. Ausgehend von einer notwendigen Bedingung für Funktionen, deren JULIAMenge ein JORDANbogen ist, werden gewisse Funktionen konstruiert, bei denen die Hälfte der kritischen Punkte präperiodisch ist. Wir beschränken uns dabei auf Fälle von Funktionen zweiten und dritten Grades.

In Kapitel 1 werden die Grundlagen der Iterationstheorie vorgestellt, soweit sie für diese Arbeit relevant sind. Auch eine Anwendung der Methode der quasikonformen Konjugation wird aufgeführt.

Die rationalen Funktionen zweiten Grades werden in Kapitel 2 behandelt. Wir untersuchen die Menge \mathcal{H}_2 der Funktionen, die einen kritischen Punkt besitzen, der durch zweimaliges Anwenden der Funktion auf einen Fixpunkt abgebildet wird. Dieses ist für eine Funktion zweiten Grades eine notwendige Bedingung dafür, dass ihre JULIAMenge ein JORDANbogen ist, so dass solche Funktionen eine Teilmenge von \mathcal{H}_2 bilden. Wir gehen zur Menge $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{H}_2$ der Funktionen mit einem kritischen Punkt c und dem Abbildungsverhalten $c \mapsto \infty \mapsto 0 \mapsto 0$ über. Funktionen aus \mathcal{G}_2 , die mit Hilfe einer MÖBIUSTransformation zueinander konjugiert sind, besitzen die gleiche Dynamik und werden in Äquivalenzklassen zusammengefasst. In der Menge \mathcal{G}_2^* der Äquivalenzklassen kann jedem Element eine eindeutige Invariante zugeordnet werden, in deren Abhängigkeit eine Klassifikation vorgenommen wird und diejenigen Klassen mit zusammenhängender JULIAMenge genau bestimmt werden. Dabei können wir wie für Polynome der Form $z^2 + q$ eine MANDELBROTmenge definieren, für deren Komponenten eine Charakterisierung gegeben wird.

Der Kern der Arbeit liegt in der Untersuchung von Funktionen dritten Grades. Hier ist die Existenz zweier kritischer Punkte, deren Bild aus zwei Fixpunkten oder einem Zyklus zweiter Ordnung besteht, notwendig dafür, dass die JULIAMenge ein JORDANbogen ist. Wir greifen nur den ersten Fall mit zwei sogenannten markierten Fixpunkten heraus und betrachten in Kapitel 3 vorbereitend solche Funktionen f dritten Grades, die einen Fixpunkt z_0 mit kritischem Urbild besitzen. Hierfür können Aussagen über die JULIAMenge in Abhängigkeit von dem dynamischen Typ des Fixpunktes, der für endliches z_0 durch dessen Multiplikator $f'(z_0)$ bestimmt ist, bewiesen werden.

- 1) Ist z_0 attraktiv ($|f'(z_0)| < 1$) mit Attraktionsgebiet $A(z_0)$, so ist die JULIAMenge genau dann zusammenhängend, wenn der kritische Vorgänger und genau ein nicht präperiodischer kritischer Punkt in $A(z_0)$ liegen.

- 2) Ist z_0 rational indifferent ($f'(z_0)$ ist eine n -te Einheitswurzel) mit der Gesamtheit $A(z_0)$ der zugehörigen Attraktionsgebiete, so ist die JULIAMenge zusammenhängend, wenn sich genau ein kritischer Punkt in $A(z_0)$ befindet oder wenn genau zwei kritische Punkte in $A(z_0)$ liegen und $A(z_0)$ aus $2n$ Gebieten besteht.

Analog zur Menge \mathcal{G}_2 wird in Kapitel 4 die Menge \mathcal{G}_3 der Funktionen dritten Grades definiert, die die markierten Fixpunkte 0 und ∞ mit jeweils kritischem Urbild besitzen. Auch hier gehen wir zu einer Menge \mathcal{G}_3^* von Äquivalenzklassen über, deren Elementen zwei eindeutige Invarianten zugeordnet werden können, in deren Abhängigkeit wir Standardvertreter für die Klassen bestimmen und Aussagen über die Multiplikatoren der markierten Fixpunkte treffen.

Mit dem Ziel einer Klassifikation gewisser Elemente aus \mathcal{G}_3^* geben wir in Kapitel 5 zunächst einen Bereich im Parameterraum \mathcal{P}^* von \mathcal{G}_3^* an, für den beide markierten Fixpunkte attraktiv sind. Dieser Bereich führt auf Klassen mit hyperbolischen Vertretern, deren JULIAMengen JORDANKurven sind. Bei der Suche nach Klassen mit Funktionen, deren JULIAMengen JORDANbögen sind, beschränken wir uns auf einen bestimmten Schnitt durch \mathcal{P}^* , dessen Parameter auf zusammenfallende freie kritische Punkte führen. Hier ist die Ausgangsidee, die Anzahl der für die Dynamik entscheidenden kritischen Punkte zu reduzieren, noch konsequenter umgesetzt, da ein einziger (doppelter) kritischer Punkt für die Realisierung von FATOU- oder Rotationsgebieten verbleibt. In diesem Schnitt können wir eine MANDELBROTmenge angeben, die eine Komponente besitzt, deren Parameter auf JORDANbögen führen. Weiterhin werden wir zeigen, dass es in der Menge \mathcal{G}_3^* (im Gegensatz zu Funktionen zweiten Grades) Klassen mit Vertretern gibt, die unzusammenhängende, aber nicht total unzusammenhängende JULIAMengen besitzen. Außerdem geben wir in Abhängigkeit von den Typen der markierten Fixpunkte an, in welchen Fällen die JULIAMenge zusammenhängend oder total unzusammenhängend ist.

In Kapitel 6 wird ein Ausblick auf Funktionen höheren Grades gegeben, die durch eine zu den untersuchten Fällen von Funktionen zweiten und dritten Grades analoge Bedingung charakterisiert sind. Es werden Kandidaten für die Invarianten der Äquivalenzklassen angegeben und einige Überlegungen zur Geometrie der JULIAMenge skizziert.

1 Allgemeines

Eine Zusammenfassung der wichtigsten Begrifflichkeiten und Aussagen der Iterationstheorie in Abschnitt 1.1 geht einer Abhandlung über den Begriff der Konjugation in Abschnitt 1.2 voraus. Alle hier vorgestellten Aussagen sind klassisch und sind Gegenstand der Bücher [2], [4], [10] und [13]. Abschließend wird die Methode der quasikonformen Konjugation angeschnitten, indem in Abschnitt 1.3 eine für die Iteration wichtige Anwendung vorgestellt und eine Folgerung für einen speziellen Fall bewiesen wird. Da für das weitere Verständnis dieser Arbeit quasikonforme Abbildungen keine Rolle spielen, werden Definitionen und Sätze hierzu ausgelassen, die aber in den Büchern [1] und [8] thematisiert werden.

1.1 Grundlegendes zur Iteration rationaler Funktionen

Die Grundlage der Iterationstheorie bilden meromorphe Selbstabbildungen der RIEMANNschen Zahlenkugel, also rationale Funktionen. Für die zu definierenden Begrifflichkeiten wird durch einen entsprechenden Index die zugrunde liegende Funktion kenntlich gemacht. Sofern keine Missverständnisse entstehen, wird auf diesen Index verzichtet.

Gegeben sei eine rationale Funktion $f = \frac{P}{Q}$ mit teilerfremden Polynomen P und Q . Dann ist der *globale Grad* $d = d_f$ von f definiert als das Maximum der Polynomgrade von P und Q , also durch

$$d := \deg f := \max(\deg P, \deg Q).$$

Da die Iteration rationaler Funktionen vom Grad $d = 1$, der *Möbiustransformationen*, vollständig untersucht ist, werden rationale Funktionen vom Grad $d \geq 2$ betrachtet.

Die *Iterierten* f^n von f sind induktiv definiert durch

$$f^0 := \text{id}, \quad f^1 := f, \quad f^{n+1} := f \circ f^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Das Verhalten der Punkte aus $\widehat{\mathbb{C}}$ unter Iteration wird als Dynamik bezeichnet. Dabei heißt ein $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ im MONTELSchen Sinne *normal*, wenn in einer Umgebung U von z_0 die Folge (f^n) der Iterierten von f eine in U gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. Dabei ist die konstante Grenzfunktion ∞ zugelassen. Die Menge aller normalen Punkte wird in der *Fatoumenge* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_f$ zusammengefasst, also

$$\mathcal{F} := \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : z \text{ normal}\}.$$

In kleinen Umgebungen eines Punktes der FATOUmenge ist ein einheitliches Verhalten unter Iteration zu beobachten. Man sagt daher, dass die Dynamik

von f in \mathcal{F} stabil ist. Die FATOUMenge ist offen und entweder leer oder zerfällt in eine, zwei oder abzählbar unendlich viele Zusammenhangskomponenten, die *stabilen Gebiete* von f .

Nicht normale Punkte im Komplement der FATOUMenge bilden die *Juliamente*

$$\mathcal{J} := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}.$$

Man spricht dort von einem chaotischen dynamischen Verhalten, da in beliebig kleinen Umgebungen eines Punktes der JULIAMenge das Verhalten unter Iteration nicht vorhergesagt werden kann. Die JULIAMenge ist kompakt, perfekt, niemals leer und umfasst entweder die gesamte Zahlenkugel oder enthält keine inneren Punkte. Sie ist entweder zusammenhängend, und zwar genau dann, wenn jedes stabile Gebiet einfach zusammenhängend ist, oder sie besteht aus überabzählbar vielen Komponenten. Ist im zweiten Fall \mathcal{J} sogar total unzusammenhängend, so spricht man von einer *staubförmigen* JULIAMenge.

Per Definition zerlegen FATOU- und JULIAMenge die RIEMANNSCHE Zahlenkugel. Sie sind außerdem unter f *vollständig invariant*. Das bedeutet

$$f^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F} = f(\mathcal{F}), \quad f^{-1}(\mathcal{J}) = \mathcal{J} = f(\mathcal{J}).$$

Damit besitzen f und jede Iterierte von f dieselbe FATOU- und JULIAMenge.

Das Gebiet U werde unter f auf das Gebiet V abgebildet, also $f(U) = V$. Die rationale Abbildung $f : U \rightarrow V$ heißt *eigentlich*, wenn $f(\partial U) = \partial V$ gilt. In diesem Fall besitzt jeder Punkt in V unter f mit Berücksichtigung von Vielfachheiten genau k Urbilder in U . Dabei wird f eine $(k : 1)$ -Abbildung und k der *lokale Grad* von f in U genannt, der immer kleiner oder gleich dem globalen Grad d ist. Für die Iteration ist wesentlich, dass f seine stabilen Gebiete eigentlich aufeinander abbildet. Die vollständige Invarianz eines stabilen Gebietes U unter f kann dann auch dadurch beschrieben werden, dass der lokale Grad von f in U mit dem globalen Grad von f übereinstimmt.

Ein *kritischer Punkt* c_0 von f ist eine Stelle, an der f nicht lokal konform ist. Der lokale Grad k von f ist also in kleinen Umgebungen von c_0 mindestens 2. Entweder verschwindet die Ableitung von f in c_0 und c_0 ist eine Nullstelle der Vielfachheit $k - 1$ von f' oder c_0 ist eine k -fache Polstelle von f . Das Bild $w_0 = f(c_0)$ von c_0 heißt *kritischer Wert* von f . Im Fall der $(k - 1)$ -fachen Nullstelle existieren wegen des lokalen Abbildungsverhaltens Kreise $W = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \varepsilon\}$, $V = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < \varepsilon^{\frac{1}{k}}\}$, ein Gebiet U , in dem c_0 enthalten ist, und eine solche konforme Abbildung $g : U \rightarrow V$, dass $f(z) = w_0 + (g(z))^k$ gilt. Insbesondere ist f eine eigentliche Abbildung von U auf W vom Grad k .

Die Menge $C = C_f$ der kritischen Punkte einer rationalen Funktion f vom

Grad d besteht aus maximal $2d - 2$ verschiedenen Elementen. Zählt man die kritischen Punkte gemäß ihrer Vielfachheiten, so besitzt f genau $2d - 2$ kritische Punkte.

Eine Beziehung zwischen dem Grad k einer eigentlichen Abbildung $f : U \rightarrow V$ und der Anzahl r der kritischen Punkte von f in U beschreibt die RIEMANN-HURWITZ-Formel für endlichfach zusammenhängende Gebiete (siehe [14]). Sind U ein m -fach und V ein n -fach zusammenhängendes Gebiet, so gilt

$$(m - 2) = k(n - 2) + r.$$

Ist ein stabiles Gebiet U vollständig invariant, so sind alle stabilen Gebiete, die nicht mit U übereinstimmen, einfach zusammenhängend.

Ist z_0 ein Punkt in \widehat{C} , so heißt ein

- $w \in \widehat{C}$ mit $w = f^n(z_0)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ein *Nachfolger* von z_0 und ein
- $\zeta \in \widehat{C}$ mit $f^n(\zeta) = z_0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ein *Vorgänger* von z_0 .

Im Fall $n = 1$ wird auch von dem *direkten Nachfolger* bzw. einem *direkten Vorgänger* gesprochen. Die Menge $O^+(z_0)$ aller Nachfolger von z_0 , das ist

$$O^+(z_0) := \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(z_0),$$

wird der *Orbit* von z_0 genannt. Anstelle eines einzelnen Punktes kann ein Orbit auch für Teilmengen aus \widehat{C} definiert werden. Es soll hier nur der sogenannte *kritische Orbit*

$$O^+(C) := \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(C)$$

erwähnt werden, der einen großen Einfluss auf die Dynamik von f hat.

Punkte mit endlichem Orbit lassen sich wie folgt klassifizieren. Ein $z_0 \in \widehat{C}$ heißt

- *periodisch*, falls es ein $p \in \mathbb{N}$ gibt mit $z_0 = f^p(z_0)$,
- *präperiodisch*, falls $f^k(z_0)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ periodisch ist.

Ist z_0 periodisch, so existiert ein minimales $p \in \mathbb{N}$ mit $z_0 = f^p(z_0)$ und z_0 wird periodischer Punkt der *Ordnung* p und *Fixpunkt* im Fall $p = 1$ genannt. Er trägt wesentlich zur lokalen Dynamik von f bei. Entscheidend dafür ist sein *Multiplikator*

$$\lambda(z_0) = \begin{cases} (f^p)'(z_0) & \text{falls } z_0 \neq \infty, \\ (T^{-1} \circ f^p \circ T)'(0) & \text{falls } z_0 = \infty. \end{cases}$$

Dabei ist $T(z) = z^{-1}$. Der periodische Punkt z_0 der Ordnung p und seine $p-1$ Nachfolger sind paarweise verschieden, wobei letztere ebenfalls periodische Punkte derselben Ordnung sind. Sie werden zu einem *Zyklus* α der *Länge* p zusammengefasst, d.h. es ist $\alpha = \{z_0, f(z_0), \dots, f^{p-1}(z_0)\}$. Da die Multiplikatoren der periodischen Punkte in α übereinstimmen, ist eine sinnvolle Definition des Multiplikators von α durch $\lambda(\alpha) := \lambda(z_0)$ gegeben.

Periodizität kann auch für stabile Gebiete sinnvoll und analog zu periodischen Punkten definiert werden. Ein stabiles Gebiet U heißt

- periodisch, falls es ein $p \in \mathbb{N}$ gibt mit $U = f^p(U)$,
- präperiodisch, falls $f^k(U)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ periodisch ist.

Im Fall $p = 1$ wird ein periodisches Gebiet auch *Fixgebiet* oder invariant genannt. SULLIVAN zeigte in seinem „no-wandering-domain“-Theorem (siehe [16]), dass jedes stabile Gebiet periodisch oder präperiodisch ist. Also sind die beiden oben genannten Fälle die einzig vorkommenden.

Es sei z_0 ein periodischer Punkt der Ordnung p und o.B.d.A. $p = 1$, denn sonst wird die p -te Iterierte betrachtet, die dieselbe Dynamik besitzt. Dann werden folgende Fälle in Abhängigkeit des Multiplikators $\lambda = \lambda(z_0)$ des Fixpunktes z_0 unterschieden.

- 1) Ist $\lambda = 0$, so ist z_0 ein kritischer Punkt und heißt *superattraktiver Fixpunkt*. Er liegt in einem Fixgebiet U , einem sogenannten *Böttchergebiet*, in dem (f^n) lokal gleichmäßig gegen z_0 konvergiert. In U liegt mindestens ein nicht präperiodischer kritischer Punkt. Ist es genau einer, so ist U einfach zusammenhängend. Für den lokalen Grad k in U gilt $k \geq 2$ und U ist einfach oder ∞ -fach zusammenhängend.
- 2) Für $0 < |\lambda| < 1$ heißt z_0 *attraktiver Fixpunkt*. Er liegt in einem Fixgebiet U , einem sogenannten *Schrödergebiet*, in dem (f^n) lokal gleichmäßig gegen z_0 konvergiert. In U liegt mindestens ein nicht präperiodischer kritischer Punkt. Ist es genau einer, so ist U einfach zusammenhängend. Für den lokalen Grad k in U gilt $k \geq 2$ und U ist einfach oder ∞ -fach zusammenhängend.
- 3) Im Fall $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$ mit $\alpha = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$ (k, l teilerfremd) ist λ eine l -te Einheitswurzel, und z_0 heißt *rational indifferent* oder *Leaupunkt*. Im Unterschied zu den vorherigen Typen liegt er in der JULIAMenge. Nach Übergang zur Iterierten f^l und einer Konjugation (siehe dazu Abschnitt 1.2) kann vom Fixpunkt 0 mit Multiplikator $\lambda = 1$ und einer Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = z - z^{s+1} + O(z^{s+2})$$

um 0 mit $s \in \mathbb{N}$ ausgegangen werden. Es existieren dann s verschiedene stabile Gebiete U_j , in denen jeweils (f^n) lokal gleichmäßig gegen den Nullpunkt konvergiert, der auf dem Rand eines jeden U_j liegt. Die U_j heißen *Leaubblätter* und die Gesamtheit der zum Nullpunkt gehörenden invarianten Attraktionsgebiete $U = U_1 \cup \dots \cup U_s$ heißt *Leaublume*. Es gilt für alle $j = 1, \dots, s$ und $z \in U_j$

$$\arg f^n(z) \rightarrow \frac{2\pi j}{s} =: \varphi_j,$$

für $n \rightarrow \infty$, also wirkt f längs der Achsen $\arg z = \varphi_j$ attraktiv. Zu jedem j existiert in U_j um die darin enthaltene Achse in der Nähe des Nullpunktes ein anziehendes Petal P_j mit der Winkelbreite $\frac{\pi}{s}$, für das $f(P_j) \subset P_j$ gilt. Wie die vorherigen Typen besitzt jedes LEAUBLATT einen kritischen Punkt von f . Liegt in U_j genau ein kritischer Punkt, so ist U_j einfach zusammenhängend. Für den lokalen Grad k in U_j gilt $k \geq 2$ und U_j ist einfach oder ∞ -fach zusammenhängend.

Im Falle einer l -ten Einheitswurzel (es wird f und nicht f^l betrachtet) existieren dann s LEAUBLÄTTER, die durch f zyklisch in Abhängigkeit von l und k aufeinander abgebildet werden. Dabei teilt l die Anzahl s der Blätter und die LEAUBLUME enthält mindestens $\frac{s}{l}$ kritische Punkte.

- 4) Ist $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so heißt z_0 *irrational indifferenten Fixpunkt*. Hier sind zwei verschiedene Fälle möglich.
- a) Liegt z_0 in der JULIAMENGE, so heißt z_0 *Cremerpunkt*. Er ist im Abschluss des kritischen Orbits enthalten.
 - b) Gehört z_0 zur FATOUMENGE, so wird z_0 *Siegelpunkt* genannt. Er liegt in einem einfach zusammenhängenden Fixgebiet U , einer sogenannten *Siegelscheibe* (mit Zentrum z_0), die durch f konform auf sich abgebildet wird. Es existiert eine konforme Abbildung $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow U$ mit $\varphi(0) = z_0$ und

$$\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(z) = \lambda z.$$

Also wirkt f auf U wie eine Drehung. Der Rand der SIEGELScheibe ist im Abschluss des kritischen Orbits enthalten.

- 5) Für $|\lambda| > 1$ wird z_0 *abstoßender Fixpunkt* genannt. Er liegt in der JULIAMENGE und in seiner Nähe ist f konform konjugiert zur Drehstreckung λz . Die abstoßenden periodischen Punkte liegen in der JULIAMENGE dicht.

Ist U ein Fixgebiet, so kann es ein BÖTTCHER-, SCHRÖDER-, LEAUGEBIET oder eine SIEGELScheibe sein. Die vollständige Klassifikation der Fixgebiete beinhaltet aber noch einen weiteren Typus, der nicht mit einem Fixpunkt in Korre-

lation steht. Es kann U ein sogenannter *Arnol'd-Herman-Ring* sein, ein zweifach zusammenhängendes Gebiet, in dem f wie eine irrationale Drehung eines Kreisringes wirkt. Jeder der beiden Randkomponenten liegt im Abschluss des kritischen Orbits.

Die ersten drei Gebietstypen, in denen die Folge der Iterierten eine konstante Grenzfunktion besitzt, fasst man unter dem Begriff der *Fatougebiete* zusammen, während SIEGELScheiben und ARNOL'D-HERMAN-Ringe wegen der dort speziellen Dynamik von f *Rotationsgebiete* genannt werden.

In dieser Arbeit werden speziell rationale Funktionen zweiten und dritten Grades betrachtet. Solche vom Grad $d = 2$ besitzen (mit Vielfachheiten gezählt) genau zwei kritische Punkte. Ist einer davon präperiodisch, so verbleibt ein freier kritischer Punkt zur Realisierung nicht abstoßender Zyklen. Die Existenz von ARNOL'D-HERMAN-Zyklen für Funktionen zweiten Grades ist mit SHISHIKURAS Abschätzung für die Anzahl n_{AH} von ARNOL'D-HERMAN-Zyklen einer Funktion vom Grad d ausgeschlossen (siehe [12]), denn es gilt

$$n_{AH} < d - 1.$$

Rationale Funktionen vom Grad $d = 3$ besitzen (mit Vielfachheiten gezählt) genau vier kritische Punkte. Sind zwei davon präperiodisch, so verbleiben zwei freie kritische Punkte zur Realisierung nicht abstoßender Zyklen. Hier kann dabei jeder der oben genannten Typen realisiert werden.

Es sind einige Aussagen über die Geometrie der JULIAMenge von hyperbolischen Funktionen bekannt. Eine Funktion f heißt *hyperbolisch*, wenn der Abstand von $\overline{O^+(C)}$ zur JULIAMenge von f positiv ist. Dann gilt folgendes.

- 1) Ist \mathcal{F} zusammenhängend, so ist \mathcal{J} staubförmig (siehe [13, S. 121]).
- 2) Besitzt f ein invariantes und einfach zusammenhängendes stabiles Gebiet U , so wird dieses von einer Kurve berandet. Ist U vollständig invariant, so ist die JULIAMenge eine Kurve (siehe [13, S. 137]).
- 3) Ist die JULIAMenge zusammenhängend, so ist sie eine Kurve (siehe [9]).

Die zweite und dritte Aussage bleibt richtig, wenn man für f noch präperiodische kritische Punkte in \mathcal{J} zulässt. In diesem Fall heißt f *subhyperbolisch*. Sind alle kritischen Punkte präperiodisch, so ist die FATOUMenge leer und $\mathcal{J} = \widehat{\mathbb{C}}$.

Ist $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und zusammenhängend und auch die JULIAMenge zusammenhängend, so wird \mathcal{J} ein *Dendrit* genannt. Dann stimmt \mathcal{F} mit einem einzigen einfach zusammenhängenden stabilen Gebiet U überein, zu dem ein (super)attraktiver oder ein rational indifferent Fixpunkt gehört. Es liegt also ein BÖTTCHER-, SCHRÖDER- oder LEAUGebiet vor. Notwendig dafür, dass die JULIAMenge ein

Dendrit ist, ist die Existenz von $d - 1$ kritischen Punkten in \mathcal{J} , hinreichend ist zusätzlich die Existenz von $d - 1$ kritischen Punkten in einem stabilen Gebiet. Liegen $d - 1$ kritische Punkte in der JULIAMenge, so ist notwendig und hinreichend dafür, dass \mathcal{J} ein JORDANbogen ist, die Existenz von $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$ mit

$$f(\mathcal{J} \cap C \cup \{a, b\}) = \{a, b\}$$

(siehe [15]). Endpunkte des JORDANbogens sind die Punkte a, b . Die in \mathcal{J} gelegenen kritischen Punkte sind paarweise verschieden und einfach. Weiterhin gilt

$$f^{-1}(\{a, b\}) = \mathcal{J} \cap C \cup \{a, b\}.$$

1.2 Konjugation rationaler Funktionen

Es sei \mathcal{M} die Menge aller MÖBIUSTRansformationen, das sind Funktionen T mit

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

und komplexen Parametern a, b, c, d , die $ad - bc \neq 0$ erfüllen. Es bildet \mathcal{M} bezüglich der Komposition \circ eine Gruppe. Mit ihr lässt sich für zwei rationale Funktionen f und g die Konjugation \sim definieren durch

$$f \sim g :\Leftrightarrow \text{Es existiert ein } T \in \mathcal{M} \text{ mit } g(z) = T^{-1} \circ f \circ T(z) \text{ für } z \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

In diesem Fall gilt $\mathcal{F}_f = T(\mathcal{F}_g)$ und $\mathcal{J}_f = T(\mathcal{J}_g)$. Dabei zeigt die Familie der Iterierten von g das gleiche dynamische Verhalten wie die Familie der Iterierten von f . Ist nämlich α ein Zyklus von f mit Multiplikator $\lambda(\alpha)$ und $g \sim f$, so besitzt g den Zyklus $T^{-1}(\alpha)$ mit demselben Multiplikator.

In dieser Arbeit werden rationale Funktionen mit gewissen Eigenschaften untersucht, für die nur bestimmte Transformationen benötigt werden, um nach Konjugation diese Eigenschaften zu erhalten. Daher werden wir den Konjugationsbegriff verallgemeinern.

Satz 1.1. *Es sei M bzgl. \circ eine Untergruppe von \mathcal{M} . Dann ist die Konjugation*

$$f \overset{M}{\sim} g :\Leftrightarrow \text{Es existiert } T \in M \text{ mit } g(z) = T^{-1} \circ f \circ T(z) \text{ für } z \in \widehat{\mathbb{C}},$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge der rationalen Funktionen. Insbesondere ist für $M = \mathcal{M}$ die Konjugation \sim eine Äquivalenzrelation.

Auf zwei bestimmte Untergruppen von \mathcal{M} wird diese Aussage angewendet. Die Indizierung dieser Mengen ist dem späteren Formalismus der Arbeit angepasst.

Definition 1.2. Mit den Drehstreckungen bzw. Drehstauchungen T_l und der Inversion S , das sind

$$T_l(z) = lz, \quad S(z) = \frac{1}{z}$$

mit $l \in \mathbb{C}$, $l \neq 0$, seien die Teilmengen M_2 und M_3 von \mathcal{M} definiert durch

$$\begin{aligned} M_2 &:= \{T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} : T = T_l \text{ für ein } l \in \mathbb{C}, l \neq 0\}, \\ M_3 &:= \{T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} : T = T_l \text{ oder } T = T_l \circ S \text{ für ein } l \in \mathbb{C}, l \neq 0\}. \end{aligned}$$

Satz 1.3. Die Mengen M_2 und M_3 sind bezüglich \circ Untergruppen von \mathcal{M} .

1.3 Quasikonforme Konjugation

Die quasikonforme Konjugation ist eine Methode, um Eigenschaften der JULIAMengen von Funktionen auf andere zu übertragen. Wir werden hier nicht tiefer in die Theorie der quasikonformen Abbildungen und Konjugationen eingehen, sondern lediglich eine bekannte Anwendung benutzen.

Wir beschäftigen uns dabei mit solchen Abbildungen, die sich lokal um einen gewissen Punkt so verhalten wie Polynome um ∞ .

Definition 1.4. Sind $U, V \subset \mathbb{C}$ beschränkte, einfach zusammenhängende Gebiete mit analytischen Rändern und $\overline{U} \subset V$ und ist $f : \overline{U} \rightarrow \overline{V}$ eine $(d : 1)$ -Abbildung sowie in U holomorph, so heißt $(f; U, V)$ polynomartig vom Grad d .

Eigenschaften polynomartiger Abbildungen sind in [5] beschrieben. Für die Iteration ist die folgende Aussage entscheidend, die auf DOUADY und HUBBARD zurückgeht.

Satz 1.5. Sei $(f; U, V)$ eine polynomartige Abbildung vom Grad $d \geq 2$. Dann existieren eine quasikonforme Abbildung φ und ein Polynom P vom Grad d mit

$$f(z) = \varphi^{-1} \circ P \circ \varphi(z), \quad z \in \overline{U}.$$

Beweis. Siehe [4, S. 99]. □

Ist die Aussage von Satz 1.5 erfüllt, so heißt f zu P quasikonform konjugiert. In diesem Fall übertragen sich die topologischen und geometrischen Eigenschaften der JULIAMenge von P auf die von f (und umgekehrt). Wir werden zeigen, dass rationale Abbildungen mit einem einfach zusammenhängenden und vollständig invarianten BÖTTCHER- oder SCHRÖDERgebiet zu Polynomen quasikonform konjugiert sind. Dieses Polynom lässt sich konkreter angeben, falls noch ein weiterer Fixpunkt existiert.

Einem Fixpunkt z_0 von f wird die Vielfachheit k zugeordnet, wenn z_0 eine k -fache Nullstelle von $f(z) - z$ ist. Dann besitzt eine rationale Funktion vom Grad d unter Berücksichtigung von Vielfachheiten genau $d+1$ Fixpunkte (siehe [10, S. 132]). Ein Fixpunkt mit einer Vielfachheit $k > 1$ ist dann und nur dann möglich, wenn der zugehörige Multiplikator $\lambda = 1$ ist. Besitzt f genau einen Fixpunkt z_0 , so ist es ein LEAUpunkt mit der um z_0 lokalen Entwicklung

$$f(z) = z + a_{d+1}(z - z_0)^{d+1} + O((z - z_0)^{d+2}).$$

Die LEAublume besteht also aus genau d Blättern. Existiert ein Fixpunkt mit Multiplikator $\lambda \neq 1$, so gibt es auch einen von ihm verschiedenen Fixpunkt.

Satz 1.6. *Besitzt die rationale Funktion f einen Fixpunkt mit Multiplikator $\lambda \neq 1$, so existieren mindestens zwei verschiedene Fixpunkte von f .*

Insbesondere gibt es neben einem (super)attraktiven Fixpunkt einen weiteren Fixpunkt. Damit lässt sich folgendes aussagen, falls das zugehörige SCHRÖDER- bzw. BÖTTCHERgebiet einfach zusammenhängend und vollständig invariant ist.

Satz 1.7. *Die rationale Funktion f vom Grad d besitze ein einfach zusammenhängendes und vollständig invariantes SCHRÖDER- oder BÖTTCHERgebiet A . Dann gelten folgende Aussagen:*

- a) f ist quasikonform konjugiert zu $zQ(z)$, Q ein Polynom vom Grad $d - 1$.
- b) Ist $d \geq 3$ und besitzt f außerhalb von A einen Fixpunkt mit kritischem Urbild, so ist f quasikonform konjugiert zu $z(z - b)^2\tilde{Q}(z)$, \tilde{Q} ein Polynom vom Grad $d - 3$.

Beweis. In A existiert ein (super)attraktiver Fixpunkt z_0 . Nach Satz 1.6 besitzt f mindestens einen weiteren von z_0 verschiedenen Fixpunkt $z_1 \notin A$. Es sei o.B.d.A. $z_0 = \infty$, denn sonst lässt sich diese Normierung mit Hilfe einer MÖBI-USTransformation erreichen, die den einfachen Zusammenhang, die vollständige Invarianz und den dynamischen Typ von A beibehält. Dann existiert eine einfach zusammenhängende Umgebung U_0 von z_0 mit analytischem Rand, $\bar{U}_0 \subset A$ und $f(\bar{U}_0) \subset U_0$ (siehe [13, S. 68]). Es sei U_n die Komponente von $f^{-n}(U_0)$, die den Punkt z_0 enthält. Es folgt induktiv $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$, und die U_n bilden eine Ausschöpfung von A . Daher existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass in U_{n_0} alle $d - 1$ in A enthaltenen kritischen Punkte liegen und f dort globalen Grad besitzt. Da A einfach zusammenhängend ist, ist es auch U_{n_0} (sonst wären nach der Formel von RIEMANN-HURWITZ die Gebiete U_n für $n > n_0$ und damit auch A nicht einfach zusammenhängend). Dann sind

$$U := \mathbb{C} \setminus \overline{U_{n_0}}, \quad V := \mathbb{C} \setminus \overline{f(U_{n_0})}$$

einfach zusammenhängende Gebiete mit analytischen Rändern. Wegen des globalen Grades von f in U_{n_0} ist $f : \bar{U} \rightarrow \bar{V}$ eine $(d : 1)$ -Abbildung und $(f; U, V)$ polynomartig vom Grad d . Nach Satz 1.5 existieren eine quasikonforme Abbildung φ und ein Polynom R vom Grad d mit $f = \varphi^{-1} \circ R \circ \varphi$ auf \bar{U} . Da $z_1 \in U$ ein Fixpunkt von f ist, besitzt auch R den Fixpunkt $\varphi(z_1)$. Dann ist der Nullpunkt ein Fixpunkt des Polynoms $P := T^{-1} \circ R \circ T$ mit $T(z) := z + \varphi(z_1)$. Schließlich ist f vermöge $\psi := T^{-1} \circ \varphi$ quasikonform konjugiert zu P mit $P(z) = zQ(z)$.

Besitzt z_1 ein Urbild, das ein kritischer Punkt von f ist, so besitzt der Nullpunkt ein Urbild $b \neq 0$, das ein kritischer Punkt von P , also auch von Q ist. Da b endlich ist, verschwindet dort die Ableitung, und b ist mindestens eine zweifache Nullstelle von Q . Dann ist f quasikonform konjugiert zu $P(z) = z(z - b)^2 \tilde{Q}(z)$. \square

2 Funktionen zweiten Grades

Wir wollen Aussagen über topologische und geometrische Eigenschaften der JULIAMenge von rationalen Funktionen zweiten Grades finden, was aber allgemein schwierig ist, da zwei kritische Punkte zur Realisierung von nicht abstoßenden Zyklen zur Verfügung stehen. Ist jedoch einer davon präperiodisch, so ist er für die Realisierung dieser Zyklen praktisch „ausgeschaltet“. Ausgehend von der notwendigen Bedingung für solche Funktionen, deren JULIAMengen JORDANbögen sind, wird in Abschnitt 2.1 die Menge der Funktionen f vom Grad $d = 2$ untersucht, die einen kritischen Punkt besitzt, der nach zweimaliger Anwendung von f auf einen Fixpunkt z_1 abgebildet wird. Es kann z_1 durch eine die Dynamik erhaltende Transformation in den Fixpunkt 0 mit Vorgänger ∞ überführt werden. Die Funktionen, die einen kritischen Punkt c und das Abbildungsverhalten $c \mapsto \infty \mapsto 0 \mapsto 0$ besitzen, lassen sich in Äquivalenzklassen einordnen und es entsteht die Menge \mathcal{G}_2^* aller dieser Klassen. Jedem Element aus \mathcal{G}_2^* wird eine eindeutige Invariante X zugeordnet, in deren Abhängigkeit in Abschnitt 2.2 Aussagen über die JULIAMenge getroffen werden. Eine Klassifikation für die Menge \mathcal{G}_2^* in Abschnitt 2.3 geht einigen abschließenden Beispielen in Abschnitt 2.4 voraus.

2.1 Definitionen und einleitende Sätze

Untersucht wird eine Klasse von rationalen Funktionen zweiten Grades, in der alle die Funktionen mit $d = 2$ enthalten sind, deren JULIAMenge ein JORDANbogen ist. Notwendig für letztere Aussage ist die Existenz eines kritischen Punktes, dessen Vorwärtsorbit aus genau zwei Punkten der RIEMANNschen Zahlenkugel besteht, den beiden Endpunkten des JORDANbogens. Diese zwei Punkte können dabei keinen Zyklus zweiter Ordnung bilden, da sonst derjenige Punkt mit dem kritischen Urbild (mit Vielfachheiten gezählt) drei Urbilder besäße, was bei einer Funktion zweiten Grades unmöglich ist. Also existieren ein kritischer Punkt c und $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$, so dass das Abbildungsverhalten einer solchen Funktion von der Form $c \mapsto b \mapsto a \mapsto a$ ist.

Definition 2.1. Es sei \mathcal{H}_2 die Menge aller rationalen Funktionen f zweiten Grades, für die es einen kritischen Punkt c und $z_1 \neq z_2$ gibt mit

$$c \xrightarrow{f} z_2 \xrightarrow{f} z_1 \xrightarrow{f} z_1.$$

Dabei heißt z_1 der markierte Fixpunkt von $f \in \mathcal{H}_2$. Weiterhin sei \mathcal{G}_2 die Menge aller $f \in \mathcal{H}_2$ mit $z_1 = 0$ und $z_2 = \infty$.

Da der markierte Fixpunkt von $f \in \mathcal{H}_2$ sich und den Punkt z_2 als Urbilder besitzt, ist er nicht superattraktiv. Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{H}_2$ gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{G}_2$, die zu f konjugiert ist und damit die gleiche Dynamik besitzt.

Satz 2.2. *Ist $f \in \mathcal{H}_2$, so existiert eine Funktion $g \in \mathcal{G}_2$ mit $f \sim g$.*

Beweis. Ist z_1 der markierte Fixpunkt der Funktion f und z_2 sein verbleibender direkter Vorgänger, so sei T eine MÖBIUSTransformation mit $T(0) = z_1$ und $T(\infty) = z_2$. Die Funktion $g := T^{-1} \circ f \circ T$ besitzt zum einen den Fixpunkt 0 mit direktem Vorgänger ∞ und zum anderen den kritischen Punkt $T^{-1}(c)$, der auf ∞ abgebildet wird. Also liegt g in \mathcal{G}_2 und es gilt $f \sim g$. \square

Eine Aussage über die Gestalt der Funktionen aus \mathcal{G}_2 ist schnell gefunden.

Satz 2.3. *Jede rationale Funktion $f \in \mathcal{G}_2$ lässt sich darstellen in der Form*

$$f(z) = a \frac{z}{(z-c)^2}$$

mit komplexen Parametern $a, c \neq 0$.

Beweis. Der Nullpunkt und sein Vorgänger ∞ sind die einzigen Nullstellen, der kritische Vorgänger von ∞ ist die einzige Polstelle von f . Nach bekannten Sätzen über Null- und Polstellen ist dann $f(z) = z(z-c)^{-2}g(z)$ mit einer ganzen und beschränkten Funktion g , die nach dem Satz von LIOUVILLE konstant ist. Diese Konstante a kann nicht den Wert 0 annehmen, und auch der Parameter c kann nicht 0 sein, da f sonst keine Funktion zweiten Grades ist. \square

Die Aussagen von Satz 2.2 und Satz 2.3 ergeben dann die folgende Möglichkeit zur Darstellung der Mengen \mathcal{G}_2 und \mathcal{H}_2 .

Folgerung 2.4. *Die Mengen \mathcal{G}_2 und \mathcal{H}_2 lassen sich darstellen durch*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2 &= \{g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} : g(z) = az(z-c)^{-2}, a, c \neq 0\}, \\ \mathcal{H}_2 &= \{f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} : f \sim g, g \in \mathcal{G}_2\}. \end{aligned}$$

Bei der Suche nach Aussagen über die Dynamik und die Geometrie der JULIAMengen der Funktionen der Menge \mathcal{H}_2 reicht also die Betrachtung der Menge \mathcal{G}_2 aus, da solche Aussagen für konjugierte Elemente übereinstimmen.

Auch in der Menge \mathcal{G}_2 gibt es noch Elemente, die dieselbe Dynamik besitzen und daher zusammengefasst werden können. Dazu verwenden wir solche MÖBIUSTransformationen T , dass für $f \in \mathcal{G}_2$ auch $g := T^{-1} \circ f \circ T$ wieder in \mathcal{G}_2 liegt. Die Konjugierte g besitzt wie f den Fixpunkt 0 mit direktem Vorgänger ∞ . Beide werden folglich durch T auf sich abgebildet. Also sind als Transformationen nur Drehstreckungen und Drehstauchungen von Interesse, die in der in Definition 1.2 beschriebenen Menge M_2 enthalten sind. Die Konjugation $\overset{M_2}{\sim}$ ist gemäß Satz 1.1 eine Äquivalenzrelation, durch die Äquivalenzklassen definiert sind, die nun betrachtet werden.

Definition 2.5. Für $f \in \mathcal{G}_2$ sei

$$(f) := \{g \in \mathcal{G}_2 : f \stackrel{M_2}{\sim} g\}$$

die Äquivalenzklasse von f bezüglich der Konjugation $\stackrel{M_2}{\sim}$ und es sei

$$\mathcal{G}_2^* := \{(f) : f \in \mathcal{G}_2\}$$

die Menge aller Äquivalenzklassen.

Eine Aussage über eine Invariante für die Klassen aus \mathcal{G}_2^* macht folgender Satz.

Satz 2.6. Für die Klasse $(f) \in \mathcal{G}_2^*$ ist $X := \frac{a}{c^2} \neq 0$ eine vollständige Invariante.

Beweis. Verschiedene Vertreter einer Äquivalenzklasse aus \mathcal{G}_2^* sind zueinander konjugiert vermöge einer MÖBIUSTRANSFORMATION der Form $T_l(z) = lz$ ($l \neq 0$). Es sei f ein Vertreter eines beliebigen, aber dann festgehaltenen Elements aus \mathcal{G}_2^* mit den Koeffizienten a, c . Die Koeffizienten der Funktion, die durch Konjugation von f mit T_l entsteht, seien jeweils mit a_l, c_l bezeichnet. Wegen

$$T_l^{-1} \circ f \circ T_l(z) = \frac{1}{l} a \frac{lz}{(lz - c)^2} = \frac{a}{l^2} \frac{z}{(z - \frac{c}{l})^2}$$

sind diese Koeffizienten $a_l = \frac{a}{l^2}$ und $c_l = \frac{c}{l}$. Dann ist X wegen

$$\frac{a_l}{c_l^2} = \frac{\frac{a}{l^2}}{\frac{c^2}{l^2}} = \frac{a}{c^2}$$

invariant unter Konjugation mit der Transformation T_l . Es existiert also zu einem vorgegebenen Element aus \mathcal{G}_2^* ein wohldefiniertes $X \neq 0$.

Sei nun $X \neq 0$. Umgekehrt ist zu zeigen, dass zu X ein eindeutiges Element aus \mathcal{G}_2^* existiert. Alle Koeffizienten a, c mit $X = \frac{a}{c^2}$ definieren Funktionen, die in derselben Äquivalenzklasse liegen müssen. Zunächst sind zu beliebigem a die beiden Funktionen

$$f^+(z) = a \frac{z}{(z - c)^2}, \quad f^-(z) = a \frac{z}{(z + c)^2}$$

konjugiert vermöge der Transformation T_{-1} , so dass die Funktionen zu den Koeffiziententupeln (a, c) und $(a, -c)$ zu derselben Klasse gehören. Das Element aus \mathcal{G}_2^* ist dann durch die Wahl $c := 1$ und $a := X$ eindeutig festgelegt. Denn zu beliebigem komplexen $\alpha \neq 0$ ist die Funktion f_α mit den Koeffizienten $c = \alpha$ und $a = X\alpha^2$ konjugiert zur Funktion f mit den Koeffizienten $c = 1, a = X$ vermöge der Transformation T_α . \square

Für vorgegebenes $X \neq 0$ sind also die Funktionen

$$f_X^+(z) = X \frac{z}{(z-1)^2}, \quad f_X^-(z) = X \frac{z}{(z+1)^2}$$

geeignete Vertreter der zugehörigen Äquivalenzklasse.

Die Ableitung einer Funktion $f \in \mathcal{G}_2$ ist durch

$$f'(z) = -a \frac{z+c}{(z-c)^3}$$

gegeben. Der Multiplikator im Nullpunkt ist daher

$$\lambda(0) = f'(0) = \frac{a}{c^2} = X.$$

Also ist für eine Klasse (f) der Menge \mathcal{G}_2^* der Multiplikator $\lambda(0)$ eines beliebigen Vertreters gegeben durch die Invariante X von (f), was die Klassifikation der Elemente aus \mathcal{G}_2^* in Abhängigkeit von dem dynamischen Typ des markierten Fixpunktes vereinfacht.

Neben dem festgelegten kritischen Punkt c existiert ein freier kritischer Punkt von f , der bei $z = -c$ liegt. Er bestimmt die Dynamik von f . Für die folgenden Abschnitte wird ein Vertreter einer vorgegebenen Klasse so gewählt, dass $-c = 1$ ist. Das vereinfacht die Untersuchung des Vorwärtsorbits des freien kritischen Punktes. Dieser Vertreter ist gerade die Funktion f_X^- , die nun als Standardvertreter deklariert wird.

Definition 2.7. Ist ein $X \neq 0$ gegeben, so heißt f_X mit

$$f_X(z) := X \frac{z}{(z+1)^2}$$

der Standardvertreter der zugehörigen Klasse und

$$O^+(X) := \bigcup_{n=1}^{\infty} f_X^n(1)$$

der Orbit des freien kritischen Punktes des Standardvertreters.

Der Standardvertreter f_X einer Klasse aus \mathcal{G}_2^* besitzt neben dem markierten Fixpunkt 0 im Allgemeinen noch zwei verschiedene nicht markierte Fixpunkte, die beide endlich sind. Nur falls der Nullpunkt ein LEAUpunkt ist, existiert genau ein nicht markierter Fixpunkt. In der folgenden Aussage ist die auftretende Wurzel als beliebige Lösung der Gleichung $z^2 = X$ zu verstehen.

Satz 2.8. *Der Standardvertreter einer Klasse $(f) \in \mathcal{G}_2^*$ mit $X \neq 0, 1$ besitzt die beiden nicht markierten Fixpunkte $-1 \pm \sqrt{X}$ mit den Multiplikatoren*

$$\lambda(-1 \pm \sqrt{X}) = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{X}}.$$

Besitzt der Standardvertreter einer Klasse $(f) \in \mathcal{G}_2^$ mit $X \neq 0$ keine zwei SIEGELpunkte, so liegen für jeden Vertreter von (f) mindestens zwei Fixpunkte in der JULIAMenge.*

Beweis. Es sei eine beliebige Klasse aus \mathcal{G}_2^* mit $X \neq 0, 1$ gegeben und es sei f_X der Standardvertreter. Die Gleichung $f_X(z) = z$ löst sich für $z \neq 0, -1$ auf zu $X = (z + 1)^2$. Sind \sqrt{X} und $-\sqrt{X}$ die beiden verschiedenen Lösungen der Gleichung $z^2 = X \neq 0$, so erhält man ebenfalls verschiedene Fixpunkte $-1 \pm \sqrt{X}$. Für $X \neq 1$ handelt es sich um nicht markierte Fixpunkte. Der Standardvertreter besitzt die Ableitung

$$f'_X(z) = X \frac{1 - z}{(z + 1)^3},$$

so dass man für die nicht markierten Fixpunkte die Multiplikatoren

$$\lambda(-1 \pm \sqrt{X}) = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{X}}$$

berechnet. Nach Voraussetzung kann maximal einer der drei Fixpunkte in der FATOUmenge liegen und den freien kritischen Punkt binden. Im Fall $X = 1$ ist der Nullpunkt ein LEAUpunkt mit Multiplikator $\lambda = 1$ und damit ein doppelter Fixpunkt von f_X . Es existiert dann genau ein nicht markierter Fixpunkt. Der LEAUpunkt liegt in \mathcal{J} und bindet den freien kritischen Punkt, so dass der nicht markierte Fixpunkt ebenfalls in der JULIAMenge liegt. Also existieren in allen Fällen mindestens zwei Fixpunkte von f_X in \mathcal{J} . Da sich diese Eigenschaft mit Hilfe der Konjugation überträgt, gilt das für alle Vertreter. \square

2.2 Die Geometrie der Juliamengen in \mathcal{G}_2^*

Eine Eigenschaft, die für eine Funktion nach Konjugation mit einer MÖBI-USTransformation erhalten bleibt und daher für alle Vertreter von $(f) \in \mathcal{G}_2^*$ gegeben ist, wird als Eigenschaft von (f) bezeichnet. Eine Aussage über die Geometrie der JULIAMengen der Klassen aus \mathcal{G}_2^* kann aufgrund der Tatsache, dass allein der verbleibende kritische Punkt die Dynamik bestimmt, schnell gefunden werden. Zunächst ist mit SHISHIKURAS Abschätzung $n_{AH} < d - 1 = 1$ für die Anzahl n_{AH} von ARNOLD-HERMANN-Zyklen (siehe [12]) klar, dass keine ARNOLD-HERMANN-Ringe existieren. Genauer gibt es sogar keine Klassen mit unzusammenhängender, aber nicht total unzusammenhängender JULIAMenge.

Satz 2.9. *Die JULIAMenge einer Klasse $(f) \in \mathcal{G}_2^*$ ist genau dann zusammenhängend, wenn der Nullpunkt kein attraktiver Fixpunkt von f ist. Andernfalls ist \mathcal{J} staubförmig.*

Beweis. Zunächst sei der Nullpunkt ein attraktiver Fixpunkt von f . Das zugehörige SCHRÖDERgebiet $A(0)$ bindet den freien kritischen Punkt, welcher nicht präperiodisch ist. Der Abbildungsgrad in $A(0)$ ist aufgrund dessen mindestens zwei, also genau zwei, da f eine Funktion zweiten Grades ist. Damit ist $A(0)$ vollständig invariant und stimmt mit der FATOUMenge überein. Da $\mathcal{F} = A(0)$ zusammenhängend und f hyperbolisch ist, ist \mathcal{J} total unzusammenhängend (siehe [13, S. 121]), also staubförmig.

Sei nun 0 nicht attraktiv. Entweder ist $\mathcal{J} = \widehat{\mathbb{C}}$ und somit zusammenhängend, oder die FATOUMenge ist nicht leer und es existiert ein Zyklus $\{U_1, \dots, U_k\}$ stabiler Gebiete. Diese binden den verbleibenden kritischen Punkt und sind deshalb inklusive ihrer Vorgängergebiete die einzigen Zusammenhangskomponenten von \mathcal{F} . Da der Nullpunkt nicht attraktiv ist, liegt er entweder in \mathcal{J} , also nicht in einem der U_j , oder der Zyklus besteht aus einem Fixgebiet, nämlich einer SIEGELScheibe mit dem Zentrum 0 . Im ersten Fall sind alle U_j sowie alle deren Vorgängergebiete einfach zusammenhängend, da nur ein kritischer Punkt im Zyklus enthalten ist oder der Zyklus eine SIEGELScheibe zu einem nicht markierten Fixpunkt ist. Im zweiten Fall sind die SIEGELScheibe U und ihr ∞ enthaltendes Urbildgebiet einfach zusammenhängend. Die Urbildkomponenten von U unter f^2 sind U und ein weiteres stabiles Gebiet V , in dem der kritische Vorgänger des Nullpunktes liegt und das mit Grad $d = 2$ auf das ∞ enthaltende stabile Gebiet abgebildet wird. Unter Ausnutzung der Formel von RIEMANN-HURWITZ sind V und iterierte Urbildkomponenten von V , das sind die Urbildkomponenten von U unter den Iterierten f^n , $n \geq 3$, einfach zusammenhängend. In jedem Fall sind also alle stabilen Gebiete einfach zusammenhängend und daher \mathcal{J} zusammenhängend. \square

Damit ist eine grundlegende Aussage über die JULIAMengen der Klassen aus \mathcal{G}_2^* getroffen. Detailliertere Aussagen über \mathcal{J} erhalten wir in Abschnitt 2.3. Dort wird zum Beispiel die Frage beantwortet, welche Parameterwerte auf JORDANbögen führen.

Entscheidend im Beweis von Satz 2.9 war der einfache Zusammenhang aller stabilen Gebiete. In Kapitel 3 reicht als Voraussetzung für den Zusammenhang der JULIAMenge einer Funktion dritten Grades, die einen LEAUPunkt mit kritischem Urbild besitzt, alleine der einfache Zusammenhang der zugehörigen LEAUBLätter aus. Interessant ist dabei, dass zwei nicht präperiodische kritische Punkte existieren können, die nicht durch die LEAUBLätter gebunden werden, aber für die Entscheidung, ob \mathcal{J} zusammenhängend ist oder nicht, keine Rolle spielen. Für Funktionen zweiten Grades ist eine ähnliche Aussage möglich,

die als Motivation für das nachfolgende Kapitel dienen soll. Wir betrachten jetzt beliebige rationale Funktionen mit $d = 2$ und fordern die Existenz eines Fixpunktes auf dem Rand eines zu einem Zyklus gehörenden stabilen Gebietes. Dann ergibt sich der Zusammenhang der JULIAMenge ebenfalls alleine aus dem einfachen Zusammenhang der Zyklusgebiete. Dazu wird zunächst ein Lemma benötigt, das eine Aussage über die Lage dieses Fixpunktes und dessen Urbilder macht, sowie eine Definition zur Vereinfachung der Schreibweise.

Definition 2.10. Für einen Gebietszyklus $U = \{U_1, \dots, U_k\}$ von f sei definiert

$$\partial U^0 := \partial U := \bigcup_{j=1}^k \partial U_j, \quad \partial U^{-n} := \bigcup_{j=1}^n f^{-j}(\partial U).$$

Lemma 2.11. *Es sei g eine rationale Funktion zweiten Grades mit einem Zyklus $U = \{U_1, \dots, U_k\}$ und einem Fixpunkt $z_0 \in \partial U$. Ist U kein SIEGELzyklus, so liegen alle Urbilder von z_0 unter der Abbildung g^{n+1} in ∂U^{-n} .*

Beweis. Da U kein SIEGELzyklus ist, enthält er einen kritischen Punkt, der o.B.d.A. in U_1 liege. Die Behauptung wird per vollständiger Induktion gezeigt.

$n = 0$: Die Urbilder von z_0 unter g sind z_0 und ein von z_0 verschiedenes Urbild z_1 . Da $z_0 \in \partial U$ nach Voraussetzung erfüllt ist, bleibt nur $z_1 \in \partial U$ zu zeigen. Wir beweisen, dass z_1 auf dem Rand von U_1 liegt.

Wir nehmen an, dass z_1 nicht auf dem Rand von U_1 liegt. Dann existieren Umgebungen W von z_0 und V von z_1 mit

$$g : V \rightarrow W, \quad V \cap U_1 = \emptyset.$$

Nach Voraussetzung liegt z_0 auf dem Rand eines Zyklusgebietes und wegen

$$g(\overline{U_j}) = \overline{U_{j+1}}, \quad j = 1, \dots, k \pmod{k},$$

auf den Rändern aller U_j . Daher ist der Schnitt von W mit $U_2 = g(U_1)$ nicht leer und es sei $z \in W \cap U_2$. Da ein kritischer Punkt in U_1 liegt, stimmt der lokale Grad von g in U_1 mit dem globalen Grad überein und z besitzt in U_1 zwei Urbilder. Außerdem besitzt z ein weiteres Urbild in V , was bei einer Funktion zweiten Grades unmöglich ist. Also gilt $z_1 \in \partial U_1 \subset \partial U^0$. Somit gehören die Urbilder von z_0 unter g , das sind z_0 und z_1 , zu ∂U^0 .

$n \rightarrow n + 1$: Nach Induktionsvoraussetzung liegen die Urbilder $z_0, z_1, \dots, z_{2^n-1}$ von z_0 unter der Iterierten g^n in ∂U^{-n+1} (insbesondere in ∂U^{-n} , denn es ist ∂U^{-n+1} Teilmenge von ∂U^{-n}). Damit befinden sich die Urbilder $z_0, z_1, \dots, z_{2^n-1}, z_{2^n}, \dots, z_{2^{n+1}-1}$ von z_0 unter der Iterierten g^{n+1} auf dem Rand von U^{-n} . \square

Satz 2.12. *Die rationale Funktion g zweiten Grades besitze einen Gebietszyklus $U = \{U_1, \dots, U_k\}$ und einen Fixpunkt $z_0 \in \partial U$. Es sei U kein SIEGELzyklus und die Ränder der U_k seien zusammenhängend. Dann ist die JULIAMenge zusammenhängend.*

Beweis. Nach Lemma 2.11 liegen alle Urbilder von z_0 unter der Abbildung g^{n+1} in ∂U^{-n} . Es folgt induktiv aus dem Zusammenhang von ∂U , dass alle $g^{-j}(\partial U)$ und damit alle ∂U^{-n} zusammenhängend sind. Schließlich ist wegen

$$\mathcal{J} = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} g^{-j}(\partial U)}$$

und der Aussage, dass mit einer Menge auch deren Abschluss zusammenhängend ist, die JULIAMenge zusammenhängend. \square

Dieser Satz findet nur für bestimmte Klassen aus \mathcal{G}_2^* Anwendung, zum Beispiel für solche, die einen LEAUzyklus besitzen.

Ist $(f) \in \mathcal{G}_2^*$ mit $0 < |X| < 1$, so ist der Nullpunkt ein attraktiver Fixpunkt und das zugehörige SCHRÖDERgebiet $A(0)$ ist vollständig invariant und ∞ -fach zusammenhängend. Nach Satz 2.9 ist J staubförmig. Über die „Lage“ der JULIAMenge für den Standardvertreter lässt sich dann folgende Aussage treffen.

Satz 2.13. *Für $0 < |X| < 1$ ist die staubförmige JULIAMenge \mathcal{J}_X des Standardvertreters der zugehörigen Klasse aus \mathcal{G}_2^* Teilmenge des abgeschlossenen Kreisringes*

$$A_{|X|} := \{z \in \mathbb{C} : 1 - \sqrt{|X|} \leq |z| \leq (1 - \sqrt{|X|})^{-1}\}.$$

Für $X > 0$ liegt auf den Randkomponenten von A_X jeweils ein Punkt von \mathcal{J}_X .

Beweis. Mit $|z| < 1 - \sqrt{|X|} < 1$ gilt für den Standardvertreter f_X

$$|f_X(z)| \leq |X| \frac{|z|}{(1 - |z|)^2} < |X| \frac{1 - \sqrt{|X|}}{(1 - (1 - \sqrt{|X|}))^2} = 1 - \sqrt{|X|}.$$

Die offene Kreisscheibe um den Nullpunkt mit Radius $1 - \sqrt{|X|}$ ist also invariant und gehört zur FATOUmenge \mathcal{F}_X von f_X . Für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ gilt außerdem

$$f_X(z^{-1}) = f_X(z).$$

Damit folgt für $|z| > \frac{1}{1 - \sqrt{|X|}}$, also $|z^{-1}| < 1 - \sqrt{|X|}$ mit obiger Abschätzung

$$|f_X(z)| = |f_X(z^{-1})| < 1 - \sqrt{|X|}.$$

Also gehört auch das Äußere des Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius $(1 - \sqrt{|X|})^{-1}$ zur FATOUMenge von f_X . Wegen $\mathcal{F}_X \cap \mathcal{J}_X = \emptyset$ folgt für alle $z \in \mathcal{J}_X$ die Abschätzung

$$1 - \sqrt{|X|} \leq |z| \leq \frac{1}{1 - \sqrt{|X|}}.$$

Für die weitere Behauptung ist zu zeigen, dass beide Abschätzungen im Fall $0 < X < 1$ scharf sind. Nach Satz 2.8 ist dann $\sqrt{X} - 1$ ein Fixpunkt des Standardvertreter mit

$$|f'_X(\sqrt{X} - 1)| = \frac{2}{\sqrt{X}} - 1 > 1.$$

Er liegt offensichtlich auf dem inneren Rand von A_X und ist ein abstoßender Fixpunkt, der zur JULIAMenge gehört. Weiterhin liegt wegen

$$f_X((\sqrt{X} - 1)^{-1}) = \sqrt{X} - 1$$

auf dem äußeren Rand von A_X ein direkter Vorgänger des abstoßenden Fixpunktes, der folglich auch zu \mathcal{J}_X gehört. \square

Liegt X nahe dem im Parameterraum nicht zugelassenen Nullpunkt, so ist der markierte Fixpunkt von f_X „fast“ superattraktiv. Die beiden Randkomponenten des die JULIAMenge umfassenden Kreisringes $A_{|X|}$ liegen dann nahe am Einheitskreis. Also bewirkt die starke Attraktivität des markierten Fixpunktes, dass die JULIAMenge nur in einem schmalen Kreisring zu finden ist.

2.3 Klassifikation für \mathcal{G}_2^*

Nachdem im vorherigen Abschnitt die Elemente der Menge \mathcal{G}_2^* bezüglich der Zusammenhangseigenschaft ihrer JULIAMengen unterschieden wurden, ist es nun wünschenswert, eine weiterführende Klassifikation zu erhalten. Die Fragen, welche Elemente hyperbolisch sind und ob, wie bei der bekannten Klasse der Polynome $z^2 + q$, $q \in \mathbb{C}$, auch hier eine MANDELBROTmenge erklärt werden kann, werden beantwortet.

Die Elemente aus \mathcal{G}_2^* mit $0 < |X| < 1$ sind gerade die hyperbolischen.

Satz 2.14. *Die Menge aller hyperbolischen Elemente aus \mathcal{G}_2^* ist gegeben durch*

$$\{(f) \in \mathcal{G}_2^* : 0 < |X| < 1\}.$$

Beweis. Ist $(f) \in \mathcal{G}_2^*$ hyperbolisch, so liegen der kritische Vorgänger von ∞ und damit auch ∞ und 0 in der FATOUMenge. Da SIEGELScheiben bei hyperbolischen Funktionen nicht auftreten, ist 0 folglich attraktiv und es gilt $0 < |X| < 1$.

Ist umgekehrt $0 < |X| < 1$, so ist der Nullpunkt attraktiv. Der kritische Vorgänger von ∞ wird nach zwei Iterationen auf den Nullpunkt abgebildet, der freie kritische Punkt konvergiert unter Iteration gegen 0. Also ist $\overline{O^+(C)} \cap \mathcal{J} = \emptyset$ und (f) hyperbolisch. \square

Folgerung 2.15. *Eine Klasse $(f) \in \mathcal{G}_2^*$ ist genau dann hyperbolisch, wenn der markierte Fixpunkt attraktiv ist.*

Mit den hyperbolischen Elementen sind aber noch nicht alle Klassen aus \mathcal{G}_2^* erfasst, bei denen der markierte Fixpunkt in der FATOUMenge liegt. Weiterhin ist der Fall $|X| = 1$ und $0 \in \mathcal{F}$ möglich, bei dem der Nullpunkt ein SIEGELPUNKT für die Vertreter der Klasse ist. Der freie kritische Punkt liegt in der JULIAMenge, ist nicht präperiodisch und der Rand der SIEGELScheibe $A(0)$ liegt im Abschluss seines Vorwärtsorbits. Die FATOUMenge besteht aus der einfach zusammenhängenden SIEGELScheibe und ihren Vorgängergebieten. Die JULIAMenge ist zusammenhängend.

Beschäftigen wir uns nun mit dem Fall, dass für eine Klasse $(f) \in \mathcal{G}_2^*$ der Nullpunkt in der JULIAMenge liegt. Dann gehören mit ihm auch seine Vorgänger ∞ und c zur JULIAMenge, die nach Satz 2.9 zusammenhängend ist. Die Menge $\{|X| \geq 1\}$ ist hier das Analogon zur klassischen MANDELBROTmenge, die alle die komplexen Parameter q enthält, für die die JULIAMenge des Polynoms $z^2 + q$ zusammenhängend ist. Während die MANDELBROTmenge eher kompliziert aussieht, ist die Menge der Parameter, für die die JULIAMenge von (f_X) zusammenhängend ist, einfach das Komplement des Einheitskreises. Trotzdem lassen sich analog zu den Komponenten des Inneren der MANDELBROTmenge auch hier Bereiche im Parameterraum angeben, deren zugehörige Klassen jeweils einen (super)attraktiven Zyklus besitzen. Wir betrachten dazu

$$A := \{X \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} : (f_X) \text{ besitzt einen (super)attraktiven Zyklus}\}.$$

Für eine Klasse mit $X \in A$ liegt der kritische Vorgänger des markierten Fixpunktes in der JULIAMenge und der freie kritische Punkt konvergiert unter Iteration gegen einen (super)attraktiven Zyklus, also ist (f_X) subhyperbolisch. Aus diesem Grund werden die Zusammenhangskomponenten der Menge A subhyperbolische Komponenten genannt. Als hyperbolische Komponente wird der punktierte offene Einheitskreis bezeichnet, dessen Parameterwerte zu hyperbolischen Klassen führen. Wie bei der klassischen MANDELBROTmenge (für die dort auftretenden hyperbolischen Komponenten) kann gezeigt werden, dass zu jeder subhyperbolischen Komponente H eine feste Zyklusperiode gehört und dass die Abbildung λ , die jedem $X \in H$ den zugehörigen Multiplikator des (super)attraktiven Zyklus zuordnet, eine eigentliche Abbildung von H auf die Einheitskreisscheibe \mathbb{D} ist.

Zunächst zeigen wir für die hyperbolische Komponente $0 < |X| < 1$ eine analoge Aussage. Wegen des im Parameterraum nicht zulässigen Nullpunktes muss diese gesondert betrachtet werden.

Satz 2.16. *Für jedes $0 < |X| < 1$ besitzt (f_X) ein SCHRÖDERgebiet. Die Abbildung $\lambda : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, die jedem X den zugehörigen Multiplikator des attraktiven Fixpunktes zuordnet und 0 auf 0 abbildet, ist konform.*

Beweis. Für $0 < |X| < 1$ ist der Nullpunkt attraktiv. Somit besitzen alle zugehörigen Klassen einen attraktiven Zyklus erster Ordnung und damit ein SCHRÖDERgebiet. Der zugehörige Multiplikator ist X und damit ist λ durch die Identität $\lambda(X) = X$ beschrieben. Nimmt man in den Definitionsbereich von λ den singulären Punkt 0 hinzu, so ist $\lambda : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ konform. \square

Für die subhyperbolischen Komponenten kann der Beweis des entsprechenden Satzes im Kontext der klassischen MANDELBRÖTmenge übernommen werden (siehe [13, S. 161]). Es ist nur ein Normalitätsargument auszutauschen.

Satz 2.17. *Für jede subhyperbolische Komponente H von A gilt:*

- a) *Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $X \in H$ die Klasse (f_X) einen (super)attraktiven Zyklus der Ordnung m besitzt.*
- b) *Die Abbildung λ , die jedem X den Multiplikator des zugehörigen Zyklus von (f_X) zuordnet, ist eine eigentliche Abbildung von H auf \mathbb{D} .*

Beweis. a) Per Definition der subhyperbolischen Komponente gibt es $X^* \in H$, so dass (f_{X^*}) einen (super)attraktiven Zyklus $\alpha^* = \{z^*, \dots, f_{X^*}^{m-1}(z^*)\} \neq \{0\}$ der Länge m mit zugehörigem Multiplikator λ^* besitzt. Demnach gilt

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} (f_{X^*}^m(z) - z) \right|_{z=z^*, X=X^*} = \lambda^* - 1 \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert dann eine in einer Umgebung U von X^* definierte Funktion z mit $z(X^*) = z^*$ und $f_X^m(z(X)) = z(X)$ in U . Dadurch wird in U eine Funktion λ definiert durch

$$\lambda(X) = \left. \frac{\partial}{\partial z} f_X^m(z) \right|_{z=z(X)}.$$

Wir betrachten die Folge $(f_X^n(1))$ für $X \in H$. Wäre 1 ein Vorgänger von -1 , so wären alle kritischen Punkte präperiodisch, also $\mathcal{J} = \widehat{\mathbb{C}}$, und X läge nicht einmal in A . Damit lässt $(f_X^n(1))$ für jedes $X \in H$ den Punkt -1 , dessen Nachfolger ∞ und 0 aus, die Folge ist daher normal in H . Nun existiert $j \in \mathbb{N}$ mit

$$f_X^{nm+j}(1) \rightarrow z(X) \quad (n \rightarrow \infty)$$

in einer Umgebung von X^* , da der kritische Punkt unter Iteration gegen den (super)attraktiven Zyklus konvergiert. Nach dem Satz von VITALI ist dann $(f_X^{n_k m+j}(1))$ lokal gleichmäßig konvergent gegen $z(X)$ in H . Insbesondere ist z dort analytisch.

Angenommen, für ein X wäre $|\lambda(X)| \geq 1$. Dann existieren wegen der Gebiets-treue überabzählbar viele X mit der Eigenschaft $|\lambda(X)| > 1$. Für ein $m(X)$ gilt somit $f_X^{n_k m+j}(1) = z(X)$, da abstoßende Zyklen in der JULIAMenge liegen würden. Nach dem Identitätssatz gilt dieses dann in ganz H für festes m und j , was ein Widerspruch zu der Eigenschaft in der oben gewählten Umgebung U von X^* ist.

b) Die Abbildung λ ist regulär auf ∂H bis auf endlich viele Punkte (Singularitäten nur bei $\lambda(X) = 1$). Es ist $|\lambda(X)| < 1$ auf ∂H nicht möglich, denn sonst existiert eine ganze Umgebung um einen solchen Randpunkt mit dieser Eigenschaft, was ein Widerspruch zur Wahl von H ist. Somit ist $|\lambda(X)| = 1$ auf dem Rand von H und $\lambda : H \rightarrow \mathbb{D}$ eine eigentliche Abbildung. \square

Damit ist eine Beschreibung für alle subhyperbolischen Komponenten gefunden. Betrachten wir kurz den Rand der Komponente $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, also alle Parameter X mit $|X| = 1$. Ist $0 \in \mathcal{J}$ und $\lambda(X) = X$ keine n -te Einheitswurzel, so ist der Nullpunkt ein CREMERpunkt. Dann ist der verbleibende kritische Punkt nicht präperiodisch und beide kritischen Punkte liegen in der JULIAMenge. Die FATOUMenge ist zwangsläufig leer und es ist $\mathcal{J} = \widehat{\mathbb{C}}$. Ist $\lambda(X) = X$ eine n -te Einheitswurzel, so ist 0 ein LEAUPunkt. Die zugehörige LEAUBLume $A(0)$ besteht aus n Blättern und enthält den verbleibenden kritischen Punkt. Alle Blätter sind einfach zusammenhängend.

Für $|X| > 1$ ist der Nullpunkt ein abstoßender Fixpunkt. Der freie kritische Punkt kann dann durch einen BÖTTCHER-, SCHRÖDER-, LEAU- oder SIEGELzyklus gebunden werden. Ist das nicht der Fall, so stimmt die JULIAMenge mit der Zahlenkugel überein, wenn nämlich der freie kritische Punkt durch einen CREMERzyklus gebunden wird, er präperiodisch ist oder er ein anderweitig nicht präperiodischer Punkt der JULIAMenge ist (unter Iteration „läuft er ziellos durch \mathcal{J} “).

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen an X die JULIAMenge der Klasse $(f) \in \mathcal{G}_2^*$ ein JORDANbogen ist. Das ist der Fall, wenn die FATOUMenge ein Gebiet ist, nämlich ein Attraktionsgebiet zu einem nicht markierten Fixpunkt. Für die betreffenden X hat man folgende Aussage.

Satz 2.18. *Das Parabeläußere*

$$D := \{X \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} X > 1 - (\operatorname{Im} X)^2/4\} \subset \{X \in \mathbb{C} : |X| > 1\}$$

enthält genau die X , für die die JULIAMenge der Klasse (f_X) ein JORDANbogen

mit Endpunkten in 0 und ∞ ist. Speziell ist im Fall $X = 4$ die JULIAMenge des Standardvertreterers das Intervall $[-\infty, 0]$. Die Abbildung $\lambda : D \rightarrow \mathbb{D}$, die jedem $X \in D$ den Multiplikator des attraktiven Fixpunktes von (f_X) zuordnet, ist konform und durch

$$\lambda(X) = \frac{2}{\sqrt{X}} - 1$$

gegeben, wobei die Wurzel so gewählt ist, dass $\sqrt{1} = 1$ ist.

Beweis. Es sei $X \in D$ und $f_X(z) = Xz(z+1)^{-2}$ der Standardvertreter der zugehörigen Klasse. Wegen $0 \notin D$ sind beide Zweige der Umkehrfunktion von z^2 in dem einfach zusammenhängenden Gebiet D analytisch und es sei der Zweig gewählt mit $\sqrt{1} = 1$. Dann besitzt f neben dem Nullpunkt gemäß Satz 2.8 die nicht markierten Fixpunkte $z_0 = \sqrt{X} - 1$ und $z_1 = -\sqrt{X} - 1$ mit den Multiplikatoren

$$\lambda(z_0) = \frac{2}{\sqrt{X}} - 1, \quad \lambda(z_1) = -\frac{2}{\sqrt{X}} - 1.$$

Die Wurzel bildet die Menge D konform auf die Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ ab, die unter der Funktion $\frac{z}{z-1} - 1$ ebenfalls konform auf den Einheitskreis abgebildet wird. Damit ist z_0 attraktiv und die Abbildung $\lambda : D \rightarrow \mathbb{D}$ konform mit $\lambda(X) = \frac{2}{\sqrt{X}} - 1$. Für $X \in D$ besitzt (f_X) also einen attraktiven Fixpunkt, der den freien kritischen Punkt bindet. Das zugehörige Attraktionsgebiet $A(z_0)$ ist vollständig invariant mit $\mathcal{F} = A(z_0)$. Da nur ein kritischer Punkt in $A(z_0)$ enthalten ist, ist $A(z_0)$ einfach zusammenhängend und die JULIAMenge zusammenhängend. Sie ist also ein Dendrit und ein JORDANbogen mit Endpunkten in 0 und ∞ wegen

$$f(C \cap \mathcal{J} \cup \{0, \infty\}) = \{0, \infty\}.$$

Ist $X = 4$, so ist einer der beiden nicht markierten Fixpunkte superattraktiv. Die FATOUMenge von f_4 besteht in diesem Fall aus einem BÖTTCHERgebiet und die JULIAMenge ist ein JORDANbogen. Da f_4 mit Hilfe der Transformation $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$ zum zweiten TSCHEBYSCHEFFpolynom konjugiert ist, ist die JULIAMenge von f_4 das Intervall $T([-1, 1]) = [-\infty, 0]$. (Im Wesentlichen ist f_4 die KOEBEFunktion.) \square

Für $X \in \partial D$ ist einer der beiden nicht markierten Fixpunkte, nämlich der in obigem Beweis genannte Fixpunkt z_0 indifferent. Entweder liegt der verbleibende kritische Punkt in einer LEAUBLume mit n Blättern, die alle einfach zusammenhängend sind, oder der Abschluss seines Vorwärtsorbits enthält den Rand einer SIEGELScheibe oder er besitzt einen CREMERpunkt als Häufungspunkt. Im letzten Fall ist $\mathcal{F} = \emptyset$.

Für Parameter $X \notin \overline{D \cup \mathbb{D}}$ sind alle Fixpunkte abstoßend und es können nicht abstoßende Zyklen auftreten. Über Zyklen kleiner Periode, speziell über solche zweiter Ordnung, können konkrete Aussagen getroffen werden.

Satz 2.19. *Die Kreisscheibe $K := \{X \in \mathbb{C} : |X + \frac{3}{2}| < \frac{1}{2}\}$ enthält genau die X , für die (f_X) einen (super)attraktiven Zyklus α_X zweiter Ordnung besitzt. Die Abbildung $\lambda : K \rightarrow \mathbb{D}$, die jedem $X \in K$ den Multiplikator von α_X zuordnet, ist konform und gegeben durch*

$$\lambda(X) = -3 - \frac{4}{X}.$$

Genau die Klasse $(f_{-\frac{4}{3}})$ besitzt einen BÖTTCHERzyklus zweiter Ordnung.

Beweis. Man berechnet als Lösungen der Gleichung $f_X^2(z) = z$ neben den offensichtlichen Lösungen $0, z_0, z_1$ (Fixpunkte von f_X , siehe Beweis von Satz 2.18) zwei weitere Lösungen z_3, z_4 . Diese bilden für f_X einen Zyklus α_X zweiter Ordnung und es ist auch klar, dass es weitere Zyklen mit dieser Periode nicht geben kann. Der Multiplikator von α_X ist gegeben durch $-3 - \frac{4}{X}$. Die Abbildung $\lambda : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ mit $\lambda(X) := -3 - \frac{4}{X}$ ist konform und Urbild des Einheitskreises ist der Kreis K . Demnach besitzt für alle $X \in K \setminus \{-\frac{4}{3}\}$ die Klasse (f_X) einen attraktiven, für $X = -\frac{4}{3}$ einen superattraktiven Zyklus zweiter Ordnung. \square

Die restlichen subhyperbolischen Komponenten liegen folglich im Inneren des Komplements der Menge $\mathbb{D} \cup D \cup K$. Ist H eine subhyperbolische Komponente, die nicht mit D oder K übereinstimmt, dann existiert ein solches $m \geq 3$, dass für alle $X \in H$ die Klassen (f_X) jeweils einen (super)attraktiven Zyklus der Ordnung m besitzen. Da die Multiplikatorfunktion $\lambda : H \rightarrow \mathbb{D}$ eigentlich ist, befinden sich auf dem Rand von H gerade die Parameterwerte, die zu LEAU-, SIEGEL- oder CREMERzyklen führen.

Ein Parameter X , für den auch der freie kritische Punkt der zugehörigen Klasse präperiodisch oder nicht präperiodisch von der Art ist, dass er nicht durch einen Zyklus gebunden wird, liegt nicht auf dem Rand der hyperbolischen oder einer subhyperbolischen Komponente. Er kann bestenfalls ein Häufungspunkt der Ränder subhyperbolischer Komponenten sein. Die Frage, ob die Menge dieser Parameter innere Punkte besitzt, bleibt offen.

Die zuletzt genannte Fragestellung ist das Analogon zu einem bekannten Problem im Kontext der klassischen MANDELBROTmenge für die Polynome $z^2 + q$. Eine Komponente ihres Inneren heißt hyperbolisch, wenn diese einen Parameter q enthält, der auf einen (super)attraktiven Zyklus führt. Es ist bis heute ungeklärt, ob es auch nicht hyperbolische Komponenten gibt.

2.4 Beispiele

Beispiel 2.20. Ist $X = 1$, so ist der Nullpunkt ein LEAUPunkt der Klasse (f_1) . Die zugehörige Blume besteht aus einem einzigen Blatt und ist vollständig invariant. Die FATOUmenge stimmt in diesem Fall mit $A(0)$ überein, ist also zusammenhängend. Die JULIAMenge ist zusammenhängend, da $\mathcal{F} = A(0)$ einfach zusammenhängend ist. Also ist \mathcal{J} ein Dendrit und nach [15] sogar ein JORDANbogen.

In beliebig kleinen Umgebungen von $X = 1$ existieren sowohl Klassen mit attraktivem markierten Fixpunkt als auch solche mit attraktivem nicht markierten Fixpunkt. Die beiden Fixpunkte fallen für $X = 1$ zusammen und bilden einen zweifachen Fixpunkt, einen LEAUPunkt mit Multiplikator $\lambda = 1$. Die JULIAMenge, die für $X = 1$ ein JORDANbogen ist, „zerfällt“ beim Übergang von X ins Innere des Einheitskreises und ist dort staubförmig.

Beispiel 2.21. Im Kontext der klassischen MANDELBRÖTmenge ist ein MISIUREWICZpunkt ein solcher Parameter q , für den der kritische Nullpunkt von $z^2 + q$ präperiodisch ist. Die zugehörige JULIAMenge ist in diesem Fall ein Dendrit. Übertragen auf die Klassen aus \mathcal{G}_2^* mit zusammenhängender JULIAMenge ist hier ein MISIUREWICZpunkt ein solcher Parameterwert $X \neq 0$, so dass der freie kritische Punkt von (f_X) präperiodisch ist. Da auch der kritische Vorgänger des Nullpunktes präperiodisch ist, ist $\mathcal{J}_X = \widehat{\mathbb{C}}$. Ein spezieller MISIUREWICZpunkt ist der Parameter $X = -4$ wegen

$$-c \mapsto c \mapsto \infty \mapsto 0 \mapsto 0.$$

Beide kritischen Punkte sind präperiodisch und es ist $\mathcal{J}_{-4} = \widehat{\mathbb{C}}$. Dieser Parameter liegt nicht auf dem Rand einer subhyperbolischen Komponente.

Neben dieser Art von MISIUREWICZpunkten, bei denen der freie kritische Punkt ein Vorgänger des festgelegten kritischen Punktes und des Nullpunktes ist, gibt es noch solche, für die der freie kritische Punkt präperiodisch, aber der Nullpunkt nicht einer der endlich vielen Nachfolger ist. Hier bleibt die Frage offen, ob die JULIAMenge genau für die MISIUREWICZpunkte und die Parameterwerte, die zu CREMERpunkten führen, mit der Zahlenkugel übereinstimmt, oder ob es auch solche Parameter gibt, für die der freie kritische Punkt unter Iteration ziellos durch die JULIAMenge läuft, ohne dass der Abschluss seines Orbits einen CREMERpunkt enthält.

Beispiel 2.22. Für $X = -1$ ist der Nullpunkt ein LEAUPunkt mit Multiplikator $\lambda(0) = -1$ und (f_X) besitzt eine LEAUBLume mit zwei Blättern. Hier findet eine periodenverdoppelnde Bifurkation statt. Da -1 auf dem Rand des Einheitskreises liegt, befinden sich in beliebig kleinen Umgebungen von -1 Invarianten X , deren zugehörige Klassen ein SCHRÖDERgebiet zum attraktiven Nullpunkt und eine total unzusammenhängende JULIAMenge besitzen. Da -1 zum

Rand des Kreises K aus Satz 2.19 gehört, gibt es in beliebig kleinen Umgebungen von -1 Invarianten X , deren zugehörige Klassen einen SCHRÖDERZYKLUS der Länge 2 und eine zusammenhängende JULIAMENGE besitzen.

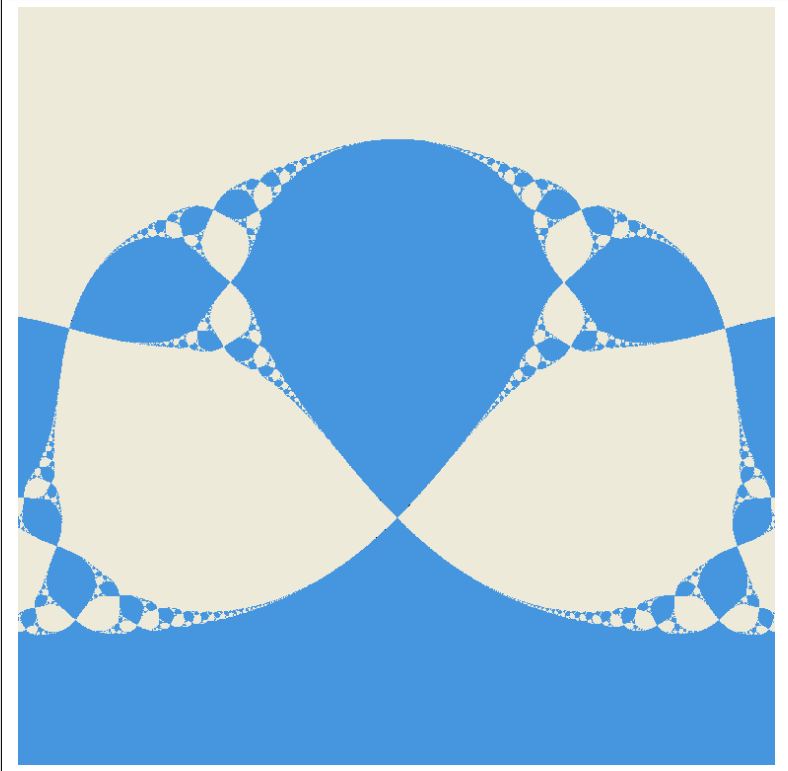


Abb. 1: Die Fatoumenge eines Vertreters von (f_{-1}) .
Das unbeschränkte helle Gebiet und das einer Lemniskatenhälfte ähnliche blaue Gebiet bilden eine Leaublume.

Nehmen wir an, dass der Parameter X reell ist, und betrachten die Veränderung der JULIAMENGE J_X bei kleiner werdendem X , beginnend bei einem solchen nahe -1 mit $X > -1$, so ist folgendes zu beobachten. Gewisse Teile der total unzusammenhängenden JULIAMENGE formen bereits erkennbar Ränder einer LEAUBLUME mit zwei Blättern, die aber erst für $X = -1$ eine solche ist. Beim Übergang zu $X < -1$ trennen sich die Blätter und formen einen SCHRÖDERZYKLUS zweiter Ordnung. Es ist zu beachten, dass diese spezielle Art der Periodenverdopplung (Fixgebiet auf zweite Periode) nur hier und nicht auch auf dem Rand des Gebietes D aus Satz 2.18 stattfindet, da die den Multiplika-

tor beschreibende Abbildung $\lambda(X) = \frac{2}{\sqrt{X}} - 1$ den dafür notwendigen Wert -1 in \mathbb{C} nicht annimmt.

Beispiel 2.23. Für $X = -2$ existiert ein LEAUzyklus α zweiter Ordnung mit Multiplikator $\lambda(\alpha) = -1$. Auch hier findet eine periodenverdoppelnde Bifurkation statt, denn in einer Umgebung von -2 in der X -Ebene befinden sich Parameterwerte, deren zugehörige Klassen JULIAMengen einerseits mit einem attraktiven Zyklus der Länge 2 andererseits mit einem attraktiven Zyklus der Länge 4 besitzen.

Beispiel 2.24. Für $X = -\frac{6}{5} \pm \frac{2}{5}i \in \partial K$ besitzen die zugehörigen Vertreter jeweils einen LEAUzyklus α zweiter Ordnung mit Multiplikator $\lambda(\alpha) = \pm i$.

3 Fixpunkte und kritische Werte

Nach der Klassifikation gewisser rationaler Funktionen zweiten Grades, die einen präperiodischen kritischen Punkt besitzen, wenden wir uns nun den rationalen Funktionen dritten Grades zu. Ausgehend von solchen Funktionen, deren JULIAMenge ein JORDANbogen ist, betrachten wir in Kapitel 4 Funktionen mit zwei Fixpunkten, die zugleich kritische Werte sind. Es existieren also zwei in einer ganz bestimmten Weise präperiodische kritische Punkte. Als Vorbereitung untersuchen wir in diesem Kapitel in einem allgemeineren Kontext solche rationalen Funktionen dritten Grades, die einen kritischen Punkt besitzen, der auf einen Fixpunkt abgebildet wird. Dabei wird nach dem dynamischen Typ des Fixpunktes unterschieden. In jedem Fall liegt ein einfacher kritischer Punkt vor, so dass der Fixpunkt sich als einfaches und den kritischen Punkt als doppeltes Urbild besitzt. Die in diesem Kapitel auftretende Funktion f sei, ohne dass dieses ständig erwähnt wird,

- 1) eine rationale Funktion dritten Grades, die
- 2) einen Fixpunkt z_0 mit kritischem Urbild c besitzt.

Es werden Aussagen über die topologischen und geometrischen Eigenschaften der JULIAMenge von f für die Fälle gesucht, dass z_0 ein attraktiver Punkt (Abschnitt 3.1) oder ein LEAUPunkt (Abschnitt 3.2) ist. Im zweiten Fall ergeben sich unterschiedliche Aussagen, falls in der zugehörigen LEAUBLume ein oder zwei kritische Punkte enthalten sind (Abschnitt 3.3). Folgendes wird bewiesen.

Im attraktiven Fall ist die JULIAMenge genau dann zusammenhängend, wenn genau zwei kritische Punkte im zugehörigen Attraktionsgebiet liegen, der kritische Vorgänger des attraktiven Fixpunktes und ein nicht präperiodischer kritischer Punkt.

Ist z_0 ein LEAUPunkt mit $\lambda(z_0) = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$, so ist \mathcal{J} zusammenhängend, falls die LEAUBLume genau einen kritischen Punkt enthält oder falls genau zwei kritische Punkte in ihr liegen und sie $2n$ Blätter besitzt. Besteht dagegen die LEAUBLume aus mindestens zwei Blättern und existiert ein Blatt, in dem zwei verschiedene kritische Punkte liegen, so ist \mathcal{J} unzusammenhängend.

3.1 Attraktive Fixpunkte mit kritischem Urbild

Ist z_0 ein attraktiver Fixpunkt, so enthält das SCHRÖDERgebiet $A(z_0)$ einen nicht präperiodischen kritischen Punkt von f . Der folgende Satz zeigt, dass mindestens zwei kritische Punkte, das kritische Urbild von z_0 und ein nicht präperiodischer kritischer Punkt, in $A(z_0)$ liegen und dass $A(z_0)$ vollständig invariant ist.

Satz 3.1. *Es sei z_0 ein attraktiver Fixpunkt von f mit kritischem Urbild. Dann ist das SCHRÖDERgebiet $A(z_0)$ vollständig invariant.*

Beweis. Für den lokalen Grad k von f im SCHRÖDERgebiet $A(z_0)$ gilt $k \geq 2$, also besitzt jeder Punkt in $A(z_0)$ mindestens zwei Urbilder in $A(z_0)$. Das gilt insbesondere für den Fixpunkt z_0 . Die drei Urbilder von z_0 unter der Funktion f dritten Grades sind z_0 selbst als einfaches Urbild und nach Voraussetzung ein kritischer Punkt c als zweifaches Urbild. Da das Urbild z_0 in $A(z_0)$ enthalten ist, aber noch mindestens ein weiteres Urbild benötigt wird, liegt auch c in $A(z_0)$, so dass sich dort alle Urbilder von z_0 befinden und der lokale Grad k in $A(z_0)$ mit dem globalen Grad von f übereinstimmt. Das bedeutet, dass $A(z_0)$ vollständig invariant ist. \square

Als Folgerung dieses Satzes können einige Aussagen festgehalten werden.

Folgerung 3.2. *Ist z_0 ein attraktiver Fixpunkt von f mit kritischem Urbild, so gelten folgende Aussagen:*

- 1) *Es befinden sich mindestens zwei kritische Punkte in $A(z_0)$.*
- 2) *Existieren weitere stabile Gebiete, so sind sie einfach zusammenhängend.*
- 3) *Es ist $\partial A(z_0) = \mathcal{J}$. Ist $A(z_0)$ einfach zusammenhängend, so ist die JULIAMenge zusammenhängend, ist f zusätzlich (sub)hyperbolisch, so ist sie eine Kurve.*

Bei der Untersuchung der Geometrie der JULIAMenge stößt man auf die Frage, ob und unter welcher Bedingung $A(z_0)$ einfach zusammenhängend ist. Die Aussage ist gesichert, wenn $A(z_0)$ genau einen kritischen Punkt enthält, aber nicht bei Existenz mehrerer nicht präperiodischer kritischer Punkte in $A(z_0)$. Liegen dort dagegen ein nicht präperiodischer kritischer Punkt und ein kritischer Vorgänger c des attraktiven Fixpunktes, so sorgt c dafür, dass in einer Urbildkomponente einer geeigneten einfach zusammenhängenden Umgebung von z_0 alle beiden in $A(z_0)$ befindlichen kritischen Punkte „eingefangen“ sind. Die Zusammenhangszahl bleibt dann bei iterierter Urbildbetrachtung gleich, was den einfachen Zusammenhang von $A(z_0)$ zur Folge hat. In allgemeinerem Kontext beschäftigt sich folgendes Lemma mit der Frage, unter welcher Voraussetzung ein SCHRÖDERgebiet $A(z_0)$ einer rationalen Funktion g , die $A(z_0)$ mit lokalem Grad d abbildet, einfach zusammenhängend ist.

Lemma 3.3. *Die rationale Funktion g besitze ein SCHRÖDERgebiet $A(z_0)$ mit lokalem Abbildungsgrad d und $d - 1$ kritischen Punkten in $A(z_0)$. Ist dann $U_0 \subset A(z_0)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $z_0 \in U_0$, $g(\bar{U}_0) \subset U_0$ und der Eigenschaft, dass die Urbildkomponente von U_0 , die den Punkt z_0 enthält, $d : 1$ auf U_0 abgebildet wird, so ist $A(z_0)$ einfach zusammenhängend.*

Beweis. Es sei U_0 das einfach zusammenhängende Gebiet mit obigen Eigenschaften. Es sei U_n die Komponente von $g^{-n}(U_0)$, die den Punkt z_0 enthält, d_n der Grad der eigentlichen Abbildung $g : U_n \rightarrow U_{n-1}$, r_n die Anzahl der kritischen Punkte in U_n und m_n die Zusammenhangszahl von U_n , die immer endlich ist, da U_0 einfach zusammenhängend ist. Wegen $g(\overline{U_0}) \subset U_0$ gilt die Aussage $\overline{U_0} \subset U_1$ und es folgt induktiv $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$. Nach Voraussetzung ist $d_1 = d$ und $r_1 \leq d - 1$, so dass mit der Formel von RIEMANN-HURWITZ

$$m_1 = r_1 - d + 2 \leq 1$$

der einfache Zusammenhang von U_1 folgt. Also ist $m_1 = 1$ und $r_1 = d - 1$. Mit der ersten Rückwärtsiteration hat man also alle im SCHRÖDERgebiet befindlichen kritischen Punkte eingefangen. Wegen $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$ bleibt in jedem Schritt die Anzahl der kritischen Punkte, der Grad der Abbildung und die Zusammenhangszahl identisch. Die einfach zusammenhängenden U_n bilden eine Ausschöpfung des Gebietes $A(z_0)$, das einfach zusammenhängend ist. \square

Satz 3.4. *Es sei z_0 ein attraktiver Fixpunkt von f mit kritischem Urbild. Das SCHRÖDERgebiet $A(z_0)$ ist genau dann einfach zusammenhängend, falls es genau zwei kritische Punkte enthält, das kritische Urbild von z_0 und einen nicht präperiodischen kritischen Punkt. Die JULIAMenge ist genau in diesem Fall zusammenhängend.*

Beweis. Das SCHRÖDERgebiet $A(z_0)$ ist nach Satz 3.1 vollständig invariant und enthält neben einem nicht präperiodischen kritischen Punkt noch den kritischen Vorgänger von z_0 , so dass mindestens zwei kritische Punkte in $A(z_0)$ liegen.

Ist $A(z_0)$ einfach zusammenhängend, so folgt für die Anzahl r der darin enthaltenen kritischen Punkte mit der Formel von RIEMANN-HURWITZ und der vollständigen Invarianz von $A(z_0)$

$$1 - 2 = 3(1 - 2) + r,$$

also $r = 2$. Die beiden genannten kritischen Punkte sind die einzigen in $A(z_0)$.

Es sei umgekehrt so, dass $A(z_0)$ genau zwei kritische Punkte $w_0 \neq w_1$ enthalte mit $f^n(w_1) \rightarrow z_0$ ($n \rightarrow \infty$) und $f(w_0) = z_0$. Dann existiert eine einfach zusammenhängende Umgebung U_0 von z_0 mit $\overline{U_0} \subset A(z_0)$, $w_1 \in \partial U_0$ und $f(\overline{U_0}) \subset U_0$ (siehe [13, S. 68]). Da $A(z_0)$ vollständig invariant ist, sind lokaler und globaler Abbildungsgrad gleich, also ist $d = 3$ (im Hinblick auf die Anwendung von Lemma 3.3). Es liegen $d - 1 = 2$ kritische Punkte in $A(z_0)$. Wegen $w_1 \in \overline{U_0}$ ist w_1 auch in der Urbildkomponente U_1 mit $z_0 \in U_1$ enthalten. Das bedeutet, dass U_1 mindestens $2 : 1$ auf U_0 abgebildet wird. Also liegen (wie bereits im Beweis von Satz 3.1 gesehen) sowohl z_0 als auch w_0 als Urbilder von z_0 in U_1 .

Damit ist $d = 3$ der lokale Abbildungsgrad von f in U_1 . Die in Lemma 3.3 vorausgesetzten Bedingungen für U_0 sind erfüllt und es folgt, dass $A(z_0)$ einfach zusammenhängend ist.

Da $A(z_0)$ vollständig invariant ist, stimmt dessen Rand mit der JULIAMenge überein. Es ist \mathcal{J} genau dann zusammenhängend, wenn $A(z_0)$ einfach zusammenhängend ist, also wenn genau zwei kritische Punkte in $A(z_0)$ liegen. \square

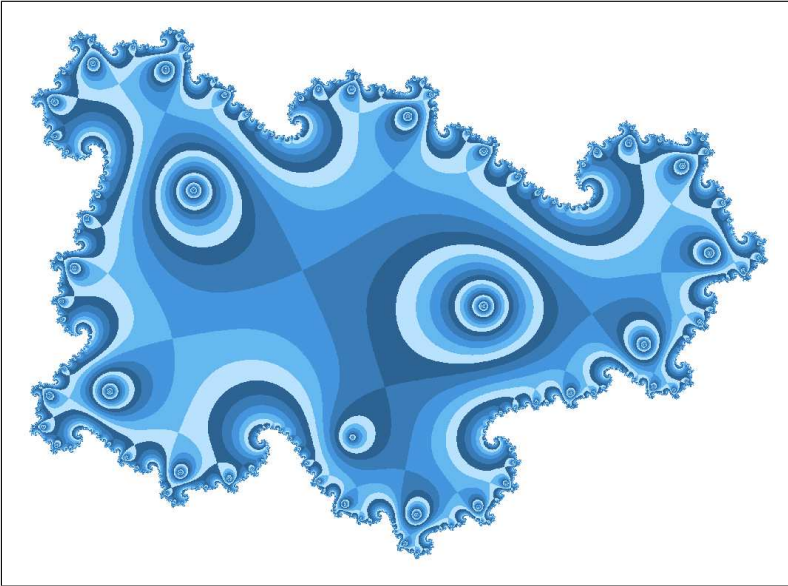


Abb. 2: Schrödergebiet mit genau zwei kritischen Punkten.

Die hier zugrunde liegende zu $2(-1+i)z(z+\frac{i}{2})(z-1)^{-2}$ konjugierte Funktion ist hyperbolisch und ihre Juliamenge ist zusammenhängend. Sie ist sogar eine Jordankurve (vgl. auch Kapitel 5.1).

Besitzt f (wie in Kapitel 4) zwei Fixpunkte mit jeweils kritischem Urbild, ist einer davon attraktiv und das zugehörige SCHRÖDERgebiet einfach zusammenhängend, so ist die Funktion zu einem gewissen Polynom quasikonform konjugiert. Bei dieser Konjugation wird das kritische Urbild des attraktiven Fixpunktes mit dem superattraktiven Fixpunkt ∞ praktisch „verschmolzen“.

Satz 3.5. *Es sei z_0 ein attraktiver Fixpunkt von f mit kritischem Urbild. Ist das SCHRÖDERgebiet $A(z_0)$ einfach zusammenhängend und existiert ein von z_0 verschiedener Fixpunkt mit kritischem Urbild, so ist f quasikonform konjugiert zu einem Polynom P der Form $P(z) = az(z-b)^2$.*

Beweis. Nach Satz 3.1 ist das SCHRÖDERgebiet $A(z_0)$ vollständig invariant und Satz 1.7 ist anwendbar. Mit der Aussage b) folgt das Gewünschte unter Berücksichtigung, dass das Polynom \tilde{Q} den Grad 0 hat, also konstant ist. \square

3.2 Leaupunkte mit kritischem Urbild

Es sei nun z_0 ein LEAUpunkt von f . Dann ist der Multiplikator von z_0 eine n -te Einheitswurzel mit minimal gewähltem n und die LEAublume $A(z_0)$ besteht aus mindestens n Blättern. Sie besitzt einen nicht präperiodischen kritischen Punkt in ihrem Inneren. Ist nur dieser eine kritische Punkt in $A(z_0)$ vorhanden, so gibt es genau n Blätter. (Wären es mehr Blätter, so gäbe es eine natürliche Zahl $m \geq 2$, so dass die Anzahl der Blätter mn ist. Die Blume zerfällt dann in m invariante Teilblumen, in denen mindestens je ein kritischer Punkt liegt. Daraus folgt, dass sich mindestens $m \geq 2$ kritische Punkte von f in $A(z_0)$ befinden.) Es sei in diesem Abschnitt immer B ein Blatt, das einen nicht präperiodischen kritischen Punkt enthält.

Zunächst ist die Lage des kritischen Vorgängers c von z_0 interessant. Da es sich um einen direkten Vorgänger von z_0 handelt, liegt c auf $\partial A(z_0)$. Weil er ein kritischer Punkt ist, befindet sich c zwingend auf dem Rand des Blattes B .

Satz 3.6. *Sei z_0 ein LEAUpunkt von f mit kritischem Urbild c . Liegt im Blatt B der LEAublume $A(z_0)$ mindestens ein kritischer Punkt, dann gilt $c \in \partial B$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass das kritische Urbild c von z_0 kein Randpunkt von B ist. Dann existieren eine Umgebung V von z_0 und eine Umgebung U von c mit $f : U \xrightarrow{2:1} V$ und der Eigenschaft $U \cap B = \emptyset$. Da V eine Umgebung des auf dem Rand von $A(z_0)$ liegenden LEAUpunktes z_0 ist, ist der Schnitt mit $A(z_0)$ und der Schnitt mit einem beliebigen Blatt der Blume nicht leer. Insbesondere existiert ein $z \in V \cap f(B)$. Da der Punkt z zu V gehört, besitzt er zwei Urbilder in U , die nach Wahl von U nicht in B liegen. Wegen $z \in f(B)$ existieren andererseits mindestens zwei weitere Urbilder in B , da B einen kritischen Punkt enthält und der lokale Abbildungsgrad k von f in B daher $k \geq 2$ erfüllt. Insgesamt besitzt z also mindestens vier Urbilder, was bei einer Funktion dritten Grades unmöglich ist. \square

Das Blatt $f(B)$ besitzt höchstens zwei Urbildkomponenten, nämlich das Blatt B und eventuell eine weitere von B verschiedene Urbildkomponente B_1 , die nicht zur LEAublume gehört. Der kritische Vorgänger von z_0 liegt nicht nur auf dem Rand von B , sondern auch auf dem Rand von B_1 . Er liegt sogar auf dem Rand jeder nicht zur LEAublume gehörenden Urbildkomponente eines beliebigen Blattes.

Satz 3.7. *Sei z_0 ein LEAUpunkt von f mit kritischem Urbild c . Ist L ein beliebiges Blatt der LEAUblume $A(z_0)$, dann ist c Randpunkt von jeder Urbildkomponente von L , die nicht Blatt von $A(z_0)$ ist.*

Beweis. Es sei L ein Blatt von $A(z_0)$. Dann sind zwei Fälle möglich:

- (1) Es existiert ein kritischer Punkt ω mit $f(\omega) \in L$.
- (2) In L liegt kein kritischer Wert von f .

Im Fall (1) liegt ω in einer Urbildkomponente von L , so dass der lokale Abbildungsgrad k von f dort $k \geq 2$ erfüllt. Ist $k = 3$, so existiert eine einzige Urbildkomponente von L , die ein Blatt ist, und es ist nichts zu zeigen. Also untersuchen wir nur den lokalen Abbildungsgrad $k = 2$. Dann existieren genau zwei Urbildkomponenten von L , das Vorgängerblatt und eine Urbildkomponente L_1 , die nicht Blatt der LEAUblume ist und konform (falls ω im Vorgängerblatt liegt) oder $2 : 1$ (im Fall $\omega \in L_1$) auf L abgebildet wird. (Eine Unterscheidung dieser „Unterfälle“ ist nicht notwendig.) Im Fall (2) gibt es genau zwei verschiedene Urbildkomponenten L_1 und L_2 , die nicht Blätter sind und konform auf L abgebildet werden.

Wir werden in beiden Fällen zeigen, dass der kritische Vorgänger c des LEAUpunktes auf dem Rand von L_1 liegt. Im Fall (2) ist damit auch der Beweis für $c \in \partial L_2$ erbracht.

Wir nehmen an, dass c nicht auf ∂L_1 liegt. Dann existieren Umgebungen V von z_0 , U_0 von z_0 und U_1 von c mit $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ und den Eigenschaften

$$\begin{aligned} f : U_0 &\xrightarrow{1:1} V, & U_0 \cap L_1 &= \emptyset, \\ f : U_1 &\xrightarrow{2:1} V, & U_1 \cap L_1 &= \emptyset. \end{aligned}$$

Die Wahl von U_0 mit $U_0 \cap L_1 = \emptyset$ ist möglich, da L_1 kein Blatt der Blume ist, und es existiert U_1 mit $U_1 \cap L_1 = \emptyset$, da nach Annahme c nicht auf dem Rand von L_1 liegt. Da V eine Umgebung des LEAUpunktes z_0 ist, ist der Durchschnitt mit einem beliebigen Blatt der zugehörigen Blume nicht leer. Insbesondere existiert ein $z \in V \cap L$.

Fall (1): Dann besitzt z ein Urbild in U_0 , welches zum Vorgängerblatt der Blume gehört. Es existieren zwei weitere Urbilder in U_1 . Liegt im Vorgängerblatt von L der kritische Punkt ω , so liegt dort ein weiteres Urbild von z (eines derer aus U_1). Das letzte Urbild bzw. die letzten zwei Urbilder im Fall $\omega \in L_1$ gehören folglich zu L_1 , was laut Konstruktion ein Widerspruch ist.

Fall (2): Es gibt ein Urbild von z in U_0 , welches zum Vorgängerblatt der Blume gehört. Zwei weitere Urbilder existieren in U_1 , von denen genau eines in L_2 liegt. Das andere liegt in L_1 , so dass man auch hier einen Widerspruch zur Konstruktion erhält. \square

Da also alle Blätter den LEAUpunkt auf ihrem Rand gemeinsam haben, besitzen auch bestimmte Urbildkomponenten der Blätter den gemeinsamen Randpunkt c . Den Blättern kann eine gewisse Anordnung um den Punkt z_0 zugeordnet werden. Diese überträgt sich dabei auf ihre Urbildkomponenten, auf deren Rand c liegt. Um das später zeigen zu können, ist es zunächst nötig, eine Sortierung der Blätter um den LEAUpunkt mathematisch zu formulieren. Dazu werden wir zuerst die Sortierung von JORDANbögen, die einen gemeinsamen Endpunkt besitzen, definieren.

Definition 3.8. Die JORDANbögen $J_1, \dots, J_n : [0, 1] \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ mit $J_k(0) = z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ für alle $k = 1, \dots, n$ heißen um z_0 sortiert, wenn $\varphi_1 < \dots < \varphi_n$ existieren mit $\varphi_n - \varphi_1 < 2\pi$ und

$$\arg(J_k(t) - z_0) \rightarrow \varphi_k \quad (t \rightarrow 0).$$

Die Blätter der LEAublume können dann auf natürliche Weise mittels ihrer Attraktionsachsen um z_0 sortiert werden. Es muss nur entschieden werden, welches Blatt das erste in der Sortierung sein soll. Wir wählen hier ein solches, dessen direktes Vorgängerblatt den Randpunkt c besitzt. Es sei für die folgende Betrachtung o.B.d.A. $z_0 = 0$. Der Multiplikator des Nullpunktes sei weiterhin eine n -te Einheitswurzel (n minimal).

Es sei B ein Blatt der Blume, dessen Rand c enthält, und $B_1 := f(B)$. Das Blatt B_1 ist ein Fixgebiet der Iterierten f^n und es existiert dort eine Achse, längs derer f^n attraktiv wirkt. Es sei $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$ so gewählt, dass für $z \in B_1$

$$\arg f^{nk}(z) \rightarrow \varphi_1 \quad (k \rightarrow \infty)$$

gilt. Dann folgt mit den Winkeln $\varphi_j := \varphi_1 + (j-1)\frac{2\pi}{n}$

$$\arg f^{nk}(z) \rightarrow \varphi_j \quad (k \rightarrow \infty)$$

für jedes $z \in B_j$ ($j = 2, \dots, n$). Außerdem hat jede dieser Achsen nahe 0 genau mit einem der Blätter einen nicht leeren Schnitt. Wir fassen die Achsen als JORDANbögen $A_j : [0, 1] \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ auf und definieren

$$A_j(t) := tr_0 e^{i\varphi_j}, \quad t \in [0, 1],$$

für $j = 1, \dots, n$. Dann gilt $A_j(0) = 0$ für alle j und $\arg A_j(t) = \varphi_j$ für alle $t > 0$. Offensichtlich ist $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n$ und $\varphi_n - \varphi_1 = \frac{n-1}{n} 2\pi < 2\pi$. Gemäß Definition 3.8 sind A_1, \dots, A_n um den Nullpunkt sortierte JORDANbögen. Es lässt sich ein $r_0 > 0$ so wählen, dass $A_j(t) \in B_j$ für alle $t \in (0, 1]$ gilt. So wird den Blättern B_1, \dots, B_n eine Sortierung um den Nullpunkt zugeordnet.

Definition 3.9. Die Blätter L_1, \dots, L_n einer LEAublume heißen sortiert um den LEAUpunkt z_0 , wenn für die Winkel φ_j der Attraktionsachsen in L_j mit $\varphi_n - \varphi_1 < 2\pi$ gilt

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n.$$

Durch Liften der Attraktionsachsen in den Blättern lässt sich auch deren Urbildkomponenten, die den Randpunkt c besitzen, eine Sortierung um c zuordnen. Der Nullpunkt ist ein kritischer Wert mit einer punktierten Umgebung, in der keine kritischen Werte von f liegen. Daher kann r_0 so gewählt werden, dass auf den Trägern der A_j keine kritischen Werte mit Ausnahme von 0 liegen.

Da c ein einfacher kritischer Punkt von f ist, können wir r_0 so klein wählen, dass wegen des lokalen Abbildungsverhaltens eine Umgebung U von c und eine konforme Abbildung $g : U \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| < \sqrt{r_0}\}$ existiert mit $g'(c) \neq 0$ und $g(z) = \sqrt{f(z)}$ für $z \in U$. Betrachten wir zunächst die Abbildung $h(z) := z^2$. Die Urbildkomponenten der Träger der A_j unter h sind wieder Träger von JORDANbögen $S_j : [0, 1] \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Mit den Winkeln $\psi_j := \frac{\varphi_1}{2} + (j-1)\frac{\pi}{n}$ sind für $j = 1, \dots, 2n$ die S_j definiert durch

$$S_j(t) := t\sqrt{r_0}e^{i\psi_j}, \quad t \in [0, 1].$$

Dann gilt $S_j(0) = 0$ für alle j und offensichtlich auch $\psi_1 < \dots < \psi_{2n}$. Wegen

$$\psi_{2n} - \psi_1 = (2n-1)\frac{\pi}{n} = 2\pi - \frac{\pi}{n} < 2\pi$$

sind S_1, \dots, S_{2n} um den Nullpunkt sortierte JORDANbögen. Bezeichnet $|\cdot|$ den Träger eines JORDANbogens, so gilt für jedes $j = 1, \dots, n$ die Aussage

$$h(|S_j|) = h(|S_{n+j}|) = |A_j|.$$

Werden die Träger der S_j mit der konformen Abbildung g geliftet, so erhält man Träger von JORDANbögen $J_k : [0, 1] \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ mit $J_k(t) = g^{-1}(S_k(t))$. Es gilt für jedes k zunächst $J_k(0) = g^{-1}(0) = c$. Der kleinere Winkel, der von den Trägern von S_k und S_{k+1} aufgespannt wird, beträgt $\frac{\pi}{n}$. Wegen $g'(c) \neq 0$ ist g in c winkelerhaltend, so dass der kleinere Winkel zwischen den Trägern von J_k und J_{k+1} auch $\frac{\pi}{n}$ beträgt. Da das (mod n) für beliebiges $k = 1, \dots, n$ gilt, überträgt sich die Sortierung der S_k auf die der J_k , so dass J_1, \dots, J_{2n} um c sortiert sind. Betrachten wir nun für die Blätter alle Urbildkomponenten, die c als Randpunkt besitzen, dann liegt jedes $J_k(0, 1)$ in genau einer dieser Urbildkomponenten, so dass man für sie eine Sortierung $B_1^{-1}, \dots, B_{2n}^{-1}$ um c erhält. Es sei dabei $B_1^{-1} = B$. Dann gilt nach Konstruktion

$$f(B_j^{-1}) = f(B_{n+j}^{-1}) = B_j$$

für $j = 1, \dots, n$. Damit ist für die LEAUBLätter der Begriff „Sortierung ihrer Urbildkomponenten“ definiert und folgender Satz bewiesen.

Satz 3.10. *Sei z_0 ein LEAUPunkt von f mit kritischem Urbild c und sei B_1, \dots, B_n eine Sortierung der Blätter der zugehörigen LEAUBLume $A(z_0)$ um z_0 .*

Dann existiert für die Blätter eine Sortierung $B_1^{-1}, \dots, B_{2n}^{-1}$ ihrer Urbildkomponenten, auf deren Rand c liegt, mit $f(B_1^{-1}) = B_1$, und es gilt für $j = 1, \dots, n$

$$f(B_j^{-1}) = f(B_{n+j}^{-1}) = B_j.$$

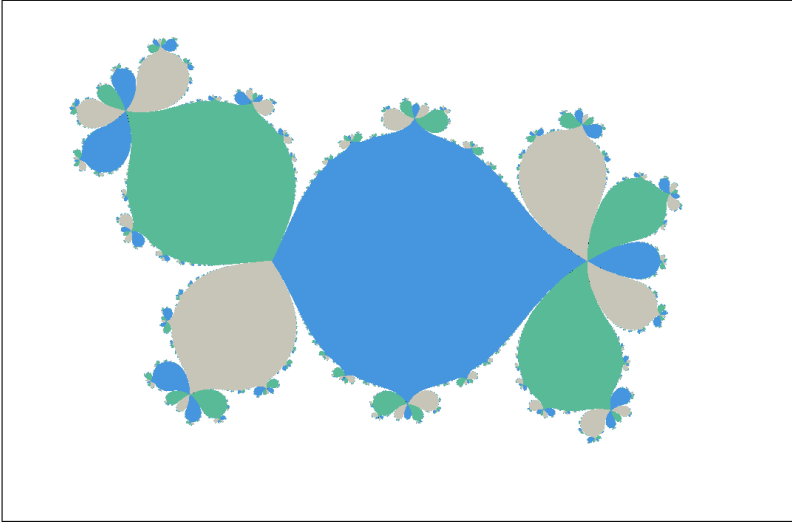


Abb. 3: Leaublume mit drei Blättern.

Der kritische Vorgänger c des Leaupunktes z_0 liegt auf dem Rand des blauen Blattes, das einen kritischen Punkt enthält, und auf dem Rand der nicht zur Leaublume gehörenden Urbildkomponenten der Blätter. Die Farbzunordnung verdeutlicht die Sortierungen um z_0 bzw. c .

Mit Hilfe dieser Sortierungen um z_0 und um den kritischen Vorgänger c lässt sich nun zeigen, dass ein Blatt, das durch f konform abgebildet wird, den Punkt c nicht als Randpunkt besitzt.

Satz 3.11. *Sei z_0 ein LEAUpunkt von f mit kritischem Urbild c . Wird ein Blatt konform abgebildet, so ist c kein Randpunkt dieses Blattes.*

Beweis. Wir nehmen an, es gibt ein Blatt B mit $c \in \partial B$ und $f : B \xrightarrow{1:1} f(B)$. Dann ist das Blatt $f(B)$ von B verschieden, da sonst B als Fixgebiet zum LEAUpunkt z_0 einen kritischen Punkt enthalten müsste und B nicht konform abgebildet würde. (Die Voraussetzungen bedingen, dass der Multiplikator von z_0 mindestens eine zweite Einheitswurzel ist.) Es existieren dann Umgebungen V von z_0 , U_0 von z_0 und U_1 von c mit $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ und den Eigenschaften

$$f : U_0 \xrightarrow{1:1} V, \quad f : U_1 \xrightarrow{2:1} V.$$

Der Schnitt von V mit dem Blatt $f(B)$ ist nicht leer, so dass ein Punkt $z \in f(B) \cap V$ existiert, der zunächst genau ein Urbild in U_0 besitzt. Dieses liegt im Blatt B . Da B konform auf $f(B)$ abgebildet wird, existieren in B keine weiteren Urbilder von z . Seine beiden anderen Urbilder liegen also in Urbildkomponenten von $f(B)$, die c als Randpunkt besitzen. Es sei $B_1^{-1}, \dots, B_{2n}^{-1}$ für die Blätter eine Sortierung ihrer Urbildkomponenten, auf deren Rand c liegt, mit $B_1^{-1} = B$. Nach Satz 3.10 sind B und B_{n+1}^{-1} die beiden einzigen Urbildkomponenten von $f(B)$. Da in B keine weiteren Urbilder existieren, liegen die beiden verbleibenden Urbilder von z in B_{n+1}^{-1} . Das lokale Abbildungsverhalten von f um c gibt aber vor, dass sich ein Urbild in $B_1^{-1} = B$ und eines in B_{n+1}^{-1} befindet, was ein Widerspruch ist. \square

3.3 Leaublumen mit ein oder zwei kritischen Punkten

Es sei z_0 weiterhin ein LEAUpunkt von f . Existiert in der zugehörigen LEAublume $A(z_0)$ neben dem zwingend notwendigen nicht präperiodischen kritischen Punkt kein weiterer, so sind alle Blätter einfach zusammenhängend. Es ergibt sich mit den Sätzen 3.6 und 3.11 aus dem vorherigen Abschnitt zunächst die folgende Aussage.

Satz 3.12. *Sei z_0 ein LEAUpunkt von f mit kritischem Urbild c . Enthält die LEAublume $A(z_0)$ genau einen kritischen Punkt im Blatt B , dann sind alle Blätter einfach zusammenhängend und B ist das einzige Blatt mit Randpunkt c .*

Nimmt man noch die Aussage von Satz 3.7 hinzu, dann gibt es genau ein Blatt, an dessen Rand diejenigen Urbildkomponenten aller Blätter hängen, die selbst kein Blatt sind. Dass der Punkt c auf allen Urbildkomponenten eines Blattes liegt, gilt nur für das Blatt, in dem sich der kritische Wert befindet.

Folgerung 3.13. *Sei z_0 ein LEAUpunkt von f mit kritischem Urbild c . Enthält die LEAublume $A(z_0)$ genau einen kritischen Punkt ω und ist L ein beliebiges Blatt, dann ist c Randpunkt aller Urbildkomponenten*

- 1) von L , die nicht Blatt von $A(z_0)$ sind,
- 2) des Blattes von $A(z_0)$, das $f(\omega)$ enthält.

Ist speziell $\lambda(z_0) = 1$, so besteht die LEAublume $A(z_0)$ aus einem Blatt. Dann liegt c sowohl auf dem Rand von $A(z_0)$, als auch auf dem Rand der von $A(z_0)$ verschiedenen Urbildkomponenten von $A(z_0)$, wenn denn solche existieren. (Das ist der Fall, wenn der in $A(z_0)$ liegende kritische Punkt einfach ist.)

Weiterhin erhält man eine Aussage über die JULIAMenge. Aus dem einfachen Zusammenhang der Blätter folgt zunächst der Zusammenhang ihrer Ränder und des Randes der LEAublume $A(z_0)$, da z_0 auf dem Rand aller Blätter liegt.

Die folgende Information über die Lage der Urbilder von z_0 unter f bringt dann eine weiterführende Zusammenhangaussage.

Lemma 3.14. *Sei z_0 ein LEAUPunkt von f mit kritischem Urbild c . Enthält die LEAUBLUME $A(z_0)$ genau einen kritischen Punkt, so liegen alle Urbilder von z_0 unter der Abbildung f^{n+1} in der Menge $\partial A^{-n}(z_0) := \bigcup_{j=0}^n f^{-j}(\partial A(z_0))$.*

Beweis. Die Aussage wird per vollständiger Induktion gezeigt.

$n = 0$: Die Urbilder von z_0 unter f sind z_0 und das kritische Urbild c . Nach Lemma 3.13 liegt c auf dem Rand von $A(z_0)$. Da das für z_0 trivial ist, liegen alle Urbilder von z_0 auf $\partial A(z_0)$.

$n \rightarrow n + 1$: Nach Induktionsvoraussetzung liegen die Urbilder $z_0, z_1, \dots, z_{3^n-1}$ von z_0 unter der Iterierten f^n in $\partial A^{-n+1}(z_0)$. Damit befinden sich die Urbilder $z_0, z_1, \dots, z_{3^n-1}, z_{3^n}, \dots, z_{3^{n+1}-1}$ von z_0 unter der Iterierten f^{n+1} auf dem Rand von $A^{-n}(z_0)$. \square

Da die Vereinigung der LEAUBLUME mit allen Vorgängergebieten eine rückwärtsinvariante Vereinigung stabiler Gebiete ist, stimmt der Abschluss des Randes dieser Vereinigung mit der JULIAMENGE überein und man hat folgende Aussage.

Satz 3.15. *Sei z_0 ein LEAUPunkt von f mit kritischem Urbild. Enthält die LEAUBLUME $A(z_0)$ genau einen kritischen Punkt, dann ist die JULIAMENGE von f zusammenhängend.*

Beweis. Die Blätter der LEAUBLUME sind nach Satz 3.12 einfach zusammenhängend und besitzen daher zusammenhängende Ränder. Damit ist auch $\partial A(z_0)$ zusammenhängend, da alle Randkomponenten den LEAUPunkt gemeinsam haben. Nach Lemma 3.14 liegen alle Urbilder von z_0 unter der Abbildung f^{n+1} in $\partial A^{-n}(z_0)$. Es folgt induktiv aus dem Zusammenhang von $\partial A(z_0)$, dass alle $f^{-j}(\partial A(z_0))$ und damit alle $\partial A^{-n}(z_0)$ zusammenhängend sind. Wegen

$$\mathcal{J} = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-j}(\partial A(z_0))}$$

und der Tatsache, dass mit einer Menge auch ihr Abschluss zusammenhängend ist, ergibt sich schließlich der Zusammenhang der JULIAMENGE. \square

Existieren in $A(z_0)$ genau zwei kritische Punkte, die dann zwingend nicht präperiodisch sind, so besteht $A(z_0)$ entweder aus n oder $2n$ Blättern. Hier sind drei unterschiedliche Fälle denkbar je nach Lage der beiden kritischen Punkte innerhalb der LEAUBLUME. Es sei B_1, \dots, B_n bzw. B_1, \dots, B_{2n} eine Sortierung der Blätter um z_0 und es sei $\lambda(z_0) = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$.

- 1) Die beiden kritischen Punkte liegen in demselben Blatt. Dann besteht $A(z_0)$ aus n Blättern B_1, \dots, B_n und $(\text{mod } n)$ gilt

$$f(B_j) = B_{j+k} \quad (j = 1, \dots, n).$$

- 2) Die beiden kritischen Punkte liegen in verschiedenen Blättern. Hier sind zwei Unterfälle möglich.

- a) Es besitzt $A(z_0)$ genau n Blätter B_1, \dots, B_n und $(\text{mod } n)$ gilt

$$f(B_j) = B_{j+k} \quad (j = 1, \dots, n).$$

- b) Es besitzt $A(z_0)$ genau $2n$ Blätter B_1, \dots, B_{2n} und $(\text{mod } 2n)$ gilt

$$f(B_j) = B_{j+2k} \quad (j = 1, \dots, 2n).$$

Hier sind die Blätter der Blume sicher einfach zusammenhängend.

Auch in diesen Fällen ist die Lage des kritischen Vorgängers c von z_0 bekannt. Wie schon im vorherigen Abschnitt bewiesen wurde, liegt c genau dann auf dem Rand eines Blattes, wenn dieses mindestens einen kritischen Punkt enthält. Unabhängig davon, ob die beiden kritischen Punkte in verschiedenen Blättern liegen oder nicht, c liegt auf dem Rand eines jeden Blattes, das einen kritischen Punkt enthält. Im Fall 2b) kann wegen des Zusammenhangs der Ränder der Blätter analog zu Satz 3.15 auf den Zusammenhang der JULIAMenge geschlossen werden. Denn besitzt die zugehörige LEAUBLume $2n$ Blätter, so zerfällt sie in zwei invariante Teilblumen $A_1(z_0)$ und $A_2(z_0)$, die jeweils genau einen kritischen Punkt enthalten. Zwar liegen dabei keine echten LEAUBLumen vor, doch lassen sich die Beweise der Sätze über LEAUBLumen mit genau einem kritischen Punkt hier übertragen. So kann analog zu Satz 3.15 der Zusammenhang von

$$W_j := \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-j}(\partial A_j(z_0))$$

für $j = 1, 2$ gezeigt werden. Die Vereinigung $W_1 \cup W_2$ ist zusammenhängend, da beide Mengen den LEAUPunkt z_0 gemeinsam haben. Schließlich ist die JULIAMenge $\mathcal{J} = W_1 \cup W_2$ zusammenhängend. Somit ist folgender Satz gezeigt.

Satz 3.16. *Es sei z_0 ein LEAUPunkt von f mit $\lambda(z_0) = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ und kritischem Urbild. Besitzt die LEAUBLume $2n$ Blätter und liegen in ihr genau zwei kritische Punkte, so ist die JULIAMenge zusammenhängend.*

In diesem Fall liegen die kritischen Punkte zwingend in verschiedenen Blättern. Befinden sie sich in demselben Blatt und besitzt $A(z_0)$ mindestens zwei Blätter, so kann ausgeschlossen werden, dass die Blätter der LEAUBLume einfach zusammenhängend sind. Damit ist die JULIAMenge unzusammenhängend.

Satz 3.17. *Es sei z_0 ein LEAUPunkt von f mit kritischem Urbild c . Enthält die aus mindestens zwei Blättern bestehende LEAUBLUME $A(z_0)$ genau zwei kritische Punkte, die beide in einem gemeinsamen Blatt liegen, dann sind alle Blätter ∞ -fach zusammenhängend und die JULIAMENGE ist unzusammenhängend.*

Beweis. Wir nehmen an, dass das Blatt B , das die beiden kritischen Punkte der LEAUBLUME enthält, einfach zusammenhängend ist. Eine Anwendung der Formel von RIEMANN-HURWITZ zeigt, dass B auf das Nachfolgeblatt mit dem globalen Grad von f abgebildet wird. Das Nachfolgeblatt $f(B) \neq B$ besitzt also genau eine Urbildkomponente, nämlich B . Es sei $B_1^{-1}, \dots, B_{2n}^{-1}$ für die Blätter eine Sortierung ihrer Urbildkomponenten, die c als Randpunkt besitzen, mit $B_1^{-1} = B$. Nach Satz 3.10 sind B und B_{n+1}^{-1} die beiden Urbildkomponenten von $f(B)$. Es ergibt sich ein Widerspruch, da B_1^{-1} und B_{n+1}^{-1} verschieden sind. \square

Wir sammeln alle über den Zusammenhang von \mathcal{J} getroffenen Aussagen.

Folgerung 3.18. *Es sei z_0 ein LEAUPunkt von f mit $\lambda(z_0) = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ und kritischem Urbild. Dann ist die JULIAMENGE zusammenhängend, wenn eine der folgenden Voraussetzungen für die LEAUBLUME $A(z_0)$ erfüllt ist:*

- 1) *Es existiert genau ein kritischer Punkt in $A(z_0)$.*
- 2) *Es existieren genau zwei kritische Punkte in $A(z_0)$, die $2n$ Blätter besitzt.*

4 Funktionen dritten Grades

Das Ziel in diesem Kapitel ist die Beschreibung einer Menge von rationalen Funktionen dritten Grades, die gewisse präperiodische kritische Punkte besitzen. Ausgehend von der notwendigen Bedingung für solche Funktionen, deren JULIAMengen JORDANbögen sind, wird in Abschnitt 4.1 die Menge der Funktionen vom Grad $d = 3$ untersucht, die zwei Fixpunkte mit jeweils kritischem Urbild besitzen. Die Fixpunkte werden durch eine die Dynamik erhaltende Transformation in die Fixpunkte 0 und ∞ überführt. Solche Funktionen lassen sich in Äquivalenzklassen einordnen und es entsteht die Menge \mathcal{G}_3^* aller dieser Äquivalenzklassen. Jeder dieser Klassen können wir in Abschnitt 4.2 eindeutige Invarianten X und Y zuordnen, die bei der Klassifikation im Kapitel 5 eine entscheidende Rolle spielen. In Abhängigkeit der Invarianten werden in Abschnitt 4.3 Aussagen über die Multiplaktoren der markierten Fixpunkte gemacht, ehe im Abschnitt 4.4 eine spezielle Klasse in \mathcal{G}_3^* vorgestellt wird, in der verallgemeinerte BLASCHKEprodukte enthalten sind.

4.1 Definitionen und einleitende Sätze

Wir wollen rationale Funktionen f dritten Grades erfassen, deren JULIAMengen JORDANbögen sind. Für ein solches f liegen notwendigerweise zwei kritische Punkte in der JULIAMenge, und es existieren $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$ mit

$$f(\mathcal{J} \cap C \cup \{a, b\}) = \{a, b\}.$$

Die in \mathcal{J} liegenden kritischen Punkte sind also präperiodisch und haben daher auf die Dynamik keinen Einfluss. Dabei können a, b einen Zyklus zweiter Ordnung bilden oder sie sind beide Fixpunkte. Wir verzichten nun auf die Bedingung, dass kritische Punkte in \mathcal{J} liegen, und fordern nur, dass zwei kritische Punkte auf verschiedene Fixpunkte a, b abgebildet werden, die dann notwendigerweise nicht superattraktiv sind. Werden solche Funktionen betrachtet, so wird auch eine Teilmenge der Funktionen erfasst, deren JULIAMenge ein JORDANbogen ist. Eine Funktion dritten Grades besitzt im Allgemeinen vier verschiedene Fixpunkte (nur bei der Existenz von LEAUpunkten mit Multiplikator $\lambda = 1$ ist das nicht der Fall). Daher werden zur Unterscheidung a, b markierte Fixpunkte genannt, während solche, die nicht mit a oder b übereinstimmen, nicht markierte Fixpunkte heißen. Da eine Funktion f mit beliebig vorgegebenen markierten Fixpunkten zu einer Funktion mit den markierten Fixpunkten $0, \infty$ und derselben Dynamik konjugiert ist (siehe Satz 4.3), wird die Betrachtung auf Funktionen mit den markierten Fixpunkten 0 und ∞ verlagert.

Definition 4.1. Es sei \mathcal{H}_3 die Menge aller rationalen Funktionen f dritten Grades, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

- 1) f besitzt nicht-superattraktive *markierte* Fixpunkte $z_1 \neq z_2$.
- 2) f besitzt kritische Punkte $c_1 \neq c_2$ mit dem Abbildungsverhalten

$$c_j \xrightarrow{f} z_j, \quad j = 1, 2.$$

Weiterhin sei \mathcal{G}_3 die Menge aller $f \in \mathcal{H}_3$ mit $z_1 = 0$ und $z_2 = \infty$.

Folgerung 4.2. *Es sind z_1, z_2, c_1, c_2 von $f \in \mathcal{H}_3$ paarweise verschieden.*

Beweis. Dass die beiden Fixpunkte verschieden sind und die beiden kritischen Punkte nicht übereinstimmen, ist eine Forderung der Bedingungen 1) und 2). Wäre $c_1 = z_j$ oder $c_2 = z_j$ für ein j , so wäre z_j ein kritischer, also superattraktiver Fixpunkt. \square

Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{H}_3$ gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{G}_3$, die zu f konjugiert ist und damit dieselbe Dynamik besitzt.

Satz 4.3. *Ist $f \in \mathcal{H}_3$, so existiert eine Funktion $g \in \mathcal{G}_3$ mit $f \sim g$.*

Beweis. Sind z_1, z_2 die beiden nicht superattraktiven Fixpunkte der Funktion f , so sei T eine MÖBIUSTRANSFORMATION mit $T(0) = z_1$ und $T(\infty) = z_2$. Die konjugierte Funktion $g := T^{-1} \circ f \circ T$ besitzt die Fixpunkte 0 und ∞ sowie kritische Punkte $T^{-1}(c_1) \neq T^{-1}(c_2)$, die auf 0 bzw. ∞ abgebildet werden. Beide Fixpunkte sind nicht superattraktiv, da z_1 und z_2 dies nicht sind. Also liegt g in \mathcal{G}_3 und es gilt $f \sim g$. \square

Eine Aussage über die Gestalt der Funktionen aus \mathcal{G}_3 ist schnell gefunden.

Satz 4.4. *Jede rationale Funktion $f \in \mathcal{G}_3$ lässt sich darstellen in der Form*

$$f(z) = az \left(\frac{z - c_1}{z - c_2} \right)^2$$

mit komplexen Parametern $a, c_1, c_2 \neq 0, c_1 \neq c_2$.

Beweis. Der Nullpunkt und sein kritischer Vorgänger c_1 sind die einzigen Nullstellen, der Punkt ∞ und sein kritischer Vorgänger die einzigen Polstellen von f . Nach bekannten Sätzen über Null- und Polstellen erhält man die Darstellung $f(z) = z(z - c_1)^2(z - c_2)^{-2}g(z)$ mit einer ganzen, beschränkten Funktion g , die nach dem Satz von LIOUVILLE konstant ist. Diese Konstante a kann nicht den Wert 0 annehmen, und es gilt $c_1, c_2 \neq 0$ sowie $c_1 \neq c_2$ wegen Folgerung 4.2. \square

Definition 4.5. Es sei \mathcal{P} der Parameterraum von \mathcal{G}_3 , also

$$\mathcal{P} := \{(a, c_1, c_2) \in \mathbb{C}^3 : a \neq 0, c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, c_1 \neq c_2\}.$$

Die Aussagen von Satz 4.3 und Satz 4.4 ergeben dann die folgende Darstellungsmöglichkeit für die Mengen \mathcal{G}_3 und \mathcal{H}_3 unter Verwendung von \mathcal{P} .

Folgerung 4.6. *Die Mengen \mathcal{G}_3 und \mathcal{H}_3 lassen sich darstellen durch*

$$\mathcal{G}_3 = \{g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} : g(z) = az(z - c_1)^2(z - c_2)^{-2}, (a, c_1, c_2) \in \mathcal{P}\},$$

$$\mathcal{H}_3 = \{f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} : f \sim g, g \in \mathcal{G}_3\}.$$

Bei der Suche nach Aussagen über die Dynamik und die Geometrie der JULIAMengen der Funktionen der Menge \mathcal{H}_3 reicht also die Betrachtung der Menge \mathcal{G}_3 aus, da solche Aussagen für konjugierte Elemente übereinstimmen.

Auch in der Menge \mathcal{G}_3 gibt es Elemente, die dieselbe Dynamik besitzen und daher zusammengefasst werden können. Dazu verwenden wir solche MÖBIUS-Transformationen T , dass für $f \in \mathcal{G}_3$ auch $g := T^{-1} \circ f \circ T$ wieder in \mathcal{G}_3 liegt. Die Konjugierte g besitzt wie f die markierten Fixpunkte 0 und ∞ , die durch T folglich entweder jeweils auf sich abgebildet oder vertauscht werden. Solche Transformationen enthält gerade die in der Definition 1.2 beschriebene Menge M_3 , die durch Drehstreckungen und Drehstauchungen lz ($l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) und die Inversion z^{-1} erzeugt wird. Die Konjugation $\overset{M_3}{\sim}$ ist gemäß Satz 1.1 eine Äquivalenzrelation, durch die Klassen definiert sind, die nun betrachtet werden.

Definition 4.7. Für $f \in \mathcal{G}_3$ sei

$$(f) := \{g \in \mathcal{G}_3 : f \overset{M_3}{\sim} g\}$$

die Äquivalenzklasse von f bezüglich der Konjugation $\overset{M_3}{\sim}$ und es sei

$$\mathcal{G}_3^* := \{(f) : f \in \mathcal{G}_3\}$$

die Menge aller Äquivalenzklassen.

4.2 Invarianten der Äquivalenzklassen

Eine Aussage über Invarianten für die Elemente von \mathcal{G}_3^* macht folgender Satz.

Satz 4.8. *Für eine Klasse $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ sind $X \neq 0, 1$ und Y mit*

$$X := \frac{c_1}{c_2} = (c_1, c_2, 0, \infty), \quad (1)$$

$$Y := a \frac{c_1}{c_2} + \frac{1}{a} \frac{c_2}{c_1} = aX + \frac{1}{aX} = 2J(aX) \quad (2)$$

ein vollständiges Invariantensystem. (Dabei bezeichnet (w_1, w_2, w_3, w_4) das Doppelverhältnis der paarweise verschiedenen Punkte $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ und J die JOUKOWSKIabbildung.)

Beweis. Verschiedene Vertreter eines Elements aus \mathcal{G}_3^* sind zueinander konjugiert mit Hilfe einer MÖBIUSTransformation aus M_3 . Zu betrachten sind also die Transformationen $T_l(z) = lz$ ($l \neq 0$) und $S(z) = z^{-1}$.

Sei f ein Vertreter eines beliebigen, aber dann festgehaltenen Elements aus \mathcal{G}_3^* mit den Koeffizienten a, c_1, c_2 . Die Koeffizienten der Funktion, die durch Konjugation von f mit T_l bzw. S entsteht, seien jeweils mit $\tilde{a}, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ bezeichnet.

Konjugiert man f mit T_l , so erhält man wegen

$$T_l^{-1} \circ f \circ T_l(z) = \frac{1}{l} a l z \left(\frac{lz - c_1}{lz - c_2} \right)^2 = a z \left(\frac{z - \frac{c_1}{l}}{z - \frac{c_2}{l}} \right)^2$$

die neuen Koeffizienten $\tilde{a} = a, \tilde{c}_1 = \frac{c_1}{l}$ und $\tilde{c}_2 = \frac{c_2}{l}$. Dann sind X, Y wegen

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2} &= \frac{\frac{c_1}{l}}{\frac{c_2}{l}} = \frac{c_1}{c_2}, \\ \tilde{a} \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2} + \frac{1}{\tilde{a}} \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1} &= a \frac{c_1}{c_2} + \frac{1}{a} \frac{c_2}{c_1} \end{aligned}$$

invariant unter Konjugation mit der Transformation T_l .

Bei der Konjugation mit S erhält man wegen

$$S^{-1} \circ f \circ S(z) = \left(a \frac{1}{z} \left(\frac{\frac{1}{z} - c_1}{\frac{1}{z} - c_2} \right)^2 \right)^{-1} = \frac{1}{a} \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 z \left(\frac{z - \frac{1}{c_2}}{z - \frac{1}{c_1}} \right)^2$$

als neue Koeffizienten $\tilde{a} = \frac{1}{a} \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2, \tilde{c}_1 = \frac{1}{c_2}$ und $\tilde{c}_2 = \frac{1}{c_1}$. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2} &= \frac{\frac{1}{c_2}}{\frac{1}{c_1}} = \frac{c_1}{c_2}, \\ \tilde{a} \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2} + \frac{1}{\tilde{a}} \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1} &= \frac{1}{a} \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \frac{c_1}{c_2} + a \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \frac{c_2}{c_1} = a \frac{c_1}{c_2} + \frac{1}{a} \frac{c_2}{c_1} \end{aligned}$$

sind X, Y auch invariant unter Konjugation mit der Inversion S .

Also existiert zu jeder Klasse aus \mathcal{G}_3^* ein wohldefiniertes Paar (X, Y) . Weil für $f \in \mathcal{G}_3$ das Koeffiziententripel (a, c_1, c_2) in \mathcal{P} liegt, sind für X die Werte 0 (wegen $c_1 \neq 0$) und 1 (wegen $c_1 \neq c_2$) ausgeschlossen. (Man beachte, dass die Ausschlüsse $a \neq 0, c_2 \neq 0$ in \mathcal{P} sich nicht auf den (X, Y) -Raum übertragen.)

Umgekehrt ist zu zeigen, dass zu vorgegebenen X und Y ein eindeutiges Element aus \mathcal{G}_3^* existiert. Aus X, Y resultieren Koeffizienten a, c_1, c_2 , die nicht eindeutig bestimmt sind, doch müssen die zugehörigen Funktionen in derselben Klasse liegen.

Bei festem a ist die Klasse aus \mathcal{G}_3^* eindeutig festgelegt durch $c_1 := X$ und $c_2 := 1$. Denn zu beliebigem komplexen $\alpha \neq 0$ ist die Funktion f_α mit den Koeffizienten $c_1 = \alpha X$ und $c_2 = \alpha$ konjugiert zu der Funktion f mit den Koeffizienten $c_1 = X, c_2 = 1$ vermöge der Transformation T_α .

Der Koeffizient a berechnet sich wegen $Y = aX + \frac{1}{aX}$ aus der Gleichung

$$(aX)^2 - Y(aX) + 1 = 0.$$

Für die beiden Lösungen w_1, w_2 der Gleichung $w^2 - Yw + 1 = 0$ gilt

$$w_1 w_2 = 1,$$

so dass für die zugehörigen Parameter $a_j = \frac{w_j}{X}$, $j = 1, 2$, der Zusammenhang

$$a_2 = \frac{w_2}{X} = \frac{1}{w_1 X} = \frac{1}{a_1 X^2}$$

besteht. Die beiden Funktionen

$$f_j = a_j z \left(\frac{z - X}{z - 1} \right)^2, \quad j = 1, 2,$$

gehören zu derselben Klasse aus \mathcal{G}_3^* vermöge der Transformation $T_X \circ S$ wegen

$$\begin{aligned} f_2(z) &= a_2 z \left(\frac{z - X}{z - 1} \right)^2 = \frac{1}{a_1 X^2} z \left(\frac{1 - \frac{X}{z}}{1 - \frac{1}{z}} \right)^2 = \frac{1}{a_1} z \left(\frac{\frac{X}{z} - 1}{\frac{X}{z} - X} \right)^2 \\ &= X \left(a_1 \frac{X}{z} \left(\frac{\frac{X}{z} - X}{\frac{X}{z} - 1} \right)^2 \right)^{-1} = \frac{X}{f_1 \left(\frac{X}{z} \right)} \\ &= S^{-1} \circ T_X^{-1} \circ f_1 \circ T_X \circ S(z). \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung des Satzes. □

Damit ergibt sich für die Menge \mathcal{G}_3^* der folgende Parameterraum.

Definition 4.9. Der zur Menge \mathcal{G}_3^* gehörende Parameterraum sei mit \mathcal{P}^* bezeichnet. Dann ist

$$\mathcal{P}^* = \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2 : X \neq 0, 1\}.$$

In den folgenden Untersuchungen wird je nach Problemstellung der Parameterraum \mathcal{P} von \mathcal{G}_3 oder der Parameterraum \mathcal{P}^* von \mathcal{G}_3^* zugrunde gelegt.

Will man zu gegebenen X und Y eine Funktion f mit $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ finden, so

ist aus dem Beweis von Satz 4.8 klar, dass die Parameter $c_1 = X$, $c_2 = 1$ und $a = Y_1 X^{-1}$ gewählt werden können, wobei Y_1 eine beliebige Lösung der Gleichung $w^2 - Yw + 1 = 0$ ist. Die Frage bleibt, ob die Wahl von Y_1 präzisiert werden kann. Sind beide Lösungen der Gleichung vom Betrage her nicht gleich, so sei Y_1 die betragskleinste Lösung. In diesem Fall ist mit $Y_1 Y_2 = 1$ auch klar, dass $|Y_1| < 1$ ist. Aus dem gleichen Grund tritt der Fall $|Y_1| = |Y_2|$ genau dann auf, wenn beide Lösungen auf der Einheitskreislinie liegen. Für $j = 1, 2$ gilt

$$Y = Y_j + \frac{1}{Y_j} = 2J(Y_j).$$

Die Einheitskreislinie wird durch die JOUKOWSKIAbbildung auf das Intervall $[-1, 1]$ abgebildet, so dass genau für $Y \in [-2, 2]$ die beiden Lösungen betragsgleich sind. Genauer sind die Urbilder eines Punktes aus $[-2, 2]$ unter $2J$ konjugiert komplex, so dass im vorliegenden Fall die Wahl von Y_1 mit $\text{Im} Y_1 \geq 0$ eindeutig ist. Also ist zu vorgegebenen Invarianten ein $f \in \mathcal{G}_3$ wie folgt wählbar.

Folgerung 4.10. *Bei vorgegebenem $(X, Y) \in \mathcal{P}^*$ ist f mit den Koeffizienten*

$$c_1 = X, \quad c_2 = 1, \quad a = \frac{Y_1}{X}$$

ein Vertreter der zugehörigen Klasse in \mathcal{G}_3^* . Dabei ist Y_1 eine beliebige Lösung der Gleichung $w^2 - Yw + 1 = 0$, die konkreter wie folgt gewählt werden kann:

- a) *Im Fall $Y \notin [-2, 2]$ sei Y_1 die betragskleinste Lösung. Dann ist $|Y_1| < 1$.*
- b) *Für $Y \in [-2, 2]$ sei Y_1 die Lösung mit $\text{Im} Y_1 \geq 0$. Hier ist $|Y_1| = 1$.*

Legt man den Parameter $Y_1 \neq 0$ für \mathcal{G}_3^* zugrunde, so reicht als Definitionsbereich für Y_1 der Abschluss des oberen Einheitshalbkreises (ohne den Nullpunkt) vereinigt mit dem offenen unteren Einheitshalbkreis aus, um alle Elemente $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ genau einmal zu erreichen. Dieser „halbabgeschlossene“ und punktierte Einheitskreis ist homöomorph zur Sphäre S_2 , aus der ein Punkt (zum Beispiel der Südpol) herausgenommen wird. Mit der Folgerung 4.10 lässt sich ein Standardvertreter bestimmen.

Definition 4.11. Es sei Y_1 die gemäß den Bedingungen a) und b) in Folgerung 4.10 ausgewählte Lösung der Gleichung $w^2 - Yw + 1 = 0$. Dann heißt

$$f_{X,Y}(z) = \frac{Y_1}{X} z \left(\frac{z - X}{z - 1} \right)^2$$

der Standardvertreter der Klasse $(f_{X,Y}) \in \mathcal{G}_3^*$.

4.3 Die Multiplikatoren der markierten Fixpunkte

Ist $f \in \mathcal{G}_3$, so besitzt mit $S(z) = z^{-1}$ die zu f Konjugierte $g = S^{-1} \circ f \circ S$ die Dynamik von f , wobei die beiden markierten Fixpunkte 0 und ∞ ihre Multiplikatoren getauscht haben. Damit ist die Reihenfolge der markierten Fixpunkte unerheblich, was bedeutet, dass bei der Untersuchung der verschiedenen dynamischen Fixpunkttypen symmetrisch auftretende Fälle nicht unterschieden werden müssen. Ehe wir uns weiter mit dieser Symmetrie beschäftigen, machen wir Aussagen über die Gestalt der beiden Multiplikatoren in den verschiedenen Parameterräumen.

Satz 4.12. *Ist $f \in \mathcal{G}_3$, so sind die Multiplikatoren der markierten Fixpunkte gegeben durch*

$$\lambda(0) = a \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2, \quad \lambda(\infty) = \frac{1}{a}.$$

Beweis. Für $f \in \mathcal{G}_3$ berechnet man die Ableitungen

$$f'(z) = a \frac{(z - c_1)(z^2 - 3c_2z + c_1z + c_1c_2)}{(z - c_2)^3},$$

$$\frac{d}{dz} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{a} \frac{(c_2z - 1)(1 - 3c_2z + c_1z + c_1c_2z^2)}{(c_1z - 1)^3}.$$

Damit erhält man als Multiplikatoren der markierten Fixpunkte

$$\lambda(0) = f'(0) = a \frac{c_1^2 c_2}{c_2^3} = a \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2, \quad \lambda(\infty) = \left. \frac{d}{dz} f\left(\frac{1}{z}\right) \right|_{z=0} = \frac{1}{a}.$$

□

Zusammen mit den Ergebnissen der Folgerung 4.10 lassen sich die Multiplikatoren des Standardvertreters einer vorgegebenen Klasse aus \mathcal{G}_3^* ausgedrückt im Parameterraum \mathcal{P}^* wie folgt bestimmen.

Satz 4.13. *Die Multiplikatoren der markierten Fixpunkte des Standardvertreters $f_{X,Y}$ einer Klasse aus \mathcal{G}_3^* sind gegeben durch*

$$\lambda(0) = Y_1 X, \quad \lambda(\infty) = \frac{X}{Y_1}.$$

Beweis. Wir betrachten $f_{X,Y}$ mit den Koeffizienten $c_1 = X, c_2 = 1, a = Y_1 X^{-1}$, wobei Y_1 die gemäß den Bedingungen a) und b) aus Folgerung 4.10 ausgewählte Lösung der Gleichung $w^2 - Yw + 1 = 0$ ist. Mit Satz 4.12 erhält man dann

$$\lambda(0) = aX^2 = Y_1 X, \quad \lambda(\infty) = \frac{1}{a} = \frac{X}{Y_1}.$$

□

Gegenstand des Beweises ist die Folgerung 4.10, die eine Aussage über die Menge \mathcal{G}_3^* macht. Ein Beweis kann aber auch ohne direkte Kenntnis über \mathcal{G}_3^* und nur unter Zuhilfenahme der Definition der Zahlen X und Y aus Satz 4.8 und den Gleichungen aus Satz 4.12 geführt werden. Addiert und multipliziert man diese beiden Gleichungen und ersetzt a, c_1, c_2 durch X, Y gemäß (1) und (2), so erhält man zunächst

$$\lambda(0) + \lambda(\infty) = X \left(aX + \frac{1}{aX} \right) = XY, \quad (3)$$

$$\lambda(0) \lambda(\infty) = X^2. \quad (4)$$

Die beiden Gleichungen verdeutlichen die Symmetrie von 0 und ∞ in \mathcal{G}_3^* . Aus (3) folgt $\lambda(0) = XY - \lambda(\infty)$ (ist also XY klein, so sind $\lambda(0)$ und $\lambda(\infty)$ bis auf das Vorzeichen nahezu identisch) und nach Einsetzen in (4)

$$\lambda^2(\infty) - XY\lambda(\infty) + X^2 = 0.$$

Mit $w := \frac{\lambda(\infty)}{X}$ erhält man die bekannte Gleichung $w^2 - Yw + 1 = 0$. Sind Y_1, Y_1^{-1} die Lösungen dieser Gleichung, so folgt $\lambda(\infty) = XY_1$ oder $\lambda(\infty) = XY_1^{-1}$.

Im ersten Fall erhält man mit (4)

$$\lambda(0) = \frac{X^2}{\lambda(\infty)} = \frac{X}{Y_1} = XY_1^{-1}.$$

Im zweiten Fall erhält man analog $\lambda(0) = XY_1$.

In einer Klasse $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ befinden sich Paare von Funktionen, die sich dadurch unterscheiden, dass die Multiplikatoren der beiden markierten Fixpunkte vertauscht sind. Soll einem markierten Fixpunkt von (f) eine Eigenschaft zugewiesen werden, so ist es unerheblich, welcher der beiden Fixpunkte ausgewählt wird. Wir halten diese Symmetrieaussage in folgendem Satz fest.

Satz 4.14. *Gehören f, g zu derselben Klasse in \mathcal{G}_3^* , so stimmen die Multiplikatoren der markierten Fixpunkte überein oder sie sind vertauscht.*

Beweis. Wegen $f \stackrel{M_3}{\sim} g$ besitzen die beiden Funktionen f und g einen Fixpunkt mit übereinstimmendem Multiplikator. Beide besitzen die Fixpunkte 0 und ∞ , auf deren Multiplikatoren die Transformationen aus M_3 unterschiedlich wirken. Während die Transformation λz auf jeweils übereinstimmende Multiplikatoren der markierten Fixpunkte führt, bewirkt z^{-1} deren Austausch. \square

Sind f und g Funktionen aus \mathcal{G}_3 mit übereinstimmenden Multiplikatoren der markierten Fixpunkte, so ist klar, dass sie im gleichen Element von \mathcal{G}_3^* liegen können. Es gibt aber noch eine weitere Möglichkeit, so dass die Umkehrung von Satz 4.14 nicht allgemein gültig ist.

Satz 4.15. *Sind $f, g \in \mathcal{G}_3$ mit $\lambda_f(0) = \lambda_g(0)$ und $\lambda_f(\infty) = \lambda_g(\infty)$, so gehören beide Funktionen zu demselben Element von \mathcal{G}_3^* oder es gilt*

$$X_f = -X_g, \quad Y_f = -Y_g.$$

Beweis. Mit den Lösungen Y_1, Y_1^{-1} der Gleichung $w^2 - Y_f w + 1 = 0$ und $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_1^{-1}$ der Gleichung $w^2 - \tilde{Y}_g w + 1 = 0$ sowie der Voraussetzung gilt

$$Y_1 X_f = \tilde{Y}_1 X_g, \quad \frac{X_f}{Y_1} = \frac{X_g}{\tilde{Y}_1}$$

nach Satz 4.13. Eine Multiplikation der beiden Gleichungen ergibt die Aussage $X_f^2 = X_g^2$. Dann ist $X_f = \pm X_g$ und damit $Y_1 = \pm \tilde{Y}_1$. Es folgt

$$Y_f = Y_1 + \frac{1}{Y_1} = \pm \tilde{Y}_1 \pm \frac{1}{\tilde{Y}_1} = \pm Y_g.$$

Sind $X_f = X_g$ und $Y_f = Y_g$, so liegen f und g beide in $(f) \in \mathcal{G}_3^*$. □

Damit ist klar, dass die Multiplikatoren der markierten Fixpunkte nicht eine in \mathcal{G}_3^* liegende Klasse festlegen, da es zwei mögliche Klassen gibt.

Werden neben den beiden markierten Fixpunkten noch nicht markierte Fixpunkte gesucht, so ist zunächst klar, dass aufgrund des dritten Grades der Funktionen aus \mathcal{G}_3 außer im Fall $a = 1$ zwei weitere Fixpunkte existieren. Es kann gezeigt werden, dass zu vorgegebenem Multiplikator $\lambda \neq 1$ und vorgegebenem X genau ein Y existiert, so dass alle Vertreter der Klasse mit diesen Invarianten einen nicht markierten Fixpunkt mit Multiplikator λ besitzen.

Satz 4.16. *Zu $\lambda \neq 1$ und $X \neq 0, 1$ existiert genau ein Y , so dass die zugehörige Klasse $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ einen nicht markierten Fixpunkt mit Multiplikator λ besitzt.*

Beweis. Für $z \neq 0, 1, X$ ist die Ableitung des Standardvertreters $f = f_{X,Y}$ der Klasse $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{Y_1(z-X)}{X(z-1)^3} P_2(z) = z \frac{Y_1(z-X)^2}{X(z-1)^2} \frac{P_2(z)}{z(z-X)(z-1)} \\ &= f(z) \frac{P_2(z)}{z(z-X)(z-1)}. \end{aligned}$$

Dabei ist P_2 ein Polynom zweiten Grades mit Führungskoeffizient 1 und konstantem Glied X . Gilt nun $f(z) = z$ und $f'(z) = \lambda$, so folgt

$$\lambda = \frac{P_2(z)}{(z-X)(z-1)}.$$

Wegen $\lambda \neq 1$ lässt sich diese Gleichung umformen zu $z^2 + a_1 z + X = 0$ (mit geeignetem $a_1 \in \mathbb{C}$, das von X und λ abhängt). Hier existieren genau zwei Lösungen $z_0, \zeta_0 \neq 0$ mit $z_0 \zeta_0 = X$. Dazu gibt es eindeutig bestimmte Y_{1,z_0}, Y_{1,ζ_0} gemäß der Gleichung $f(z) = z$, die auf Klassen $(f), (g) \in \mathcal{G}_3^*$ mit $f(z_0) = z_0$ und $g(\zeta_0) = \zeta_0$ führen. Dann gilt

$$\begin{aligned} Y_{1,z_0} &= X \frac{(z_0 - 1)^2 (\zeta_0)^2}{(z_0 - X)^2 (\zeta_0)^2} = X \frac{(z_0 \zeta_0 - \zeta_0)^2}{(z_0 \zeta_0 - X \zeta_0)^2} \\ &= X \frac{(X - \zeta_0)^2}{(X - X \zeta_0)^2} = \frac{1}{X} \frac{(\zeta_0 - X)^2}{(\zeta_0 - 1)^2} \\ &= \frac{1}{Y_{1,\zeta_0}} \end{aligned}$$

und folglich $Y_{1,z_0} Y_{1,\zeta_0} = 1$. Diese Werte für Y_1 sind also die beiden Lösungen der Gleichung $w^2 - Yw + 1$ mit $Y = Y_{1,z_0} + Y_{1,\zeta_0}$, so dass $f, g \in (f)$ folgt. \square

4.4 Beispiel einer in \mathcal{G}_3^* enthaltenen Funktionenklasse

Wir betrachten für $c \neq 0$ verallgemeinerte BLASCHKEPRODUKTE der Form

$$b(z) = e^{i\alpha} z \left(\frac{z - c}{1 - \bar{c}z} \right)^2 = \frac{e^{i\alpha}}{\bar{c}^2} z \left(\frac{z - c}{z - \frac{1}{\bar{c}}} \right)^2.$$

Es ist $b \in \mathcal{G}_3$ mit $a = e^{i\alpha} \bar{c}^{-2}$, $c_1 = c$ und $c_2 = \bar{c}^{-1}$. Für $(b) \in \mathcal{G}_3^*$ gilt dann im Parameterraum \mathcal{P}^*

$$X = |c|^2 > 0, \quad Y = 2J \left(\frac{e^{i\alpha}}{\bar{c}^2} |c|^2 \right).$$

Dabei darf c vom Betrage her nicht 1 sein, da sonst $X = 1$ ist. Die Multiplikatoren der markierten Fixpunkte sind gegeben durch

$$\lambda(\infty) = e^{-i\alpha} \bar{c}^2, \quad \lambda(0) = e^{i\alpha} c^2 = \overline{\lambda(\infty)}.$$

Für gewöhnliche BLASCHKEPRODUKTE ist $|c| < 1$ und somit

$$0 < X < 1, \quad Y \in [-2, 2].$$

Die beiden markierten Fixpunkte sind in diesem Fall attraktiv. Ist $|c| > 1$, so ist $X > 1$, $Y \in [-2, 2]$ und beide markierten Fixpunkte sind abstoßend.

5 Klassifikation für die Menge \mathcal{G}_3^*

Für die in Kapitel 4 definierte Menge \mathcal{G}_3^* wird eine Klassifikation angestrebt. Eine Eigenschaft, die für eine Funktion nach Konjugation mit einer MÖBIUS-Transformation erhalten bleibt und die daher für alle Vertreter einer Klasse $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ erfüllt ist, wird im Folgenden als Eigenschaft von (f) bezeichnet. So ist zum Beispiel von Interesse, ob ein markierter Fixpunkt von (f) attraktiv, ob (f) hyperbolisch oder ihre JULIAMenge zusammenhängend ist.

Es werden Aussagen gewonnen, für welche Bereiche in der Parametermenge \mathcal{P}^* die markierten Fixpunkte der zugehörigen Klassen attraktiv, indifferent oder abstoßend und für welche die Klassen hyperbolisch sind (Abschnitt 5.1). Um eine Menge von Parameterwerten angeben zu können, so dass die JULIAMengen der zugehörigen Klassen JORDANbögen sind, wird ein bestimmter Schnitt durch \mathcal{P}^* mit solchen Parametern konstruiert, die auf zusammenfallende freie kritische Punkte führen (Abschnitt 5.2). In Abschnitt 5.3 werden Klassen vorgestellt, die ARNOL'D-HERMAN-Ringe besitzen, bei denen die JULIAMenge also unzusammenhängend, aber nicht total unzusammenhängend ist. Abschließend folgen in Abschnitt 5.4 Aussagen über topologische und geometrische Eigenschaften der JULIAMenge von Klassen aus \mathcal{G}_3^* in Abhängigkeit von dem dynamischen Typ der markierten Fixpunkte.

5.1 Hyperbolische Klassen

Die Invariante Y ist mit Hilfe der JOUKOWSKIAbbildung definiert, die Kreislinien in Ränder von Ellipsen überführt. Daher werden bei den folgenden Untersuchungen bestimmte Ellipsen- und Kreisringflächen vorkommen, für die eine abkürzende Schreibweise eingeführt wird.

Definition 5.1. Für $r < 1$ seien die offene Kreisringfläche A_r mit den Radien r und r^{-1} und die offene Ellipsenfläche E_r definiert durch

$$E_r := \{z \in \mathbb{C} : (b \operatorname{Re} z)^2 + (a \operatorname{Im} z)^2 < a^2 b^2, a = r^{-1} + r, b = r^{-1} - r\},$$
$$A_r := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < r^{-1}\}.$$

Außerdem sei $E_1 = [-2, 2]$ die ausgeartete „Ellipse“ im Fall $r = 1$.

Damit findet man zu gegebenem $Y \in \mathbb{C}$ eine Beschreibung für die Lage der Lösungen der Gleichung $z^2 - Yz + 1 = 0$.

Satz 5.2. Sei $r < 1$ und $Y \in \mathbb{C}$. Die Lösungen der Gleichung $z^2 - Yz + 1 = 0$ liegen für $Y \in E_r$ im offenen Kreisring A_r . Ist $Y \notin E_r$, so liegt in jeder der beiden Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus A_r$ je eine der zwei Lösungen.

Beweis. Für die beiden Lösungen Y_1, Y_2 der Gleichung $z^2 - Yz + 1 = 0$ gilt

$$Y = Y_j + \frac{1}{Y_j} = 2J(Y_j).$$

Dabei ist J die JOUKOWSKI-Abbildung und es ist $Y_2 = Y_1^{-1}$. Das Urbild von E_r unter $2J$ ist der offene Kreisring A_r um den Nullpunkt mit den Radien r und r^{-1} , der $2:1$ auf E_r abgebildet wird. Das Urbild von $\mathbb{C} \setminus E_r$ besteht aus den zwei Zusammenhangskomponenten $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ und $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r^{-1}\}$, die jeweils $1:1$ abgebildet werden. Es folgt die Behauptung. \square

Mit der Beschreibung der Multiplikatoren der markierten Fixpunkte (Satz 4.13) und mit Satz 5.2 erhält man eine Aussage darüber, unter welcher Voraussetzung beide markierten Fixpunkte attraktiv sind, und damit auch eine Aussage darüber, unter welcher Voraussetzung eine Klasse (f) hyperbolisch ist.

Satz 5.3. *Die beiden markierten Fixpunkte einer Klasse $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ sind genau für $|X| < 1, Y \in E_{|X|}$ attraktiv.*

Beweis. Sind 0 und ∞ des Standardvertreterers $f_{X,Y}$ attraktiv, so folgt

$$|\lambda(0)| = |Y_1 X| < 1, \quad |\lambda(\infty)| = \left| \frac{X}{Y_1} \right| < 1$$

mit Satz 4.13. Es ist dann $|X| < |Y_1| < |X|^{-1}$ und damit $|X| < 1$. Für Y außerhalb der Ellipsenfläche $E_{|X|}$ gilt $|Y_1^{-1}| \geq |X|^{-1}$ nach Satz 5.2 und damit $|Y_1^{-1} X| \geq 1$, was im Widerspruch zur Attraktivität des markierten Fixpunktes ∞ steht. Also folgt $|X| < 1$ und $Y \in E_{|X|}$.

Umgekehrt liegen nach Satz 5.2 für $|X| < 1$ und $Y \in E_{|X|}$ beide Lösungen Y_1, Y_1^{-1} im Kreisring mit den Radien $|X|$ und $|X|^{-1}$. Es gilt $|Y_1| < |X|^{-1}$ und $|Y_1^{-1}| < |X|^{-1}$, also sind 0 und ∞ attraktiv. \square

Für $|X| < 1$ und $Y \in \partial E_{|X|}$ ist einer der markierten Fixpunkte indifferent wegen $|Y_1^{-1}| = |X|^{-1}$, der andere wegen $|Y_1| = |X| < |X|^{-1}$ attraktiv. Ist $|X| = 1$ und $Y \in E_1$, so sind beide markierten Fixpunkte indifferent.

Die Frage, unter welcher Voraussetzung eine Klasse aus \mathcal{G}_3^* hyperbolisch ist, ist mit Satz 5.3 praktisch schon beantwortet, denn eine Klasse ist genau dann hyperbolisch, wenn die Fixpunkte 0 und ∞ attraktiv sind.

Satz 5.4. *Eine Klasse $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ ist genau dann hyperbolisch, wenn beide markierten Fixpunkte attraktiv sind.*

Beweis. Ist (f) hyperbolisch, so liegen beide präperiodischen kritischen Punkte in der FATOU-Menge und somit auch die beiden Fixpunkte 0 und ∞ . Diese sind

attraktiv, da SIEGELpunkte bei hyperbolischen Funktionen nicht auftreten.

Sind umgekehrt 0 und ∞ attraktiv, so binden sie je einen der beiden freien kritischen Punkte, so dass der Vorwärtsorbit aller kritischen Punkte der JULIAMenge fern bleibt und (f) hyperbolisch ist. \square

Zusammen mit Satz 5.3 kann die Menge der hyperbolischen Klassen in \mathcal{G}_3^* konkret angegeben werden. Es fällt auf, dass bei der analogen Aussage für \mathcal{G}_2^* auch die Bedingung $|X| < 1$ auftaucht. Jedoch sind die Aussagen insofern nicht vergleichbar, da die hyperbolischen Elemente in \mathcal{G}_3^* eine zusammenhängende JULIAMenge besitzen, während die JULIAMenge eines hyperbolischen Elements zweiten Grades total unzusammenhängend ist.

Folgerung 5.5. *Die Menge aller hyperbolischen Elemente aus \mathcal{G}_3^* ist*

$$\{(f) \in \mathcal{G}_3^* : |X| < 1, Y \in E_{|X|}\}.$$

Da in diesem Fall mit den Sätzen aus Kapitel 3 die zugehörigen Attraktionsgebiete der markierten Fixpunkte vollständig invariant und einfach zusammenhängend sind, ist die JULIAMenge nicht nur zusammenhängend, sie ist sogar eine JORDANKurve.

Folgerung 5.6. *Für $|X| < 1$, $Y \in E_{|X|}$ ist die JULIAMenge der zugehörigen Klasse $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ eine JORDANKurve.*

Beweis. Nach Folgerung 5.5 ist die Klasse $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ mit $|X| < 1$, $Y \in E_{|X|}$ hyperbolisch und deren markierte Fixpunkte sind nach Satz 5.4 attraktiv. Die Attraktionsgebiete $A(0)$ und $A(\infty)$ sind nach Satz 3.1 vollständig invariant und, da jeweils genau zwei kritische Punkte in ihnen liegen, nach Satz 3.4 einfach zusammenhängend. Die FATOUMenge besteht also aus zwei vollständig invarianten SCHRÖDERgebieten, (f) ist hyperbolisch und \mathcal{J} ist als Rand der beiden SCHRÖDERgebiete eine JORDANKurve (siehe [13, S. 137]). \square

Eine zu Satz 5.3 analoge Aussage ergibt sich in dem Fall, dass beide markierten Fixpunkte abstoßend sind.

Satz 5.7. *Die beiden markierten Fixpunkte einer Klasse $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ sind genau für $|X| > 1$, $Y \in E_{|X|^{-1}}$ abstoßend.*

Beweis. Sind 0 und ∞ des Standardvertreterers $f_{X,Y}$ abstoßend, so folgt

$$|\lambda(0)| = |Y_1 X| > 1, \quad |\lambda(\infty)| = \left| \frac{X}{Y_1} \right| > 1$$

mit Satz 4.13. Es ist dann $|X| > |Y_1| > |X|^{-1}$ und damit $|X| > 1$. Für Y außerhalb der Ellipsenfläche $E_{|X|^{-1}}$ gilt $|Y_1| \leq |X|^{-1}$ und damit $|Y_1 X| \leq 1$, was

im Widerspruch dazu steht, dass der markierte Fixpunkt 0 abstoßend ist. Also folgt $|X| > 1$ und $Y \in E_{|X|^{-1}}$.

Umgekehrt liegen nach Satz 5.2 für $|X| > 1$ und $Y \in E_{|X|^{-1}}$ beide Lösungen Y_1, Y_1^{-1} im Kreisring mit den Radien $|X|$ und $|X|^{-1}$. Es gilt $|Y_1| > |X|^{-1}$ und $|Y_1^{-1}| > |X|^{-1}$. Also sind 0 und ∞ abstoßend. \square

Für $|X| > 1$ und $Y \in \partial E_{|X|^{-1}}$ ist wegen $|Y_1| = |X|^{-1}$ einer der markierten Fixpunkte indifferent, der andere wegen $|Y_1^{-1}| = |X| > |X|^{-1}$ abstoßend.

Folgerung 5.8. *Eine Klasse $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ besitzt genau dann einen indifferenten markierten Fixpunkt, wenn*

$$Y \in \partial E_{\min\{|X|, |X|^{-1}\}}$$

gilt. Für $|X| < 1$ ist der zweite markierte Fixpunkt attraktiv, für $|X| > 1$ abstoßend, für $|X| = 1$ sind beide Fixpunkte indifferent.

Für weitere Überlegungen ist auch eine Aussage nützlich, unter welcher Voraussetzung mindestens ein markierter Fixpunkt attraktiv ist.

Folgerung 5.9. *Eine Klasse $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ besitzt genau dann einen attraktiven markierten Fixpunkt, wenn eine der beiden folgenden Eigenschaften erfüllt ist.*

- 1) $|X| < 1$.
- 2) $|X| \geq 1$ und $Y \notin \overline{E_{|X|^{-1}}}$.

5.2 Jordanbögen und zusammenfallende kritische Punkte

Wir suchen solche Klassen aus \mathcal{G}_3^* , deren JULIAMengen JORDANbögen sind. Hinreichend dafür ist, dass das mit der FATOUMenge übereinstimmende stabile Gebiet ein einfach zusammenhängendes BÖTTCHER- oder SCHRÖDERgebiet ist und dass $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$ existieren mit

$$f(\mathcal{J} \cap C \cup \{a, b\}) = \{a, b\}.$$

Mindestens einer der beiden Punkte a, b ist einer der markierten Fixpunkte, denn andernfalls wären alle kritischen Punkte präperiodisch und die JULIAMenge stimmte mit $\widehat{\mathbb{C}}$ überein. Damit können a und b keinen Zyklus zweiter Ordnung bilden und es sind folglich beides Fixpunkte. Zwei Konstellationen für die Menge $\{a, b\}$ sind dabei zu unterscheiden. Sie enthält einen nicht markierten Fixpunkt oder es ist $\{a, b\} = \{0, \infty\}$.

Gehört ein nicht markierter Fixpunkt zu $\{a, b\}$, so liegt ein markierter Fixpunkt in \mathcal{F} . Er ist ein attraktiver Fixpunkt, dessen Attraktionsgebiet den zweiten freien kritischen Punkt enthält. Dann stimmt die FATOUMenge mit dem SCHRÖDERgebiet überein und die JULIAMenge ist ein JORDANbogen mit Endpunkten

im verbleibenden markierten Fixpunkt und besagtem freien Fixpunkt.

Stimmt die Menge der markierten Fixpunkte mit $\{a, b\}$ überein, so lässt sich Konkreteres aussagen. Wir betrachten zunächst ein Beispiel, das auf folgendem Satz aufbaut.

Satz 5.10. *Für $(f_{X,Y}) \in \mathcal{G}_3^*$ fallen die beiden freien kritischen Punkte genau für $X = 9$ zusammen. Es existieren keine weiteren Klassen mit mehrfachen kritischen Punkten.*

Beweis. Für $z \neq 1$ ist die Ableitung von $f_{X,Y}$ gegeben durch

$$f'_{X,Y}(z) = \frac{Y_1}{X} \frac{(z - X)(z^2 + (X - 3)z + X)}{(z - 1)^3}.$$

Es ist $z^2 + (X - 3)z + X = (z - c)^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ genau für $X = 9, c = -3$ oder für $X = 1, c = 1$, wobei letzteres die einzige Möglichkeit dafür ist, dass ein freier kritischer Punkt mit dem kritischen Punkt X zusammenfällt. Da aber $X = 1$ im Parameterraum \mathcal{P}^* ausgeschlossen ist, folgt die Behauptung. \square

Beispiel 5.11. Für $X = 9$ und $Y = 2$ besitzt die zugehörige Klasse aus \mathcal{G}_3^* einen superattraktiven Fixpunkt, der doppelter kritischer Punkt ist. Das zugehörige BÖTTCHERgebiet ist vollständig invariant, einfach zusammenhängend (da der superattraktive Fixpunkt der einzige kritische Punkt dort ist) und stimmt mit der FATOUmenge überein. Die beiden markierten kritischen Punkte liegen folglich in der JULIAMenge, die ein Dendrit, sogar ein JORDANbogen ist. Es existiert ein Polynom P dritten Grades, so dass alle Vertreter f der Klasse $(f_{9,2})$ vermöge geeigneter MOEBIUSTransformationen, die ∞ auf den superattraktiven Fixpunkt von f abbilden, zu P konjugiert sind. Die JULIAMenge des Polynoms ist ebenfalls ein JORDANbogen.

Entscheidend bei der Argumentation für den einfachen Zusammenhang des in dem Beispiel auftretenden Fixgebietes ist, dass die beiden freien kritischen Punkte zusammenfallen. Geringe Veränderung des Parameters Y bewirkt, dass ein doppelter kritischer Punkt nahe eines attraktiven Fixpunktes z_0 liegt. Der doppelte kritische Punkt wird nach geringfügiger Störung des Parameters X zu nahe beieinander liegenden einfachen kritischen Punkten, die im Attraktionsgebiet von z_0 liegen.

Bei zusammenfallenden freien kritischen Punkten existiert nur noch ein kritischer Punkt, der die Dynamik der Klasse bestimmt. Daher ist der Schnitt durch \mathcal{P}^* mit $X = 9$ für eine weitere Klassifizierung geeignet. Wir reduzieren also das Problem auf die Abhängigkeit bezüglich des Parameters Y und betrachten die Standardvertreter $f_{9,Y}$ der zugehörigen Klassen in diesem Schnitt. Im Beweis

von Satz 5.10 wurde gezeigt, dass unabhängig von Y der Punkt -3 der doppelte kritische Punkt ist. Sein Orbit ist für die Dynamik von $(f_{9,Y})$ entscheidend. Wie bei den Funktionen zweiten Grades in Abschnitt 2.3 stellt sich die Frage, wie die Menge der Klassen mit zusammenhängender JULIAMenge aussieht.

Satz 5.12. *Die Klassen $(f_{9,Y}) \in \mathcal{G}_3^*$ mit $Y \notin \overline{E_{\frac{1}{9}}}$ besitzen eine total unzusammenhängende JULIAMenge und sind subhyperbolisch.*

Beweis. Ist $Y \notin \overline{E_{\frac{1}{9}}}$, so ist mit Folgerung 5.9 einer der markierten Fixpunkte attraktiv und bindet den doppelten kritischen Punkt. Im zugehörigen Attraktionsgebiet liegen drei kritische Punkte (unter Berücksichtigung von Vielfachheiten), so dass mit der Formel von RIEMANN-HURWITZ sofort der einfache Zusammenhang ausgeschlossen werden kann (siehe Satz 3.4). Der zweite markierte Fixpunkt liegt in \mathcal{J} , so wie auch sein präperiodisches kritisches Urbild, und $(f_{9,Y})$ ist subhyperbolisch. \square

Stört man X geringfügig, so liegen die freien kritischen Punkte nahe beieinander. Es ist zu vermuten, dass dann eine gewisse Teilmenge D des Komplements von $\overline{E_{|X|-1}}$ existiert, so dass sich für $Y \in D$ beide freien kritischen Punkte im Attraktionsgebiet des attraktiven markierten Fixpunktes befinden und dieses ∞ -fach zusammenhängend ist. Der Frage, ob D existiert und wie es im Falle der Existenz aussieht, werden wir nicht weiter nachgehen.

Es sei nun $(f_{9,Y}) \in \mathcal{G}_3^*$ mit $Y \in \overline{E_{\frac{1}{9}}}$. Liegt der doppelte kritische Punkt -3 in der FATOUMenge, so sind zugehörige stabile Gebiete einfach zusammenhängend und die JULIAMenge ist zusammenhängend. Gehört er dagegen zu \mathcal{J} , so ist $\mathcal{J} = \widehat{\mathbb{C}}$ oder -3 wird durch einen SIEGEL- bzw. ARNOL'D-HERMAN-Zyklus gebunden. Also ist \mathcal{J} genau dann zusammenhängend, wenn kein ARNOL'D-HERMAN-Zyklus vorliegt. Da das nicht ausgeschlossen werden kann, bleibt es eine Vermutung, dass in dem Schnitt durch \mathcal{P}^* mit $X = 9$ genau die Klassen mit $Y \in \overline{E_{\frac{1}{9}}}$ zusammenhängende JULIAMengen besitzen.

Analog zu Abschnitt 2.3 betrachten wir hier die Menge

$$A := \{Y \in E_{\frac{1}{9}} : (f_{9,Y}) \text{ besitzt einen (super)attraktiven Zyklus}\}.$$

Für eine Klasse $(f_{9,Y})$ mit $Y \in A$ liegen die kritischen Vorgänger der markierten Fixpunkte in der JULIAMenge, der freie doppelte kritische Punkt konvergiert unter Iteration gegen einen (super)attraktiven Zyklus und $(f_{9,Y})$ ist subhyperbolisch. Aus diesem Grund werden die Zusammenhangskomponenten der Menge A subhyperbolische Komponenten genannt. Auch hier kann gezeigt werden, dass zu jeder subhyperbolischen Komponente H eine feste Zyklusperiode gehört und dass die Abbildung λ , die jedem $Y \in H$ den zugehörigen Multiplikator des (super)attraktiven Zyklus zuordnet, eine eigentliche Abbildung von H auf die

Einheitskreisscheibe \mathbb{D} ist. Im Unterschied zu Satz 2.17 arbeitet der Beweis mit der Normalität der Funktionenfolge $(f_{9,Y}^n(-3))$, die die kritischen Punkte 1 und 9 sowie deren Nachfolger 0 und ∞ auslässt (sonst würde die JULIAMenge mit der Zahlenkugel übereinstimmen).

Satz 5.13. *Für jede subhyperbolische Komponente H von A gilt:*

- a) *Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $Y \in H$ die Klasse $(f_{9,Y})$ einen (super)attraktiven Zyklus der Länge m besitzt.*
- b) *Die Abbildung λ , die jedem Y den Multiplikator des zugehörigen Zyklus von $(f_{9,Y})$ zuordnet, ist eine eigentliche Abbildung von H auf \mathbb{D} .*

Beweis. Siehe Beweis zu Satz 2.17. □

Wir beschäftigen uns mit der Frage, unter welcher Voraussetzung die JULIAMenge von $(f_{9,Y})$ ein JORDANbogen ist. Das ist der Fall, wenn die FATOUMenge ein Attraktionsgebiet zu einem nicht markierten Fixpunkt ist. Die zugehörigen Parameterwerte liegen genau in der subhyperbolischen Komponente, in der alle Klassen einen nicht markierten (super)attraktiven Fixpunkt besitzen.

Satz 5.14. *Es existiert genau eine subhyperbolische Komponente H_1 von A , so dass für alle $Y \in H_1$ die JULIAMenge der Klasse $(f_{9,Y}) \in \mathcal{G}_3^*$ ein JORDANbogen mit Endpunkten in den markierten Fixpunkten ist. Insbesondere ist $2 \in H_1$. Ist D das Urbild des Einheitskreises unter der Abbildung $\frac{3}{2}(J(\sqrt{z}) - 1)$ (mit dem positiven Zweig der Wurzel, also $\sqrt{1} = 1$), so gilt $H_1 = 2J(D)$.*

Beweis. Mit Satz 4.16 existiert zu $X = 9$ und vorgegebenem $|\lambda| < 1$ genau ein Y , für das die zugehörige Klasse einen nicht markierten Fixpunkt mit Multiplikator λ besitzt. Diese Parameterwerte liegen nach Aussage b) aus Satz 5.13 alle in derselben subhyperbolischen Komponente H_1 , die dann die einzige mit dieser Eigenschaft ist. Für $Y = 2$ besitzt die Klasse einen superattraktiven Fixpunkt, also ist $2 \in H_1$.

Zu jeder Klasse $(f_{9,Y}) \in \mathcal{G}_3^*$ mit $Y \in H_1$ existiert ein Attraktionsgebiet A zu einem (super)attraktiven Fixpunkt, in dem der doppelte kritische Punkt liegt. Um diesen bildet der Standardvertreter $f_{9,Y}$ lokal mit vollem Grad ab und A ist vollständig invariant. Da sich nur ein kritischer Punkt in A befindet, ist A einfach zusammenhängend. Weil keine weiteren nicht präperiodischen kritischen Punkte vorhanden sind, ist $\mathcal{F} = A$ und \mathcal{J} ein Dendrit. Dann ist \mathcal{J} ein JORDANbogen mit Endpunkten in 0 und ∞ wegen $f(\mathcal{J} \cap C \cup \{0, \infty\}) = \{0, \infty\}$. Das Urbild von $E_{\frac{1}{9}}$ unter der Abbildung $2J$ ist der Kreisring $A_{\frac{1}{9}}$ um 0 mit den Radien $\frac{1}{9}$ und 9. Das Bild des geschlitzten Kreisrings $R := A_{\frac{1}{9}} \setminus (-9, -\frac{1}{9})$ unter dem positiven Zweig der Wurzel ist die rechte Hälfte des Kreisrings $A_{\frac{1}{3}}$, die durch die JOUKOWSKIAbbildung auf die rechte Hälfte der Ellipsenfläche $E_{\frac{1}{3}}$

abgebildet wird. Die Funktion $\frac{3}{2}(z-1)$ bewirkt eine Verschiebung der Ellipsenfläche um 1 nach links und eine Streckung, die den Mittelpunkt auf $-\frac{3}{2}$ und die Achsen auf die Längen 4 und 5 verändert. Deren rechte Hälfte enthält den Einheitskreis, so dass eine Urbildkomponente D von \mathbb{D} unter der Abbildung $g(z) := \frac{3}{2}(J(\sqrt{z})-1)$ in R enthalten ist. Der Punkt $1 \in R$ ist als einfacher kritischer Punkt von g das einzige Urbild des Nullpunktes. Da Urbildgebiete eigentlich abgebildet werden, ist $g: D \rightarrow \mathbb{D}$ eigentlich vom Grad 2. Damit ist D die einzige Urbildkomponente, also das Urbild von \mathbb{D} unter g . Man rechnet nach, dass für die beiden nicht markierten Fixpunkte die Multiplikatoren gerade durch $g(\pm Y_1)$ gegeben sind. Somit ist $H_1 = 2J(D)$. \square

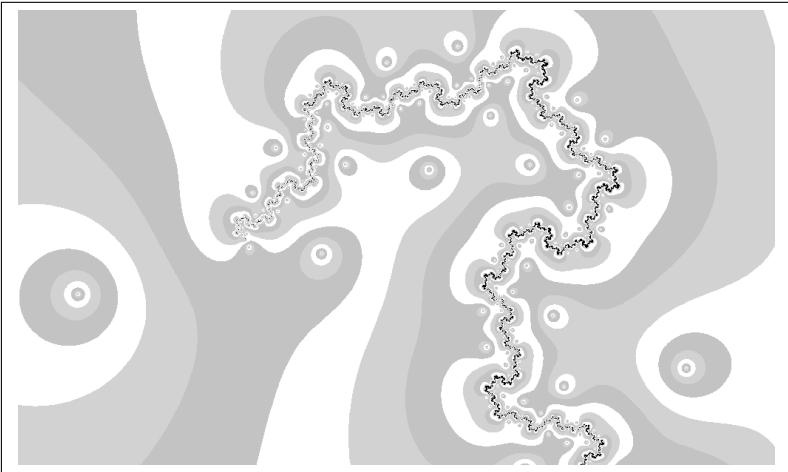


Abb. 4: Die Julia Menge der Funktion $\frac{2i}{9}z(z-9)^2(z-1)^{-2}$.
Sie ist ein Jordanbogen mit Endpunkten in 0 und ∞ .

In Beispiel 5.11 haben wir bereits gesehen, dass die Vertreter der Klasse $(f_{9,2})$ zu einem Polynom dritten Grades konjugiert sind. Für andere Klassen $(f_{9,Y})$ mit $Y \in H_1$ ist nach Satz 1.7 klar, dass die Vertreter zu einem Polynom P_Y dritten Grades quasikonform konjugiert sind. Die topologischen und geometrischen Eigenschaften der JULIAMenge von $f_{9,Y}$ übertragen sich auf die von P_Y . Die JULIAMengen der P_Y sind also ebenfalls JORDANbögen.

5.3 Klassen mit Arnol'd-Herman-Ringen

Wie in MILNORS Abhandlung über rationale Funktionen mit zwei kritischen Punkten (siehe [11]) besteht die Frage, ob sich in der Menge der Klassen aus \mathcal{G}_3^* , deren JULIAMenge unzusammenhängend ist, nur solche mit total unzusammenhängender JULIAMenge befinden. Das ist hier nicht der Fall, da gewisse

Klassen existieren, bei denen ARNOL'D-HERMAN-Ringe auftreten.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass \mathcal{J} total unzusammenhängend ist. Das dann mit der FATOUMenge übereinstimmende stabile Fixgebiet U ist ein BÖTTCHER-, SCHRÖDER- oder LEAUGebiet, und es liegt mindestens ein nicht präperiodischer kritischer Punkt in U . Ist es nur einer, so folgt der einfache Zusammenhang von U . Diese Aussage bleibt im attraktiven Fall mit den Ergebnissen aus Abschnitt 3.1 auch dann richtig, wenn zusätzlich noch ein kritisches Urbild des attraktiven Fixpunktes vorhanden ist. Liegen zwei nicht präperiodische, also beide freien kritischen Punkte in U und die markierten kritischen Punkte in \mathcal{J} , so ist nach vorherigem Abschnitt \mathcal{J} ein JORDANbogen und damit zusammenhängend, wenn die freien kritischen Punkte zusammenfallen. Andernfalls ist nicht sicher, ob U einfach- oder ∞ -fach zusammenhängend ist.

Befinden sich jedoch einer der präperiodischen kritischen Punkte und beide freien kritischen Punkte in U , das dann folglich ein SCHRÖDERgebiet ist, so ist \mathcal{J} nach der Formel von RIEMANN-HURWITZ sicher total unzusammenhängend (siehe Satz 3.4). Mit Satz 5.12 ist ein Bereich in \mathcal{P}^* gefunden, für den sicher gestellt werden kann, dass zugehörige Elemente aus \mathcal{G}_3^* total unzusammenhängende JULIAMengen besitzen.

Für die Existenz von ARNOL'D-HERMAN-Ringen bei einer Klasse $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ ist es notwendig, dass keiner der beiden markierten Fixpunkte von f attraktiv oder rational indifferent ist. Denn andernfalls liegt ein freier kritischer Punkt in der JULIAMenge, da der Rand des Ringes zum Abschluss des kritischen Orbits gehört. Das Attraktionsgebiet des markierten Fixpunktes bindet dann nur einen freien kritischen Punkt und in beiden Fällen folgt mit den Aussagen in Kapitel 3 der Zusammenhang von \mathcal{J} , was bei der Existenz eines ARNOL'D-HERMAN-Ringes unmöglich ist.

A priori ist nicht auszuschließen, dass einer der markierten Fixpunkte ein SIEGELpunkt ist und zusammen mit einem ARNOL'D-HERMAN-Ring auftritt. Es fällt zunächst auf, dass die Vertreter einer bestimmten Klasse von \mathcal{G}_3^* , nämlich der in Abschnitt 4.4 vorgestellten Beispielklasse, zu den Funktionen gehören, über die positive Aussagen zur Existenz von ARNOL'D-HERMAN-Ringen getroffen werden können (siehe [13, S. 102 ff.] für die nachfolgenden Aussagen). Dazu betrachten wir in allgemeinerem Kontext BLASCHKEprodukte b der Form

$$b(z) = e^{i\alpha} \prod_{j=0}^{2p} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und (zunächst) $a_j \in \mathbb{D}$. Die JULIAMenge von b ist bekanntlich eine Teilmenge des Einheitskreises. Ändert man die Bedingung $a_j \in \mathbb{D}$, so lassen sich Funktionen gewinnen, die einen ARNOL'D-HERMAN-Ring besitzen, der die

Einheitskreislinie enthält. Dazu ist notwendig, dass b in einer Umgebung von $\partial\mathbb{D}$ konform ist und dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \pm 1$$

erfüllt ist. Das bedeutet nach dem Argumentprinzip, dass sich die Anzahl der Nullstellen von der Anzahl der Polstellen von b in \mathbb{D} (gezählt mit Vielfachheiten) um genau 1 unterscheidet. Liegen dann p Nullstellen in \mathbb{D} und $p+1$ außerhalb, so ist hinreichend und notwendig für Konformität von b in einer Umgebung der Einheitskreislinie, dass für beliebiges φ

$$\sum_{j=0}^{2p} \frac{1 - |a_j|^2}{|1 - e^{i\varphi} \bar{a}_j|^2} < 0 \quad (5)$$

gilt. Betrachten wir nun die Funktion $f \in \mathcal{G}_3$ mit

$$f(z) = \frac{e^{i\alpha}}{c^2} z \left(\frac{z-c}{z-\frac{1}{\bar{c}}} \right)^2 = e^{i\alpha} z \left(\frac{z-c}{1-\bar{c}z} \right)^2, \quad (6)$$

wobei $|c| > 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist, dann besitzt f die Form eines BLASCHKEPRODUKTES mit einer Nullstelle innerhalb von \mathbb{D} und zwei Nullstellen außerhalb. Weiterhin gilt die folgende Aussage.

Satz 5.15. *Eine Funktion $f \in \mathcal{G}_3$ der Form (6) ist genau dann konform in einer Umgebung der Einheitskreislinie, wenn $|c| > 3$ ist.*

Beweis. Wir prüfen die zur Konformität des BLASCHKEPRODUKTES in einer Umgebung von $\partial\mathbb{D}$ äquivalente Bedingung (5). Hier sind $p = 1$, $a_0 = 0$ und $a_1 = a_2 = c$.

Sei zunächst f konform in einer Umgebung von $\partial\mathbb{D}$. Dann gilt für beliebiges φ

$$0 > \sum_{j=0}^2 \frac{1 - |a_j|^2}{|1 - e^{i\varphi} \bar{a}_j|^2} = 1 + 2 \frac{1 - |c|^2}{|1 - e^{i\varphi} \bar{c}|^2}.$$

Insbesondere gilt die Aussage für das $\varphi \in [0, 2\pi[$ mit $e^{i\varphi} \bar{c} = -|c|$, so dass

$$0 > 1 + 2 \frac{1 - |c|^2}{(1 + |c|)^2} = 1 + 2 \frac{1 - |c|}{1 + |c|} = \frac{3 - |c|}{1 + |c|}$$

und damit $|c| > 3$ gilt.

Ist umgekehrt $|c| > 3$, so folgt

$$1 + 2 \frac{1 - |c|^2}{|1 - e^{i\varphi}\bar{c}|^2} < 1 + 2 \frac{1 - |c|^2}{(1 + |c|)^2} = \frac{3 - |c|}{1 + |c|} < 0$$

für beliebiges φ , womit die Aussage des Satzes bewiesen ist. \square

Für die Menge \mathcal{G}_3^* ergibt sich dann die folgende Aussage.

Folgerung 5.16. *Es sei $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ mit einem f der Form (6). Dann ist f genau dann konform in einer Umgebung der Einheitskreislinie $\partial\mathbb{D}$, wenn gilt*

$$X > 9, \quad Y \in [-2, 2].$$

Beweis. Per Definition der Invarianten der Klasse $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ in Satz 4.8 gilt hier

$$X = |c|^2, \quad Y = 2J \left(\frac{e^{i\alpha}}{\bar{c}^2} |c|^2 \right).$$

Der Ausdruck im Argument der JOUKOWSKIAbbildung liegt auf der Einheitskreislinie, deren Bild unter J das Intervall $[-1, 1]$ ist. Daher ist (f) nach Satz 5.15 genau für $X > 9$, $Y \in [-2, 2]$ konform in einer Umgebung von $\partial\mathbb{D}$. \square

Analog zu dem Satz in [13, S. 111] über spezielle verallgemeinerte BLASCHKEProdukte kann hier die Existenz von ARNOL'D-HERMAN-Ringen nachgewiesen werden.

Satz 5.17. *Es gelten folgende Aussagen:*

- 1) *Für hinreichend großes $c > 3$ und überabzählbare viele $\alpha \in (0, 2\pi)$ hat das BLASCHKEProdukt $f \in \mathcal{G}_3$ der Form (6) einen ARNOL'D-HERMAN-Ring.*
- 2) *Für hinreichend großes $X > 9$ und überabzählbare viele $Y \in [-2, 2]$ besitzt die Klasse $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ einen ARNOL'D-HERMAN-Ring.*

Für $|c| > 3$ sind die beiden markierten Fixpunkte 0 und ∞ abstoßend und deren Multiplikatoren sind zueinander konjugiert komplex, denn es ist

$$\lambda(0) = e^{i\alpha}c^2, \quad \lambda(\infty) = e^{-i\alpha}\bar{c}^2 = \overline{\lambda(0)}.$$

Sowohl das Paar der festgelegten kritischen Punkte c und $\bar{c}^{-1} = |c|^{-2}c$, als auch das Paar der beiden freien kritischen Punkte

$$\frac{3 - |c|^2 \pm \sqrt{(|c|^2 - 9)(|c|^2 - 1)}}{2|c|^2} c$$

liegen spiegelsymmetrisch zur Einheitskreislinie. Alle vier kritischen Punkte von f befinden sich außerdem auf der Geraden durch 0 und den Parameter c . Dabei liegen die kritischen Vorgänger der markierten Fixpunkte auf einem der beiden durch die markierten Fixpunkte getrennten Stücke dieser Geraden und die beiden freien kritischen Punkte auf dem anderen Stück wegen

$$3 - |c|^2 \pm \sqrt{(|c|^2 - 9)(|c|^2 - 1)} < 3 - |c|^2 + \sqrt{(|c|^2 - 5)^2} < -2 < 0.$$

Nach einmaliger Anwendung von f sind die Bildpunkte der beiden festgelegten kritischen Punkte die markierten Fixpunkte 0 und ∞ . Die Bildpunkte der freien kritischen Punkte liegen immer noch spiegelsymmetrisch zur Einheitskreislinie, so dass alle vier kritischen Werte wieder auf einer gemeinsamen Geraden durch den Nullpunkt liegen. Bei weiterer Iteration bleibt diese Aussage über die Bildpunkte der kritischen Punkte unter der Abbildung f^n erhalten.

5.4 Markierte Fixpunkte und Geometrie der Juliamenge

Wir fassen Aussagen über topologische und geometrische Eigenschaften der JULIAMenge für die Klassen aus \mathcal{G}_3^* zusammen je nach dynamischem Typ ihrer beiden markierten Fixpunkte. Dazu werden die Ergebnisse aus Kapitel 3 herangezogen. In Anlehnung an MILNORS Arbeit über rationale Funktionen mit zwei kritischen Punkten (siehe [11]) wird dazu folgendes definiert.

Definition 5.18. Es sei $\mathcal{G}^*(\lambda)$ die Menge der Klassen $(f) \in \mathcal{G}_3^*$, für die einer der markierten Fixpunkte den Multiplikator λ besitzt, und $\mathcal{P}^*(\lambda) \subset \mathcal{P}^*$ der zugehörige Parameterbereich. Besitzen beide Multiplikatoren der markierten Fixpunkte den Wert λ , so wird das formal mit $(f) \in \mathcal{G}^*(\lambda) \cap \mathcal{G}^*(\lambda)$ ausgedrückt.

Mit den Ergebnissen aus Kapitel 4 erhält man für $\mathcal{P}^*(\lambda)$ einen Zusammenhang zwischen den Invarianten X, Y und dem Multiplikator λ .

Satz 5.19. Für $\lambda \neq 0$ und $(X, Y) \in \mathcal{P}^*(\lambda)$ gilt mit der JOUKOWSKIabbildung J

$$Y = 2J\left(\frac{X}{\lambda}\right) = \frac{X}{\lambda} + \frac{\lambda}{X}.$$

Beweis. Zu $(X, Y) \in \mathcal{P}^*(\lambda)$ kann aus der zugehörigen Klasse $(f_{X,Y}) \in \mathcal{G}_3^*$ ein Vertreter so ausgewählt werden, dass der markierte Fixpunkt ∞ derjenige ist mit $\lambda(\infty) = \lambda$. Dann folgt die Aussage mit der Definition von Y in Satz 4.8 und mit Satz 4.12. \square

Nun besitzen für $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ beide markierten Fixpunkte einen gewissen Multiplikator. Das zugehörige Invariantentupel $(X, Y) \in \mathcal{P}^*$ befindet sich also in den Mengen $\mathcal{P}^*(\lambda_1)$ und $\mathcal{P}^*(\lambda_2)$, wenn λ_1 der Multiplikator von 0 und λ_2 der von ∞ ist. Dabei kann eventuell $\lambda_1 = \lambda_2$ gelten. Eine Aussage über die Schnittmenge zweier verschiedener Parameterbereiche $\mathcal{P}^*(\lambda)$ macht der folgende Satz.

Satz 5.20. *Es seien $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ gegeben mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann besitzen die Mengen $\mathcal{P}^*(\lambda_1)$ und $\mathcal{P}^*(\lambda_2)$ genau zwei Schnittpunkte, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden.*

Beweis. Für $(X, Y) \in \mathcal{P}^*(\lambda_1) \cap \mathcal{P}^*(\lambda_2)$ gilt mit Satz 5.19

$$\frac{X}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{X} = Y = \frac{X}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{X}.$$

Man berechnet $X^2 = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Die Gleichung besitzt genau zwei verschiedene Lösungen X , an die jeweils genau ein Y gebunden ist. Die Lösungen X unterscheiden sich dabei nur im Vorzeichen, welches sich auch auf Y überträgt. \square

Dieses Ergebnis ist eine Wiederholung der Aussage von Satz 4.15. Die beiden Klassen, deren Invarianten sich genau im Vorzeichen unterscheiden, besitzen in den markierten Fixpunkten dieselben Multiplikatoren.

Wir beginnen die konkrete Analyse mit der Betrachtung von Klassen mit mindestens einem attraktiven markierten Fixpunkt. Es sei also $(f) \in \mathcal{G}^*(\lambda)$ mit $|\lambda| < 1$. Dann ist die Voraussetzung der Sätze in Abschnitt 3.1 erfüllt.

Satz 5.21. *Für $(f) \in \mathcal{G}^*(\lambda)$ mit $|\lambda| < 1$ und zugehörigem SCHRÖDERgebiet A gelten folgende Aussagen:*

- 1) *Es ist A vollständig invariant und $\partial A = \mathcal{J}$.*
- 2) *Es ist A genau dann einfach zusammenhängend und die JULIAMenge zusammenhängend, falls A genau zwei kritische Punkte enthält, das kritische Urbild des zugehörigen attraktiven markierten Fixpunktes und genau einen der beiden freien kritischen Punkte. Dann ist f quasikonform konjugiert zu einem Polynom $P(z) = az(z - c)^2$.*
- 3) *Die JULIAMenge ist genau dann total unzusammenhängend, wenn beide freien kritischen Punkte in A liegen.*
- 4) *Existieren weitere stabile Gebiete, so sind sie einfach zusammenhängend.*
- 5) *Ist A einfach zusammenhängend, f (sub)hyperbolisch, so ist \mathcal{J} eine Kurve.*

Bekanntermaßen ist die JULIAMenge für hyperbolische Funktionen mit zusammenhängender FATOUMenge total unzusammenhängend. Für subhyperbolische Funktionen ist der Satz im Allgemeinen nicht richtig. Hier ist es so, dass alle die Elemente aus \mathcal{G}_3^* mit einem attraktiven markierten Fixpunkt, der beide freien kritischen Punkte bindet, subhyperbolisch sind mit zusammenhängender FATOUMenge und total unzusammenhängender JULIAMenge (siehe Satz 5.12).

Es werden nun solche Klassen $(f) \in \mathcal{G}_3^*$ mit einem attraktiven markierten Fixpunkt betrachtet, dessen SCHRÖDERgebiet A nur einen der freien kritischen Punkte bindet. Der zweite freie kritische Punkt liegt insbesondere nicht in einem Vorgängergebiet von A , da A notwendigerweise vollständig invariant ist. Es sei $(f) \in \mathcal{G}^*(\lambda_1) \cap \mathcal{G}^*(\lambda_2)$ mit $|\lambda_1| < 1$. Wir unterscheiden für den markierten Fixpunkt mit Multiplikator λ_2 die Fälle, dass er attraktiv, indifferent oder abstoßend ist, wobei alles mit dem nicht in A liegenden freien kritischen Punkt realisiert werden kann. Es sei zunächst $|\lambda_2| < 1$.

Satz 5.22. *Es sei $(f) \in \mathcal{G}^*(\lambda_1) \cap \mathcal{G}^*(\lambda_2)$ mit $|\lambda_j| < 1$ für $j = 1, 2$. Dann ist die JULIAMenge eine JORDANKurve.*

Beweis. Die Aussage folgt aus den Sätzen 5.4, 5.5 und 5.6. \square

Entscheidend ist hier die Hyperbolizität von $(f) \in \mathcal{G}_3^*$. Diese geht in den anderen Fällen gemäß Satz 5.4 verloren und es ist nicht klar, ob \mathcal{J} eine Kurve ist. Ist $|\lambda_2| = 1$, so kann zumindest eine positive Aussage über den Zusammenhang der JULIAMenge gemacht werden.

Satz 5.23. *Es sei $(f) \in \mathcal{G}^*(\lambda_1) \cap \mathcal{G}^*(\lambda_2)$ mit $|\lambda_1| < 1$ und $|\lambda_2| = 1$. Dann ist die JULIAMenge zusammenhängend. Im Fall eines markierten CREMERpunktes ist \mathcal{J} ein Dendrit, aber kein JORDANbogen.*

Beweis. Ist λ_2 eine k -te Einheitswurzel (k minimal), dann besteht die zugehörige LEAUBLume aus k Blättern, die den letzten freien kritischen Punkt bindet. Ist der zweite markierte Fixpunkt ein SIEGELpunkt, so liegt der freie kritische Punkt in \mathcal{J} , da der Rand der SIEGELScheibe S in $O^+(C)$ enthalten ist. (Die FATOUmenge besteht aus dem SCHRÖDERgebiet und $\bigcup_{n=0}^{\infty} S^{-n}$. Dabei besitzt S eine weitere Urbildkomponente, die den kritischen Vorgänger des markierten SIEGELpunktes enthält und damit $2 : 1$ auf S abgebildet wird.) Existiert neben einem attraktiven markierten Fixpunkt noch ein markierter CREMERpunkt, so ist der freie kritische Punkt nicht präperiodisch und liegt in \mathcal{J} . Damit liegen im Attraktionsgebiet des attraktiven Fixpunktes immer genau zwei kritische Punkte und \mathcal{J} ist nach Satz 3.4 zusammenhängend.

Im Fall eines CREMERpunktes stimmt die FATOUmenge mit dem einfach zusammenhängenden SCHRÖDERgebiet überein und \mathcal{J} ist zusammenhängend. Damit ist die JULIAMenge ein Dendrit, aber kein JORDANbogen, da der Vorwärtsorbit der kritischen Punkte in \mathcal{J} nicht zweipunktig ist. \square

Ist ein markierter Fixpunkt attraktiv und einer abstoßend, so ist die JULIAMenge entweder total unzusammenhängend oder zusammenhängend.

Satz 5.24. *Es sei $(f) \in \mathcal{G}^*(\lambda_1) \cap \mathcal{G}^*(\lambda_2)$ mit $|\lambda_1| < 1$ und $|\lambda_2| > 1$. Es sei A das zugehörige Attraktionsgebiet, das einen freien kritischen Punkt enthält.*

Gehört auch der zweite freie kritische Punkt zu A , so ist \mathcal{J} staubförmig, ansonsten zusammenhängend.

Beweis. Die Aussagen folgen aus Satz 5.21. □

Gehört der letzte freie kritische Punkt c nicht zu A , so ist ein (super)attraktiver Zyklus, ein LEAU-, SIEGEL- oder CREMERzyklus möglich. Weiterhin kann c nicht durch einen Zyklus gebunden werden und liegt dann in \mathcal{J} . In diesem Fall stimmt die FATOUMenge mit dem SCHRÖDERgebiet überein. Es ist \mathcal{F} zusammenhängend sowie einfach zusammenhängend und \mathcal{J} ein Dendrit. Wird c auf einen nicht markierten Fixpunkt abgebildet, so ist \mathcal{J} ein JORDANbogen.

Es sei nun einer der markierten Fixpunkte indifferent. Dann ist in jedem der möglichen Fälle ein freier kritischer Punkt gebunden. Ist auch der zweite freie kritische Punkt durch einen zweiten indifferenten markierten Fixpunkt gebunden, so ist die JULIAMenge zusammenhängend.

Satz 5.25. *Es sei $(f) \in \mathcal{G}^*(\lambda_1) \cap \mathcal{G}^*(\lambda_2)$ mit $|\lambda_1| = 1$ und $|\lambda_2| = 1$. Dann ist die JULIAMenge zusammenhängend.*

Beweis. Es sei zunächst einer der markierten Fixpunkte ein LEAUPunkt. Dann liegt ein kritischer Punkt in der zugehörigen LEAublume. Der verbleibende freie kritische Punkt wird durch einen weiteren markierten LEAUPunkt, einen markierten SIEGEL- oder CREMERpunkt gebunden. Die LEAublume enthält nur einen kritischen Punkt und \mathcal{J} ist nach Satz 3.15 zusammenhängend.

Sind die beiden markierten Fixpunkte keine LEAUPunkte, so sind es SIEGEL- oder CREMERpunkte. Bei zwei CREMERpunkten ist $\mathcal{J} = \widehat{\mathbb{C}}$, sonst sind alle stabilen Gebiete einfach zusammenhängend. Immer ist \mathcal{J} zusammenhängend. □

Sind beide markierten Fixpunkte LEAUPunkte, dann binden die LEAublumen beide freien kritischen Punkte und die kritischen Vorgänger der LEAUPunkte liegen in der JULIAMenge. Zwar besteht der Vorwärtsorbit von $\mathcal{J} \cap \mathcal{C} \cup \{0, \infty\}$ aus genau den beiden markierten Fixpunkten, doch ist \mathcal{J} kein JORDANbogen, noch nicht einmal ein Dendrit, denn die FATOUMenge ist offensichtlich nicht zusammenhängend.

Beispiel 5.26. Es ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ genau für $X = -1$ und $Y = -2$ (das bedeutet $Y_1 = -1$). Der zugehörige Standardvertreter $f = f_{X,Y}$ mit

$$f(z) = z \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2$$

besitzt die LEAUPunkte 0 und ∞ mit Multiplikator 1 , d.h. $(f) \in \mathcal{G}^*(1) \cap \mathcal{G}^*(1)$. Die freien kritischen Punkte neben den festgelegten $c_1 = 1$ und $c_2 = -1$ sind

$$c_3 = -2 + \sqrt{5}, \quad c_4 = -2 - \sqrt{5}.$$

Dann gilt für $z \in K := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < |z_0|\}$ mit $z_0 := \frac{1}{8}$

$$\begin{aligned} |f(z) - z_0| &= \frac{1}{8} \left| \frac{8z^3 - 17z^2 + 6z - 1}{(z+1)^2} \right| \\ &= \left| \frac{(z - z_0)^3 - 14z_0(z - z_0)^2 + 17z_0^2(z - z_0) - 32z_0^3}{(z - z_0 + 9z_0)^2} \right| \\ &< \frac{|z_0|^3 + 14|z_0|^3 + 17|z_0|^3 + 32|z_0|^3}{(9|z_0| - |z_0|)^2} \\ &= |z_0| \end{aligned}$$

und es folgt die gleichmäßige Beschränktheit der Iteriertenfolge in K .

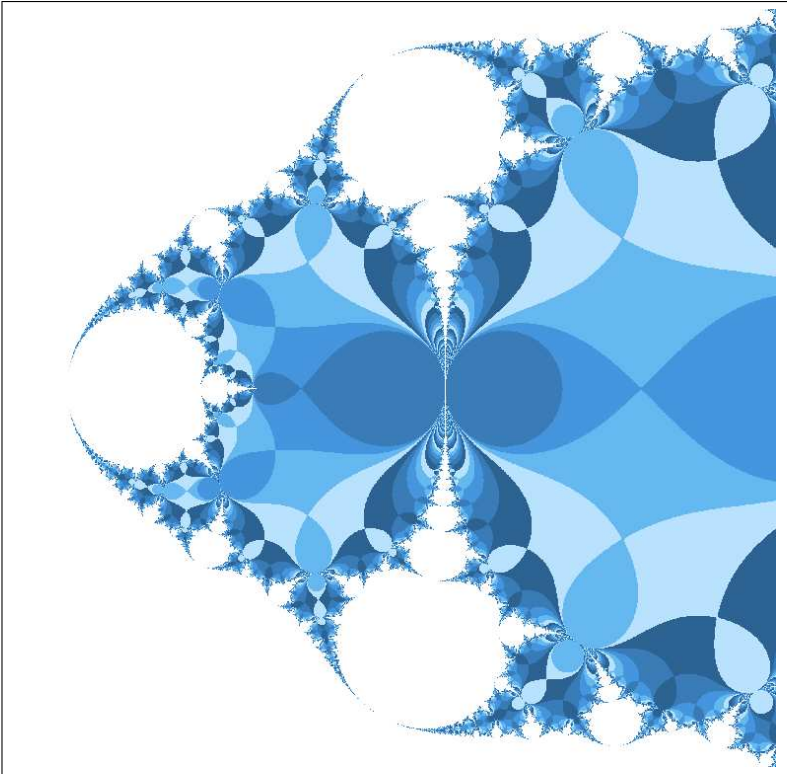


Abb. 5: Leagebiet zum Fixpunkt 0 mit iterierten Urbildgebieten.

Da der Nullpunkt auf dem Rand von K liegt, ist $K \subset A(0)$. Wegen

$$|c_3 - z_0| = \left(\sqrt{5} - 2 - \frac{1}{8} \right) |z_0| < |z_0|$$

ist $c_3 \in A(0)$ und folglich $c_4 \in A(\infty)$. Die FATOUmenge besteht aus zwei LEAUGebieten und deren iterierten Urbildern, die JULIAMenge ist zusammenhängend.

Existiert neben einem indifferenten markierten Fixpunkt noch ein abstoßender markierter Fixpunkt, so kann nur dann etwas Konkretes ausgesagt werden, wenn der indifferente Fixpunkt ein LEAUPunkt ist. Dann gibt es neben einem nicht präperiodischen kritischen Punkt, der in der zugehörigen LEAUBLume L liegt, einen weiteren freien kritischen Punkt. Wird dieser nicht durch L gebunden, so kann ein (super)attraktiver Zyklus, LEAU-, SIEGEL- oder CREMERZyklus existieren oder der kritische Punkt gehört zu keinem Zyklus und liegt in \mathcal{J} . Wird er durch L gebunden, so sind verschiedene Fälle möglich.

Satz 5.27. *Es seien $(f) \in \mathcal{G}^*(\lambda_1) \cap \mathcal{G}^*(\lambda_2)$ mit $\lambda_1^k = 1$ (k minimal), $|\lambda_2| > 1$ und L die zugehörige LEAUBLume, die einen der freien kritischen Punkte bindet. Gehört der letzte freie kritische Punkt nicht zu L , so ist \mathcal{J} zusammenhängend. Ansonsten gelten folgende Aussagen:*

- 1) *Enthält ein Blatt beide freien kritischen Punkte, so ist L für $k = 1$ vollständig invariant, einfach zusammenhängend und \mathcal{J} ist ein JORDANbogen. Ist $k \neq 1$, so sind alle stabilen Gebiete ∞ -fach zusammenhängend.*
- 2) *Liegen die freien kritischen Punkte in verschiedenen von $2k$ Blättern, so ist \mathcal{J} zusammenhängend.*

Beweis. Liegt nur einer der freien kritischen Punkte in L , so folgt die Aussage mit Satz 3.15. Liegen zwei kritische Punkte in einem gemeinsamen Blatt, so folgt die Aussage für $k = 1$ gemäß des zweiten Beispiels aus [15] und die für $k \neq 1$ mit Satz 3.17. Die Aussage 2) ist die von Satz 3.16. \square

Mit den Aussagen aus Abschnitt 5.1 und denen über die topologischen und geometrischen Eigenschaften von \mathcal{J} in Abhängigkeit von dem dynamischen Typ der markierten Fixpunkte aus diesem Abschnitt gilt nun folgendes.

Folgerung 5.28. *Es sei $(f_{X,Y}) \in \mathcal{G}_3^*$. Dann ist die JULIAMenge für*

- 1) $|X| < 1$, $Y \in E_{|X|}$ eine JORDANKurve,
- 2) $|X| \leq 1$, $Y \in \overline{E_{|X|}}$ zusammenhängend,
- 3) $|X| < 1$, $Y \notin \overline{E_{|X|}}$ zusammenhängend oder total unzusammenhängend,
- 4) $|X| > 1$, $Y \notin \overline{E_{|X|-1}}$ zusammenhängend oder total unzusammenhängend.

Analog zum Fall eines vorliegenden attraktiven markierten Fixpunktes verbleibt die Frage, ob Bereiche in \mathcal{P}^* angegeben werden können, in denen die zugehörigen Klassen jeweils eine LEAUBLume zu einem markierten LEAUPunkt

besitzen, die beide freien kritischen Punkte in einem Blatt vereint. Wir reduzieren das Problem auf die Menge der Klassen, die einen markierten LEAUpunkt mit Multiplikator $\lambda = 1$ besitzen, also auf die Klassen $(f) \in \mathcal{G}^*(1)$. Mit Satz 5.19 erhält man eine Darstellung für den Parameterbereich $\mathcal{P}^*(1)$.

Folgerung 5.29. *Es ist $\mathcal{P}^*(1) = \{(X, Y) \in \mathcal{P}^* : X^2 - XY + 1 = 0\}$.*

Da für $(f) \in \mathcal{G}^*(1)$ der Multiplikator des verbleibenden markierten Fixpunktes X^2 ist, ist $|X| > 1$ notwendig dafür, dass beide kritischen Punkte in dem LEAUGebiet liegen. Der folgende Satz macht eine genauere Aussage.

Satz 5.30. *Ist $(X, Y) \in \mathcal{P}^*(1)$ mit $\operatorname{Re} X > 1$, so liegen beide freien kritischen Punkte der Klasse $(f) \in \mathcal{G}^*(1)$ in dem zugehörigen LEAUGebiet.*

Beweis. Für $(f) \in \mathcal{G}^*(1)$ sei $f \in \mathcal{G}_3$ ein zugehöriger Vertreter mit $\lambda(\infty) = 1$. Es ist dann $a = 1$ und $f(z) = z(z - c_1)^2(z - c_2)^{-2}$. Dann sei g definiert durch

$$g(z) := \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = z \left(\frac{c_2 z - 1}{c_1 z - 1} \right)^2 = z + 2(c_1 - c_2)z^2 + O(z^3).$$

Der Residuen-Fixpunkt-Index $\iota(f, \infty)$ von f in ∞ ist definiert durch

$$\iota(f, \infty) := \iota(g, 0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{z - g(z)}.$$

Dabei ist $r > 0$ so gewählt, dass $g(z) \neq 0$ für $0 < |z| \leq r$ ist (siehe [3]). Man wählt $r < \left| \frac{1}{c_2} \right|$, denn neben 0 ist $\frac{1}{c_2}$ die einzige Nullstelle von g . Wir betrachten

$$\frac{1}{z - g(z)} = \frac{1}{z^2} \underbrace{\frac{(c_1 z - 1)^2}{(c_1 - c_2)(z(c_1 + c_2) - 2)}}_{:=h(z)}.$$

Es ist h holomorph für $z \neq \frac{2}{c_1 + c_2}$. Wählt man zusätzlich $r < \left| \frac{2}{c_1 + c_2} \right|$, dann gilt

$$\iota(g, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{h(z)}{z^2} dz = h'(0) = \frac{1}{4} \frac{3c_1 - c_2}{c_1 - c_2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{c_2}{c_1}}.$$

Im Fall $\operatorname{Re} \iota(g, 0) > \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ existieren nach BERGWELER (siehe [3]) zwei (freie) kritische Punkte in dem LEAUGebiet. Es ist $\operatorname{Re} \frac{1}{1 - \frac{c_2}{c_1}} > 1$ genau für $\left| \frac{c_2}{c_1} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$. In \mathcal{P}^* bedeutet das $\left| \frac{1}{X} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$, was äquivalent zu $\operatorname{Re} X > 1$ ist. \square

Weitere Aussagen über zwei kritische Punkte in einem LEAUBlatt (auch für den Fall $k \neq 1$) können über den Parameterschnitt $X = 9$ gewonnen werden, in dem die beiden freien kritischen Punkte zusammenfallen.

6 Ausblick auf Funktionen höheren Grades

Wir geben noch einige Denkanstöße für eine Verallgemeinerung der bisherigen Ergebnisse auf Funktionen höheren Grades. Da es sich hierbei zum Teil um reine Überlegungen handelt, wird auf eine Struktur in Form von Sätzen und Definitionen verzichtet.

Auch im allgemeinen Fall gehen wir von der notwendigen Bedingung dafür aus, dass die JULIAMenge ein JORDANbogen ist. In der JULIAMenge existieren $d - 1$ verschiedene kritische Punkte, deren Vorwärtsorbit aus genau zwei Punkten der komplexen Zahlenkugel besteht. Je nachdem, ob ein gerader oder ungerader Grad vorliegt, besitzt dieser Vorwärtsorbit ein anderes Erscheinungsbild, weshalb diese beiden Fälle (wie auch schon bei Funktionen zweiten und dritten Grades) unterschieden werden. Im ungeraden Fall erfassen wir wieder nur einen Teil der Funktionen, deren JULIAMengen JORDANbögen sind.

Es sei \mathcal{H}_d die Menge der rationalen Funktionen f vom Grad d , die paarweise verschiedene kritische Punkte $c_1, \dots, c_{d-1} \in \widehat{\mathbb{C}}$ und das folgende Abbildungsverhalten besitzen, das vom Grad von f abhängt.

1) Ist $d = 2n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so existieren $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ mit $z_2 \mapsto z_1 \mapsto z_1$ und

$$\begin{aligned} c_{2j-1} &\mapsto z_2 \text{ für } j = 1, \dots, n, \\ c_{2j} &\mapsto z_1 \text{ für } j = 1, \dots, n - 1. \end{aligned}$$

2) Ist $d = 2n + 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so existieren $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ mit $z_j \mapsto z_j$ und

$$\begin{aligned} c_{2j-1} &\mapsto z_2 \text{ für } j = 1, \dots, n, \\ c_{2j} &\mapsto z_1 \text{ für } j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Weiterhin sei \mathcal{G}_d die Menge aller $f \in \mathcal{H}_d$ mit $z_1 = 0$ und $z_2 = \infty$.

In beiden Fällen sind die jeweils auftretenden markierten Fixpunkte (das sind z_1 im Fall $d = 2n$ und z_1, z_2 im Fall $d = 2n + 1$) nicht superattraktiv, da sie jeweils bereits eine maximale Anzahl von Urbildern besitzen. Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{H}_d$ existiert eine Funktion $g \in \mathcal{G}_d$, die vermöge einer MÖBIUstransformation, die 0 auf z_1 und ∞ auf z_2 abbildet, zu f konjugiert ist und damit dieselbe Dynamik besitzt. Wir beschränken uns daher auf die Betrachtung von \mathcal{G}_d .

Im Fall $d = 2n$ bleibt nur eine mit Hilfe der in M_2 enthaltenen Drehstreckungen und Drehstauchungen entstehende Konjugierte von $f \in \mathcal{G}_{2n}$ wieder in \mathcal{G}_{2n} . Im ungeraden Fall sind Transformationen aus M_3 zugelassen, die definitionsgemäß von Drehstreckungen, Drehstauchungen und der Inversion erzeugt wird. Wir betrachten in beiden Fällen die gemäß Satz 1.1 definierten Äquivalenzklassen

$(f) := \{g \in \mathcal{G}_{2n} : f \stackrel{M_2}{\sim} g\}$ bzw. $(f) := \{g \in \mathcal{G}_{2n+1} : f \stackrel{M_3}{\sim} g\}$ und fassen diese jeweils in der Menge \mathcal{G}_d^* zusammen.

Wie bei den entsprechenden Funktionen zweiten und dritten Grades können die Funktionen $f \in \mathcal{G}_d$ konkret bestimmt werden. Betrachten wir zunächst den Fall $d = 2n$. Dann hat f den Nullpunkt als einfache Nullstelle, $n - 1$ verschiedene doppelte Nullstellen und n verschiedene Pole zweiter Ordnung, also die Darstellung

$$f(z) = a \frac{z}{(z - c_{2n-1})^2} \prod_{j=1}^{n-1} \left(\frac{z - c_{2j}}{z - c_{2j-1}} \right)^2$$

mit komplexen Parametern $a \neq 0$ und $c_1, \dots, c_{2n-1} \neq 0$, wobei die c_j paarweise verschieden sind.

Im Fall $d = 2n - 1$ besitzt f den Nullpunkt als einfache Nullstelle, n verschiedene doppelte Nullstellen, den einfachen Pol ∞ und n verschiedene Pole zweiter Ordnung, also die Darstellung

$$f(z) = a z \prod_{j=1}^n \left(\frac{z - c_{2j}}{z - c_{2j-1}} \right)^2$$

mit komplexen Parametern $a \neq 0$ und $c_1, \dots, c_{2n} \neq 0$, wobei die c_j paarweise verschieden sind.

In beiden Fällen haben wir also eine Darstellung der Form

$$f(z) = az \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \right)^2 \quad (7)$$

mit einem Zählerpolynom P vom Grad $n - 1$ im Fall $d = 2n$ bzw. vom Grad n im Fall $d = 2n + 1$ und einem Nennerpolynom Q vom Grad n . Dabei sind die Polynome in einer Produktdarstellung gegeben, die für Funktionen vom Grad $d \geq 4$ eine erste Problematik mit sich führt. Im Unterschied zu den Funktionen zweiten und dritten Grades besteht nun das Problem der Sortierung der Nullstellen von P und Q . (Hintergrund des Problems ist, dass eine nicht orientierte Mannigfaltigkeit vorliegt.) Beide Polynome sind aber normiert und besitzen eindeutige Koeffizienten. Es ist $Q(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_0$ und

$$P(z) = z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_0 \quad \text{im Fall } d = 2n,$$

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 \quad \text{im Fall } d = 2n + 1.$$

Daher wird für weitere Überlegungen die Koeffizientendarstellung eines Polynoms verwendet. Wir klären zunächst die Frage, wie sich die bei der Produktdarstellung geltenden Bedingungen für die kritischen Punkte auf die Koeffizientendarstellung übertragen. Da die Nullstellen von P und Q von 0 verschieden sind, gilt $a_0, b_0 \neq 0$. Dass alle diese Nullstellen paarweise verschieden sind,

äußert sich in Bedingungen für die Diskriminanten D_P , D_Q von P und Q und deren Resultante $R_{P,Q}$, denn es gilt

$$D_P \neq 0, \quad D_Q \neq 0, \quad R_{P,Q} \neq 0.$$

Damit sind die Ausnahmefälle theoretisch erfasst, es besteht aber die Problematik, diese konkret zu bestimmen. Wir beschränken uns darauf, sinnvolle Kandidaten für Invarianten der Klassen anzugeben.

Im Fall $d = 2n$ verändern wir die in der Darstellung (7) gewählte Gestalt von f geringfügig und betrachten

$$f(z) = z \left(a \frac{P(z)}{Q(z)} \right)^2.$$

Dann lässt sich zeigen, dass die Parameter

$$\begin{aligned} X_0 &:= a \frac{a_0}{b_0}, & Y_0 &:= \frac{a_0 b_0}{a^{2n-1}}, \\ X_j &:= a^j \frac{a_j}{a_0}, & j &= 1, \dots, n-2, \\ Y_j &:= a^j \frac{b_j}{b_0}, & j &= 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

für jede Klasse aus \mathcal{G}_{2n}^* wohldefiniert sind und zu vorgegebenen Parametern genau eine Äquivalenzklasse existiert. Wie jedoch die Ausnahmemenge aussieht, ist nicht geklärt.

Der Fall $d = 2n + 1$ ist schwieriger, denn hier existiert mit der Inversion eine weitere zu beachtende Transformation. Gehen wir wieder von der ursprünglichen Darstellung (7) für f aus, so definieren wir hier

$$\begin{aligned} X_0 &:= \frac{a_0}{b_0}, & Y_0 &:= 2J(aX_0), \\ X_j &:= \frac{(a_j b_{n-j})^2}{a_0 b_0}, & j &= 1, \dots, n-1, \\ Y_j &:= \frac{a_j^n}{a_0^{n-j}} + \frac{b_{n-j}^n}{b_0^n}, & j &= 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Diese Parameter sind für jede Klasse wohldefiniert. Jedoch ist bei vorgegebenen Parametern die Eindeutigkeit der zugehörigen Klasse unklar und auch die Ausnahmemenge ist wie im obigen Fall unbestimmt.

Aufgrund der nicht konkret angebbaren vollständigen Invarianten ist eine Klassifikation bislang nicht möglich. Dennoch können wir einige Überlegungen allgemeinerer Natur anstellen, die in Zusammenhang mit Kapitel 3 stehen.

Nehmen wir an, dass ein markierter Fixpunkt z_0 attraktiv ist, dann gilt für den lokalen Grad k von f in dem zugehörigen SCHRÖDERgebiet $A(z_0)$ analog zu Satz 3.1 hier $k \geq 3$. Das bedeutet, dass eines der kritischen Urbilder von z_0 in $A(z_0)$ liegt. Dass sich alle kritischen Urbilder dort befinden und damit $A(z_0)$ vollständig invariant ist, kann jedoch nicht gezeigt werden. Ist $k = 3$ der lokale Grad von f in $A(z_0)$ und existieren genau zwei kritische Punkte in $A(z_0)$, ein kritisches Urbild und ein notwendigerweise präperiodischer kritischer Punkt, dann ist $A(z_0)$ einfach zusammenhängend. Über den Zusammenhang der JULIAMenge ist damit aber noch nichts ausgesagt, da zum Beispiel nicht klar ist, wo sich die restlichen Urbildkomponenten von $A(z_0)$ befinden.

Das gleiche Problem besteht auch im Falle eines LEAUpunktes z_0 . Ist B ein Blatt der zugehörigen LEAUblume $A(z_0)$, das einen kritischen Punkt enthält, so kann analog zu Satz 3.6 gezeigt werden, dass auf dessen Rand ein kritischer Vorgänger c_{j_0} von z_0 existiert. Gibt es nur einen nicht präperiodischen kritischen Punkt in $A(z_0)$, dann bilden die vereinigten Ränder der Urbildkomponenten von $A(z_0)$ unter den Iterierten, die c_{j_0} oder eines der Iteriertenurbilder von c_{j_0} als Randpunkt besitzen, eine zusammenhängende Menge. Es bleibt offen, in welchen Fällen die gesamte JULIAMenge zusammenhängend ist.

Literatur

- [1] AHLFORS, L. V., *Lectures on Quasiconformal Mappings*, van Nostrand 1966.
- [2] BEARDON, A. F., *Iteration of rational functions*, Springer 1991.
- [3] BERGWELER, W., *On the number of critical points in parabolic basins*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **22** (2002), 655 - 669.
- [4] CARLESON, L., GAMELIN, T. W., *Complex Dynamics*, Springer 1993.
- [5] DOUADY, A., HUBBARD, J. H., *On the dynamics of polynomial-like mappings*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **18** (1985), 287 - 344.
- [6] FATOU, P., *Sur les équations fonctionnelles*, Bull. Soc. Math. France **47** (1919), 161 - 271 und **48** (1920), 33 - 94, 208 - 314.
- [7] JULIA, G., *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*, J. Math. Pures Appl. **8** (1918), 47 - 245.
- [8] LEHTO, O., VIRTANEN, K., *Quasikonforme Abbildungen*, Springer 1965.
- [9] MATTLER, C., *Juliamengen und lokaler Zusammenhang*, Dissertation, Dortmund 1996.
- [10] MILNOR, J., *Dynamics in one complex variable*, Vieweg 2000.
- [11] MILNOR, J., *On rational maps with two critical points*, Exp. Math. (4) **9** (2000), 481 - 522.
- [12] SHISHIKURA, M., *On the quasiconformal surgery of rational functions*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **20** (1987), 1 - 29.
- [13] STEINMETZ, N., *Rational Iteration*, de Gruyter 1993.
- [14] STEINMETZ, N., *The formula of Riemann-Hurwitz and iteration of rational functions*, Complex Variables **22** (1993), 203 - 206.
- [15] STEINMETZ, N., *Jordan and Julia*, Math. Ann. **307** (1997), 531 - 541.
- [16] SULLIVAN, D., *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, Ann. of Math. **122** (1985), 401 - 418.