

Finite-Elemente- Diskretisierungen für dynamische Probleme mit Kontakt

Diplomarbeit

im Studiengang Mathematik
angefertigt am Fachbereich Mathematik
der Universität Dortmund

von

Andreas Rademacher

Dortmund, März 2005

Betreuer: Prof. Dr. H. Blum

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
Kapitel 1. Das dynamische Hindernisproblem	7
1.1. Notationen	7
1.2. Das dynamische Hindernisproblem	9
1.3. Schwache Formulierung	11
1.4. Zeitdiskretisierung	12
1.5. Ortsdiskretisierung	15
1.6. Weitere Formulierungen	20
Kapitel 2. Analyse des Generalized- α Verfahrens	23
2.1. Eigenwertentwicklung der Wellengleichung	23
2.2. Andere Formulierungen des G- α Verfahrens	26
2.3. Konvergenz des G- α Verfahrens	28
2.4. Stabilität des G- α Verfahrens	32
2.5. Energieerhaltung des Newmark Verfahrens	35
2.6. Numerische Dissipation	36
2.7. Optimale Parameter	43
Kapitel 3. Das Generalized- α Verfahren mit Kontakt	45
3.1. Das Modellproblem	45
3.2. Optimale Parameter für das Newmark Verfahren	47
3.3. Optimale Parameter für das G- α Verfahren	49
Kapitel 4. Numerische Fehleranalyse	59
4.1. Ein Spezialfall	60
4.2. Der Diskretisierungsfehler im Fall ohne Kontakt	61
4.3. Der Diskretisierungsfehler im Fall mit Kontakt	67
Kapitel 5. Analyse der Energieabweichung	81
5.1. Energie in Abhängigkeit von der Anfangsauslenkung	81
5.2. Energie in Abhängigkeit vom Hindernis	85
5.3. Schlussfolgerungen	95

Kapitel 6. Das dynamische Signorini Problem	97
6.1. Das dynamische Signorini Problem	97
6.2. Diskretisierung	99
6.3. Numerische Ergebnisse	101
Kapitel 7. Zusammenfassung und Ausblick	105
Literaturverzeichnis	107
Anhang A. Die numerische Rechnung des Modellproblems	109

Einleitung

Dynamische Probleme mit Kontakt treten in der technischen Anwendung häufig auf. Ein Beispiel ist eine Schleifscheibe, die auf ein zu bearbeitendes Metallstück gedrückt wird. In der mathematischen Modellierung dieses Problems müssen verschiedene nicht lineare Zusammenhänge berücksichtigt werden. Die Kontaktfläche zwischen der Schleifscheibe und dem Metallstück ist a priori unbekannt. Weiterhin müssen die Reibungseffekte auf der Kontaktfläche beschrieben werden. Die numerische Simulation eines solchen Vorganges ist sehr aufwendig. Deshalb werden die Verfahren zur numerischen Simulation anhand von vereinfachten Problemen wie dem dynamischen Hindernis- und dem dynamischen Signorini Problem studiert.

In dieser Arbeit werden dynamische Hindernis- und dynamische Signorini Probleme unter Vernachlässigung von Reibungseffekten betrachtet. Deshalb ist die Berücksichtigung der Kontaktbedingungen der zentrale Punkt bei der Formulierung und Diskretisierung der Probleme. In der Literatur sind verschiedene Techniken dazu bekannt. In [23, 24] werden nicht lineare Variationsgleichungen verwendet. Die Lösung der diskreten Probleme erfolgt in [23] mit dem Penalty Verfahren. Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung von Lagrange Multiplikatoren, wie sie in [15, 32] beschrieben wird. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Kontaktprobleme als Variationsungleichungen geschrieben. Formulierungen dieser Art findet man in [16, 21, 22, 33, 34]. Die diskreten Probleme werden dort durch Optimierungsalgorithmen gelöst. In Kapitel 1 wird das dynamische Hindernisproblem formuliert. Dort wird auch das cg-PSSOR Verfahren eingeführt, das zur Lösung der diskreten Probleme verwendet wird. In Kapitel 6 wird das dynamische Signorini Problem beschrieben.

Die Diskretisierung von dynamischen Problemen erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird das Problem mit einem Zeitschrittverfahren in der Zeit diskretisiert. Anschließend wird das Problem im Ort diskretisiert. Dazu werden Finite Elemente Ansätze verwendet, die in Kapitel 1 und 6 beschrieben werden.

Für die Diskretisierung von dynamische Problemen mit Kontakt ist die richtige Wahl des Zeitschrittverfahrens von entscheidender Bedeutung. Deshalb wird in dieser Arbeit untersucht, welche Zeitschrittverfahren für die Diskretisierung von dynamischen

Problemen mit Kontakt geeignet sind. Ein optimales Zeitschrittverfahren für dynamische Probleme mit Kontakt sollte von zweiter Ordnung konvergent, unbedingt stabil und numerisch dissipativ sein. Zudem sollte es die Energie- und Impulserhaltung während des Kontakts sichern. Der Begriff der numerischen Dissipation beschreibt dabei die Dämpfung von hochfrequenten Schwingungen, die nicht aus dem Modell sondern aus der Diskretisierung entstehen.

In dieser Arbeit wird das Generalized- α Verfahren [2] betrachtet, das kurz als G- α Verfahren bezeichnet wird. Das G- α Verfahren enthält als Spezialfall das Newmark Verfahren [30]. In Kapitel 1 wird das G- α Verfahren eingeführt und auf das dynamische Hindernisproblem angewendet. Die Diskretisierung des dynamischen Signorini Problems bezüglich der Zeit mit dem G- α Verfahren wird in Kapitel 6 beschrieben. Die Analyse des G- α Verfahrens für den Fall ohne Kontakt ist das Thema von Kapitel 2. Es ist von zweiter Ordnung konvergent, unbedingt stabil und numerisch dissipativ.

In Kapitel 3 werden anhand eines einfachen Modellproblems Parameter für das G- α Verfahren bestimmt, für die die Energie- und Impulserhaltung während des Kontakts gilt. Man erhält das Newmark Verfahren mit $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$. Dieses Verfahren ist von zweiter Ordnung konvergent und unbedingt stabil. Es ist aber nicht numerisch dissipativ. Wenn die Zeitschrittlänge so gewählt wird, dass der Kontakt genau zu dem Zeitpunkt eines Zeitschritts auftritt, ergibt sich auch eine Menge von Parameter P_α für das G- α Verfahren, die die Energie- und Impulserhaltung während des Kontakts sichern. Für eine Teilmenge der Parameter P_α ist das G- α Verfahren von zweiter Ordnung konvergent, unbedingt stabil und numerisch dissipativ.

Die anhand des einfachen Modellproblems gemachten Aussagen über die Zeitschrittverfahren übertragen sich auch auf andere dynamische Hindernisprobleme. Bei dem in Kapitel 4 betrachteten Spezialfall des dynamischen Hindernisproblems sind die Diskretisierungen für die nicht optimalen Parameter nicht vernünftig. Auch die Bedingung, dass der Kontakt für das G- α Verfahren mit den Parametern P_α genau zu dem Zeitpunkt eines Zeitschritts erfolgen muss, überträgt sich. Diese Bedingung macht eine genaue Wahl der Zeitschrittlänge erforderlich und schränkt damit die Verwendung des G- α Verfahrens ein.

Für den in Kapitel 4 betrachteten Spezialfall des dynamischen Hindernisproblems ist die analytische Lösung bekannt. Deshalb kann der Diskretisierungsfehler numerisch berechnet werden. Damit ist es möglich, Aussagen über die Konvergenz der numerischen Lösung gegen die analytische Lösung zu machen. Dazu wird die Abhängigkeit des Diskretisierungsfehlers von den Parametern der Zeitschrittverfahren,

der Zeitschrittlänge und der Netzweite untersucht. Den kleinsten Diskretisierungsfehler erhält man, wenn das Newmark Verfahren mit $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$ verwendet wird.

Die Qualität der Diskretisierung hängt nicht nur von den Parametern des Zeitschrittverfahrens, der Zeitschrittlänge und der Netzweite sondern auch von den Anfangswerten und den Hindernissen ab. Deshalb werden in Kapitel 5 verschiedene dynamische Hindernisprobleme betrachtet, für die die Gesamtenergie während der Rechnung erhalten ist. Da für diese Probleme keine analytischen Lösungen bekannt sind, wird der Energieverlust während der Rechnung als Maß für die Qualität der Diskretisierung verwendet. Sie wird von der Form der Anfangsauslenkung und des Hindernisses beeinflusst. Für das Newmark Verfahren mit $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$ ist der Einfluss im allgemeinen so gering, dass er vernachlässigt werden kann. Nur wenn sehr schmale Hindernisse betrachtet werden, ist die Verwendung des Newmark Verfahrens nicht sinnvoll, da hochfrequente Schwingungen entstehen, die nicht gedämpft werden. Für solche Problem sollte Das G- α Verfahren mit den Parametern P_α verwendet werden. Denn im Gegensatz zum Newmark Verfahren dämpft es die hochfrequenten Schwingungen. Zudem kann es verwendet werden, wenn das Hindernis annähernd der Form der Auslenkung zum Zeitpunkt des Kontakts entspricht. In anderen Fällen führt das G- α Verfahren auf keine vernünftigen Diskretisierungen.

In Kapitel 6 werden zwei Beispiele für dynamische Signorini Probleme numerisch gelöst. Dabei werden keine Unterschiede zwischen den Resultaten für das G- α Verfahren mit den Parametern P_α und denen für das Newmark Verfahren mit $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$ beobachtet. Da das G- α Verfahren numerisch dissipativ ist, sollte es zur Diskretisierung von dynamischen Signorini Problemen verwendet werden.

KAPITEL 1

Das dynamische Hindernisproblem

Zu Beginn dieses Kapitels werden die grundlegenden Notationen eingeführt, die zur Formulierung des dynamischen Hindernisproblems verwendet werden. Anschließend wird das dynamische Hindernisproblem in seiner klassischen Form angegeben. Daraus wird die schwache Formulierung in Form einer Variationsungleichung abgeleitet. Von der schwachen Form ausgehend wird das dynamische Hindernisproblem in der Zeit diskretisiert. Dabei ist in jedem Zeitschritt ein Minimierungsproblem mit Nebenbedingungen zu lösen. Das Minimierungsproblem wird mit der Finiten Elemente Methode auf ein endlich dimensionales Problem reduziert, das mit dem cg-PSSOR Verfahren gelöst wird. Zum Abschluss dieses Kapitels werden noch einige weitere schwache Formulierungen des dynamischen Hindernisproblems angegeben.

1.1. Notationen

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Notationen und Begriffe eingeführt, die in dieser Arbeit benutzt werden. Ein Schwerpunkt ist die Definition der Sobolev-Räumen, in denen die Lösungen des dynamischen Hindernisproblems enthalten sind. Mit Ω wird eine Teilmenge des \mathbb{R}^d bezeichnet, wobei $d = 1, 2, 3$ gilt. Die Menge Ω heißt Gebiet, wenn sie offen und zusammenhängend ist. Im folgenden sei Ω ein beschränktes Gebiet mit $\Gamma := \partial\Omega$.

Die in dieser Arbeit verwendeten Sobolev-Räume bauen auf den Räumen $L^2(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$ auf. Dabei ist $L^2(\Omega)$ die Menge aller Funktionen u , deren Quadrat über Ω Lebesgue-integrierbar ist. Zwei Funktionen u und v werden miteinander identifiziert, wenn $u(x) = v(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ gilt. Durch das Skalarprodukt

$$(u, v) := \int_{\Omega} uv \, dx$$

wird $L^2(\Omega)$ zu einem Hilbert-Raum mit der Norm

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)}.$$

Der Banachraum $L^\infty(\Omega)$ besteht aus allen Funktionen u , die fast überall beschränkt sind. Dabei werden Funktionen, die fast überall gleich sind, miteinander identifiziert.

Als Norm wird

$$\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

gewählt. Eine ausführliche Definition und Betrachtung der Räume $L^2(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$ findet sich in [29] Kapitel 1.

Nun werden die Sobolev-Räume eingeführt. Für eine detaillierte Einführung wird auf [5] Kapitel 5 verwiesen. Es seien $u, v \in L^2(\Omega)$ und α ein Multiindex. Dann ist v die schwache partielle Ableitung der Ordnung α von u , kurz $D^\alpha u = v$, falls

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi \, dx$$

für alle Testfunktionen $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ ist. Dabei ist $C_c^\infty(\Omega)$ der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktion $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die einen kompakten Träger besitzen.

Der Sobolev-Raum $H^k(\Omega)$ enthält alle Funktionen u aus $L^2(\Omega)$, für die die schwache Ableitung $D^\alpha u$ für jeden Multiindex α mit $|\alpha| \leq k$ existiert und zu $L^2(\Omega)$ gehört. Der Raum $H^k(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_k := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

und der zugehörigen Norm

$$\|u\|_k := \sqrt{(u, u)_k} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^2}.$$

Mit $H_0^k(\Omega)$ wird der Abschluss von $C_c^\infty(\Omega)$ in der Norm $\|\cdot\|_k$ bezeichnet.

Für $u, v \in H_0^1(\Omega)$ ist durch

$$a(u, v) := (\nabla u, \nabla v)$$

eine symmetrische Bilinearform gegeben. Sie ist elliptisch, das heißt, es gilt mit $\mu > 0$

$$a(u, u) \geq \mu \|u\|_1^2.$$

Jetzt werden Sobolev-Räume mit einer Zeitkomponente betrachtet. Im folgenden sei X ein reeller Banachraum. Weiter sei $I := [0, T]$ ein Intervall mit $T \in (0, \infty)$. Der Raum $L^1(I; X)$ besteht aus allen messbaren Funktionen $u : I \rightarrow X$, für die

$$\|u\|_p := \int_0^T \|u(t)\|_X \, dt < \infty$$

gilt. Die Menge aller messbaren Funktionen $u : I \rightarrow X$ mit

$$\|u\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} \|u(t)\|_X < \infty$$

heißt $L^\infty(I; X)$. Der Raum $C(I; X)$ sei die Menge aller stetigen Funktionen $u : I \rightarrow X$ mit

$$\|u\|_C := \max_{t \in I} \|u(t)\| < \infty.$$

Die Räume $C^n(I; X)$ werden analog definiert.

Sei $u \in L^1(I; X)$. Eine Funktion $v \in L^1(I; X)$ ist eine schwache Ableitung von u , geschrieben als $\dot{u} = v$, wenn

$$\int_0^T \dot{\phi}(t) u(t) dt = - \int_0^T \phi(t) v(t) dt$$

für alle Testfunktionen $\phi \in C_c^\infty(I)$ gilt. Die zweite Zeitableitung von u wird wie gewohnt als $\ddot{u} := \dot{v}$ mit $v = \dot{u}$ definiert.

Der Sobolev-Raum $W^{1,\infty}(I; X)$ besteht aus allen Funktionen $u \in L^\infty(I; X)$, für die die schwache Ableitung \dot{u} existiert und zu $L^\infty(I; X)$ gehört. Weiter ist

$$\|u\|_1 := \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} (\|u(t)\|_X + \|\dot{u}(t)\|_X)$$

die zu $W^{1,\infty}(I; X)$ gehörende Norm. Der Raum $W^{2,\infty}(I; X)$ wird analog definiert. Im Rahmen dieser Arbeit werden nur die Fälle $X = L^2(\Omega)$ und $X = H_0^1(\Omega)$ verwendet.

1.2. Das dynamische Hindernisproblem

In diesem Abschnitt wird zuerst die Wellengleichung vorgestellt. Darauf aufbauend wird dann das dynamische Hindernisproblem formuliert.

Die Wellengleichung lautet

$$(1.2.1) \quad \ddot{u} - \Delta u = f$$

für $u \in C^2(I; C^2(\Omega))$. Man setzt für $v \in C^2(\Omega)$

$$\Delta v := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}.$$

Der Differentialoperator Δ heißt Laplace-Operator. Weiter sei die rechte Seite f der Wellengleichung aus $C(I; C(\Omega))$. Die Betrachtung des Problems erfolgt für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d = 1, 2$. Die Wellengleichung ist ein vereinfachtes Modell für die Schwingung einer Saite ($d = 1$) oder einer Membran ($d = 2$).

Im Rahmen dieser Arbeit werden nur Nullrandbedingungen an die Lösung gestellt. Zudem werden Anfangswerte $u_0 \in C(\Omega)$ und $v_0 \in C(\Omega)$ vorgegeben. Damit ergibt sich das folgende Problem.

PROBLEM 1.2.1. Gesucht ist eine Funktion $u : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ aus $C^2(I; C^2(\Omega))$ so, dass

$$\begin{aligned} \ddot{u} - \Delta u &= f && \text{auf } \Omega \times (0, T] \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma \times I \\ u(t=0) &= u_0 && \text{auf } \Omega \\ \dot{u}(t=0) &= v_0 && \text{auf } \Omega \end{aligned}$$

mit $f \in C(I; C(\Omega))$, $u_0 \in C(\Omega)$ und $v_0 \in C(\Omega)$ gilt.

Ausgehend von Problem 1.2.1 wird das dynamische Hindernisproblem beschrieben. Das Hindernis sei durch eine Funktion $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\psi \in C(\Omega)$ gegeben. Als Kontaktfläche $\Omega_C(t) \subseteq \Omega$ wird die Menge aller Punkte, für die $u(x, t) = \psi(x)$ gilt, bezeichnet. Das Hindernis sei durch die Bedingung

$$(1.2.2) \quad u(x, t) \geq \psi(x)$$

für alle $t \in I$ und alle $x \in \Omega$ beschrieben. Den Fall $u(x, t) \leq \psi(x)$ erhält man, indem man Ungleichung (1.2.2) mit -1 multipliziert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit braucht deshalb nur Ungleichung (1.2.2) betrachtet zu werden.

Um die Notation zu vereinfachen, wird angenommen, dass Ω in der x_1 - x_2 Ebene liegt und die Auslenkung in Richtung der x_3 Achse erfolgt. Es wird

$$\sigma_N := \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$$

gesetzt. Nach [22] muss zusätzlich zu Bedingung (1.2.2) noch die Bedingung

$$(1.2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_N(t, x) &= 0 && \text{für } x \notin \Omega_C(t) \\ \sigma_N(t, x) &\leq 0 && \text{für } x \in \Omega_C(t) \end{aligned}$$

erfüllt sein. Die Bedingungen (1.2.2) und (1.2.3) werden durch

$$(1.2.4) \quad \sigma_N(u - \psi) = 0$$

zusammengefasst. Die Bedingung (1.2.4) wird kinematische Kontaktbedingung genannt. Insgesamt ergibt sich das folgende Problem.

PROBLEM 1.2.2. Gesucht ist eine Funktion $u : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ aus $C^2(I; C^2(\Omega))$ mit einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$, so dass

$$\begin{aligned} \ddot{u} - \Delta u &= f && \text{auf } \Omega \times (0, T] \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma \times I \\ \sigma_N(u - \psi) &= 0 && \text{auf } \Omega \times I \\ u(t = 0) &= u_0 && \text{auf } \Omega \\ \dot{u}(t = 0) &= v_0 && \text{auf } \Omega \end{aligned}$$

gilt. Dabei sei $f \in C(I; C(\Omega))$ sowie die beiden Anfangswerte $u_0 \in C(\Omega)$ und $v_0 \in C(\Omega)$ gegeben.

Die Probleme 1.2.1 und 1.2.2 werden als klassische Formulierungen und ihre Lösungen als klassische Lösungen bezeichnet.

1.3. Schwache Formulierung

In diesem Abschnitt werden die schwachen Formulierungen für die Probleme 1.2.1 und 1.2.2 angegeben.

Zur sinnvollen Formulierung der schwachen Form der Probleme reicht es aus, wenn $f \in L^\infty(I; L^2(\Omega))$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ und $v_0 \in L^2(\Omega)$ gilt. Als Ansatzraum für die so genannten schwachen Lösungen wird

$$V := W^{2,\infty}(I; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(I; H_0^1(\Omega))$$

gewählt. Funktionen v aus V sind in dem Raum $C(I; L^2(\Omega))$ enthalten (siehe [5] Abschnitt 5.9.2).

Mit diesen Notationen lautet die schwache Formulierung von Problem 1.2.1 dann.

PROBLEM 1.3.1. Gesucht ist eine Funktion $u \in V$ mit

$$(1.3.1) \quad (\ddot{u}(t), \varphi(t)) + a(u(t), \varphi(t)) = (f(t), \varphi(t))$$

für alle Funktionen $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ und für fast alle Zeiten $t \in I$. Zudem soll

$$u(t = 0) = u_0 \text{ und } \dot{u}(t = 0) = v_0$$

gelten.

Die schwache Formulierung leitet sich direkt mittels partieller Integration aus der klassischen Formulierung her. Eine analytische Untersuchung der Eigenschaften der

Lösung u sowie einen Beweis ihrer Existenz und Eindeutigkeit findet man in [5] Kapitel 7.2.

Auf der in Problem 1.3.1 dargestellten schwachen Formulierung von Problem 1.2.1 baut die schwache Formulierung von Problem 1.2.2 auf.

Die Menge K der kinematisch zulässigen Lösungen ist definiert als

$$K := \{\varphi \in V \mid \varphi(x, t) \geq \psi(x) \text{ f.ü. auf } \Omega \times I\}.$$

Die Menge K ist konvex und abgeschlossen. In [22] wird damit die folgende schwache Formulierung von Problem 1.2.2 in Form einer variationellen Ungleichung hergeleitet.

PROBLEM 1.3.2. Gesucht ist eine Funktion $u \in K$ mit $u(t=0) = u_0$ und $\dot{u}(t=0) = v_0$ so, dass für alle $\varphi \in K$ und fast alle $t \in I$

$$(\ddot{u}(t), \varphi(t) - u(t)) + a(u(t), \varphi(t) - u(t)) \geq (f(t), \varphi(t) - u(t))$$

gilt.

Die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung ist nicht geklärt. Man findet in [7] Verweise auf Arbeiten, die sich mit der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des eindimensionalen Problems beschäftigen. Der Artikel [25] sei hier genannt, der als Startpunkt der Untersuchungen angesehen wird. Dort wird das Problem nicht in Form einer variationellen Ungleichung formuliert. Resultate für ähnliche Probleme findet man in [4, 6]. Ein in [17] vorgestellter Existenz und Eindeutigkeits Beweis für Problem 1.2.2 in Form einer nicht linearen Variationsgleichung hat sich als fehlerhaft herausgestellt. Für dynamische Hindernisprobleme mit Reibung findet man Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit in [24].

In den nächsten Abschnitten wird die Diskretisierung des Problems 1.2.2 beschrieben. Die Herleitung des diskreten Problems erfolgt analog zum Vorgehen bei der Wellengleichung, eine Beschreibung davon findet man zum Beispiel in [26] Kapitel 9.11. Die Diskretisierung wird in zwei Schritten durchgeführt. Im ersten Schritt wird die Zeitkomponente diskretisiert und im zweiten die Ortskomponente. Die Reihenfolge der Schritte ist dabei unerheblich. Das in dem Zwischenschritt entstehende Problem nennt man semi diskretes Problem.

1.4. Zeitdiskretisierung

In diesem Abschnitt wird die Zeitdiskretisierung des Problems 1.2.2 beschrieben. Zur Diskretisierung wird das G - α Verfahren verwendet, das in [2] vorgestellt wird. Dieses Verfahren baut auf dem bekannten Newmark Verfahren auf (siehe [30]). Deshalb

wird im ersten Teil dieses Abschnitts das Newmark Verfahren und darauf aufbauend das G- α Verfahren vorgestellt. Im zweiten Teil wird das G- α Verfahren auf das Problem 1.2.2 angewendet. In jedem Zeitschritt ist ein durch eine Variationsungleichung gegebenes Problem zu lösen, das äquivalent zu einem Minimierungsproblem ist. Die Lösung dieses Problems ist dann Gegenstand des folgenden Abschnittes.

1.4.1. Das Generalized- α Verfahren. Das Zeitintervall $I = [0, T]$ wird in N äquidistante Teilintervalle $I_m = (t_{m-1}, t_m]$ der Länge $k = t_m - t_{m-1}$ mit $0 =: t_0 < t_1 < \dots < t_N := T$ zerlegt. Es sei $Z := \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ die Menge der Zeitpunkte. Der Funktionswert von u zum Zeitpunkt t_m wird als u^m definiert. Die Geschwindigkeit wird mit $v := \dot{u}$ und die Beschleunigung mit $a = \dot{v} = \ddot{u}$ bezeichnet.

Das klassische Newmark Verfahren zur Zeitdiskretisierung hat für den n -ten Zeitschritt, $1 \leq n \leq N$, die Form

$$(1.4.1) \quad v^n = v^{n-1} + [(1 - \gamma) a^{n-1} + \gamma a^n] k$$

$$(1.4.2) \quad u^n = u^{n-1} + v^{n-1}k + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) a^{n-1} + \beta a^n \right] k^2.$$

Die Beschleunigungen a^n im aktuellen Zeitschritt werden dabei anhand der Differentialgleichung bestimmt. Da in Problem 1.3.2 Bedingungen an u gestellt sind, wird hier die äquivalente Form in den Verschiebungen

$$(1.4.3) \quad a^n = \frac{1}{\beta k^2} (u^n - u^{n-1}) - \frac{1}{\beta k} v^{n-1} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) a^{n-1}$$

$$(1.4.4) \quad v^n = v^{n-1} + [(1 - \gamma) a^{n-1} + \gamma a^n] k$$

verwendet, wobei für a^n in Gleichung (1.4.4) die Gleichung (1.4.3) eingesetzt wird. Dabei sind β und γ zwei beliebige Parameter. Die Wahl $\gamma = \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{4}$ nennt man Trapezregel.

Das G- α Verfahren benutzt die Gleichungen (1.4.1) und (1.4.2) um Näherungen an u^n und v^n zu erhalten. In die Differentialgleichung werden im Unterschied zum Newmark Verfahren die gewichteten Gleichungen

$$(1.4.5) \quad u_{\alpha_H}^n := (1 - \alpha_H) u^n + \alpha_H u^{n-1},$$

$$(1.4.6) \quad v_{\alpha_H}^n := (1 - \alpha_H) v^n + \alpha_H v^{n-1},$$

$$(1.4.7) \quad a_{\alpha_B}^n := (1 - \alpha_B) a^n + \alpha_B a^{n-1},$$

$$(1.4.8) \quad f_{\alpha_H}^n := (1 - \alpha_H) f^n + \alpha_H f^{n-1}$$

eingesetzt. Dabei sind α_H und α_B zwei beliebige Parameter. Wenn $\alpha_H = \alpha_B = 0$ gewählt wird, erhält man das Newmark Verfahren. Für $\alpha_B = 0$ und $\alpha_H \neq 0$ ergibt

sich das HHT- α Verfahren, das in [8] in Abschnitt 9.3 vorgestellt wird. Mit der Wahl $\alpha_B \neq 0$ und $\alpha_H = 0$ entsteht das in [9] vorgestellte WBZ- α Verfahren. Das G- α Verfahren stellt also eine Kombination des HHT- α und des WBZ- α Verfahrens dar. Weiterhin ist das G- α Verfahren in der modifizierten Hoff-Pahl Familie für lineare Probleme enthalten, die in [10] vorgestellt wird. Wenn man dort $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_3 = 1 - \alpha_H$ und $\hat{\eta} = \frac{1-\alpha_B}{1-\alpha_H}$ wählt, ergibt sich das G- α Verfahren.

Die Eigenschaften des G- α Verfahrens werden in Kapitel 2 ausführlich diskutiert.

1.4.2. Zeitdiskretisierung des Problems 1.2.2. Das Problem 1.2.2 wird nun mit dem G- α Verfahrens bezüglich der Zeit diskretisiert. Für die Menge der kinematisch zulässigen Auslenkungen gilt im Fall der Zeitdiskretisierung

$$\tilde{K} = \{ \varphi \in H_0^1(\Omega) \mid \varphi(x) \geq \psi(x) \text{ f.ü. auf } \Omega \}.$$

Damit erhält man folgendes Problem.

PROBLEM 1.4.1. Finde $u : Z \rightarrow \tilde{K}$ mit $u^0 = u_0$ und $v^0 = v_0$ so, dass für alle $\varphi \in \tilde{K}$ und alle $n \in \{1, 2, \dots, N\}$

$$(1.4.9) \quad (a_{\alpha_B}^n, \varphi - u^n) + a(u_{\alpha_H}^n, \varphi - u^n) \geq (f_{\alpha_H}^n, \varphi - u^n)$$

gilt.

Um im weiteren die Notation zu vereinfachen, wird die Bilinearform

$$c(\omega, \varphi) := \frac{1 - \alpha_B}{\beta k^2} (\omega, \varphi) + (1 - \alpha_H) a(\omega, \varphi)$$

für $\omega, \varphi \in \tilde{K}$ und das Funktional

$$b^n(\varphi) := (F^n, \varphi) - \alpha_H a(u^{n-1}, \varphi)$$

definiert, wobei

$$F^n := f_{\alpha_H}^n - \alpha_B a^{n-1} + (1 - \alpha_B) \left[\frac{1}{\beta k^2} u^{n-1} + \frac{1}{\beta k} v^{n-1} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) a^{n-1} \right]$$

ist. Die Bilinearform c ist für sinnvolle β , α_B und α_H elliptisch. Durch Einsetzen der Gleichungen (1.4.3) und (1.4.4) in die Ungleichung (1.4.9) ergibt sich die Ungleichung

$$(1.4.10) \quad c(u^n, \varphi - u^n) \geq b^n(\varphi - u^n).$$

Für $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ wird das Funktional

$$J^n(\varphi) := \frac{1}{2} c(\varphi, \varphi) - b^n(\varphi)$$

definiert. Damit erhält man folgende Formulierung von Problem 1.4.1 als Minimierungsproblem.

PROBLEM 1.4.2. Finde $u : Z \rightarrow \tilde{K}$ mit $u^0 = u_0$ und $v^0 = v_0$ so, dass für alle $n \in \{1, 2, \dots, N\}$

$$u^n = \min_{\varphi \in \tilde{K}} J^n(\varphi)$$

gilt.

In der folgenden Aussage wird die Äquivalenz der Probleme 1.4.1 und 1.4.2 gezeigt.

PROPOSITION 1.4.3. *Problem 1.4.1 ist äquivalent zu Problem 1.4.2.*

BEWEIS. Für beliebiges $\varphi \in \tilde{K}$ gilt

$$\begin{aligned} & J^n(\varphi) - J^n(u^n) \\ &= \frac{1}{2} c^n(\varphi + u^n, \varphi - u^n) - b^n(\varphi - u^n) \\ (1.4.11) \quad &= \frac{1}{2} \underbrace{c^n(u^n - \varphi, u^n - \varphi)}_{=:I} + \underbrace{(c^n(u^n, \varphi - u^n) - b^n(\varphi - u^n))}_{=:II}. \end{aligned}$$

Da u^n Problem 1.4.1 löst, ist der Term II größer oder gleich 0. Da c eine elliptische Bilinearform ist, gilt auch $I \geq 0$. Damit ist

$$J^n(\varphi) \geq J^n(u^n)$$

für alle $\varphi \in \tilde{K}$.

Sei $\varphi \in \tilde{K}$ fest gewählt. Für $0 < \lambda < 1$ wird φ durch $\lambda\varphi + (1 - \lambda)u^n \in \tilde{K}$ in Gleichung (1.4.11) ersetzt und man erhält

$$\begin{aligned} 0 &\leq J^n(\lambda\varphi + (1 - \lambda)u^n) - J^n(u^n) \\ &= c^n(u^n, \lambda\varphi + (1 - \lambda)u^n - u^n) - b^n(\lambda\varphi + (1 - \lambda)u^n - u^n) \\ &\quad + \frac{1}{2}\lambda^2 \|u^n - \varphi\|^2 \\ (1.4.12) \quad &= \lambda [c^n(u^n, \varphi - u^n) - b^n(\varphi - u^n)] + \frac{1}{2}\lambda^2 \|u^n - \varphi\|^2 \end{aligned}$$

Wenn man die Ungleichung (1.4.12) durch λ dividiert und anschließend den Grenzwert $\lambda \rightarrow 0^+$ betrachtet, ergibt sich Ungleichung (1.4.9). \square

1.5. Ortsdiskretisierung

Durch die Zeitdiskretisierung wird Problem 1.3.2 auf die Lösung eines unendlich dimensionalen Minimierungsproblems in jedem Zeitschritt reduziert. Dieser Abschnitt

beschäftigt sich mit der Frage, wie dieses Minimierungsproblem näherungsweise gelöst werden kann.

Mit der Finiten Elemente Methode wird das unendlich dimensionale Minimierungsproblem auf ein endlich dimensionales zurückgeführt. Zur Lösung des endlich dimensional Problems wird das cg-PSSOR Verfahren verwendet.

Dieser Abschnitt besteht aus drei Teilen. Im ersten wird die Ortsdiskretisierung mit Hilfe der Finiten Elemente Methode und die daraus entstehenden endlich dimensional Probleme beschrieben. Im zweiten wird das PSSOR Verfahren vorgestellt. Im dritten wird das, auf dem PSSOR Verfahren aufbauende, cg-PSSOR Verfahren dargestellt.

1.5.1. Ortsdiskretisierung. Im Rahmen dieser Arbeit sind die Ortsdiskretisierungen in jedem Zeitschritt gleich. Deshalb wird zur Vereinfachung der Notation in diesem Abschnitt auf die Verwendung des Index n verzichtet.

Zuerst werden einige Begriffe für den zweidimensionalen Fall eingeführt. Details zu den in diesem Abschnitt verwendeten Begriffen findet man in [28].

Bisher wurde nur gefordert, dass Ω ein beschränktes Gebiet ist. Weiter wird nun verlangt, dass Ω sich in Rechtecke zerlegen lässt.

DEFINITION 1.5.1. Eine Zerlegung $\mathbb{T} = \{T_i | 1 \leq i \leq M\}$ von Ω in Viereckselemente heißt regulär, wenn alle Vierecke kongruent sind. Sie heißt zulässig, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

- (1) $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M T_i$.
- (2) Besteht $T_i \cap T_j$ aus genau einem Punkt, so ist dieser ein Eckpunkt sowohl von T_i als auch von T_j .
- (3) Besteht $T_i \cap T_j$ für $i \neq j$ aus mehr als einem Punkt, so ist $T_i \cap T_j$ eine Kante sowohl von T_i als auch von T_j .

Es wird eine reguläre und zulässige Zerlegung \mathbb{T}_h von Ω verwendet, die aus M Quadraten besteht. Die Kantenlänge der Quadrate wird mit h bezeichnet.

Als Ansatzraum für die Finite Elemente Funktionen wird die Menge

$$S_h := \{v \in H_0^1(\Omega) | v|_{T_i} \in \mathcal{P}_2, v|_{\partial T_i} \in \mathcal{P}_1, T_i \in \mathbb{T}\}$$

gewählt. Dabei bezeichnet \mathcal{P}_i den Raum der Polynome vom Grad i . Funktionen aus S_h sind stetig. Die Koeffizienten der Basisfunktionen werden dabei durch die Funktionswerte in den Eckpunkten der Quadrate bestimmt. Die Menge der Eckpunkte der Quadrate wird mit P bezeichnet.

Im eindimensionalen Fall wird Ω in M äquidistante Teilintervalle T_i der Länge h zerlegt. Die Menge der Endpunkte der Teilintervalle wird wieder als P bezeichnet. Der Ansatzraum sei

$$S_h := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v|_{T_i} \in \mathcal{P}_1, T_i \in \mathbb{T}\}.$$

Auch hier werden die Koeffizienten der Basisfunktionen durch die Funktionswerte an den Intervallendpunkten bestimmt. Für eine ausführliche Darstellung dieses Elements wird auf [26] verwiesen.

Die zulässige Menge ist

$$K_h = \{\varphi \in S_h \mid \varphi(x) \geq \psi(x) \text{ für alle } x \in P\}.$$

Die Finite Elemente Diskretisierung ist nicht unbedingt konform. Für polygonale oder konvexe Hindernisse ist sie konform, für konkave nicht polygonale Hindernisse nicht.

Mit I_h wird die eindeutig bestimmte Interpolierende in dem Raum S_h bezeichnet.

Damit erhält man folgende diskrete Form von Problem 1.3.2.

PROBLEM 1.5.2. Finde $u_h : Z \rightarrow K_h$ mit $u_h^0 = I_h u_0$ und $v_h^0 = I_h v_0$ so, dass für alle $\varphi \in K_h$ und alle $n \in \{1, 2, \dots, N\}$

$$(1.5.1) \quad (a_{h,\alpha_B}^n, \varphi - u_h^n) + a(u_{h,\alpha_H}^n, \varphi - u_h^n) \geq (I_h f_{\alpha_H}^n, \varphi - u_h^n)$$

gilt.

Die äquivalente Formulierung als Minimierungsproblem lautet.

PROBLEM 1.5.3. Suche $u_h : Z \rightarrow K_h$ mit $u_h^0 = I_h u_0$ und $v_h^0 = I_h v_0$ so, dass in jedem Zeitschritt $t_n, 1 \leq n \leq N$, u_h^n das Funktional J_h^n über der Menge K_h minimiert. Dabei ist J_h^n das diskrete Analogon zu J^n .

Nach Problem 1.5.3 ist in jedem Zeitschritt ein endlich dimensionales Minimierungsproblem mit Ungleichheitsnebenbedingung zu lösen.

1.5.2. Das PSSOR Verfahren. In diesem und dem nächsten Abschnitt wird das cg-PSSOR Verfahren vorgestellt, mit dem das Minimierungsproblem 1.5.3 in jedem Zeitschritt gelöst wird. Das cg-PSSOR Verfahren wird in [1] vorgestellt. Es baut auf dem PSSOR Verfahren auf, das zuerst beschrieben wird. Die Abkürzung PSSOR steht dabei für projected symmetric successive overrelaxation. Im nächsten Abschnitt wird dann das cg-PSSOR betrachtet.

Bevor das Verfahren beschrieben wird, werden noch einige Bemerkungen zur Notation und zum mathematischen Hintergrund gemacht. Alle Aussagen beziehen sich auf einen Zeitschritt t_n mit $n \in \{1, 2, \dots, N\}$. Im folgenden werden zur Vereinfachung der Notation die Indices n und h weggelassen.

Die gesuchte Lösung u liegt in einem abgeschlossenen und konvexen Kegel in $H_0^1(\Omega)$ und nicht in einem Vektorraum. Deshalb ist das Minimum einer elliptischen Funktion auf einer konvexen und abgeschlossenen Menge gesucht. Somit ist das Minimum eindeutig bestimmt.

Aufgrund der verwendeten Finiten Elemente werden zur Vereinfachung der Notation, die Finite Elemente Funktionen $v \in S_h$ mit dem Vektor v , dessen Komponenten die Funktionswerte an den Eckpunkten x_i darstellen, identifiziert. Genauso erhält man $\psi_i := (I_h \psi)(x_i)$.

Wenn man Problem 1.5.2 in Matrixform schreibt, erhält man eine Massematrix M und eine Steifigkeitsmatrix K . Diese lassen sich gemäß der Definition von c zu einer Matrix

$$A := \frac{1 - \alpha_B}{\beta k^2} M + (1 - \alpha_H) K$$

zusammensetzen. Die Matrix A ist symmetrisch und für sinnvolle α_B , α_H und β positiv definit, da die Massematrix und die Steifigkeitsmatrix symmetrisch und positiv definit sind.

Ungleichung (1.5.1) ist äquivalent zu den komplementären Relationen

$$\begin{aligned} Au &\geq b, \\ u &\geq \psi, \\ (Au - b)^T (u - \psi) &= 0. \end{aligned}$$

Es wird $\psi_i = -\infty$ gesetzt, wenn an dem Punkt x_i keine Restriktion vorliegt.

Das PSSOR Verfahren $S(u)$ mit einem Relaxationsparameter $\omega \in (0, 2)$ lautet:

$$\begin{aligned} &\text{for } i = 1, 2, \dots, \dim(A) \text{ und for } i = \dim(A), \dots, 2, 1 \\ &\{ \\ (1.5.2) \quad &u_i = \max \left\{ \psi_i, u_i + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_j a_{ij} u_j \right) \right\} \\ &\} \end{aligned}$$

Der Aufwand für m Iterationen des PSSOR Verfahrens ist ungefähr derselbe, wie für $m + 1/2$ Matrix-Vektor Multiplikationen.

In [3] wird gezeigt, dass in jedem Iterationsschritt das Funktional J verkleinert wird und dass das PSSOR Verfahren gegen die Lösung konvergiert. Aber es ist auch bekannt, dass das Verfahren ebenso langsam konvergiert, wie das Gauss-Seidel Verfahren für lineare Probleme.

1.5.3. Das cg-PSSOR Verfahren. Das cg-PSSOR Verfahren wird in diesem Abschnitt vorgestellt. Durch die Abkürzung cg wird deutlich gemacht, dass es sich um ein durch die Verwendung von konjugierten Gradienten beschleunigtes PSSOR Verfahren handelt. In [1] wird anhand von numerischen Beispielen gezeigt, dass dieses Verfahren wesentlich schneller als das PSSOR Verfahren konvergiert.

Um die Notation zu vereinfachen, wird das Verfahren für die Nebenbedingung $u_i \geq 0$ für alle i formuliert. u^0 sei ein beliebiger Startwert. Man berechnet u^1 mit Hilfe eines Schritts des PSSOR Verfahrens.

```

for  $\nu = 1, 2, 3, \dots$ 
{
   $\tilde{u}^{\nu+1} = S(u^\nu)$ 
   $d^{\nu-1} = u^\nu - u^{\nu-1}$ 
   $g^\nu = \tilde{u}^{\nu+1} - u^\nu$ 
  for  $i = 1, 2, \dots, \dim(A)$ 
  {
     $d_i^{\nu-1} = g_i^\nu = 0$ , wenn  $\max\{|d_i^{\nu-1}|, |g_i^\nu|\} \geq \tilde{u}_i^{\nu+1}$  ist.
  }
  bestimme  $d^\nu$  so, dass  $\tilde{u}^{\nu+1} + d^\nu$ 
  die quadratische Funktion auf der Menge
   $u^{\nu+1} + \text{span}\{d^{\nu-1}, g^\nu\}$  minimiert
   $u^{\nu+1} = \tilde{u}^{\nu+1} + d^\nu$ 
}

```

Die Beschleunigung des Algorithmus durch cg typische Schritte ist auf die Menge der inaktiven Punkte beschränkt, da diese Beschränkung das Problem linearisiert. In dem Fall, dass die Nebenbedingung nie aktiv ist, ist die Berechnung die gleiche wie im linearen Fall.

Da die Berechnung sich auf den aktiven und den inaktiven Punkten unterscheidet, müssen auch Punkte, für die $u_i > \psi_i$ und $u_i - \psi_i$ klein gilt, als aktive Punkte behandelt werden.

1.6. Weitere Formulierungen

Die in diesem Kapitel vorgestellte Formulierung des dynamischen Hindernisproblems ist nur eine von verschiedenen Möglichkeiten dieses Problem zu schreiben. In diesem Abschnitt erfolgt nun ein kurzer Überblick über die weiteren Formulierungen.

In [21] wird eine sehr ähnliche Formulierung verwendet. Zusätzlich zu den Bedingungen (1.2.2) und (1.2.3) wird noch die Bedingung

$$\begin{aligned} \dot{u}(t, x) &\leq 0 \quad \text{für } x \in \Omega_C(t) \\ \dot{u}(t, x) &\text{ frei} \quad \text{für } x \notin \Omega_C(t) \end{aligned}$$

an die Lösung u gestellt. Damit erhält man die kinematischen Kontaktbedingungen

$$\begin{aligned} \sigma_N(u - \psi) &= 0 \\ \sigma_N(\dot{u} - \dot{\psi}) &= 0. \end{aligned}$$

Die zulässige Menge \dot{K} ist wieder die Menge aller kinematisch zulässigen Verschiebungen. Man erhält die folgende schwache Formulierung für das Problem.

PROBLEM 1.6.1. Gesucht ist eine Funktion $u \in \dot{K}$ mit $u(t=0) = u_0$ und $\dot{u}(t=0) = v_0$ so, dass für alle $\varphi \in \dot{K}$ und fast alle $t \in I$

$$(\ddot{u}(t), \dot{\varphi}(t) - \dot{u}(t)) + a(u(t), \dot{\varphi}(t) - \dot{u}(t)) \geq (f(t), \dot{\varphi}(t) - \dot{u}(t))$$

gilt.

Bei der Diskretisierung dieses Problems mit Hilfe des G- α Verfahrens ergibt sich in jedem Zeitschritt ein ähnliches Minimierungsproblem wie in Abschnitt 1.4.2. Für weitere Details sei auf [16, 21] verwiesen.

In [17, 23] wird der Zusammenhang

$$|\sigma_N(u)| = c_n |u - \psi|^{m_n}$$

mit zwei Konstanten c_n und m_n angenommen. Es ergibt sich die folgende schwache Form des Problems.

PROBLEM 1.6.2. Gesucht ist eine Funktion $u \in V$ mit $u(t=0) = u_0$ und $\dot{u}(t=0) = v_0$ so, dass für alle $\varphi \in V$ und fast alle $t \in I$

$$(\ddot{u}(t), \varphi(t)) + a(u(t), \varphi(t)) + \langle P(u(t)), \varphi(t) \rangle = (f(t), \varphi(t))$$

gilt, wobei

$$\langle P(u), \varphi \rangle = \int_{\Omega_C} c_n |u - \psi|^{m_n} dx$$

ist.

Hier wird keine Variationsungleichung sondern eine nicht lineare Variationsgleichung benutzt. Das Problem 1.6.2 wird in [23] mit dem Penalty-Verfahrens diskretisiert. In [15] wird die Verwendung von Lagrange Multiplikatoren zur Formulierung des dynamischen Hindernisproblems beschrieben.

KAPITEL 2

Analyse des Generalized- α Verfahrens

In diesem Kapitel werden die Eigenschaften des G- α Verfahrens für gewöhnliche Differentialgleichungen analysiert. Zu Beginn wird der Zusammenhang zwischen der Wellengleichung (1.2.1) und gewöhnlichen Differentialgleichungen geklärt. Damit wird deutlich, warum man sich mit der Analyse des G- α Verfahrens in diesem Rahmen beschäftigt.

Die in Abschnitt 1.4.1 gegebene Form des G- α Verfahrens bietet keinen Zugang zu der allgemeinen Theorie für die Numerik von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Deshalb wird das G- α Verfahren als lineares Mehrschrittverfahren geschrieben. Zur Herleitung dieser Formulierung wird das G- α Verfahren zuerst in die Form einer Amplification Matrix gebracht.

Im Anschluss daran wird die allgemeine Theorie benutzt, um Aussagen über die Konvergenz und die Stabilität des G- α Verfahrens zu beweisen.

Da für viele der im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Probleme aus physikalischen Gründen die Energieerhaltung gilt, wird für den Fall $\alpha_H = \alpha_B = 0$ geklärt, wann das G- α Verfahren die Energie erhält.

Bei der Diskretisierung von dynamischen strukturmechanischen Probleme können hochfrequente Schwingung entstehen, die nicht aus dem physikalischen Modell stammen. Diese Schwingungen sollten von dem verwendeten Zeitschrittverfahren gedämpft werden. Die Dämpfungseigenschaften eines Zeitschrittverfahrens werden mit dem Begriff der numerischen Dissipation beschrieben. Die numerische Dissipation des G- α Verfahrens wird in zwei Schritten erläutert. Zuerst wird der einfachere Fall $\alpha_H = \alpha_B = 0$ beschrieben und dann der allgemeine.

Zum Abschluss werden die Ergebnisse der einzelnen Untersuchungen zusammengefasst und die optimalen Parameter für das G- α Verfahren angegeben.

2.1. Eigenwertentwicklung der Wellengleichung

Im dem Fall, das kein Kontakt vorliegt, reduziert sich das Problem 1.3.2 auf das Problem 1.2.1. Die in Problem 1.2.1 betrachtete Wellengleichung (1.2.1) kann mittels

einer Eigenwertentwicklung des Laplace Operators auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung reduziert werden. Die Ausführung dieser Reduktion ist Inhalt dieses Abschnitts.

Die Eigenwerte des Laplace Operators Δ sind wie folgt definiert.

DEFINITION 2.1.1. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert des Laplace Operators Δ , wenn eine nicht triviale Lösung w des Problems

$$\begin{aligned}\Delta w &= \lambda w && \text{in } \Omega \\ w &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\end{aligned}$$

existiert. w heißt Eigenfunktion zum Eigenwert λ .

Die Eigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Laplace Operators Δ sind in dem folgende Theorem zusammengefasst.

THEOREM 2.1.2. Für die Eigenwerte des Laplace Operators gilt:

- (1) Jeder Eigenwert ist reell.
- (2) Wenn jeder Eigenwert gemäß seiner endlichen Vielfachheit wiederholt wird, erhält man

$$\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$$

mit

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty.$$

- (3) Es existiert eine orthonormale Basis $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ von $L^2(\Omega)$, wobei $w_k \in H_0^1(\Omega)$ eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ_k für $k = 1, 2, \dots$ ist.

BEWEIS. [5] Abschnitt 6.5

□

Im folgenden sei $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ die in Theorem 2.1.2 genannte Basis und $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ seien die dort genannten Eigenwerte des Laplace Operators Δ .

Die Lösung u und die Testfunktionen φ werden in ihrer Basisdarstellung angegeben, wobei die Koeffizienten $\varphi_m \in \mathbb{R}$ und $u_m \in C^2(I)$ sind. Es gilt

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) w_m \\ \ddot{u}(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{u}_m(t) w_m \\ \varphi &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m w_m. \end{aligned}$$

Wenn man die Basisdarstellungen in Gleichung (1.3.1) einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= (\ddot{u}, \varphi) + a(u, \varphi) \\ &= \sum_{m,l=1}^{\infty} \{ \ddot{u}_m \varphi_l (w_m, w_l) + u_m \varphi_l a(w_m, w_l) \} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \{ \ddot{u}_m + \lambda_m u_m \}. \end{aligned}$$

Damit u eine Lösung der Wellengleichung (1.2.1) ist, muss für alle $m \in \mathbb{N}$

$$(2.1.1) \quad \ddot{u}_m + \lambda_m u_m = 0$$

gelten.

Es ist also das folgende Problem mit $\omega^2 = \lambda$ zu betrachten.

PROBLEM 2.1.3. Finde $u \in C^2(I)$ so, dass

$$(2.1.2) \quad \ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

gilt.

Bei Problem 2.1.3 handelt es sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Die hier vorgestellte Rechnung lässt sich analog für hyperbolische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung durchführen, da Theorem 2.1.2 auch für elliptische Differentialoperatoren gilt. Das heißt, Problem 2.1.3 hat auch Aussagekraft für allgemeine elastische Probleme und die hier vorgestellten Überlegungen sind direkt übertragbar.

Eine solche Eigenwertentwicklung ist aber nicht für das Hindernisproblem 1.2.2 möglich. Deshalb sind die in den nächsten Kapiteln betrachteten Aussagen für dynamische Hindernisprobleme nur eingeschränkt von Nutzen.

2.2. Andere Formulierungen des G- α Verfahrens

Wie schon in der Einleitung zu diesem Kapitel erwähnt, ist die in Abschnitt 1.4.1 verwendete Darstellung des G- α Verfahrens der Analyse nicht zugänglich. In diesem Abschnitt werden deshalb die für die Analyse geeigneteren Formulierungen als Amplification Matrix und lineares Mehrschrittverfahren angegeben. Die Amplification Matrix Form lässt sich direkt aus der in Abschnitt 1.4.1 gegebenen Formulierung ableiten. An dem charakteristischen Polynom der Amplification Matrix können dann die Koeffizienten des linearen Mehrschrittverfahrens abgelesen werden.

Zuerst wird das G- α Verfahren für die Gleichung (2.1.2) in der Form $X^{n+1} = AX^n$ geschrieben. Dabei ist A eine Matrix, die als Amplification Matrix bezeichnet wird, und X^n ein Vektor der Form $\{u^n, kv^n, \dots\}^T$. Eine ausführliche Darstellung dieser Schreibweise findet man in [8].

Wenn man das G- α Verfahren auf die Differentialgleichung (2.1.2) anwendet, gilt mit $\Omega := k\omega$

$$(2.2.1) \quad \begin{aligned} & (1 - \alpha_B) \frac{1}{2} k^2 a^n + \frac{1}{2} \Omega^2 (1 - \alpha_H) u^n \\ & = -\alpha_B \frac{1}{2} k^2 a^{n-1} - \frac{1}{2} \Omega^2 \alpha_H u^{n-1}. \end{aligned}$$

Die Gleichung (1.4.1) wird als

$$(2.2.2) \quad \frac{1}{2} kv^n - \frac{1}{2} \gamma k^2 a^n = \frac{1}{2} kv^{n-1} + \frac{1}{2} (1 - \gamma) k^2 a^{n-1}$$

und die Gleichung (1.4.2) als

$$(2.2.3) \quad \frac{1}{2} u^n - \frac{1}{2} \beta k^2 a^n = \frac{1}{2} u^{n-1} + \frac{1}{2} kv^{n-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \beta \right) k^2 a^{n-1}$$

geschrieben. Die Matrix A_l wird als

$$\begin{pmatrix} 1\Omega^2(1 - \alpha_H) & 0 & 1 - \alpha_B \\ 0 & \frac{1}{2} & -\gamma \\ \frac{1}{2} & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

und die Matrix A_r als

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\Omega^2\alpha_H & 0 & -\alpha_B \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 - \gamma \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \beta \end{pmatrix}.$$

definiert. Sei weiter $X^n = \{u^n, kv^n, \frac{1}{2}k^2a^n\}^T$. Die Gleichungen (2.2.1), (2.2.2) und (2.2.3) werden damit zusammenfassend als

$$X^n = A_l^{-1} A_r X^{n-1}$$

geschrieben. Für Amplification Matrix A gilt $A = A_l^{-1}A_r$.

Das charakteristische Polynom von A wird für die Bestimmung der Koeffizienten des linearen Mehrschrittverfahrens und die weitere Analyse benötigt. Es hat die Form

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 2A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3.$$

Dabei sind A_1 , A_2 und A_3 die Invarianten von A . Es sei

$$C_i := [\Omega^2\beta(\alpha_H - 1) + \alpha_B - 1]^{-1}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}\text{tr}(A) \\ &= \frac{1}{4}C_i [2\Omega^2\beta(3\alpha_H - 2) + \Omega^2(2\gamma + 1)(1 - \alpha_H) + 6\alpha_B - 4] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A_3 &= \det(A) \\ &= \frac{1}{2}C_i [\alpha_H\Omega^2(2\beta - 2\gamma + 1) + 2\alpha_B]. \end{aligned}$$

A_2 ist die Summe der Determinanten der 2×2 Untermatrizen A^i von A , die durch das Streichen der i -ten Zeile und i -ten Spalte von A entstehen. Es ergibt sich

$$A_2 = \frac{1}{2}C_i [2\Omega^2\alpha_H(3\beta - 2\gamma) + \Omega^2(2\gamma - 2\beta - 1) + 6\alpha_B - 2].$$

Jetzt werden lineare Mehrschrittverfahren für eine Klasse von Differentialgleichungen definiert und anschließend wird das G- α Verfahren in diesen Kontext eingebettet.

PROBLEM 2.2.1. Gesucht ist eine Lösung $u \in C^2(I)$ der Gleichung

$$(2.2.4) \quad \ddot{u} = f(t, u)$$

mit $u(0) = u_0$ und $\dot{u}(0) = v_0$. Die rechte Seite f soll mindestens stetig sein.

Die Betrachtungen bleiben in dieser Arbeit auf den Fall beschränkt, dass f nicht von \dot{u} abhängt. In dem Fall, dass f von \dot{u} abhängt, ist es nicht mehr möglich die linearen Mehrschrittverfahren für allgemeine f zu formulieren. Man findet eine Beschreibung von linearen Mehrschrittverfahren für

$$f(t, u, \dot{u}) = M^{-1}R(t) - M^{-1}Ku - M^{-1}C\dot{u}$$

in [19]. Dabei sind M , K und C Matrizen und R ist ein Vektor. Die Matrix M ist regulär.

DEFINITION 2.2.2. Ein lineares Mehrschrittverfahren mit m Schritten für Problem 2.2.1 hat die Form

$$(2.2.5) \quad \sum_{i=0}^m \alpha_i u^{n+i} = k^2 \sum_{i=0}^m \beta_i f(t^{n+i}, u^{n+i}).$$

Die von den Koeffizienten α_i und β_i erzeugten Polynome werden mit

$$\rho(\zeta) := \sum_{i=0}^m \alpha_i \zeta^i \quad \text{und} \quad \sigma(\zeta) := \sum_{i=0}^m \beta_i \zeta^i$$

bezeichnet.

Wenn man ein lineares Mehrschrittverfahren nach Definition 2.2.2 auf das Problem 2.1.3 anwendet, erhält man die Differenzgleichung

$$\sum_{i=0}^m (\alpha_i + \Omega^2 \beta_i) u^{n+i} = 0.$$

Bei der Lösung dieser Gleichung ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$(2.2.6) \quad \sum_{i=0}^m (\alpha_i + \Omega^2 \beta_i) \zeta^i = \rho(\zeta) + \Omega^2 \sigma(\zeta) = 0,$$

die mit dem charakteristischen Polynom der Amplification Matrix A bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmt.

Da das charakteristische Polynom von A für das G- α Verfahren bekannt ist, erhält man

$$\rho(\zeta) = \alpha_B + (1 - 3\alpha_B) \zeta + (3\alpha_B - 2) \zeta^2 + (1 - \alpha_B) \zeta^3$$

und

$$\begin{aligned} \sigma(\zeta) &= \frac{1}{2} \alpha_H (2\beta - 2\gamma + 1) + \frac{1}{2} [1 + 2\beta - 2\gamma - 2\alpha_H (3\beta - 2\gamma)] \zeta \\ &\quad + \frac{1}{2} [2\beta (3\alpha_H - 2) + (2\gamma + 1) (1 - \alpha_H)] \zeta^2 + \beta (1 - \alpha_H) \zeta^3. \end{aligned}$$

Somit sind die Koeffizienten des G- α Verfahrens als lineares Mehrschrittverfahren bekannt.

2.3. Konvergenz des G- α Verfahrens

In diesem Abschnitt wird das Konvergenzverhalten des G- α Verfahrens untersucht. Zuerst werden die Resultate für allgemeine lineare Mehrschrittverfahren angegeben und anschließend auf das G- α Verfahren angewendet. Es zeigt sich, dass das G- α Verfahren maximal von zweiter Ordnung konvergent ist.

Das Verfahren (2.2.5) wird auf das Anfangswertproblem

$$\ddot{u} = f(t, u), \quad u(t^0) = u^0, \quad \dot{u}(t^0) = \dot{u}^0$$

angewandt. Um die Konvergenz des Verfahrens (2.2.5) für dieses Problem zu sichern, müssen die Startwerte konsistent zu beiden Anfangswerten sind. Es muss also

$$\frac{u^i - u^0 - ik\dot{u}^0}{k} \rightarrow 0$$

für $h \rightarrow 0$ und $i = 0, 1, \dots, m - 1$ gelten.

Weiterhin benötigt man einen Stabilitätsbegriff. Zur Definition des Stabilitätsbegriffs wird das einfache Problem

$$\ddot{u} = 0, \quad u^0 = 0, \quad \dot{u}^0 = 0$$

betrachtet. Seine numerische Lösung erfüllt eine lineare Differenzgleichung, deren charakteristisches Polynom $\rho(\zeta)$ ist. Dieselben Überlegungen wie für lineare Mehrschrittverfahren für Differentialgleichungen erster Ordnung führen auf die folgende Definition des Stabilitätsbegriffs.

DEFINITION 2.3.1. Das Verfahren (2.2.5) heißt stabil, wenn das erzeugende Polynom $\rho(\zeta)$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (1) Die Nullstellen von $\rho(\zeta)$ liegen auf oder im Inneren des Einheitskreises.
- (2) Die Vielfachheit der Nullstellen auf dem Einheitskreis ist höchstens zwei.

Als letztes benötigt man noch den Begriff der Konsistenz, der analog zu dem von Differentialgleichungen erster Ordnung definiert wird.

DEFINITION 2.3.2. Die Methode (2.2.5) ist konsistent von Ordnung p , wenn für alle hinreichend glatte Funktionen $u(t)$

$$L(u, t, k) = \mathcal{O}(k^{p+2})$$

gilt, wobei

$$L(u, t, k) := \sum_{i=0}^m (\alpha_i u(t + ik) - k^2 \beta_i \ddot{u}(t + ik))$$

ein linearer Differenzenoperator ist.

Das folgende Theorem gibt eine äquivalente Formulierung der Konsistenzbedingungen an.

THEOREM 2.3.3. *Ein lineares Mehrschrittverfahren der Form (2.2.5) ist konsistent von Ordnung p genau dann, wenn*

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^m i\alpha_i = 0$$

und

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i i^q = q(q-1) \sum_{i=0}^m \beta_i i^{q-2}$$

für $q = 2, \dots, p+1$ gilt.

BEWEIS. [11] Kapitel III.10 □

Für die Konvergenz von linearen Mehrschrittverfahren für Differentialgleichungen zweiter Ordnung gilt das folgende Theorem.

THEOREM 2.3.4. *Wenn die Methode (2.2.5) stabil und konsistent von Ordnung p ist und wenn die Startwerte*

$$u(t^j) - u^j = \mathcal{O}(k^{p+1})$$

für $j = 0, 1, \dots, m-1$ erfüllen, konvergiert das Verfahren (2.2.5). Zudem ist die Konvergenz von der Ordnung p , das heißt, dass

$$\|u(t^n) - u^n\| \leq Ck^p$$

für $0 \leq kn \leq C$ gilt.

BEWEIS. [11] Kapitel III.10. Dort wird das lineare Mehrschrittverfahren als allgemeines lineares Verfahren formuliert und die dafür bekannte Theorie angewendet. □

Die Konvergenz des G - α Verfahrens wird nun untersucht. Zuerst wird dazu folgendes Resultat über die Konsistenzordnung bewiesen.

LEMMA 2.3.5. *Für*

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_B + \alpha_H$$

ist das G - α Verfahren von zweiter Ordnung konsistent. Ansonsten ist die Konsistenzordnung 1.

BEWEIS. Es wird nachgerechnet, dass die äquivalenten Bedingungen nach Theorem 2.3.3 für die Konsistenzordnung $p = 2$ erfüllt sind.

Es gilt

$$\sum_{i=0}^3 \alpha_i = \sum_{i=0}^3 \alpha_i i = 0$$

und mit $q = 2$

$$\sum_{i=0}^3 \alpha_i i^2 = 2 \sum_{i=0}^3 \beta_i = 2.$$

Somit bleibt noch der Fall $q = 3$ und dafür gilt

$$\sum_{i=0}^3 \alpha_i i^3 = 12 - 6\alpha_B$$

und

$$6 \sum_{i=0}^3 \beta_i i = 9 + 6\gamma - 6\alpha_H.$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{1}{2} - \alpha_B + \alpha_H = \gamma$$

gelten muss, damit das G- α Verfahren von zweiter Ordnung konsistent ist. Ansonsten ist die Konsistenzordnung 1. \square

Für die Stabilität des G- α Verfahrens gilt das folgende.

LEMMA 2.3.6. *Das G- α Verfahren ist stabil, wenn $\alpha_B \leq \frac{1}{2}$ gewählt wird.*

BEWEIS. Es gilt

$$\rho(\zeta) = (\zeta - 1)^2 \left(\zeta - \frac{\alpha_B}{\alpha_B - 1} \right) (1 - \alpha_B).$$

Jetzt liest man direkt ab, dass 1 eine zweifache Nullstelle und $\frac{\alpha_B}{\alpha_B - 1}$ eine einfache Nullstelle von ρ ist.

Für $\alpha_B < \frac{1}{2}$ gilt

$$\left| \frac{\alpha_B}{\alpha_B - 1} \right| < 1.$$

Für $\alpha_B = \frac{1}{2}$ gilt

$$\frac{\alpha_B}{\alpha_B - 1} = -1,$$

womit -1 eine einfache Nullstelle ist. Damit ist die Stabilität bewiesen. \square

Die Lemmata 2.3.5 und 2.3.6 implizieren zusammen mit Theorem 2.3.4 die folgende Aussage über die Konvergenz des G- α Verfahrens.

THEOREM 2.3.7. *Wenn $\alpha_B \leq \frac{1}{2}$ und $\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_B + \alpha_H$ gewählt wird, ist das G- α Verfahren von zweiter Ordnung konvergent.*

2.4. Stabilität des G- α Verfahrens

In diesem Abschnitt wird die Stabilität von linearen Mehrschrittverfahren näher betrachtet. Der im vorhergehenden Abschnitt eingeführte Begriff der Stabilität sichert die Konvergenz von linearen Mehrschrittverfahren. Er sichert aber zum Beispiel nicht, dass alle numerisch berechneten Lösungen der Differentialgleichung

$$(2.4.1) \quad \ddot{u} = -\omega^2 u$$

mit $\omega \in \mathbb{R}^+$ beschränkt bleiben, wie die analytische Lösungen $e^{i\omega t}$. Die Testgleichung (2.4.1) wird von Dahlquist in [12] eingeführt. Sie stimmt gerade mit Problem 2.1.3 überein, das aus der Eigenwertentwicklung der Wellengleichung stammt. Man nennt ein lineares Mehrschrittverfahren, für das alle berechneten Lösungen von (2.4.1) beschränkt sind, unbedingt stabil. Es soll allerdings die Definition der unbedingten Stabilität mit Hilfe der charakteristischen Polynome genutzt werden.

DEFINITION 2.4.1. Man nennt das Verfahren (2.2.5) unbedingt stabil, wenn für alle $\Omega \in \mathbb{R}^+$, alle Nullstellen $\zeta_j(\Omega)$ von (2.2.6) auf oder im Inneren des Einheitskreises liegen und alle Nullstellen auf dem Einheitskreis einfach sind.

Dahlquist hat in [12] bewiesen, dass ein unbedingt stabiles Verfahren der Form (2.2.5) höchstens von zweiter Ordnung konsistent sein kann.

Um die unbedingte Stabilität des G- α Verfahrens zu beweisen, wird das folgende Lemma verwendet.

LEMMA 2.4.2. *Wenn für die Koeffizienten des Polynoms*

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 2A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3$$

die Ungleichungen

$$(2.4.2) \quad 1 - 2A_1 + A_2 - A_3 \geq 0$$

$$(2.4.3) \quad 3 - 2A_1 - A_2 + 3A_3 \geq 0$$

$$(2.4.4) \quad 3 + 2A_1 - A_2 - 3A_3 \geq 0$$

$$(2.4.5) \quad 1 + 2A_1 + A_2 + A_3 \geq 0$$

$$(2.4.6) \quad 1 - A_2 + A_3(2A_1 - A_3) \geq 0$$

erfüllt sind, liegen alle Nullstellen im oder auf dem Einheitskreis und die Nullstellen auf dem Einheitskreis sind einfach.

Die Bedingungen (2.4.2) bis (2.4.5) sind notwendig. Wenn zusätzlich die Bedingung (2.4.6) erfüllt ist, so ist das hinreichend. Das Lemma ist im wesentlichen das Routh-Hurwitz Kriterium.

BEWEIS. [14] Abschnitt 3.7 □

Für die unbedingte Stabilität des G- α Verfahrens gilt das folgende Theorem.

THEOREM 2.4.3. *Wenn*

$$(2.4.7) \quad \beta \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_H - \alpha_B),$$

$$(2.4.8) \quad \gamma = \frac{1}{2} + \alpha_H - \alpha_B$$

und

$$(2.4.9) \quad -1 \leq \alpha_B \leq \alpha_H \leq \frac{1}{2}$$

gewählt wird, ist das G- α Verfahren unbedingst stabil.

BEWEIS. Es sind die Voraussetzungen von Lemma 2.4.2 zu zeigen.

Ungleichung (2.4.2): Es gilt nach Voraussetzung

$$\Omega^2\beta(\alpha_H - 1) + \alpha_B - 1 \leq 0$$

und damit $C_i \leq 0$. Hieraus folgt

$$0 \leq -\Omega^2 C_i = 1 - 2A_1 + A_2 - A_3.$$

Ungleichung (2.4.3): Die Voraussetzungen implizieren

$$0 \leq \frac{1}{2} - \alpha_B \stackrel{(2.4.8)}{=} \gamma - \alpha_H.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq -2\Omega^2 C_i (\gamma - \alpha_H) \\ &= 3 - 2A_1 - A_2 + 3A_3. \end{aligned}$$

Ungleichung (2.4.4): Es gilt nach Voraussetzung $\alpha_H \leq \frac{1}{2}$ und $\alpha_H \geq \alpha_B$. Deshalb gilt

$$\frac{1}{4} + \alpha_H^2 - \alpha_B \alpha_H \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_H - \alpha_B) \leq \beta.$$

Damit folgt mit Gleichung (2.4.8)

$$\begin{aligned} & -4\beta + 4\gamma\alpha_H + 1 - 2\alpha_H \\ &= -4\beta + 4\alpha_H^2 - 4\alpha_B\alpha_H + 1 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Das heißt aber gerade

$$\begin{aligned} 0 &\leq C_i [\Omega^2 (-4\beta + 4\gamma\alpha_H + 1 - 2\alpha_H) - 4] \\ &= 3 + 2A_1 - A_2 - 3A_3. \end{aligned}$$

Ungleichung (2.4.5): Es gilt nach Voraussetzung $2\beta \geq \gamma$ und somit

$$\begin{aligned} 0 &\leq -2C_i \left[2\Omega^2 \left(\frac{1}{2} - \alpha_H \right) (2\beta - \gamma) + 4 \left(\frac{1}{2} - \alpha_B \right) \right] \\ &= 1 + 2A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned}$$

Ungleichung (2.4.6): Nach den Voraussetzungen (2.4.7) und (2.4.9) gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\alpha_H - \alpha_B) \left(\alpha_H - \frac{1}{2} \right) \left(\alpha_B - \frac{1}{2} \right) \\ &= (\alpha_H - \alpha_B) \left(\alpha_H\alpha_B - \frac{1}{2}\alpha_H - \frac{1}{2}\alpha_B + \frac{1}{4} \right) \\ &\leq \beta(\alpha_H - \alpha_B) + \alpha_H^2\alpha_B - \alpha_H^2 - \alpha_H\alpha_B^2 + \alpha_H\alpha_B. \end{aligned}$$

Die Anwendung von Voraussetzung (2.4.9) ergibt die Identität

$$\begin{aligned} & 4\gamma\beta - 4\gamma^2\alpha_H + 4\gamma\alpha_H^2 + \alpha_H - 2\alpha_H^2 - 2\beta \\ &= 4 [\beta(\alpha_H - \alpha_B) - \alpha_H^2 + \alpha_B\alpha_H + \alpha_H^2\alpha_B - \alpha_B^2\alpha_H]. \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{4}\Omega^4 C_i^2 (4\gamma\beta - 4\gamma^2\alpha_H + 4\gamma\alpha_H^2 + \alpha_H - 2\alpha_H^2 - 2\beta) \\ &\quad + \Omega^2 C_i^2 \left[\gamma - \left(\frac{1}{2} + \alpha_H - \alpha_B \right) \right] \\ &= 1 - A_2 + A_3 (2A_1 - A_3). \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis des Theorems abgeschlossen. □

Für das Newmark Verfahren gilt darüber hinaus das folgende Resultat.

PROPOSITION 2.4.4. *Das Newmark Verfahren ist für $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$ unbedingt stabil.*

BEWEIS. [13]

□

2.5. Energieerhaltung des Newmark Verfahrens

In diesem Abschnitt wird untersucht, für welche Parameter γ und β das Newmark Verfahren die Energie für die homogene Wellengleichung erhält. Die hier vorgestellten Rechnungen gelten analog für dynamische elastische Probleme. Diese Rechnung findet man in ähnlicher Form bei [8]. Für das G- α Verfahren nimmt die Gesamtenergie im Lauf der Rechnung zumindest nicht zu. Eine genauere Beschreibung findet man in [35].

DEFINITION 2.5.1. Die kinetische Energie wird mit $T(v) := \frac{1}{2}(v, v)$ und die potentielle Energie mit $U(u) := \frac{1}{2}a(u, u)$ bezeichnet.

Es sei $[u^n] := u^{n+1} - u^n$ der vorwärts genommene Differenzoperator und $\langle u^n \rangle = \frac{1}{2}(u^{n+1} + u^n)$ der Mittelwertoperator.

Es gilt $(\langle u^n \rangle, [u^n]) = \frac{1}{2}[(u^n, u^n)]$. Die Gleichungen (1.4.1) und (1.4.2) des Newmark Verfahrens lassen sich mit Hilfe des Differenz- und des Mittelwertoperators als

$$[v^n] = k((1 - \gamma)a^n + \gamma a^{n+1})$$

und

$$[u^n] = k \langle v^n \rangle + k^2 \left(\beta - \frac{\gamma}{2} \right) [a^n]$$

schreiben.

Die homogene Wellengleichung (1.3.1) bezüglich der Zeit diskretisiert hat die Form

$$(2.5.1) \quad (a^n, \varphi) + a(u^n, \varphi) = 0$$

mit einer beliebigen Testfunktion $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Es gilt weiter

$$([a^n], \varphi) + a([u^n], \varphi) = 0$$

und

$$(\langle a^n \rangle, \varphi) + a(\langle u^n \rangle, \varphi) = 0.$$

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} [T(v^n)] &= ([v^n], \langle v^n \rangle) \\ &= \left((1 - \gamma)a^n + \gamma a^{n+1}, [u^n] - k^2 \left(\beta - \frac{\gamma}{2} \right) [a^n] \right) \\ &= \left(\langle a^n \rangle + \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) [a^n], [u^n] - k^2 \left(\beta - \frac{\gamma}{2} \right) [a^n] \right). \end{aligned}$$

Mit (2.5.1) erhält man

$$\begin{aligned}
& \left(\langle a^n \rangle + \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) [a^n], [u^n] - k^2 \left(\beta - \frac{\gamma}{2} \right) [a^n] \right) \\
&= -a(u^n, u^n) - \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) a(u^n, u^n) \\
&\quad - k^2 \left(\beta - \frac{\gamma}{2} \right) \left([T(a^n)] + 2 \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) T([a^n]) \right) \\
&= -[U(u^n)] - 2 \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) U([u^n]) \\
&\quad - k^2 \left(\beta - \frac{\gamma}{2} \right) \left([T(a^n)] + 2 \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) T([a^n]) \right).
\end{aligned}$$

Die obige Gleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
& [T(v^n)] + [U(u^n)] + k^2 \left(\beta - \frac{\gamma}{2} \right) [T(a^n)] \\
(2.5.2) \quad &= -2 \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) U([u^n]) - k^2 \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) (2\beta - \gamma) T([a^n]).
\end{aligned}$$

Diese Gleichung impliziert die folgende Proposition.

PROPOSITION 2.5.2. *Wenn $\beta = \frac{1}{4}$ und $\gamma = \frac{1}{2}$ gewählt wird, erhält das Newmark Verfahren die Gesamtenergie*

$$E(u^n, v^n) := T(v^n) + U(u^n)$$

für die homogene Wellengleichung.

BEWEIS. Mit $\beta = \frac{1}{4}$ und $\gamma = \frac{1}{2}$ vereinfacht sich Gleichung (2.5.2) zu

$$[E(u^n, v^n)] = [T(v^n)] + [U(u^n)] = 0,$$

womit die Aussage bewiesen ist. □

Gleichung (2.5.2) liefert auch Aussagen über den Verlauf der Gesamtenergie für andere Verfahren als die Trapezregel.

2.6. Numerische Dissipation

Bei der Diskretisierung dynamischer strukturmechanischer Probleme entstehen hochfrequente Anteile in den Gleichungen, die nicht aus dem Problem selbst sondern aus der Diskretisierung stammen. Es ist wünschenswert und manchmal unumgänglich diese Anteile zu dämpfen. Die Dämpfung beschreibt man mit dem Begriff der numerischen Dissipation.

Um die numerische Dissipation eines Zeitschrittverfahrens zu beschreiben, betrachtet man den Spektralradius

$$\rho(A) := \max \{ |\lambda| \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A \}$$

der Amplification Matrix in Abhängigkeit von Ω . Für kleine Ω sollte der Spektralradius 1 sein, damit die niedrigen Frequenzen nicht gedämpft werden. Mit zunehmenden Ω ist es wünschenswert, dass sich der Spektralradius stetig verkleinert und einen möglichst kleinen Grenzwert

$$\rho_\infty = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \rho(A)$$

besitzt. Der Grenzwert ρ_∞ wird als asymptotischen Spektralradius bezeichnet. Sofern sich die Amplification Matrix diagonalisieren lässt, liest man direkt ab, dass die Lösung wie $\rho(A)^n$ abklingt. Ansonsten kann man es an der Jordanschen Normalform ablesen. Die Details hierzu findet man in [18]. Eine weitergehende Beschreibung der numerischen Dissipation ist in [8] enthalten.

Nun wird die numerische Dissipation des G- α Verfahrens untersucht. Dabei wird in zwei Schritten vorgegangen. Zuerst wird die numerische Dissipation für das Newmark Verfahren, also für $\alpha_B = \alpha_H = 0$, und dann die des G- α Verfahrens betrachtet. Die Untersuchung des Newmark Verfahrens zeigt wichtige Eigenschaften auf, die auch für das G- α Verfahren eine wichtige Rolle spielen.

2.6.1. Numerische Dissipation für das Newmark Verfahren. Wenn $\alpha_H = \alpha_B = 0$ gilt, vereinfacht sich das charakteristische Polynom $\chi(\lambda)$ zu

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2A_1\lambda + A_2$$

mit

$$A_1 = 1 - \frac{1}{2} \frac{(\gamma + \frac{1}{2}) \Omega^2}{1 + \beta \Omega^2}$$

und

$$A_2 = 1 - \frac{(\gamma - \frac{1}{2}) \Omega^2}{1 + \beta \Omega^2}.$$

Damit gilt für die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ der Amplification-Matrix

$$\lambda_{1,2} = A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - A_2}.$$

Bevor die Frage nach den Eigenschaften des Newmark Verfahrens bezüglich numerischer Dissipation geklärt wird, wird untersucht, wann die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ komplex konjugiert sind und das Newmark Verfahren gleichzeitig unbedingt stabil ist.

Wenn ab einem Ω_{bif} aus zwei komplex konjugierten Eigenwerte zwei reelle getrennte werden, dann liegt das Minimum des Spektralradius typischerweise nicht beim

Grenzfall $\Omega \rightarrow \infty$ sondern bei Ω_{bif} . Es sind also für die numerische Dissipation Verfahren interessant, für die $\Omega_{bif} = \infty$ gilt.

PROPOSITION 2.6.1. *Wenn $\gamma \geq \frac{1}{2}$ und*

$$\beta \geq \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2$$

gewählt wird, ist das Newmark Verfahren unbedingt stabil und gleichzeitig sind die Eigenwerte komplex konjugiert.

BEWEIS. Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 < \Omega^{-2} + \beta.$$

Durch einfaches Umformen folgt daraus $A_1^2 < A_2$. Somit sind die Eigenwerte komplex konjugiert.

Es ist noch zu zeigen, dass die Voraussetzungen von Proposition 2.4.4 erfüllt sind. Es gilt

$$2\beta \geq \frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\gamma - \frac{1}{2} \right)^2 + \gamma \geq \gamma.$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

Der Beweis zeigt, dass $\frac{1}{2}\gamma \leq \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2$ gilt. Nun wird geklärt, wann die Eigenwerte für β zwischen $\frac{1}{2}\gamma$ und $\frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2$ komplex konjugiert sind.

PROPOSITION 2.6.2. *Für $\gamma \geq \frac{1}{2}$ und*

$$\frac{1}{2}\gamma \leq \beta < \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2$$

ist das Newmark Verfahren unbedingt stabil, die Eigenwerte sind aber nur für $\Omega < \Omega_{bif}$ mit

$$\Omega_{bif} := \left[\frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 - \beta \right]^{-\frac{1}{2}}$$

komplex konjugiert.

BEWEIS. Nach Proposition 2.4.4 ist klar, dass das Newmark Verfahren für diese Parameter unbedingt stabil ist. Zu zeigen ist also nur, dass die Eigenwerte für $\Omega < \Omega_{bif}$ komplex konjugiert sind. Die Ungleichung $A_1^2 < A_2$ ist äquivalent zu

$$\left[\frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 - \beta \right] \Omega^4 < \Omega^2.$$

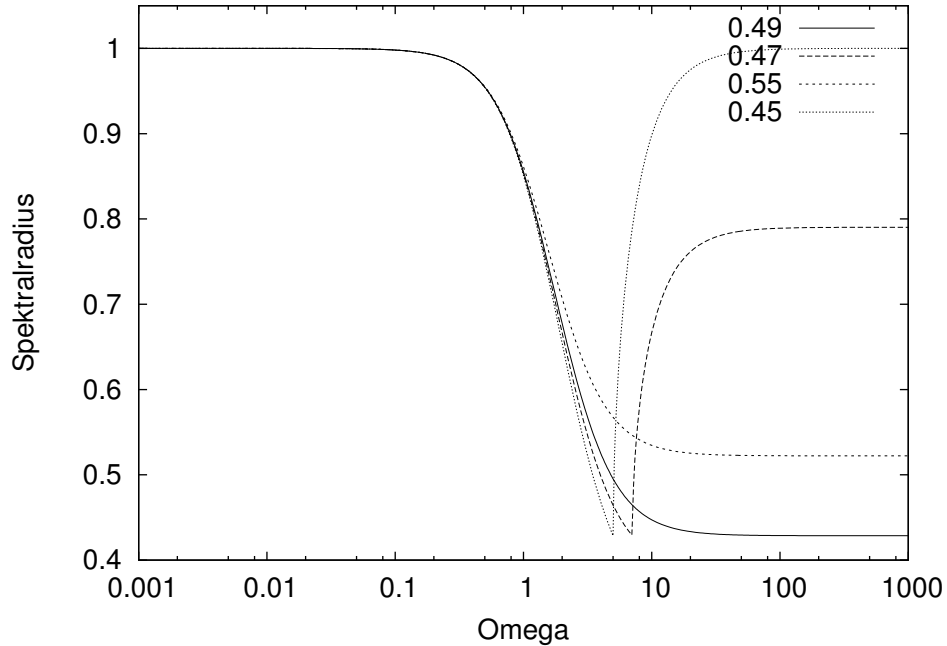


ABBILDUNG 2.6.1. Spektralradii des Newmark Verfahrens in Abhängigkeit von Ω

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $\Omega < \Omega_{bif}$ ist. Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

In Abbildung 2.6.1 sind für $\gamma = 0.9$ die Verläufe der Spektralradii für verschiedene β zu sehen. Es gilt $\frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{100}$. Die Abbildung 2.6.1 zeigt, dass man für $\beta = \frac{49}{100}$ den besten Verlauf erhält. Für $\beta > \frac{49}{100}$ sind die Graphen ähnlich, haben aber einen größeren Grenzwert. Für $\beta < \frac{49}{100}$ erreichen die Graphen gerade für Ω_{bif} ihr Minimum. Dieses Verhalten ist typisch für den Fall, wenn aus zwei komplex konjugierten Eigenwerte zwei reelle getrennt werden.

Das Resultat aus Abbildung 2.6.1 wird nun analytisch bewiesen.

THEOREM 2.6.3. *Für unbedingt stabile Newmark Verfahren, also für Newmark Verfahren mit $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$, ist der asymptotische Spektralradius ρ_∞ minimal, wenn*

$$\beta = \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2$$

ist. Es gilt dann

$$\rho_\infty = \left| 1 - \frac{2}{\gamma + \frac{1}{2}} \right|.$$

Für $2\beta = \gamma$ ist der asymptotische Spektralradius 1.

BEWEIS. [8] Kapitel 9

\square

Das Theorem besagt insbesondere, dass für $\gamma = \frac{1}{2}$ keine numerische Dissipation für das Newmark Verfahren zu erwarten ist. Das heißt aber gerade, dass dissipative Newmark Verfahren nach Theorem 2.3.7 nur von erster Ordnung konvergent sind.

2.6.2. Numerische Dissipation für das G- α Verfahren. Da in diesem Abschnitt häufig mit dem asymptotischen Spektralradius gearbeitet wird, wird dieser zuerst berechnet. Für die Eigenwerte der Amplification Matrix gilt mit $\Omega \rightarrow \infty$

$$\lambda_3^\infty = \frac{\alpha_H}{\alpha_H - 1}$$

und

$$\lambda_{1,2}^\infty = \frac{1}{4\beta} \left(4\beta - 2\gamma - 1 \pm \sqrt{4\gamma^2 + 4\gamma + 1 - 16\beta} \right).$$

Für den asymptotischen Spektralradius gilt

$$\rho_\infty = \max \{ |\lambda_{1,2}^\infty|, |\lambda_3^\infty| \}.$$

Es wird angenommen, dass eine positive Zahl Ω_{bif} existiert, so dass für $0 < \Omega < \Omega_{bif}$ zwei der Eigenwerte von A komplex konjugiert sind. Diese beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2 werden Haupteigenwerte genannt. Der Eigenwert λ_3 heißt störender Eigenwert. Für kleine Ω gilt typischerweise $|\lambda_3| < |\lambda_{1,2}|$. Im folgenden soll $|\lambda_3| \leq |\lambda_{1,2}|$ für alle $\Omega \in [0, \infty)$ gelten. Wenn diese Bedingung verletzt wird, hat der Graph des Spektralradius sein Minimum nicht am Rand sondern in der Mitte. Ein solches Verfahren dämpft Frequenzen nahe des Minimums stärker als die hohen Frequenzen und ist damit für die Praxis uninteressant.

Die Haupteigenwerte sollten für alle $\Omega \in [0, \infty)$ komplex konjugiert bleiben, denn wenn die Eigenwerte sich aufspalten, wächst einer mit zunehmenden Ω und damit wächst auch der Spektralradius. Solch ein Verfahren ist unter diesen Gesichtspunkten natürlich auch nicht interessant. Dieses Verhalten wird auch beim Newmark Verfahren beobachtet. Damit ist der Fall interessant, wenn die Eigenwerte sich im Limes $\Omega \rightarrow \infty$ aufspalten.

PROPOSITION 2.6.4. *Die beiden Haupteigenwerte sind gerade im Limes $\Omega \rightarrow \infty$ gleich und reell, wenn*

$$\beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha_B + \alpha_H)^2$$

und

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_B + \alpha_H$$

gewählt wird.

BEWEIS. Es ist $\lambda_1^\infty = \lambda_2^\infty$ genau dann, wenn

$$\beta = \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - \alpha_B + \alpha_H)^2$$

ist. Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

Der Beweis zeigt auch, dass gerade die Bedingung des Newmark Verfahrens

$$\beta = \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2$$

hergeleitet wird.

Zusätzlich zu der maximalen Dissipation für die hohen Frequenzen sollte die Dissipation für niedrige Frequenzen minimal sein. Laut [2] ist das Verhalten für niedrige Frequenzen optimal, wenn

$$\lambda_3^\infty = \lambda_{1,2}^\infty$$

gilt. Dabei wird angenommen, dass die Voraussetzungen von Proposition 2.6.4 erfüllt sind. Dann gilt

$$(2.6.1) \quad \lambda_{1,2}^\infty = \frac{\alpha_H - \alpha_B - 1}{\alpha_H - \alpha_B + 1}.$$

Mit

$$\lambda_3^\infty = \frac{\alpha_H}{\alpha_H - 1}$$

erhält man

$$\alpha_H = \frac{1}{3} (\alpha_B + 1).$$

Die Resultate dieses Abschnitts sind in dem folgenden Theorem zusammengefasst.

THEOREM 2.6.5. *Wenn die Parameter des G- α Verfahrens*

$$\alpha_H = \frac{1}{3} (\alpha_B + 1),$$

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_B + \alpha_H$$

und

$$\beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha_B + \alpha_H)^2$$

erfüllen, ist die numerische Dissipation optimal. Das heißt, der Spektralradius ist für kleine Ω gleich 1 und fällt dann stetig mit Ω auf einen möglichst kleinen Grenzwert ab.

In der Abbildung 2.6.2 ist ein solcher optimaler Verlauf des Spektralradius zu sehen. Mit Gleichung (2.6.1) wird für das HHT- α und das WBZ- α Verfahren der Zusammenhang zwischen dem asymptotischen Spektralradius und α_H beziehungsweise α_B

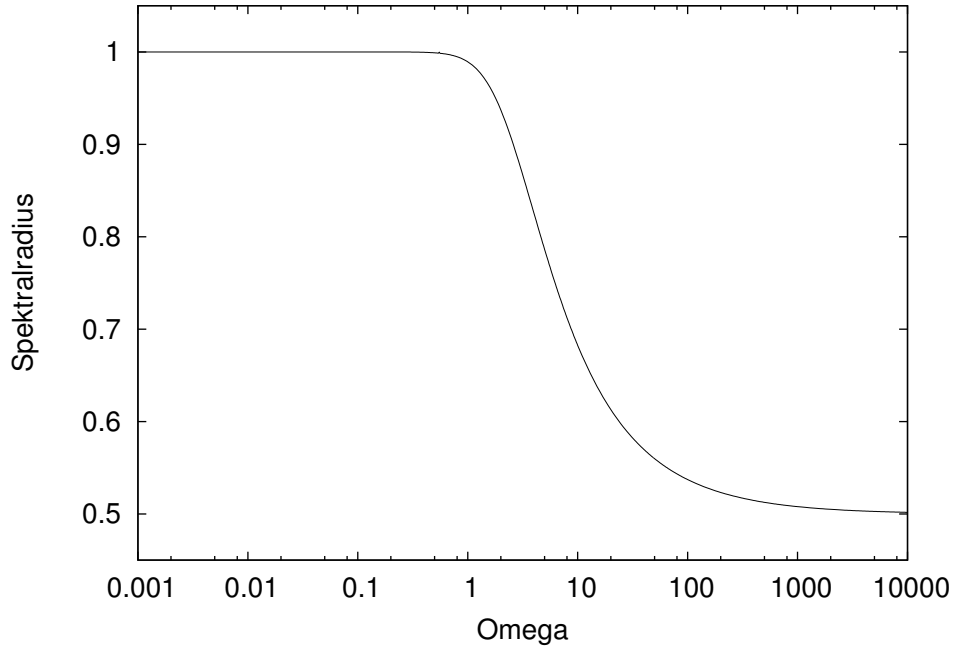


ABBILDUNG 2.6.2. Verlauf des Spektralradius für $\gamma = \frac{5}{6}$, $\beta = \frac{4}{9}$, $\alpha_B = 0$ und $\alpha_H = \frac{1}{2}$

geklärt. Es gilt nach Gleichung (2.6.1)

$$\rho_\infty = \left| \frac{\alpha_H - \alpha_B - 1}{\alpha_H - \alpha_B + 1} \right|.$$

Für das HHT- α Verfahren gilt $\alpha_B = 0$ und damit

$$(2.6.2) \quad \rho_\infty = \frac{1 - \alpha_H}{1 + \alpha_H}.$$

Daraus folgt

$$\alpha_H = \frac{1 - \rho_\infty}{1 + \rho_\infty}$$

für $\rho_\infty \in [\frac{1}{2}, 1]$. Für das WBZ- α Verfahren gilt $\alpha_H = 0$. Somit ist dann

$$\rho_\infty = \frac{1 + \alpha_B}{1 - \alpha_B}.$$

Deshalb gilt

$$\alpha_B = \frac{\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}$$

mit $\rho_\infty \in [0, 1]$. Mit diesen Gleichungen kann man anhand eines vorgegebenen asymptotischen Spektralradius, die Parameter für die Verfahren mit Proposition 2.6.4 bestimmen.

2.7. Optimale Parameter

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse dieses Kapitels zusammengefasst und optimale Parameter für das G- α Verfahren angegeben. Zudem wird der Zusammenhang zwischen dem asymptotischen Spektralradius und den Parametern α_B und α_H hergestellt.

PROPOSITION 2.7.1. *Wenn*

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2} + \alpha_H - \alpha_B, \\ \beta &= \frac{1}{4}(1 - \alpha_B + \alpha_H)^2, \\ \alpha_H &= \frac{1}{3}(\alpha_B + 1)\end{aligned}$$

und $\alpha_B \in [-1, \frac{1}{2}]$ gewählt wird, ist das G- α Verfahren von zweiter Ordnung konvergent, unbedingt stabil und die numerische Dissipation optimal.

BEWEIS. Zu zeigen sind nur die Voraussetzungen von Theorem 2.4.3, die restlichen Aussagen sind klar.

Es gilt $\alpha_H = \frac{1}{3}(\alpha_B + 1) \geq \alpha_B$ und $\alpha_H = \frac{1}{3}(\alpha_B + 1) \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, da $\alpha_B \in [-1, \frac{1}{2}]$ ist.

Es gilt $0 \leq (\frac{1}{2}\alpha_B - \frac{1}{2}\alpha_H)^2$ und somit auch

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_H - \alpha_B) &\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\alpha_B^2 + \frac{1}{4}\alpha_H^2 - \frac{1}{2}\alpha_B + \frac{1}{2}\alpha_H - \frac{1}{2}\alpha_B\alpha_H \\ &= \frac{1}{4}(1 - \alpha_B + \alpha_H)^2 = \beta.\end{aligned}$$

Damit ist die Proposition bewiesen. \square

Zum Abschluss dieses Kapitels wird noch der Zusammenhang zwischen dem letzten freien Parameter α_B und dem asymptotischen Spektralradius geklärt. Es seien die Voraussetzungen von Proposition 2.7.1 erfüllt. Dann gilt aufgrund der Herleitung von Theorem 2.6.5, dass

$$\rho_\infty = \left| \frac{\alpha_B}{\alpha_B - 1} \right|$$

ist. Damit erhält man

$$(2.7.1) \quad \alpha_B = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}.$$

Durch einsetzen von $\alpha_H = \frac{1}{3}(\alpha_B + 1)$ ergibt sich

$$(2.7.2) \quad \alpha_H = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}.$$

Man kann sich also den gewünschten Spektralradius vorgeben und daraus die restlichen Parameter nach Proposition 2.7.1 und den Gleichungen (2.7.1) und (2.7.2) bestimmen. Da der Spektralradius den Grad der Dissipation bestimmt, ist dieser also nach den jeweiligen Bedürfnissen einstellbar.

KAPITEL 3

Das Generalized- α Verfahren mit Kontakt

Im letzten Kapitel wurden die Eigenschaften des G- α Verfahrens hinsichtlich gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung untersucht. Dabei wurden für den Fall optimale Parameter bestimmt. Solange kein Kontakt vorliegt, sind diese Parameter auch für Problem 1.3.2 optimal. In diesem Kapitel soll nun untersucht werden, welche Parameter für den Fall mit Kontakt optimal sind. Zudem wird untersucht, ob sich die optimalen Kontaktparameter mit den optimalen Parametern aus dem letzten Kapitel kombinieren lassen.

Die Stabilität von Zeitschrittverfahren wird anhand von einfachen Modellproblemen untersucht. Beispiele dafür finden sich im letzten Kapitel. Zur Bestimmung von optimalen Kontaktparameter wird gleich vorgegangen. Auf ein einfaches Modellproblem, das im ersten Abschnitt dieses Kapitels vorgestellt wird, wird das G- α Verfahren angewandt. Die Beschreibung dieser Rechnung ist Gegenstand von Anhang A. Die Forderung nach Energie- und Impulserhaltung bestimmt die Parameter, die im Fall mit Kontakt optimal sind. Im zweiten Abschnitt wird für das Newmark Verfahren mit $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$ die Energie- und Impulserhaltung bewiesen. Des weiteren werden die Eigenschaften dieses Verfahrens untersucht. Der Inhalt des dritten Abschnittes ist die Bestimmung von optimalen Parametern für das G- α Verfahren. Auch deren Eigenschaften werden anschließend beschrieben.

Ähnliche Analysen zur Bestimmung von optimalen Kontaktparametern findet man in [15] und [16].

3.1. Das Modellproblem

Zuerst wird das Modellproblem beschrieben. Es ist ein einfacher Spezialfall von Problem 1.3.2.

PROBLEM 3.1.1. Es ist eine Funktion $u \in C^2(I)$ gesucht mit

$$(3.1.1) \quad \ddot{u} = 0$$

und dem Hindernis $\psi = 0$. Es soll weiter, $\dot{u}(0) = v^0 < 0$ und $u(0) = u^0 \geq 0$ gelten.

Um die Rechnungen zu verkürzen wird $0 \leq u^0 < |kv^0|$ angenommen, wobei k die Zeitschrittlänge bezeichnet. Der Kontakt tritt dann im ersten Zeitschritt auf.

Aus physikalischer Sicht wird ein Massepunkt der Masse 1 kg betrachtet, der sich mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt. Deshalb ist die Bewegung kräftefrei.

In der Physik wird dieser Vorgang als elastischer Stoß bezeichnet. Details zu den physikalischen Vorgängen findet man in [20] Kapitel 7.6. Für dieses Problem gilt die Impuls- und Energieerhaltung. Das heißt, da keine potentielle Energie auftritt, dass die kinetische Energie vor und nach dem Stoß gleich sein muss. Der Impuls muss betragsmäßig gleich sein.

Die analytische Lösung lautet

$$u(t) = |u^0 + v^0 t|.$$

Der Kontakt erfolgt für $t_C := -\frac{u^0}{v^0}$. Für die Geschwindigkeit gilt

$$v(t) = \begin{cases} v^0 & \text{für } t < t_C \\ -v^0 & \text{für } t > t_C \end{cases}$$

und für die Beschleunigung

$$a(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = t_C \\ 0 & \text{für } t \neq t_C \end{cases}.$$

Das G- α Verfahren wird auf das Problem 3.1.1 angewendet. Dazu muss nach Gleichung (3.1.1) in jedem Zeitschritt die Gleichung

$$(1 - \alpha_B) a^n + \alpha_B a^{n-1} = 0$$

gelöst werden. Durch Einsetzen der Gleichung (1.4.3) erhält man

$$(3.1.2) \quad u^n = u^{n-1} + kv^{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{1 - \alpha_B} \right) k^2 a^{n-1}.$$

Bei der Lösung dieser Gleichung ist das Hindernis zu beachten, das heißt die Nebenbedingung $u^n \geq \psi = 0$. Falls in in dem n -ten Zeitschritt $u^n < 0$ gilt, so wird $u^n = 0$ gesetzt. Dieses Vorgehen entspricht der Projektion des cg-PSSOR Verfahrens aus Abschnitt 1.5.3. In der Gleichung (3.1.2) tritt der Parameter α_H nicht auf. Er wird später noch gesondert zu bestimmen sein.

Die Gleichungen der numerischen Rechnung findet man im Anhang A.

3.2. Optimale Parameter für das Newmark Verfahren

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass das Newmark Verfahren mit $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$ die Energie- und Impulserhaltung im Fall mit Kontakt erfüllt. Anschließend werden die Eigenschaften dieses Verfahrens untersucht.

THEOREM 3.2.1. *Das Newmark Verfahren mit $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$ erfüllt die Energie- und Impulserhaltung im Fall mit Kontakt. Zudem ist die Beschleunigung nach dem Kontakt 0. Weiterhin ist das Verfahren von zweiter Ordnung konvergent und unbedingt stabil.*

BEWEIS. Die Theoreme 2.3.7 und 2.4.3 implizieren, dass das Verfahren unbedingt stabil und von zweiter Ordnung konvergent ist.

Es gilt nach Gleichung (A.0.1) $u^2 = -u^0$. Da $u^2 < 0$ ist, wird $u^2 = 0$ gesetzt. Im dritten Zeitschritt gilt aufgrund von Gleichung (3.1.2)

$$u^3 = -(u^0 + v^0 k) > 0.$$

Mit (A.0.5) erhält man für die Beschleunigung $a^3 = 0$. Für die Geschwindigkeit ergibt sich $v^3 = -v^0$ nach Formel (A.0.6). Damit ist die Energie- und Impulserhaltung gesichert. \square

Um deutlich zu machen, warum das Newmark Verfahren mit $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$ gerade die Energie- und Impulserhaltung erfüllt, werden die Auswirkungen dieser Parameter auf die Gleichungen (1.4.1), (1.4.3) und (3.1.2) betrachtet. Zudem wird die Aussage des Theorems 3.2.1 noch einmal mit der Darstellung des Newmark Verfahrens als lineares Mehrschrittverfahren bewiesen.

Für $\beta = \frac{1}{2}$ fällt der Term a^{n-1} aus Gleichung (1.4.3) weg und somit hängt a^n nicht mehr direkt von a^{n-1} ab, sondern nur indirekt durch v^{n-1} . Gleichung (3.1.2) vereinfacht sich zu

$$u^n = u^{n-1} + kv^{n-1}.$$

Zudem gilt $v^1 = -\frac{u^0}{k}$ und $u^2 = -u^0$. Damit hängen v^1 und u^2 nicht mehr von v^0 ab. Das Newmark Verfahren mit $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$ hat als lineares Mehrschrittverfahren die Form

$$(3.2.1) \quad u^{n+2} - 2u^{n+1} + u^n = \frac{1}{2}k^2 [f(t^{n+2}, u^{n+2}) + f(t^n, u^n)].$$

Für das Modellproblem 3.1.1 gilt $f = 0$, $u^0 \geq 0$ und $u^1 = 0$. Für den benötigten Wert u^{-1} wird in Übereinstimmung mit der gleichförmigen Bewegung $u^0 - v^0 k$ angenommen. Mit f^n wird $f(t^n, u^n)$ abgekürzt. Da u^1 aufgrund der Projektion gleich 0

ist, kann nicht mehr $f^1 = 0$ gelten, denn sonst wäre Gleichung (3.2.1) verletzt. Diese Gleichung liefert gerade

$$f^1 = -\frac{2}{k^2} (u^0 + v^0 k).$$

Somit erhält man $u^2 = -u^0 \leq 0$. Die Projektion liefert nun aber $u^2 = 0$. Damit kann aber f^2 wieder nicht Null sein, sondern es gilt

$$f^2 = \frac{2}{k^2} u^0.$$

Für u^3 gilt

$$u^3 = \frac{1}{2} k^2 f^1 = -u^0 - v^0 k.$$

Dies entspricht gerade Gleichung (A.0.4), wenn $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$ gesetzt wird. Im nächsten Zeitschritt erhält man

$$u^4 = 2u^3 + \frac{1}{2} k^2 f^2 = -u^0 - 2v^0 k.$$

Also ist $u^4 = u^3 - v^0 k$, was einer gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit $-v^0$ entspricht. Wie erwartet gilt Energie- und Impulserhaltung.

Die Energieerhaltung sollte nicht nur im Fall des Kontakts gesichert sein. Sie sollte auch erfüllt sein, wenn kein Kontakt vorliegt. Deshalb wird noch einmal die Rechnung zum Beweis von Proposition 2.5.2 betrachtet. Wenn man $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$ in Gleichung (2.5.2) einsetzt, erhält man für die Änderung der Gesamtenergie

$$[E(u^n, v^n)] = -\frac{k^2}{4} [T(a^n)].$$

Die Gesamtenergie ändert sich also um den Term $\frac{k^2}{4} |[T(a^n)]|$ von Zeitschritt zu Zeitschritt. Der Faktor $\frac{k^2}{4}$ ist auf jeden Fall klein. Über $|[T(a^n)]|$ kann allerdings keine Aussage gemacht werden und somit kann dieser Ausdruck nicht weiter abgeschätzt werden. Es können also Schwankungen in der Gesamtenergie im Verlauf der Rechnung auftreten.

Zeitschrittverfahren zur Diskretisierung von dynamischen Hindernisproblemen sollten numerisch dissipativ sein. Das Newmark Verfahren mit $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$ ist nach Theorem 2.6.3 aber nicht numerisch dissipativ. Somit ist die Anwendung des Newmark Verfahrens mit $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$ nur eingeschränkt möglich.

Wenn man für das Newmark Verfahren numerische Dissipation erhalten will, muss $\gamma > \frac{1}{2}$ gewählt werden. Dann ist das Newmark Verfahren aber nur von erster Ordnung konvergent. Aus den Rechnungen in Anhang A folgt, dass das Newmark Verfahren mit $\gamma > \beta = \frac{1}{2}$ im Fall mit Kontakt nur dann die Energie- und Impulserhaltung sichert, wenn $u^0 = 0$ ist.

Die optimalen Parameter, die für das Newmark Verfahren im Fall mit Kontakt abgeleitet wurden, stimmen mit denen überein, die in [15] bestimmt werden. Dort wird allerdings der elastische Stoß von zwei Kugeln und nicht der Stoß mit einem festen Hindernis betrachtet. Zudem wird kein projektiver Löser eingesetzt, sondern die Kräfte beim Kontakt aufwendig modelliert.

3.3. Optimale Parameter für das G- α Verfahren

In diesem Abschnitt werden die optimalen Parameter für den Fall mit Kontakt für das G- α Verfahren bestimmt. Im Anschluss werden die Eigenschaften dieser Parameter untersucht.

THEOREM 3.3.1. *Wenn die Parameter für das G- α Verfahren die Bedingungen*

$$(3.3.1) \quad \beta < \frac{1}{2} \frac{(2\gamma + 1)(\alpha_B - 1)}{\alpha_B - 2}$$

und

$$(3.3.2) \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{(\gamma + 1)\alpha_B - 1}{\alpha_B - 1}$$

erfüllen und

$$(3.3.3) \quad u^0 = 0$$

gilt, erhält das G- α Verfahren im Fall mit Kontakt die Energie und den Impuls.

BEWEIS. Die Gleichung (A.0.1) vereinfacht sich unter diesen Voraussetzungen zu

$$u^2 = -\frac{-2\beta(\alpha_B - 2) + (\alpha_B - 1)(2\gamma + 1)}{2\beta(\alpha_B - 1)}kv^0.$$

Bedingung (3.3.1) impliziert, dass $u^2 > 0$ ist.

Es gilt mit Gleichung (A.0.3)

$$v^2 = v^0 - \frac{((\gamma + 1)\alpha_B - 1)}{\beta(\alpha_B - 1)}v^0.$$

Aufgrund von Voraussetzung (3.3.2) gilt $v^2 = -v^0$, womit die Energie- und Impulserhaltung gezeigt ist. \square

Die Parameter, die die Voraussetzungen von Theorem 3.3.1 erfüllen, werden in der folgende Definition mit einem Namen versehen.

DEFINITION 3.3.2. Die Menge P_α besteht aus allen Parameter für das G- α Verfahren, die die Bedingungen (3.3.1) und (3.3.2) erfüllen.

Es gibt mehr optimale Parameter für den Fall mit Kontakt für das G- α Verfahren als die, die in der Menge P_α enthalten sind. Diese Parameter sind aber nicht sinnvoll für das G- α Verfahren. Deshalb werden sie nicht näher beschrieben.

In Theorem 3.2.1 wird gezeigt, dass die Beschleunigung nach dem Kontakt 0 ist. Deshalb wird jetzt die Teilmenge von Parametern aus P_α bestimmt, für die die Beschleunigung nach dem Kontakt ebenfalls 0 ist.

PROPOSITION 3.3.3. *Es seien die Voraussetzungen von Theorem 3.3.1 erfüllt. Es ist $a^2 = 0$ genau dann, wenn $\alpha_B = 0$ gilt.*

BEWEIS. Unter diesen Voraussetzungen vereinfacht sich Gleichung (A.0.2) zu

$$a^2 = -\frac{\alpha_B}{\beta k (\alpha_B - 1)} v^0.$$

Somit ist $a^2 = 0$ äquivalent zu $\alpha_B = 0$. □

Der Fall $\alpha_B = 0$ wird nun näher betrachtet, da in diesem Fall Verfahren enthalten sind, die nicht bei der Analyse des allgemeinen G- α Verfahrens erfasst werden. Wenn $\alpha_B = 0$ gilt, folgt aus Bedingung (3.3.2), dass $\beta = \frac{1}{2}$ gewählt werden muss. Bedingung (3.3.1) impliziert, dass $\gamma > \frac{1}{2}$ sein muss. Damit erhält man ein Newmark Verfahren, das von erster Ordnung konvergent, unbedingt stabil und numerisch dissipativ ist.

Wenn man aber $\gamma = \frac{1}{2} + \alpha_H$ mit $0 < \alpha_H \leq \frac{1}{2}$ setzt, entsteht ein G- α Verfahren, das von zweiter Ordnung konvergent, unbedingt stabil und numerisch dissipativ ist.

Jetzt bleibt noch der Parameter α_H zu bestimmen. Nach Gleichung (A.0.4) gilt mit den obigen Parametern

$$u^2 = -2\alpha_H k v^0.$$

Unter den Voraussetzungen der Modellrechnung ist die Wahl $\alpha_H = \frac{1}{2}$ nach dieser Gleichung sinnvoll, denn sie entspricht auch in den Verschiebungen der analytischen Lösung. Der dabei entstehende Diskretisierungsfehler ist bis auf Rundungsfehler k in der Maximumnorm. Für $0 < \alpha_H < \frac{1}{2}$ ist der Diskretisierungsfehler größer aber immer noch kleiner als der Fehler des Newmark Verfahrens mit $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$, der $2k$ ist.

Die numerische Dissipation hat aber auch Einfluss auf die Wahl von α_H . Da α_B und β festgelegt sind, ist Proposition 2.7.1 nicht anwendbar. Mit $\alpha_B = 0$ ist allerdings ein HHT- α Verfahren gegeben. Wenn α_H so gewählt wird, dass die Voraussetzungen von Proposition 2.6.4 erfüllt sind, lässt sich der asymptotische Spektralradius bestimmen. Es muss

$$\beta = \frac{1}{4} (1 + \alpha_H)^2$$

gelten. Mit $\beta = \frac{1}{2}$ muss also

$$\alpha_H = -1 \pm \sqrt{2}$$

sein. Allerdings erfüllt nur der Fall $\alpha_H = -1 + \sqrt{2} \approx 0.4142$ die Voraussetzungen an α_H . Man wählt $\gamma = -\frac{1}{2} + \sqrt{2}$. Für den asymptotischen Spektralradius erhält man nach Gleichung (2.6.2)

$$\rho_\infty = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 + \sqrt{2} = \alpha_H.$$

Jetzt wird der Fall betrachtet, dass die Voraussetzung (3.3.3) von Theorem 3.3.1 nicht erfüllt ist. Dazu wird die reflektierte Geschwindigkeit nach dem Kontakt betrachtet. Diese ist entscheidend für den Energieverlust während der Rechnung. Im optimalen Fall gilt $v^2 = -v^0$. Man erhält nach Gleichung (A.0.3)

$$v^2 = -v^0 - 2\frac{u^0}{k} < -v^0.$$

Die reflektierte Geschwindigkeit ist also um $2\frac{u^0}{k}$ kleiner als $-v^0$. Es gilt nach Voraussetzung

$$0 < 2\frac{u^0}{k} < 2|v^0|.$$

Damit ist die Abweichung für alle k beschränkt. Allerdings ist v^2 nur größer als 0, wenn

$$0 < u^0 < -\frac{1}{2}v^0k$$

gilt.

Im Falle $u^2 = 0$ erhält man mit Gleichung (A.0.6)

$$v^3 = -v^0 + 2\alpha_H \left(\frac{u^0}{k} + v^0 \right) < -v^0.$$

Für $\alpha_H = \frac{1}{2}$ ist $v^3 = \frac{u^0}{k}$. Die Geschwindigkeit v^3 entspricht gerade betragsmäßig der Geschwindigkeit, auf die der Körper durch die erste Projektion abgebremst wird. Für die Abweichung von der analytischen Lösung $-v^0$ gilt

$$0 < 2\alpha_H \left| \frac{u^0}{k} + v^0 \right| < 2\alpha_H |v^0| < |v^0|.$$

Also gilt $v^3 > 0$.

Ab jetzt sei α_B nicht unbedingt mehr 0. Es wird nun untersucht, für welche Parameter aus P_α das G- α Verfahren von zweiter Ordnung konvergent und unbedingt stabil ist. Wenn man $\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_B + \alpha_H$ in Gleichung (3.3.2) einsetzt, erhält man die Gleichung

$$(3.3.4) \quad \beta = \frac{1 - 2\alpha_B^2 + \alpha_B(3 + 2\alpha_H) - 2}{4\alpha_B - 1}$$

In den folgenden Beweisen wird immer die Gültigkeit von Gleichung (3.3.4) gezeigt, da dort angenommen wird, dass das G- α Verfahren von zweiter Ordnung konvergent ist.

Die Bedingungen (3.3.1) und (3.3.4) werden auch in [16] angegeben. Dort wird allerdings genau wie in [15] das Problem des elastischen Stoßes zwischen zwei Körpern betrachtet.

PROPOSITION 3.3.4. *Wenn für die Parameter*

$$\begin{aligned}\alpha_H &= \frac{1}{2} \\ -1 \leq \alpha_B &\leq \frac{1}{2} \\ \beta &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha_B \\ \gamma &= 1 - \alpha_B\end{aligned}$$

gilt, ist das G- α Verfahren von zweiter Ordnung konvergent und unbedingt stabil. Zudem gehören die Parameter zur Menge P_α .

Es bleibt noch α_B als freier Parameter.

BEWEIS. Zu zeigen ist, dass die Voraussetzungen von Theorem 2.3.7, Theorem 2.4.3 und die Bedingungen (3.3.1) und (3.3.4) erfüllt sind.

Da $\gamma = 1 - \alpha_B = \frac{1}{2} + \alpha_H - \alpha_B$ und $\alpha_B \leq \frac{1}{2}$ ist, ist das G- α Verfahren nach Theorem 2.3.7 von zweiter Ordnung konvergent.

Nach Voraussetzung gilt $-1 \leq \alpha_B \leq \alpha_H = \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_H - \alpha_B)$. Deshalb impliziert Theorem 2.4.3, dass das G- α Verfahren unbedingt stabil ist.

Nun wird gezeigt, dass Parameter in der Menge P_α enthalten sind. Es gilt

$$\begin{aligned}& \frac{-2\alpha_B^2 + \alpha_B(3 + 2\alpha_H) - 2}{4(\alpha_B - 1)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha_B = \beta,\end{aligned}$$

womit die Bedingung (3.3.4) bewiesen ist. Es gilt

$$\begin{aligned}0 &\geq -(\alpha_B + 1)^2 + \frac{2}{3}(\alpha_B - 1) \\ &= -\alpha_B^2 + \frac{8}{3}\alpha_B - \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

Und damit erhält man

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{8\alpha_B - 3\alpha_B^2 - 5}{2(\alpha_B - 2)} \\
&= \frac{(\alpha_B - 1)(5 - 3\alpha_B)}{2(\alpha_B - 2)} \\
&= \frac{(\alpha_B - 1)(3 - 2\alpha_B)}{2(\alpha_B - 2)} - \frac{(\alpha_B - 1)(\alpha_B - 2)}{2(\alpha_B - 2)} \\
&= \frac{(\alpha_B - 1)(1 + 2\gamma)}{2(\alpha_B - 2)} - \beta.
\end{aligned}$$

Somit ist auch die Bedingung (3.3.1) erfüllt und der Beweis abgeschlossen. \square

Jetzt stellt sich die Frage, ob man die optimalen Kontaktparameter mit den Voraussetzungen von Theorem 2.6.5 kombinieren kann. Die Antwort ist nein, man muss auf die unbedingte Stabilität und die optimale numerische Dissipation der niedrigen Frequenzen verzichten.

PROPOSITION 3.3.5. *Wenn man*

$$\begin{aligned}
\alpha_H &= \frac{-\alpha_B^2 + \alpha_B - 1 + \sqrt{2\alpha_B^2 - 3\alpha_B + 2}}{1 - \alpha_B}, \\
\gamma &= \frac{1}{2} + \alpha_H - \alpha_B, \\
\beta &= \frac{1}{4}(1 - \alpha_B + \alpha_H)^2
\end{aligned}$$

und zudem $\alpha_B \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ wählt, ist das G- α Verfahren von zweiter Ordnung konvergent und optimal numerisch dissipativ für hohe Frequenzen. Zudem gehören die Parameter zur Menge P_α .

Die Parameter $\alpha_B = \alpha_H = 2\beta = \gamma = \frac{1}{2}$ erfüllen die Voraussetzungen von Proposition 2.7.1, 3.3.4 und 3.3.5.

BEWEIS. Zu beweisen sind nur die Bedingungen (3.3.1) und (3.3.4), denn alle anderen Eigenschaften sind aufgrund der Voraussetzungen klar. Damit Bedingung (3.3.4) erfüllt ist, muss die Gleichung

$$(1 - \alpha_B + \alpha_H)^2 = \frac{-2\alpha_B^2 + \alpha_B(3 + 2\alpha_H) - 2}{\alpha_B - 1}$$

gelöst werden. Der Parameter α_H ist eine Lösung dieser Gleichung, wenn

$$\alpha_H = \frac{-\alpha_B^2 + \alpha_B - 1 + \sqrt{2\alpha_B^2 - 3\alpha_B + 2}}{1 - \alpha_B}$$

gilt, womit die Bedingung (3.3.4) gezeigt ist.

Nun wird Bedingung (3.3.1) gezeigt. Wegen $0 \leq 2 - \alpha_B - \alpha_B^2$ gilt

$$\sqrt{2\alpha_B^2 - 3\alpha_B + 2} \leq 2 - \alpha_B.$$

Mit dieser Ungleichung folgt

$$\left| 1 + \frac{-1 + \sqrt{2\alpha_B^2 - 3\alpha_B + 2}}{1 - \alpha_B} \right| \leq 2.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq 4 - \left(1 + \frac{-1 + \sqrt{2\alpha_B^2 - 3\alpha_B + 2}}{1 - \alpha_B} \right)^2 \\ &= 4 - \left(1 - \alpha_B + \frac{\alpha_B(1 - \alpha_B) - 1 + \sqrt{2\alpha_B^2 - 3\alpha_B + 2}}{1 - \alpha_B} \right)^2 \\ &= 4 \frac{\alpha_B - 2}{\alpha_B - 2} - (1 - \alpha_B + \alpha_H)^2. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\sqrt{2\alpha_B^2 - 3\alpha_B + 2} \leq \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 2} = 2.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \alpha_B - 2 &\leq \alpha_B - \sqrt{2\alpha_B^2 - 3\alpha_B + 2} \\ &= \alpha_B - 1 + 1 - \sqrt{2\alpha_B^2 - 3\alpha_B + 2} \\ &= (\alpha_B - 1) \left(1 + \frac{-1 + \sqrt{2\alpha_B^2 - 3\alpha_B + 2}}{1 - \alpha_B} \right) \\ &= (\alpha_B - 1) (1 - \alpha_B + \alpha_H). \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich

$$0 \leq \frac{(\alpha_B - 1)(1 + 2\gamma)}{2(\alpha_B - 2)} - \beta$$

und damit ist die Bedingung (3.3.1) bewiesen. \square

Die Unterschiede zwischen den Parametern mit $\alpha_B = 0$ und $\alpha_B \neq 0$ werden jetzt aufgezeigt. Dazu wird das Modellproblem mit verschiedenen Parametern numerisch gelöst. Die Rechnungen werden mit der Klasse `Free1d` durchgeführt. Die näheren Erläuterungen zu den numerischen Rechnungen findet man am Anfang des nächsten Kapitels. Sei $v^0 = -1$, $k = \frac{1}{100}$ und $u^0 = \frac{1}{10}$. Aufgrund dieser Parameter gilt $u^{10} = 0$, ohne das eine Projektion statt findet. Deshalb ist die Voraussetzung (3.3.3) von Theorem 3.3.1 erfüllt.

Name	α_B	α_H	β	γ
P_1	1/4	1/2	3/8	3/4
P_2	0	1/2	1/2	1
P_3	-1/2	1/2	3/4	3/2
P_4	1/2	1/2	1/4	1/2
P_5	-1/4	1/4	1/2	1
P_6	-1	0	1	3/2
P_7	0	0	1/2	1/2
P_8	0	0	1/4	1/2

TABELLE 1. Parameter für die numerischen Rechnungen

Die verschiedenen Parameter für das G- α Verfahren, die verwendet werden, sind in Tabelle 1 aufgelistet und mit Namen versehen.

Alle in Tabelle 1 angegebenen Parameter ergeben G- α Verfahren, die von zweiter Ordnung konvergent und unbedingt stabil sind. Die Parameter P_5 , P_6 und P_8 sind allerdings nicht optimal für den Fall mit Kontakt. Die Parameter P_6 erfüllen zudem die Voraussetzungen von Proposition 2.7.1.

Zuerst werden die obigen Rechnungen für die Parameter P_1 bis P_4 ausgeführt. Es wird hier auf die Abbildung der Auslenkung u und der Geschwindigkeit v verzichtet, da alle Parameter identische Lösungen in der Auslenkung und der Geschwindigkeit ergeben. In Abbildung 3.3.1 ist die Beschleunigung für die verschiedenen Parameter aufgetragen. Für die Parameter P_1 oszilliert die Beschleunigung um den Wert 0, wobei die Amplitude der Schwingung gegen 0 geht. Die Parameter P_2 zeigen, wie nach den Überlegungen zu Anfang dieses Abschnittes zu erwarten, nur einen Wert ungleich 0. Für P_3 erhält man eine positive Beschleunigung beim Kontakt, die anschließend ohne zu oszillieren gegen 0 geht. Die Parameter P_4 liefern eine Beschleunigung die ständig zwischen +400 und -400 wechselt.

Die obige Rechnung wird noch einmal ausgeführt, nur sei jetzt $u^0 = 0.0975$. Damit ist die Voraussetzung (3.3.3) von Theorem 3.3.1 nicht erfüllt. Die Ergebnisse sind in der Auslenkung und in der Geschwindigkeit wieder für die Parameter P_1 bis P_4 gleich. Die reflektierte Geschwindigkeit ist $\frac{1}{2}$. Die Beschleunigungen zeigen dasselbe qualitative Verhalten wie in Abbildung 3.3.1.

Die einzigen Unterschiede zeigen sich demnach in der Beschleunigung. Da die Ergebnisse allerdings in der Auslenkung und der Geschwindigkeit übereinstimmen, sind die Parameter für dieses Beispiel als gleichwertig zu betrachten. Im nächsten Kapitel zeigt sich, dass auch bei anderen Problemen die Lösungen für diese Parameter übereinstimmen.

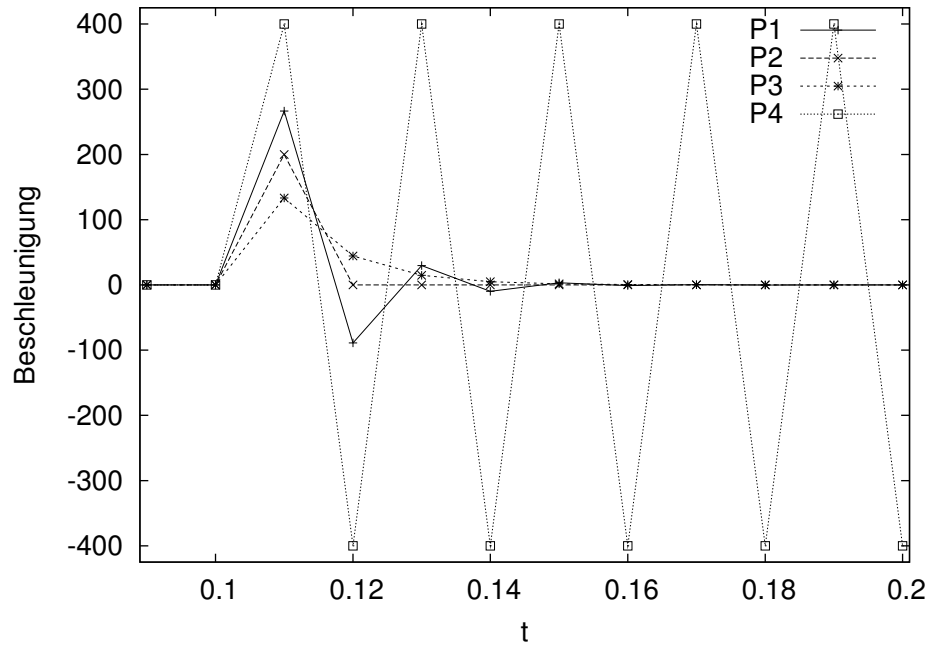


ABBILDUNG 3.3.1. Beschleunigung bei der Modellrechnung für verschiedene Parameter

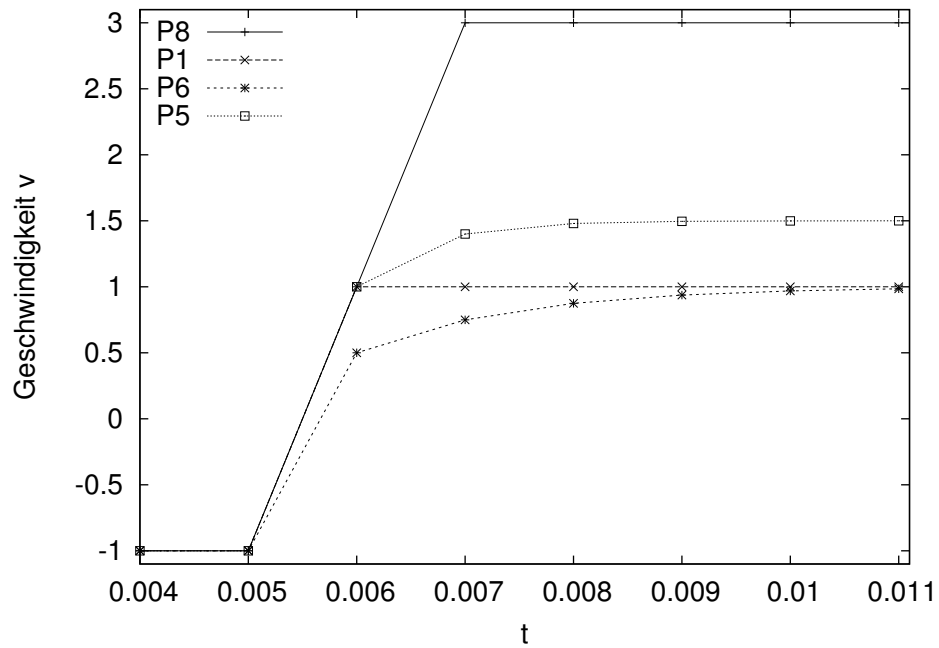


ABBILDUNG 3.3.2. Geschwindigkeit v für das Modellproblem bei nicht optimalen Parametern

Jetzt wird das Verhalten der Lösung für die nicht optimalen Kontaktparameter betrachtet. Dazu werden die obigen Rechnungen mit $u^0 = \frac{5}{1000}$ und $k = \frac{1}{1000}$ für die Parameter P_2 , P_5 , P_6 und P_8 ausgeführt. In Abbildung 3.3.2 sind die Geschwindigkeiten der Lösungen für die verschiedenen Parameter in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Der Graph für die Parameter P_1 dient dabei als Beispiel für den Graphen im optimalen Fall. Für die Parameter P_8 ist die reflektierte Geschwindigkeit mit 3 viel zu groß und bleibt konstant. Für P_5 ist die reflektierte Geschwindigkeit ebenfalls zu groß, sie nähert sich von unten dem Grenzwert $\frac{3}{2}$ an. Für P_6 nähert sich die Geschwindigkeit von unten der optimalen Lösung in der Geschwindigkeit an. Man erkennt hier schon einen deutlichen Unterschied in der Eignung der nicht optimalen Parameter. Für P_6 ist zu erwarten, dass auch andere Probleme vernünftig gelöst werden. Für P_5 und P_8 kann man keine sinnvollen Lösungen erwarten.

Numerische Fehleranalyse

Eine a priori Fehlerabschätzung für das Problem 1.3.2 ist dem Autor nicht bekannt. Man ist aber an Aussagen über den bei der Diskretisierung entstehenden Fehler interessiert. Da für einen Spezialfall die analytische Lösung des Problems 1.3.2 bekannt ist, ist es möglich, den Diskretisierungsfehler numerisch zu berechnen. Damit ist man in der Lage, die Auswirkungen der Parameter auf den Diskretisierungsfehler zu studieren.

Alle Rechnungen werden auf einem PC mit einem Athlon XP 2100+ Prozessor und 1.5 Gigabyte Hauptspeicher ausgeführt. Das Betriebssystem ist Suse Linux 9.0. Als Finite Elemente Software wird das Paket SOFAR (*S*mall *O*bject oriented *F*inite *E*lement *L*ibrary for *A*pplication and *R*esearch) benutzt. Das Paket befindet sich auf dem der Arbeit beiliegenden Datenträger.

Im Verzeichnis `SOFAR` befindet sich der in der Programmiersprache Java programmierte Teil des Pakets. Im Verzeichnis `SOFARlib` sind die kompilierten Bibliotheken des nativen Codes und der integrierten Softwarepakete für verschiedene Betriebssysteme sowie die Quelltextes des nativen Codes abgelegt. Für die Rechnungen in dieser Arbeit werden die Bibliotheken in dem Verzeichnis `SOFARlib/lib/linux_X86` benutzt. In dem Verzeichnis `SOFAR/diplom/` befinden sich die Quelltexte zu den hier durchgeführten Rechnungen und in dem Verzeichnis `SOFAR/diplom/output/` die Ergebnisse der Rechnungen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das G - α Verfahren zu SOFAR hinzugefügt. Die Quelltexte dazu befinden sich in dem Verzeichnis `SOFAR/sofar/fem/dynamic/`. Dort ist hauptsächlich die Klasse `DynamicTools` zu nennen. Weitere Informationen zu SOFAR findet man unter [27].

Zur Lösung der endlich dimensionalen Minimierungsprobleme wird das cg-PSSOR Verfahren verwendet. Für den Relaxationsparameter gilt $\omega = \frac{3}{2}$. Die Iteration wird abgebrochen, wenn das Residuum kleiner als 10^{-12} ist.

Im letzten Kapitel hat sich gezeigt, dass die Resultate für die Parameter P_1 bis P_4 identisch sind. Das gilt auch für die Resultate dieses Kapitels. Deshalb wird immer nur ein Beispiel der Parameter P_1 bis P_4 betrachtet.

4.1. Ein Spezialfall

Problem 1.3.2 wird zuerst mit $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ betrachtet. Hierbei handelt es sich um das Problem einer Saite, die schwingt und an beiden Enden eingespannt ist. Es wird angenommen, dass $f = 0$ gilt. Die Anfangsauslenkung der Saite sei

$$u_0(x) = \sin(\pi x)$$

und für die Anfangsgeschwindigkeit gelte $v_0 = 0$. Das Hindernis sei $\psi \equiv C$ mit $C \in [-1, 0]$. Für den Grenzwert $C = -1$ ist die Lösung

$$(4.1.1) \quad u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi t)$$

Für den anderen Grenzwert $C = 0$ gilt

$$(4.1.2) \quad u(x, t) = \sin(\pi x) |\cos(\pi t)|.$$

Für den Fall $C = -1$ handelt es sich um eine freie Schwingung ohne Kontakt. Die Periodenlänge der Lösung (4.1.1) ist 2, die der Lösung (4.1.2) ist 1.

Für $\Omega = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ sei wieder $v_0 = 0$ und

$$u_0(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2).$$

Hierbei handelt es sich um die Schwingung einer Membran die am Rand fest eingespannt ist. Für das Hindernis $\psi = -1$ ergibt sich wieder eine freie Schwingung und die Lösung ist

$$u(x_1, x_2, t) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(\sqrt{2}\pi t).$$

Die Periodenlänge beträgt $\sqrt{2}$. Für $\psi = 0$ ist

$$u(x_1, x_2, t) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \left| \cos(\sqrt{2}\pi t) \right|$$

die Lösung. Die Periodenlänge ist $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

In allen Fällen beträgt die Gesamtenergie am Anfang der Rechnung $\frac{1}{4}\pi^2$. Die Lösungen im Fall mit Kontakt sind für $t_{c,i} = -\frac{1}{2} + i$, $i \in \mathbb{N}$, nicht bezüglich der Zeit differenzierbar.

In diesem Abschnitt soll der Fehler der Diskretisierung betrachtet werden. Der Fehler wird dabei in den folgenden Normen gemessen.

DEFINITION 4.1.1. Die L^2 -Norm wird mit $\|\cdot\|$ bezeichnet. Die l^2 -Norm wird als

$$\|u\|_{l^2} := \max_{0 \leq n \leq N} \|u^n\|$$

definiert. Die Norm auf $L^\infty(\Omega)$ ist

$$\|u\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} (u(x)).$$

Die l^∞ -Norm wird als

$$\|u\|_{l^\infty} := \max_{0 \leq n \leq N} \|u^n\|_\infty$$

definiert.

In den folgenden Grafiken bezeichnet „Max“ die l^∞ -Norm, „l2“ die l^2 -Norm und „L2“ die L^2 -Norm.

In den Rechnungen wird häufig die Energie betrachtet. Die folgenden Begriffe werden dabei verwendet.

DEFINITION 4.1.2. Es sei M die Massematrix und K die Steifigkeitsmatrix des Problems. Die potentielle Energie ist definiert als

$$U^n(u^n) := (u^n)^T K u^n,$$

die kinetische Energie als

$$T^n(v^n) := (v^n)^T M v^n$$

und die Gesamtenergie als $E^n(u^n, v^n) := U^n(u^n) + T^n(v^n)$. Mit E^0 wird die Gesamtenergie am Anfang der Rechnung bezeichnet. Es hängt nur von h ab, wie genau E^0 mit dem analytischen Wert $\frac{1}{4}\pi^2$ übereinstimmt. Der Energieverlust in Prozent im n -ten Zeitschritt E_v^n wird mit der Formel

$$E_v^n = \frac{E^0 - E^n}{E^0} \cdot 100$$

berechnet. Falls die Gesamtenergie während der Rechnung wächst, dann ist E_v^n negativ. Dann wird häufig die Energieabweichung $|E_v^n|$ betrachtet. Um den ganzen Energieverlust während einer Rechnung zu betrachten, wird immer der Energieverlust im letzten Zeitschritt der Rechnung angegeben.

4.2. Der Diskretisierungsfehler im Fall ohne Kontakt

Zuerst wird betrachtet, wie sich der Diskretisierungsfehler im Fall ohne Kontakt verhält. Die Ergebnisse werden hier beschrieben, um einen Vergleich mit den Ergebnissen für den Fall mit Kontakt zu ermöglichen. In diesem ganzen Abschnitt sei $\psi = -1$. Im eindimensionalen wird das Zeitintervall $I_1 = [0, 2]$ und im zweidimensionalen das Intervall $I_2 = [0, \sqrt{2}]$ gewählt. Im nächsten Abschnitt erfolgt dann der Vergleich mit dem Fall mit Kontakt. Das Vorgehen ist aber in beiden Fällen sehr ähnlich. Zuerst wird der Diskretisierungsfehler für festes h und k betrachtet. Zu jedem h gibt es ein

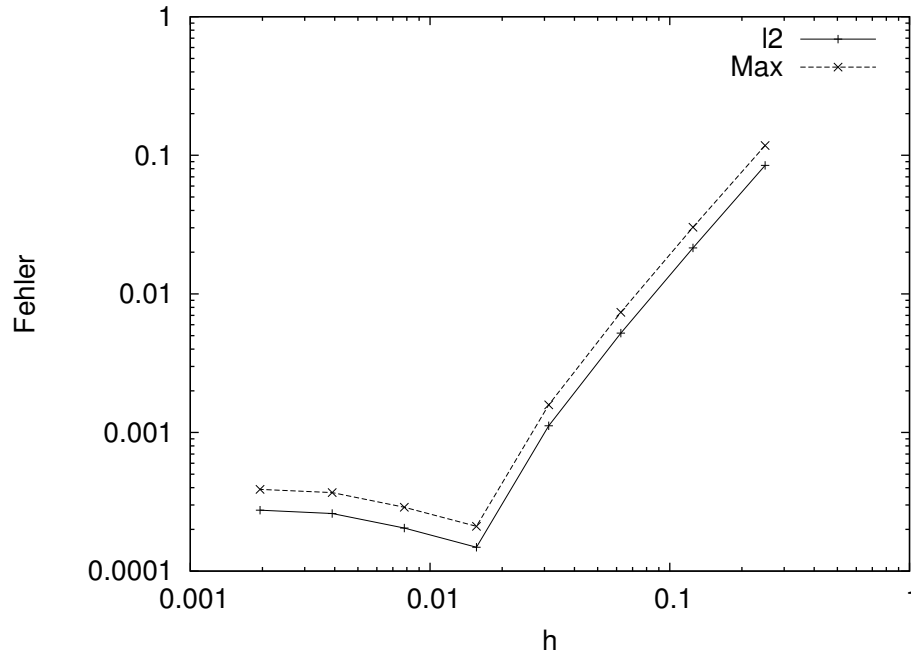


ABBILDUNG 4.2.1. Der Diskretisierungsfehler in der l^2 - und der l^∞ -Norm für festes k in Abhängigkeit von h ohne Kontakt

optimales k , da das vorgegebene h die Genauigkeit beschränkt. Ab dem optimalen k kann der Diskretisierungsfehler nicht mehr weiter verkleinert werden. Für vorgegebenes k gelten dieselben Aussagen. Um eine möglichst gute Konvergenz der Verfahren zu erreichen, muss ein Zusammenhang zwischen den vorgegebenen Größen und den dazu optimalen Größen gefunden werden. Nachdem dieser Zusammenhang bekannt ist, wird der Diskretisierungsfehler für eine Folge von optimalen k und h betrachtet.

Die Rechnungen werden für verschiedene Parameter durchgeführt und eine zentrale Rolle wird der Vergleich der unterschiedlichen Parameter spielen. Zudem ist der Vergleich zwischen den eindimensionalen und den zweidimensionalen Resultaten wichtig, da sich die eindimensionalen Resultate mit wesentlich weniger Aufwand berechnen lassen und eine mögliche Übertragung auf den zweidimensionalen Fall viel Aufwand spart.

4.2.1. Der Diskretisierungsfehler für festes k . Zuerst wird untersucht, wie sich der Diskretisierungsfehler für festes k verhält. Die Rechnungen werden mit den Klassen `Convergenceh1d` und `Convergenceh2d` ausgeführt. Es werden die Parameter P_2 für $k = 2^{-0} \cdot 10^{-2}$ betrachtet. Die Schreibweise für k wird gewählt, um später den Zusammenhang zwischen k und dem optimalen h besser darstellen zu können. Dann

wird h zwischen 2^{-2} und 2^{-9} variiert. In Abbildung 4.2.1 ist der Verlauf des Diskretisierungsfehlers in der l^2 - und der l^∞ -Norm aufgetragen. Der Diskretisierungsfehler nimmt zuerst mit abnehmenden h ab und erreicht für $h = 2^{-6}$ sein Minimum. Das h , für das der Diskretisierungsfehler minimal wird, wird mit h_{opt} bezeichnet. Dann steigt er mit abnehmenden h wieder leicht an. Dieses Verhalten ergibt sich, wie schon am Anfang dieses Kapitels erwähnt, da der Diskretisierungsfehler aufgrund des festen k beschränkt ist.

Die Rechnung wird für verschiedene k und verschiedene Parameter durchgeführt. Dabei zeigt sich ein qualitativ gleicher Verlauf des Diskretisierungsfehlers.

Für $k = 2^{-n} \cdot 10^{-2}$ wird der folgende Zusammenhang zwischen k und h_{opt} beobachtet. Es gilt für alle Parameter außer P_6 die Gleichung

$$(4.2.1) \quad h_{opt} = 2^{-(n+6)}.$$

Für P_6 gilt

$$(4.2.2) \quad h_{opt} = 2^{-(n+5)}.$$

Wenn die Zeitschrittlänge halbiert wird, muss also auch die Netzweite halbiert werden, damit die Parameter optimal sind.

Im zweidimensionalen gelten dieselben Formeln. Nur für P_7 gilt im Unterschied zum eindimensionalen Gleichung (4.2.2).

4.2.2. Der Diskretisierungsfehler für festes h . Für die Parameter P_2 wird bei festen $h = 2^{-5}$, die Abhängigkeit des Diskretisierungsfehlers von k betrachtet. Dazu wird k zwischen $2^5 \cdot 10^{-2}$ und $2^{-3} \cdot 10^{-2}$ variiert. Die Rechnung wird mit den Klassen `Convergenck1d` und `Convergenck2d` ausgeführt. Dort wird mit einem gegebenen k gestartet und dieses dann sukzessive halbiert. In Abbildung 4.2.2 ist der Verlauf des Diskretisierungsfehlers in der l^2 - und der l^∞ -Norm abgebildet. Zuerst nimmt der Diskretisierungsfehler mit abnehmenden k ab. Er verkleinert sich ungefähr um einen Faktor 0.2, wenn k halbiert wird. Er nimmt sein Minimum für $k = 2^1 \cdot 10^{-2}$ an, dieses k wird mit k_{opt} bezeichnet. Danach steigt der Diskretisierungsfehler wieder leicht an.

Das Minimum liegt nicht unbedingt genau bei k_{opt} . Aber die Abweichungen im Diskretisierungsfehler zwischen dem hier angegebenen k_{opt} und dem wirklichen sind minimal. Die technischen Schwierigkeiten, die durch die Verwendung der genauen k_{opt} entstehen, sind allerdings nicht unerheblich. Deshalb wird mit dem hier angegebenen k_{opt} gearbeitet.

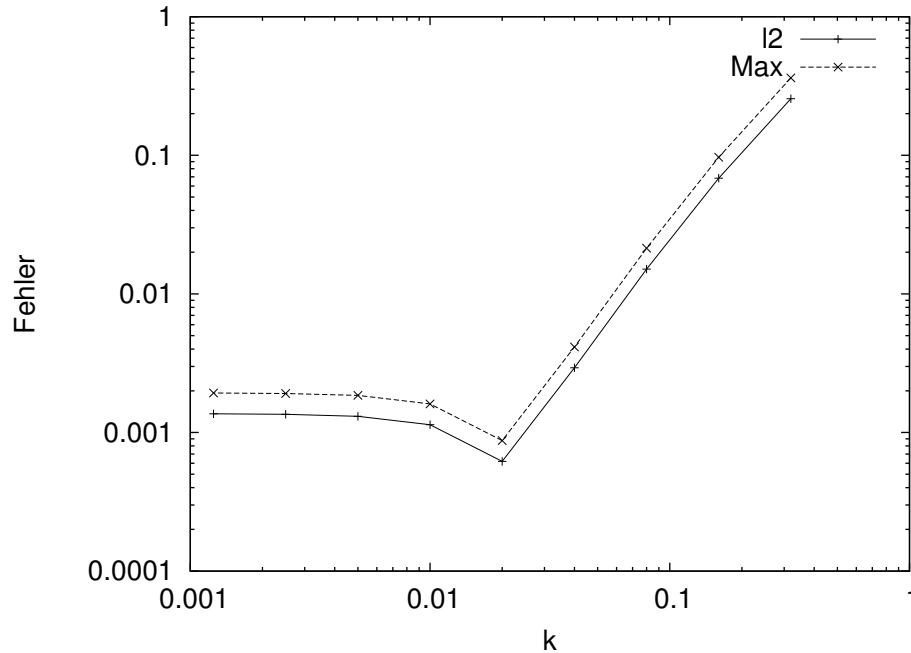


ABBILDUNG 4.2.2. Der Diskretisierungsfehler in der l^2 - und l^∞ -Norm in Abhängigkeit von k bei festem h ohne Kontakt

Für andere h und andere Parameter beobachtet man einen qualitativ gleichen Verlauf des Graphen.

Es wird nun der Zusammenhang zwischen h und k_{opt} betrachtet. Sei $h = 2^{-n}$. Dann gilt

$$(4.2.3) \quad k_{opt} = 2^{-(n-6)} \cdot 10^{-2}$$

für alle Parameter außer P_6 und P_7 . Für P_6 und P_7 gilt

$$(4.2.4) \quad k_{opt} = 2^{-(n-5)} \cdot 10^{-2}.$$

Dabei gilt für P_7 aber $k_{opt} = 2^4 \cdot 10^{-2}$ für $h = 2^{-2}$, was nicht mit obiger Formel übereinstimmt.

Im zweidimensionalen Fall gilt für alle Parameter bis auf P_6

$$k_{opt} = 2^{-(n-5)} \cdot 10^{-2}$$

und für P_6

$$k_{opt} = 2^{-(n-4)} \cdot 10^{-2}.$$

Die optimalen k sind einen Faktor 2 größer als im eindimensionalen.

Dieser Abschnitt zeigt zwei wichtige Resultate. Erstens stimmen die Resultate im ein- und zweidimensionalen nicht immer überein. Es müssen also immer beide Fälle

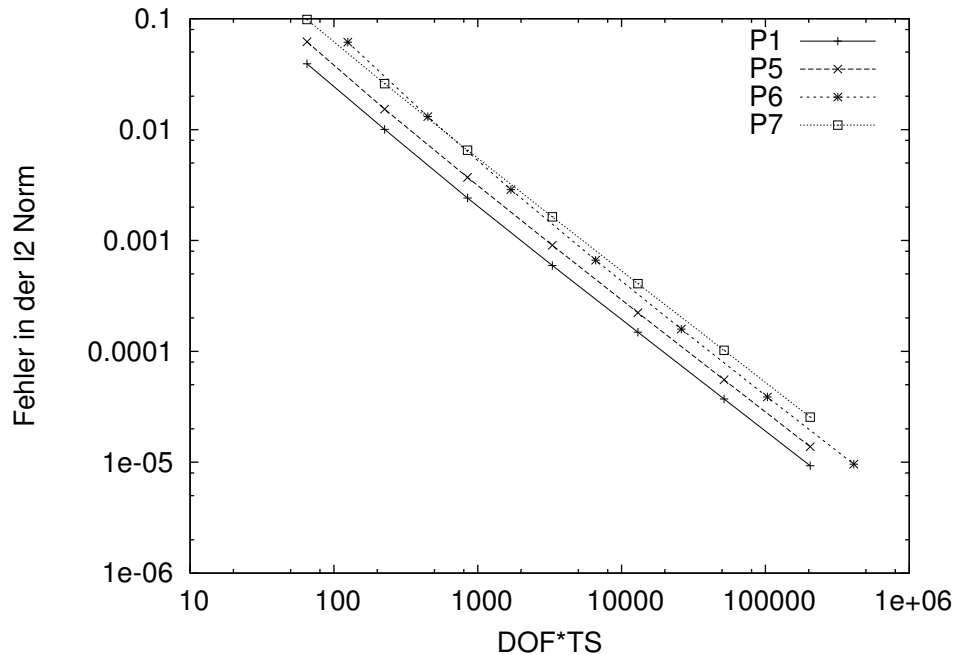


ABBILDUNG 4.2.3. Der Diskretisierungsfehler für optimales h und k ohne Kontakt

untersucht werden. Zweitens gilt nicht unbedingt

$$k_{opt}(h) = [h_{opt}(k)]^{-1}.$$

Deshalb müssen immer beide Zusammenhänge untersucht werden. Im folgenden wird für die Rechnungen mit optimalen h und k immer das zu gegebenem h optimale k gewählt.

4.2.3. Der Diskretisierungsfehler in Abhängigkeit von h und k . In diesem Abschnitt wird das Verhalten des Diskretisierungsfehlers untersucht, wenn h und k nach den in den letzten beiden Abschnitten vorgestellten Regeln verfeinert werden. Die Rechnungen werden mit den Klassen `Convergence1d` und `Convergence2d` durchgeführt. In Abbildung 4.2.3 ist der Verlauf des Diskretisierungsfehlers für die Parameter P_1 , P_5 , P_6 und P_7 zu sehen. Die Graphen für die Parameter P_2 , P_3 , P_4 und P_8 sind nicht abgebildet, da sie mit dem Graph der Parameter P_1 zusammenfallen. Alle Graphen bilden jeweils eine Gerade. Da es sich um eine doppelt logarithmische Abbildung handelt, verkleinert sich der Diskretisierungsfehler, wenn hk um einen festen Faktor verkleinert wird, auch um einen festen Faktor. In der Abbildung wird hk von Schritt zu Schritt mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ multipliziert. Der Fehler wird dabei auch um ca einen Faktor $\frac{1}{4}$ verkleinert. Da die Geraden zu den Parametern P_1 , P_5 und P_7 annähernd parallel sind, verkleinert sich der Diskretisierungsfehler in jedem Schritt

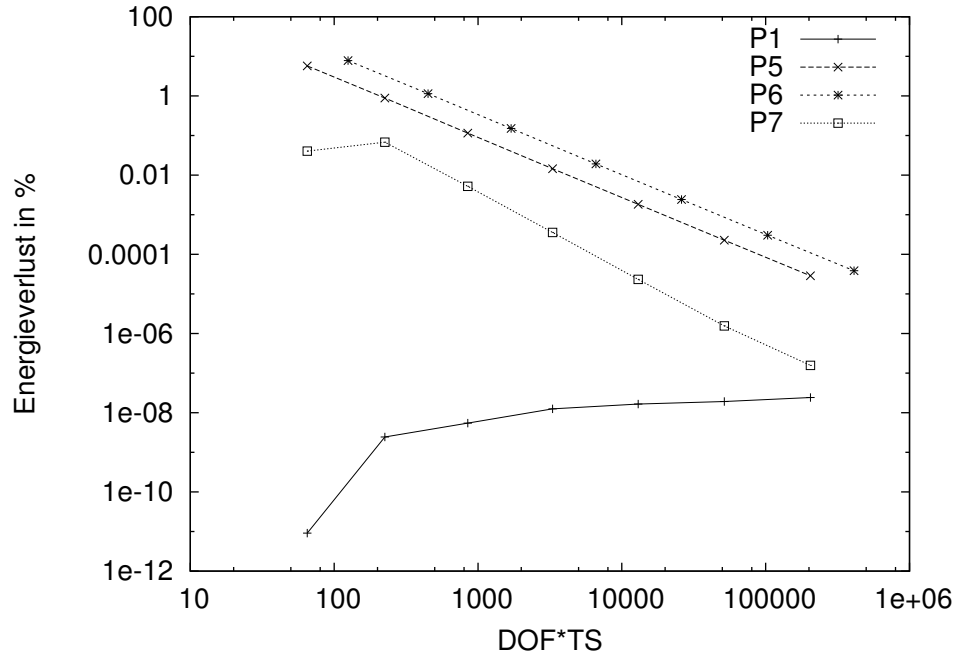


ABBILDUNG 4.2.4. Energieverlust in % für verschiedene Parameter

um denselben Faktor für die verschiedenen Parameter. Die Gerade zu P_6 besitzt eine etwas größere Steigung als die anderen. Dafür muss aber auch k einen Faktor 2 kleiner gewählt werden. Der kleinste Diskretisierungsfehler entsteht bei der Verwendung der Parameter P_1 . Deshalb sollte man die Parameter P_1 verwenden. Alternativ können auch alle Parameter gewählt werden, die zu P_1 identische Lösungen liefern.

In der Abbildung 4.2.3 ist anstatt des Produktes hk das äquivalente Produkt der Anzahl der Freiheitsgrade (DOF) mit der Anzahl der Zeitschritte (TS) angegeben. Es gilt $DOF = h^{-1} + 1$ und $TS = 2k^{-1}$.

Im zweidimensionalen sind die Resultate für die optimalen Parameter ähnlich. Nur der Diskretisierungsfehler ist zu gegebenem hk ungefähr einen Faktor 10 größer.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wird noch auf den Energieverlust während der Rechnung eingegangen. Da alle in diesem Abschnitt vorgestellten Probleme ohne Reibung und ohne Einwirkung von Kräften betrachtet werden, gilt der Energieerhaltungssatz. Dieser sollte in der numerischen Rechnung realisiert sein. Für die Parameter P_8 wird in Proposition 2.5.2 nachgewiesen, dass während der Rechnung die Energie erhalten ist. Der Energieverlust für die Parameter P_1 bis P_4 und P_8 liegt zwischen $10^{-8}\%$ und $10^{-12}\%$ in Abhängigkeit von k und h . Der Energieverlust wird größer, wenn h und k verkleinert werden, wobei der Anstieg immer langsamer wird. Für die Parameter P_7 wird die Energie erhöht. Der Zuwachs liegt für große h und k

bei $10^{-2}\%$ und sinkt dann mit abnehmenden h und k auf $10^{-7}\%$. Für die Parameter P_5 und P_6 liegt der Energieverlust für große h und k in der Größenordnung von 1 bis 10 Prozent. Er sinkt mit abnehmenden h und k und zwar in die Größenordnung von $10^{-5}\%$.

Insgesamt erhalten alle Parameter die Energie, wenn man nur h und k hinreichend klein wählt. Die hier vorgestellten Daten sind in Abbildung 4.2.4 dargestellt, wobei für die Parameter P_7 die Energieabweichung abgebildet wird.

4.3. Der Diskretisierungsfehler im Fall mit Kontakt

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie sich der Diskretisierungsfehler in Abhängigkeit von verschiedenen Parametern verhält, wenn Kontakt auftritt. Zuerst wird betrachtet, wie sich der Diskretisierungsfehler bei der Anwendung der nicht optimalen Parametern P_5 und P_8 entwickelt. Dann werden die Auswirkungen der Voraussetzung (3.3.3) aus Theorem 3.3.1 für die Parameter P_1 bis P_4 analysiert. Im Anschluss wird wie im vorherigen Abschnitt der Diskretisierungsfehler für festes k und festes h betrachtet und wieder optimale h und k bestimmt. Zu letzt wird der Verlauf des Diskretisierungsfehlers für optimale h und k angegeben. In diesem Abschnitt spielt der Vergleich mit dem Fall ohne Kontakt eine zentrale Rolle. Die Rechnungen werden mit denselben Klassen wie im vorherigen Abschnitt ausgeführt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wird die zeitliche Entwicklung und das Langzeitverhalten des Diskretisierungsfehlers betrachtet.

4.3.1. Nicht optimale Parameter. In Kapitel 3 werden nicht optimale Parameter auf das Modellproblem 3.1.1 angewendet. Man erhält bei Anwendung der Parameter P_5 und P_8 keine korrekten Lösungen. Für P_6 ergaben sich im Grenzwert korrekte Lösungen. In diesem Abschnitt werden die Parameter P_5 und P_8 auf das Problem aus Abschnitt 4.1 angewendet.

Es werden Rechnungen für verschiedene h und k ausgeführt. In der Abbildung 4.3.1 ist der Verlauf des Diskretisierungsfehlers in der l^∞ -Norm für festes $h = 2^{-4}$ zu sehen. Man beachte den großen Betrag des Fehlers im Vergleich zu der maximalen Auslenkung der analytische Lösung. Der Verlauf zeigt auch hier Minima und zwar bei $k = 2^{-8}$ für P_5 und bei $k = 2^{-9}$ für P_8 . Die k mit minimalen Fehler werden wieder mit k_{opt} bezeichnet.

Ein qualitativ gleiches Verhalten ergibt sich zudem für andere h . Der Zusammenhang ist dabei wie folgt. Mit $h = 2^{-n}$ gilt für P_5

$$k_{opt} = 2^{-2n}$$

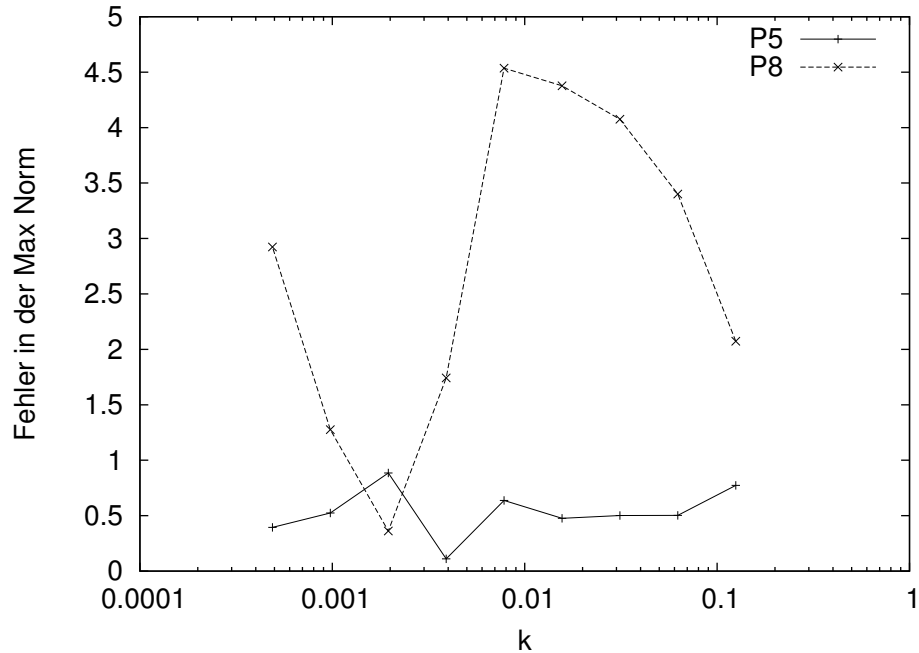


ABBILDUNG 4.3.1. Der Diskretisierungsfehler in der l^∞ -Norm für P_5 und P_8 im Fall mit Kontakt für festes h

und für P_8

$$k_{opt} = 2^{-(2n+1)}.$$

Im Fall für festes $k = 2^{-n}$ und variables h ist das Verhalten qualitativ gleich. Für P_5 ergibt sich

$$h_{opt} = 2^{-\frac{1}{2}n}$$

für gerade n . Für ungerade n ist keine Aussage möglich, da die Minima abwechselnd bei kleinen und bei großen h liegen. Für P_6 gilt der Zusammenhang

$$h_{opt} = 2^{-\lfloor \frac{1}{2}(n-1) \rfloor}.$$

Dabei bezeichnet $\lfloor \cdot \rfloor$ die untere Gaussklammer.

In Abbildung 4.3.2 ist der Verlauf des Diskretisierungsfehlers in der l^2 -Norm für P_5 und P_8 mit optimalen h und k dargestellt. Es ist deutlich zu sehen, dass bei diesem Problem in Übereinstimmung mit dem Modellproblem 3.1.1 die numerischen Lösungen nicht gegen die analytische Lösung konvergieren. Deshalb werden die Parameter P_5 und P_8 nicht mehr weiter verfolgt.

4.3.2. Die Voraussetzung (3.3.3) von Theorem 3.3.1. In Theorem 3.3.1 werden die optimalen Kontaktparameter für das G- α Verfahren angegeben. Nach Voraussetzung (3.3.3) muss $u^0 = 0$ gelten. Diese Bedingung muss auch bei dem

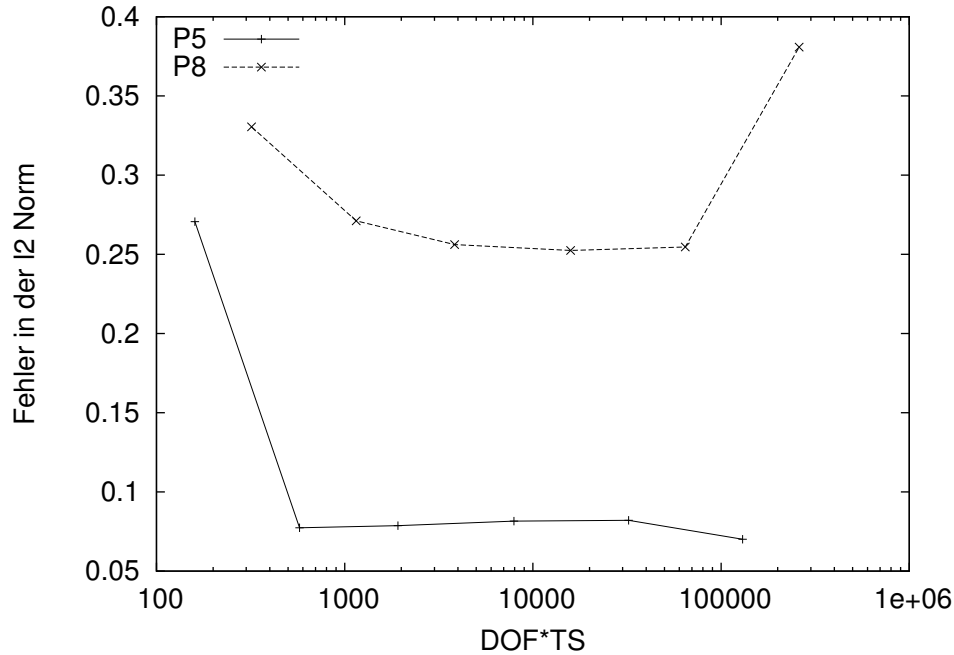


ABBILDUNG 4.3.2. Verlauf des Diskretisierungsfehlers in der l^2 -Norm für P_5 und P_8 mit Kontakt für optimales h und k

hier betrachteten Problem eingehalten werden. Es seien $t_{c,i}$ die Zeitpunkte zu denen Kontakt auftritt. Es muss $t_{c,i} \in Z$ gelten, wobei Z die in Kapitel 1 eingeführte Menge der Zeitpunkte der Zeitdiskretisierung ist, damit man für das G- α Verfahren mit den Parametern P_α vernünftige Lösungen erhält.

Für das in diesem Abschnitt betrachtete Problem, muss die Zeitschrittweite k so gewählt werden, dass

$$\frac{1}{4}T = kn$$

mit $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist $t_{c,i} \in Z$ für alle i , da die Bewegung periodisch ist. Die Formulierung dieser Bedingung ist einfacher, wenn man die Anzahl der Zeitschritte N und nicht die Länge der Zeitschritte k betrachtet. Es muss N modulo $4 = 0$ gelten.

In Abbildung 4.3.3 ist der Verlauf des Diskretisierungsfehlers in der l^2 -Norm sowie des Energieverlustes in Prozent der Gesamtenergie für $h = 2^{-5}$ dargestellt. Man sieht die Minima des Diskretisierungsfehlers und des Energieverlustes. Die Minima erhält man für $k = \frac{1}{90}$ und $k = \frac{1}{88}$, wobei die Abweichung vom exakten Wert in der Größenordnung von 10^{-6} ist. Das Intervall mit sinnvollen k hat eine Breite von 10^{-5} . Man muss also die Zeitschrittlänge sehr genau wählen, um gute Resultate zu erreichen. Zum Vergleich ist auch der Diskretisierungsfehler in der l^2 -Norm für die

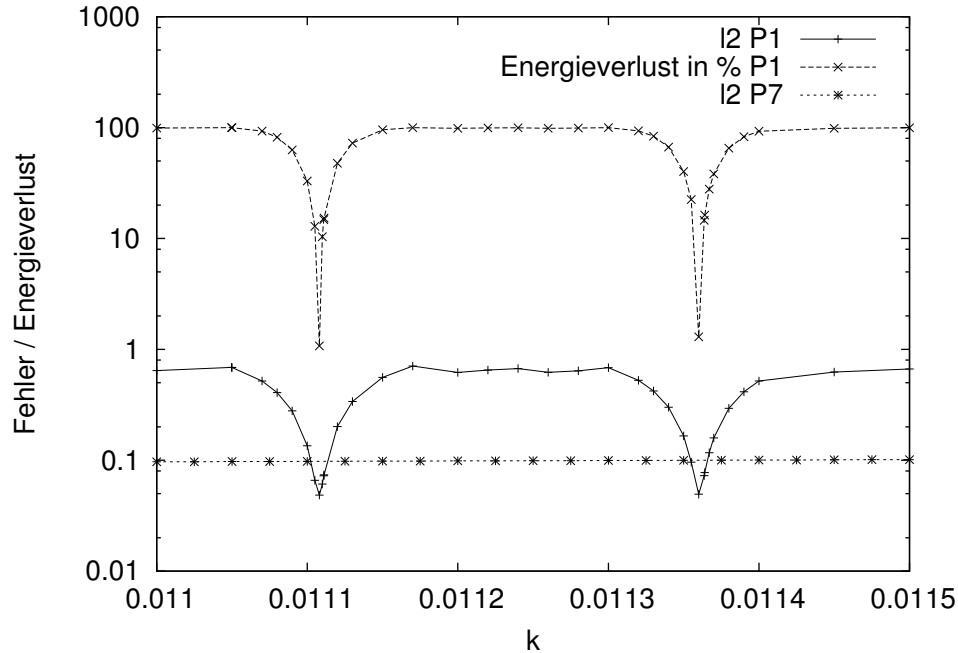


ABBILDUNG 4.3.3. Der Diskretisierungsfehler in der l^2 -Norm und der Energieverlust in % in Abhängigkeit von der Zeitschrittlänge k

Parameter P_7 abgebildet. Er steigt langsam mit zunehmenden k an. Zu beachten ist aber auch, dass der minimale Fehler für P_1 kleiner als der für P_7 ist.

Im zweidimensionalen ist das Verhalten gleich. Dort muss man beachten, dass die Intervalllänge gerade $\sqrt{2}$ ist.

Das sich die Voraussetzung (3.3.3) aus Theorem 3.3.1 direkt auf dieses Problem übertragen lässt, zeigt den Modellcharakter von Problem 3.1.1.

Um die Auswirkungen der Zeitschrittlänge auf die Auslenkung zu studieren, wird in Abbildung 4.3.4 für den Knoten an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ die Auslenkung und die Geschwindigkeit für $k = 0.01108$ und $k = 0.01117$ gegen die Zeit t dargestellt. Bis zum ersten Kontakt für $t_{c,1} = \frac{1}{2}$ sind die Graphen identisch. Nach dem ersten Kontakt erreicht weder die Geschwindigkeit noch die Auslenkung für $k = 0.01117$ die von der analytische Lösung vorgegebene Größe, sondern nur ungefähr die Hälfte. Nach dem zweiten Kontakt bei $t_{c,2} = \frac{3}{2}$, bleiben die Geschwindigkeit und die Auslenkung Null. Die Kurven für $k = 0.01108$ zeigen hingegen genau das von der analytische Lösung erwartete Verhalten. Die Geschwindigkeit wird vollständig reflektiert und die Anfangsauslenkung wieder erreicht. Dieses Verhalten lässt sich auch am Energieverlust ablesen. Den für $k = 0.01117$ gehen fast 100% der Anfangsenergie verloren, die Gesamtenergie ist also nahezu Null. Deshalb liegt die Saite beziehungsweise die Membran auf dem Hindernis auf.

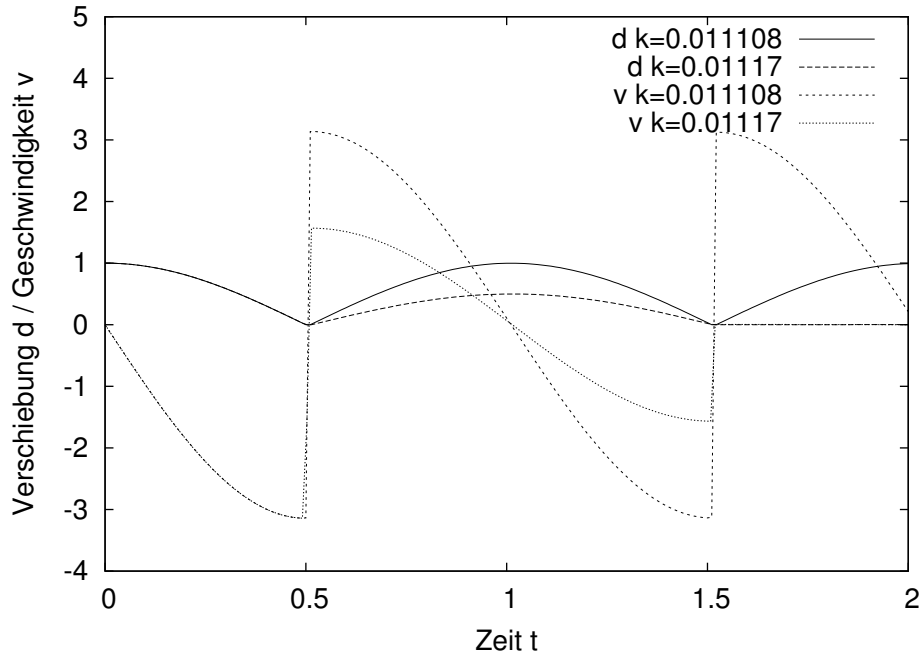


ABBILDUNG 4.3.4. Verschiebung und Geschwindigkeit des Knotens bei $x = \frac{1}{2}$ für verschiedene k

4.3.3. Der Diskretisierungsfehler für festes k . In diesem Abschnitt wird das Verhalten des Diskretisierungsfehlers für festes k untersucht und mit dem Verhalten der Energieabweichung verglichen. In Abbildung 4.3.5 ist für $k = 2^{-8}$ und h zwischen 2^{-2} und 2^{-11} die Entwicklung des Diskretisierungsfehlers in der l^2 -Norm und der Energieabweichung in Abhängigkeit von h für die Parameter P_1 und P_7 zu sehen. Es wird hier die Energieabweichung betrachtet, da es für P_7 für einzelne k zu Energiezuwachsen während der Rechnung kommt. Die Energieabweichung wird wie gewohnt in Prozent der Anfangsenergie aufgetragen. Der Diskretisierungsfehler nimmt zuerst mit abnehmenden h ab und erreicht für P_7 bei $h = 2^{-3}$ und für P_1 bei $h = 2^{-8}$ sein Minimum. Anschließend steigt er langsam wieder an. Das h , für das der Fehler minimal wird, wird mit h_{opt} bezeichnet. Die Energieabweichung wird für P_1 und P_7 für das jeweilige h_{opt} minimal.

Für anderes k und die Parameter P_6 ist der Verlauf des Diskretisierungsfehlers in der l^2 -Norm qualitativ gleich. Genau wie im Fall ohne Kontakt wird der Zusammenhang zwischen k und h_{opt} angegeben. Sei $k = 2^{-n}$, dann gilt für P_1

$$(4.3.1) \quad h_{opt} = 2^{-n}.$$

Diese h_{opt} sind von derselben Größenordnung wie die, die in Gleichung (4.2.1) für den Fall ohne Kontakt angegeben werden.

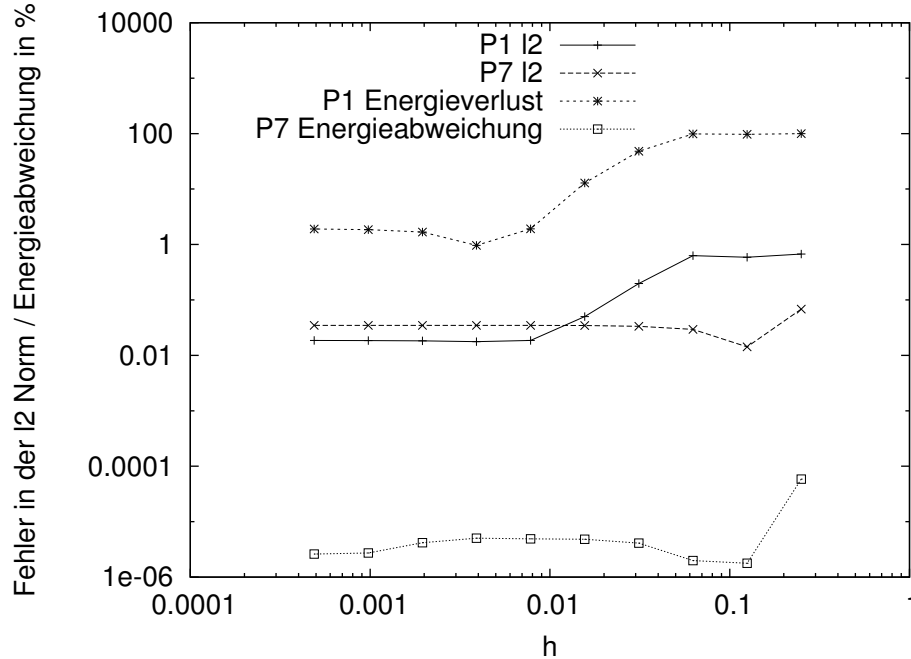


ABBILDUNG 4.3.5. Der Diskretisierungsfehler in der l^2 -Norm und die Energieabweichung in Prozent der Anfangsenergie in Abhängigkeit von h

Für P_6 gilt

$$(4.3.2) \quad h_{opt} = 2^{-(n-2)}.$$

Im Fall ohne Kontakt ist h_{opt} für P_6 nach Gleichung (4.2.2) um einen Faktor $\frac{1}{2}$ kleiner als h_{opt} für die anderen Parameter, hier beträgt der Faktor $\frac{1}{4}$.

Es ist

$$(4.3.3) \quad h_{opt} = 2^{-\lfloor \frac{1}{2}(n-1) \rfloor},$$

wenn die Parameter P_7 betrachtet werden. Hier zeigt sich ein ganz anderes Verhalten als im Fall ohne Kontakt. Das optimale h ist wesentlich größer als das für die anderen Parameter und es halbiert sich, wenn k geviertelt wird. Bei allen anderen Parametern wird h_{opt} halbiert, wenn k halbiert wird.

Im zweidimensionalen Fall sei $k = (10\sqrt{2})^{-1} \cdot 2^{-n}$. Für die Parameter P_1 ist

$$h_{opt} = 2^{-(n+3)}.$$

Es gilt

$$h_{opt} = 2^{-(n+2)}$$

für P_6 . Die hier bestimmten h_{opt} sind von derselben Größenordnung wie im eindimensionalen Fall. Nur durch das geänderte k kommt es zu Abweichungen. Für P_7 gilt

$$h_{opt} = 2^{-([\frac{1}{2}n]+1)}.$$

In Abbildung 4.3.5 ist zusätzlich zu dem Diskretisierungsfehler in der l^2 -Norm noch die Energieabweichung in Prozent der Anfangsenergie aufgetragen. Die Minima in der Energieabweichung fallen mit den Minima des Diskretisierungsfehlers zusammen. Im allgemeinen sind die analytischen Lösungen nicht bekannt. Aber es ist trotzdem möglich die Energieabweichung zu berechnen und damit einen Hinweis auf die Qualität der Diskretisierung zu erhalten.

Weiter interessiert die Frage, wie sich die numerische Lösung im Vergleich zur analytischen Lösung für $h < h_{opt}$, $h = h_{opt}$ und $h > h_{opt}$ verhält. Dazu befinden sich auf dem beiliegendem Datenträger im Verzeichnis `Filme/Convergence/` Filme für die Parameter P_1 und P_7 jeweils für die drei Fälle. Dabei stellt der blau eingefärbte Graph die analytische Lösung und der farblich veränderliche die numerische Lösung dar.

Zuerst werden die Parameter P_1 betrachtet. Für $h > h_{opt}$ sieht man zum einen den Energieverlust, der sich darin äußert, dass die Saite nicht die Anfangsauslenkung erreicht. Zum anderen sieht man, dass die numerische Lösung eine etwas größere Periodenlänge als die analytische Lösung hat. Für $h = h_{opt}$ ist der Energieverlust kleiner. Aber die numerische Lösung hat weiterhin eine größere Periodenlänge als die analytische Lösung. Für $h < h_{opt}$ ist das Verhalten ähnlich.

Für P_7 ist das Verhalten gänzlich anders. Wie zu erwarten, ist ein Energieverlust praktisch nicht zu beobachten. Die numerische Lösung ist für $h = h_{opt}$ in Phase mit der analytischen Lösung. Für $h > h_{opt}$ hat sie eine kürzere Periodenlänge als die analytischen Lösung. Hingegen ist für $h < h_{opt}$ die Periodenlänge der numerischen Lösung größer als die der analytischen Lösung.

4.3.4. Der Diskretisierungsfehler für festes h . In diesem Abschnitt wird betrachtet, wie sich der Diskretisierungsfehler für festes h verhält. Sei $h = 2^{-4}$. Die Zeitschrittlänge k wird zwischen 2^{-3} und 2^{-15} variiert. In Abbildung 4.3.6 ist der Verlauf des Diskretisierungsfehlers in der l^2 -Norm und die Energieabweichung in Prozent der Anfangsenergie für P_1 und P_7 dargestellt. Für P_1 ist nur Energieverlust zu bemerken, während es für P_7 auch zu Energiegewinnen kommt. Es zeigt sich auch hier, dass es zu Minima in dem Verlauf des Diskretisierungsfehlers kommt. Für P_1 liegt das Minimum bei $k = 2^{-6}$, für dieses k ist auch der Energieverlust minimal.

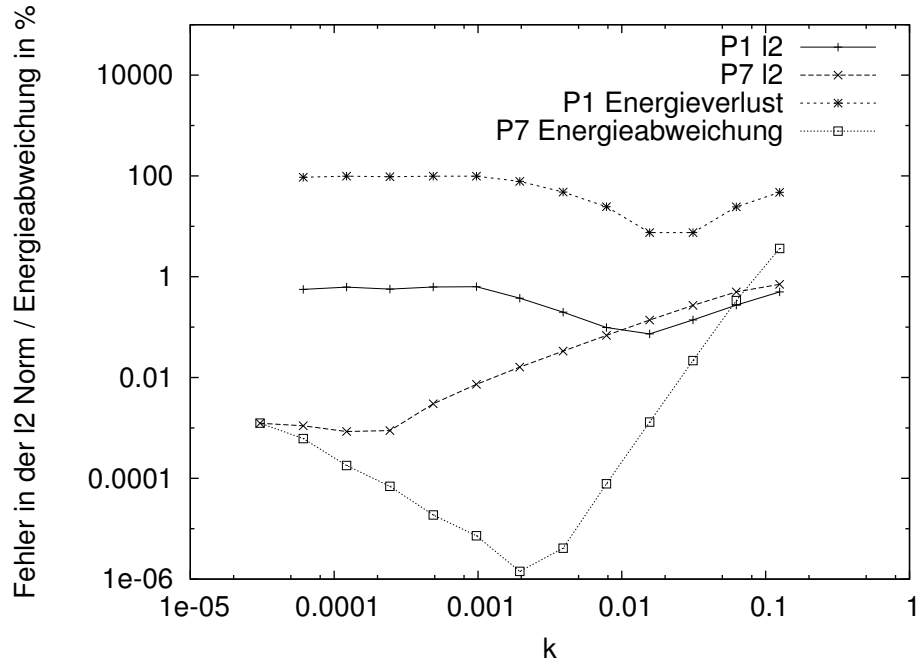


ABBILDUNG 4.3.6. Der Fehler in der l^2 -Norm und die Energieabweichung in Abhängigkeit von k mit Kontakt für P_1 und P_7

Für P_7 liegt das Minimum bei $k = 2^{-13}$. Dort ist allerdings die Energieabweichung nicht minimal. Ihr Minimum liegt bei $k = 2^{-9}$. Die optimalen k werden wie gewohnt mit k_{opt} bezeichnet.

Für anderes h und andere Parameter sind die Verläufe der Graphen qualitativ gleich. Jetzt wird wieder der Zusammenhang zwischen $h = 2^{-n}$ und k_{opt} betrachtet. Für P_1 gilt

$$k_{opt} = 2^{-(n+1)}$$

und für P_6

$$k_{opt} = 2^{-(n+2)}.$$

Für P_7 ergibt sich

$$k_{opt} = 2^{-(2n+3)}.$$

Die optimalen k für P_7 sind also wesentlich kleiner als die für die anderen Parameter. Zudem sind diese k_{opt} alle kleiner als die für den Fall ohne Kontakt. Es werden also wesentlich mehr Zeitschritte zur Berechnung einer optimalen Lösung benötigt. Der Aufwand ist für die Parameter P_7 wesentlich größer als für die anderen Parameter.

Im zweidimensionalen gilt für P_1

$$k_{opt} = (10\sqrt{2})^{-1} \cdot 2^{-(n-2)},$$

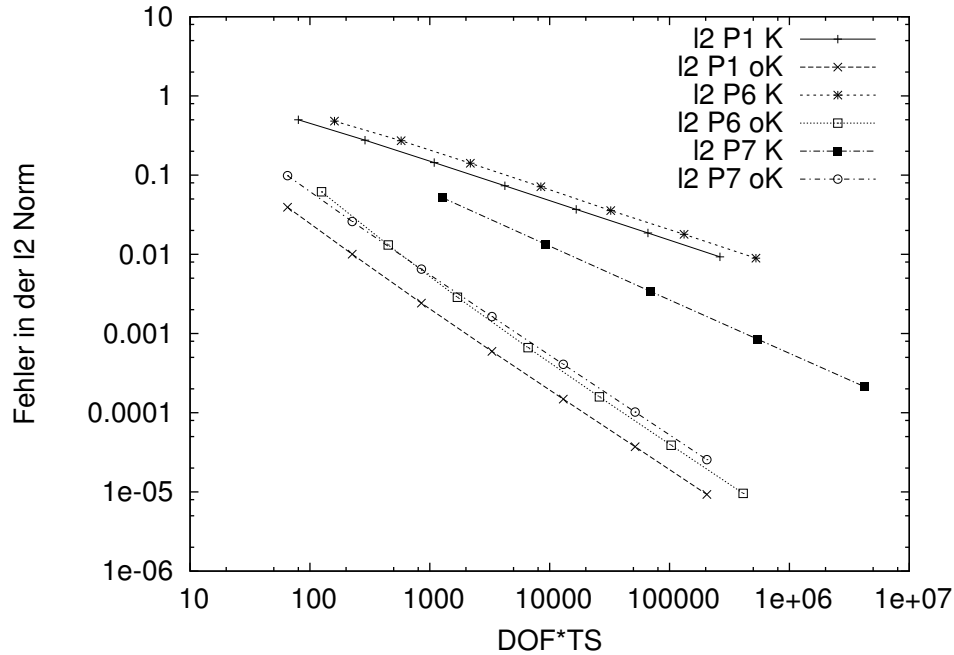


ABBILDUNG 4.3.7. Der Diskretisierungsfehler in der l^2 -Norm für P_1 , P_6 und P_7 mit und ohne Kontakt in Abhängigkeit von h und k

für P_6

$$k_{opt} = \left(10\sqrt{2}\right)^{-1} \cdot 2^{-(n-1)}$$

und für P_7

$$k_{opt} = \left(10\sqrt{2}\right)^{-1} \cdot 2^{-(2n-1)}.$$

Diese k_{opt} sind alle in derselben Größenordnung wie im eindimensionalen Fall.

Eine Besonderheit zeigt sich bei den Parametern P_1 für $k = \left(10\sqrt{2}\right)^{-1} \cdot 2^{-(2n-1)}$. Der Diskretisierungsfehler ist für alle h in der l^2 -Norm in der Größenordnung von 0.08. Für große h ist der Fehler dann bei diesen k kleiner als bei den angegebenen k_{opt} . Ab $h = 2^{-5}$ ist der Diskretisierungsfehler bei k_{opt} kleiner. Eine ähnliche Auffälligkeit zeigt sich auch für P_6 .

Auf dem Datenträger befinden sich in dem Verzeichnis `Filme/Convergence/` wieder Filme zu den einzelnen Fällen. Für P_1 hat die numerische Lösung in allen Fällen eine größere Periodenlänge als die analytischen Lösung. Je kleiner k wird, desto kleiner wird der Unterschied. Für das optimale k ist der Energieverlust am kleinsten, was deutlich an der Höhe der Auslenkung zu sehen ist.

Für P_7 ist die Periodenlänge der numerische Lösung in allen Fällen kleiner als die der analytischen Lösung. Der Unterschied wird mit abnehmenden k kleiner.

4.3.5. Der Diskretisierungsfehler für optimale h und k . In den vorhergehenden Abschnitten sind die optimalen k und h bestimmt worden. Jetzt soll betrachtet werden, wie sich der Diskretisierungsfehler entwickelt, wenn man mit einem gegebenen h und dazu optimalen k startet und dann sukzessive entsprechend den Formeln für optimales k weiter verfeinert. In Abbildung 4.3.7 ist die Entwicklung des Diskretisierungsfehlers in der l^2 -Norm gegen das Produkt der Anzahl der Freiheitsgrade mit der Anzahl der Zeitschritte aufgetragen. Die Punkte bilden für alle Parameter eine Gerade. Der Diskretisierungsfehler ist für die Parameter P_7 kleiner als für die anderen Parameter. Zudem ist die Steigung der Geraden für P_7 größer. Für P_1 und P_6 sind die Geraden parallel. Allerdings muss man für P_6 die Zeitschrittlänge k um den Faktor $\frac{1}{2}$ kleiner wählen, um denselben Diskretisierungsfehler zu erhalten. Auf eine weitere Betrachtung der Parameter P_6 wird verzichtet. Denn die Resultate sind ähnlich zu den Resultaten für die Parameter P_1 . Aber der Aufwand für ihre Berechnung ist größer. Damit stimmen die Resultate für die nicht optimalen Parameter bei der Anwendung auf dieses Problem mit den Resultaten für das Modellproblem 3.1.1 überein. Die Parameter P_5 und P_8 ergeben keine vernünftige Diskretisierung. Die Resultate für die Parameter P_6 sind hingegen nur unwesentlich schlechter als die der optimalen Parameter. Damit erhält man einen weiteren Beleg dafür, dass das Problem 3.1.1 als Modell für dynamische Hindernisprobleme geeignet ist.

Im zweidimensionalen erhält man ähnliche Ergebnisse.

In Abbildung 4.3.7 ist zusätzlich noch der Verlauf des Diskretisierungsfehlers in der l^2 -Norm für den Fall ohne Kontakt abgebildet. Der Diskretisierungsfehler ist im Fall mit Kontakt wesentlich größer. Deshalb ist der Aufwand zur Bestimmung einer numerische Lösung, deren Diskretisierungsfehler kleiner als eine vorgegebene Toleranz ist, im Fall mit Kontakt wesentlich größer.

4.3.6. Der Diskretisierungsfehler im zeitlichen Verlauf. In diesem Abschnitt wird der zeitliche Verlauf des Diskretisierungsfehlers betrachtet. Die Rechnungen werden mit den Klassen `Evolution1d` und `Evolution2d` ausgeführt. Da die l^2 -Norm als Maximum über die L^2 -Norm in den einzelnen Zeitpunkten definiert ist, ist dieser Abschnitt ein wesentlicher Beitrag zum Verständnis der Eigenschaften des Diskretisierungsfehlers in der l^2 -Norm. Wenn der Diskretisierungsfehler in der l^∞ -Norm gemessen wird, zeigen sich keine qualitativen Unterschiede.

In Abbildung 4.3.8 ist der zeitliche Verlauf des Diskretisierungsfehlers in der L^2 -Norm für die Parameter P_1 und P_7 dargestellt. Das Zeitintervall I wird auf $[0, 4]$ ausgedehnt, um die Wiederholungen im Verlauf des Diskretisierungsfehlers zu verdeutlichen. Die Rechnungen werden mit $h = 2^{-4}$ und $k = 2^{-5}$ für P_1 und $k = 2^{-11}$ für P_7 ausgeführt.

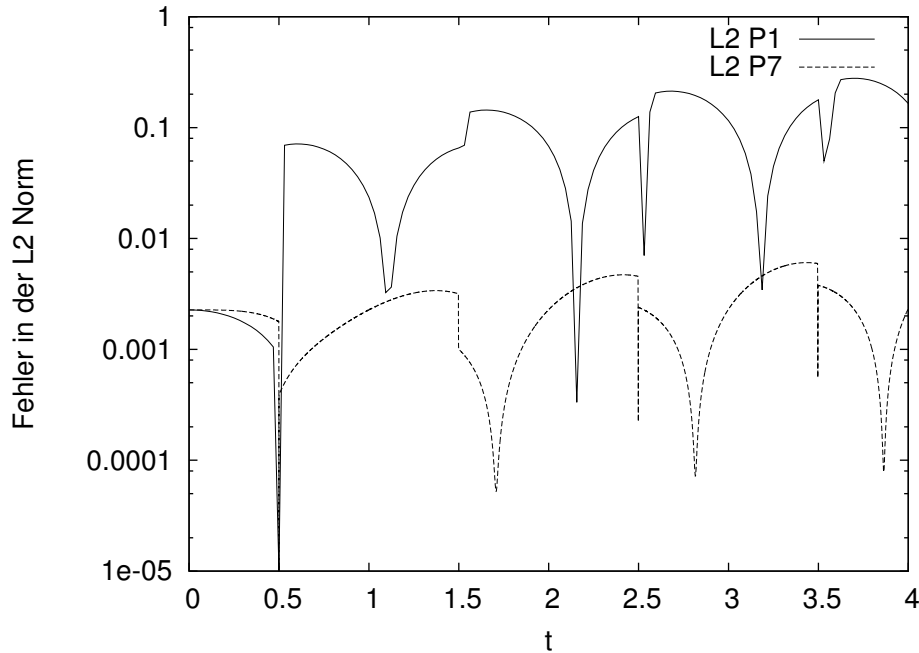


ABBILDUNG 4.3.8. Zeitlicher Verlauf des Diskretisierungsfehlers in der L^2 -Norm in Abhängigkeit von t für P_1 und P_7

Kontakt liegt jeweils für $t_{c,i} = -\frac{1}{2} + i$, $i \in \mathbb{N}$, vor. Für $t_{c,1}$ wird der Graph bei 10^{-5} abgeschnitten. Die wirklichen Werte sind kleiner. Wichtig zu bemerken ist, dass der Diskretisierungsfehler sich auf den Intervallen $[t_{c,i}, t_{c,i+1}]$ für alle i ähnlich verhält, so dass nur das Verhalten des Fehlers auf einem solchen Intervall interessant ist. Für wachsende i steigt allerdings der Betrag des Diskretisierungsfehlers an.

Für P_1 wird der Diskretisierungsfehler beim Kontakt zuerst klein, um dann sein Maximum auf dem Intervall zu erreichen. Er wird anschließend wieder kleiner, bis er kurz nach den Zeitpunkten, für die die Lösung ihr Maximum erreicht, wieder ansteigt. Der hauptsächliche Beitrag zu dem Diskretisierungsfehler gemessen in der l^2 -Norm entsteht also kurz nach dem Kontakt. Wenn man den Diskretisierungsfehler verkleinern will, muss man den Fehler, der beim Kontakt entsteht, verkleinern.

Für P_7 ist das Verhalten anders. Hier wird der Diskretisierungsfehler direkt nach dem Kontakt kleiner und erreicht kurze Zeit später sein Minimum. Dann steigt er auf sein Maximum kurz vor dem nächsten Kontakt an. Der wesentlich Beitrag zu dem Diskretisierungsfehler entsteht für P_7 also kurz vor dem Kontakt und nicht kurz danach.

Die Graphen zeigen für andere optimale h und k dasselbe Verhalten, lediglich die Werte werden kleiner je kleiner man h und k wählt.

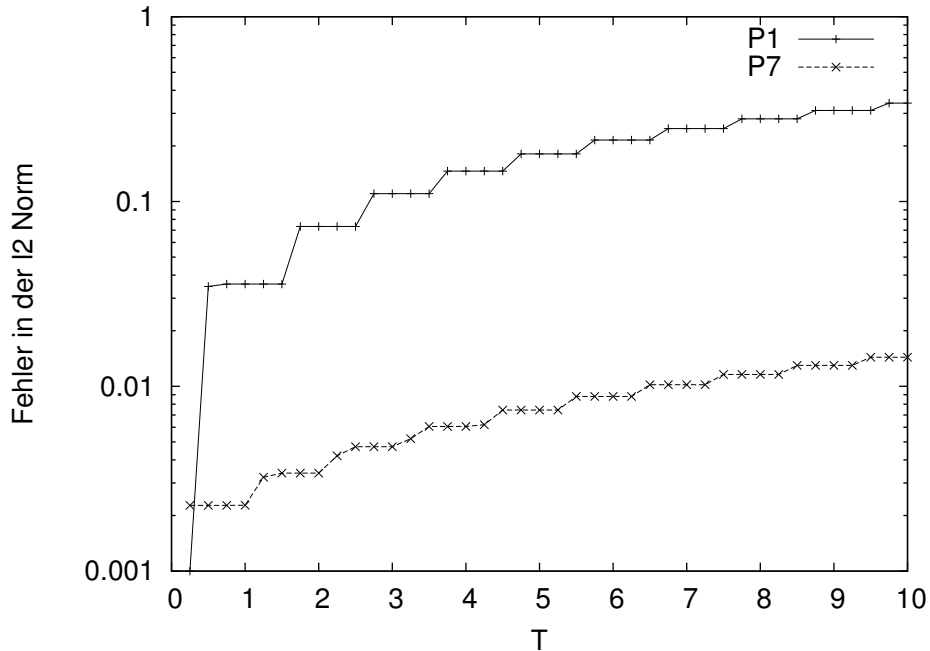


ABBILDUNG 4.3.9. Der Diskretisierungsfehler in der l^2 -Norm in Abhängigkeit von T für P_1 und P_7

4.3.7. Der Diskretisierungsfehler im Langzeitverhalten. Nach dem letzten Abschnitt sind die Resultate dieses Abschnitts über den Diskretisierungsfehler bei wachsendem T nicht verwunderlich. Die Rechnungen dieses Abschnitts werden für P_1 mit $h = 2^{-5}$ und $k = 2^{-6}$ und für P_7 mit $h = 2^{-4}$ und $k = 2^{-11}$ ausgeführt. Dabei werden die Klassen `LongTime1d` und `LongTime2d` verwendet. Die Länge T des Zeitintervalls wird variiert.

In Abbildung 4.3.9 ist die Entwicklung des Diskretisierungsfehlers in der l^2 -Norm bei steigendem T für P_1 und P_7 zu sehen. Jeweils für $t_{c,i} = -\frac{1}{2} + i$, $i \in \mathbb{N}$, kommt es zu Kontakt mit dem Hindernis. Der Diskretisierungsfehler für P_1 mit $T = \frac{1}{4}$ ist kleiner als in der Abbildung angegeben.

Nach dem letzten Abschnitt erwartet man, dass der Diskretisierungsfehler für P_1 kurz nach den Zeitpunkten mit Kontakt ansteigt. Er steigt direkt nach dem Zeitpunkt mit Kontakt einmal an und bleibt dann konstant. Für P_7 steigt der Diskretisierungsfehler in den letzten beiden Zeitpunkten vor dem Kontakt an und bleibt dann konstant. Durch die logarithmische y Achse ist es nicht unbedingt erkennbar, aber der Anstieg im Fehler erfolgt immer in derselben Größenordnung. Für P_1 beträgt der Anstieg ungefähr 0.03 und für P_7 ungefähr 0.0015.

Dieser Abschnitt zeigt, dass der Diskretisierungsfehler linear mit der Anzahl der Kontakte ansteigt. Wenn die Länge des Zeitintervalls T bei vorgegebenem Diskretisierungsfehler verlängert wird, muss man die Diskretisierung also entsprechend feiner wählen. Damit erhöht sich der Aufwand beträchtlich.

Analyse der Energieabweichung

In Kapitel 4 wird der Fehler bei der Diskretisierung für einen Spezialfall betrachtet. In diesem Kapitel werden die Diskretisierungen von Problemen, für die keine analytischen Lösungen bekannt sind, untersucht. Da keine äußeren Kräfte wirken, gilt in allen Problemen der Energieerhaltungssatz der Physik. Für alle hier betrachteten Probleme kann man die Energie ausrechnen. Als Maß für die Qualität der Diskretisierung wird deshalb die Energieabweichung von der Anfangsenergie am Ende der Rechnung benutzt.

Die Energieabweichung hängt von verschiedenen Faktoren ab, die einzeln untersucht werden. Zuerst wird untersucht, wie sich Änderungen der Anfangsauslenkung u^0 auf den Energieverlust auswirken. Danach wird der Einfluss der Form des Hindernisses auf die Energieabweichung untersucht. Zum Abschluss werden die Resultate dieses und des letzten Kapitels zusammengefasst und Schlussfolgerungen für die Wahl des Zeitschrittverfahrens gezogen.

In diesem Kapitel wird, sofern nichts anderes angegeben ist, die zu dem gegebenenem h nach den Ergebnissen des letzten Kapitels optimale Zeitschrittlänge k gewählt.

5.1. Energie in Abhängigkeit von der Anfangsauslenkung

In diesem Abschnitt wird betrachtet, wie sich Änderungen der Anfangsauslenkung auf den Energieverlust während der Rechnungen auswirken. Dazu wird zuerst die Anfangsauslenkung mit einem konstanten Faktor skaliert. Dann werden völlig verschiedene Anfangsauslenkungen betrachtet.

5.1.1. Skalierung der Anfangsauslenkung. In diesem Abschnitt wird Problem 1.3.2 mit $\psi = 0$ und $v^0 = 0$ betrachtet. Die Anfangsauslenkung u^0 hat im eindimensionalen die Form

$$u_d^0(x) = d \sin(\pi x).$$

Im zweidimensionalen gilt

$$u_d^0(x_1, x_2) = d \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2).$$

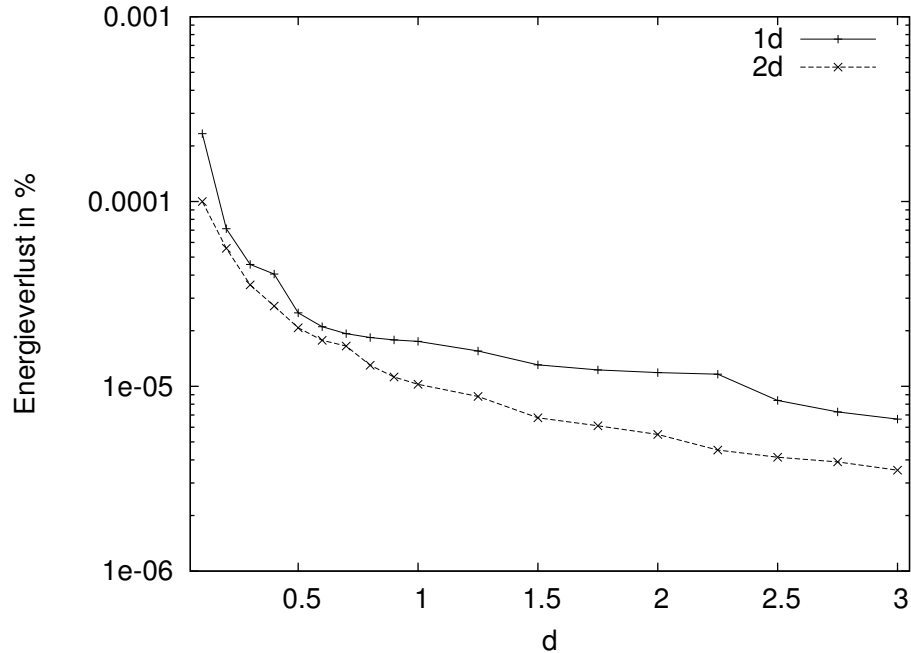


ABBILDUNG 5.1.1. Energieverlust für P_7 in Abhängigkeit von d

Der Parameter d bestimmt also die Höhe der Anfangsauslenkung. Für die Anfangsenergie gilt $E^0 = \frac{1}{4}d^2\pi^2$. Interessant ist die Frage, wie sich der Energieverlust entwickelt, wenn d geändert wird.

Mit Hilfe der Klassen `ScalStart1d` und `ScalStart2d` werden Rechnungen für verschiedene h , k und d für die Parameter P_2 und P_7 ausgeführt. In Abbildung 5.1.1 ist für P_7 d gegen den Energieverlust für $h = 2^{-4}$ aufgetragen.

Der Energieverlust wird mit zunehmenden d kleiner, wobei die Steigung der Kurve immer kleiner wird. Die Graphen für den eindimensionalen und zweidimensionalen Fall verlaufen annähernd parallel. Die Änderungen im Energieverlust sind minimal. Deshalb können sie vernachlässigt werden.

Für die Parameter P_2 findet man in Abbildung 5.1.2 den Verlauf des Energieverlustes in Abhängigkeit von d . Es wird $h = 2^{-3}$ gewählt. Der Graph für den Energieverlust im zweidimensionalen ist um 6.680806 % nach unten verschoben, um einen direkten Vergleich zu ermöglichen. Die beiden Graphen verlaufen parallel. Die Änderungen des Energieverlustes sind so klein, dass sie vernachlässigt werden können.

Für andere h beobachtet man für beide Verfahren ein ähnliches Verhalten des Energieverlustes. Insgesamt ist der Energieverlust damit nicht von einer Skalierung der Anfangsauslenkung abhängig.

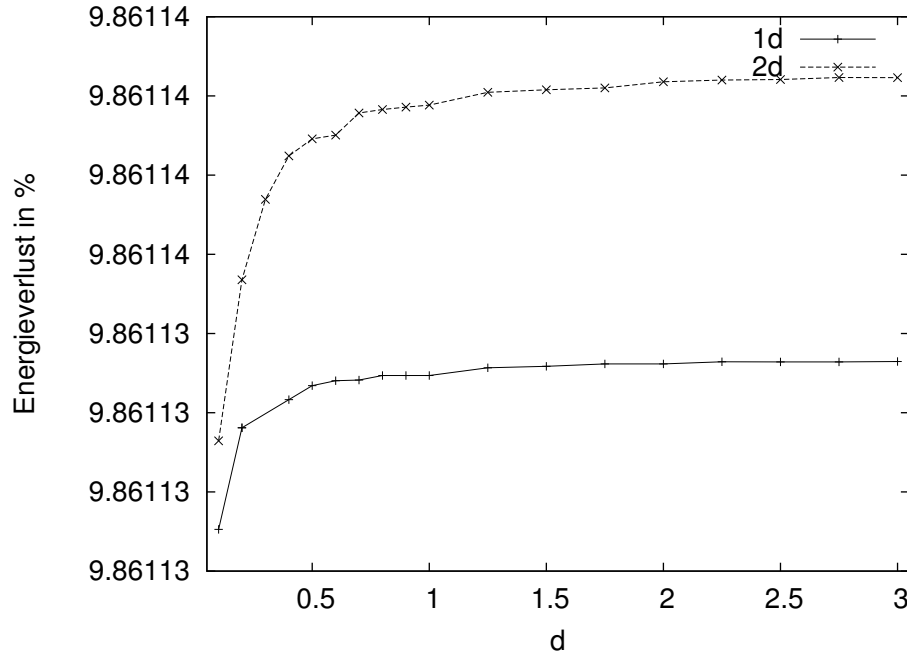


ABBILDUNG 5.1.2. Energieverlust für P_2 in Abhängigkeit von d

5.1.2. Form der Anfangsauslenkung. In diesem Abschnitt werden verschiedene Anfangsauslenkungen betrachtet. Es gilt immer $\psi = 0$ und $v^0 = 0$. Sei

$$u_{-1}^0(x) = \sin(\pi x),$$

$$u_{-2}^0(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x < \frac{1}{2} \\ -2x + 2 & \text{für } x \geq \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$u_{-3}^0(x) = \exp\left(-200\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) - \exp(-50)$$

und für $i \in \mathbb{N}$

$$u_i^0(x) = -(2x - 1)^{2i} + 1.$$

Für alle diese Funktionen gilt mit $i \in \{-3, -2, -1, 1, \dots\}$

$$u_i^0(0) = u_i^0(1) = 0 \text{ und } u_i^0\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Für den zweidimensionalen Fall gilt

$$u_i^0(x_1, x_2) = u_i^0(x_1) \cdot u_i^0(x_2).$$

Die Rechnungen in diesem Abschnitt werden mit den Klassen `Start1d` und `Start2d` ausgeführt.

Parameter	$E_v u_{-1}^0$	$E_v u_{-2}^0$	$E_v u_{-3}^0$	$E_v u_1^0$
$P_2 h = 2^{-4} 1d$	5.1 %	39.2 %	92.4 %	6.3 %
$P_2 h = 2^{-5} 1d$	2.6 %	22.4 %	82.14 %	3.2 %
$P_2 h = 2^{-3} 2d$	16.5 %	65 %	70.5 %	58.6 %
$P_2 h = 2^{-4} 2d$	8.5 %	64.9 %	72.6 %	69.7 %
$P_7 h = 2^{-4} 1d$	$1.75 \cdot 10^{-5}$ %	-3.1 %	-1.2 %	-1.9 %
$P_7 h = 2^{-5} 1d$	$9 \cdot 10^{-5}$ %	-0.43 %	-0.033 %	-1.86 %
$P_7 h = 2^{-3} 2d$	$1.07 \cdot 10^{-6}$ %	-8 %	-0.93 %	5.19 %
$P_7 h = 2^{-4} 2d$	$1.02 \cdot 10^{-5}$ %	0.02 %	-0.54 %	-2 %

TABELLE 1. Energieverlust in Prozent für verschiedene Anfangsauslenkungen und Parameter

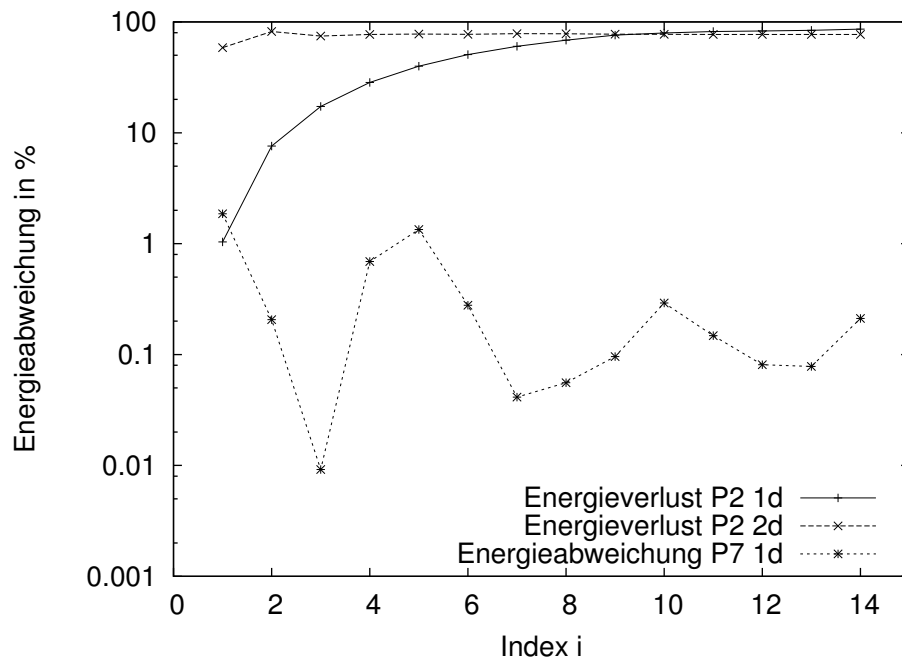


ABBILDUNG 5.1.3. Energieabweichung in Abhängigkeit vom Index i der Anfangsauslenkung

In Tabelle 5.1.2 ist der Energieverlust in Prozent der Anfangsenergie für verschiedene Anfangsauslenkungen und Parameter aufgetragen. Während der Energieverlust für P_7 durchweg klein ist, ist er für P_2 nur für die Anfangsauslenkung u_{-1}^0 und für u_1^0 im eindimensionalen akzeptabel. Deutlich zu sehen ist aber auch, dass der Energieverlust von der Anfangsauslenkung abhängt. Es ist nur für die in Tabelle 5.1.2 dargestellten Auslenkungen kein Zusammenhang ersichtlich.

In Abbildung 5.1.3 ist für u_i^0 mit $i \in \mathbb{N}$ die Entwicklung des Energieverlustes für P_2 und der Energieabweichung für P_7 in Abhängigkeit von i zu sehen. Für P_2 wird im

eindimensionalen $h = 2^{-7}$ und im zweidimensionalen $h = 2^{-3}$ gewählt. Die Rechnung für P_7 wird mit $h = 2^{-5}$ ausgeführt.

Für P_7 schwankt die Energieabweichung um 0.1%, wobei die Schwankungen mit zunehmenden i kleiner werden. Für P_2 ist der Energieverlust aufgetragen. Im eindimensionalen nimmt der Energieverlust von annehmbaren 1% aus mit zunehmenden i zu und strebt gegen inakzeptable 85%. Im zweidimensionalen ist der Energieverlust für $i = 1$ bereits 59% und strebt dann gegen 77%.

Die Energieverluste nehmen im zweidimensionalen für P_2 mit zunehmender Feinheit der Diskretisierung zu. Im eindimensionalen werden die Energieverluste kleiner je kleiner h und k gewählt werden. Für P_7 bleiben die Energieabweichungen konstant in der Größenordnung von 1%.

Dieser Abschnitt zeigt, dass das G- α Verfahren mit den Parametern P_α stark von der Anfangsauslenkung abhängt. Nur für wenige Anfangsauslenkungen erhält man eine vernünftige Diskretisierung. Auch das Newmark Verfahren mit den Parametern P_7 erfüllt nicht immer die Energieerhaltung. Allerdings sind die Energieabweichungen für kleine h und k immer so klein, dass sie vernachlässigt werden können.

In dem Verzeichnis `Filme/Start/` befinden sich die Filme zu den Rechnungen. Gerade im zweidimensionalen ist für die Parameter P_2 der Energieverlust sehr gut zu sehen. Interessant sind die Filme für u_{-3}^0 . Dort wird die Saite, es wird hier der eindimensionale Fall beschrieben, nicht am Hindernis direkt reflektiert, sondern läuft in Form zweier Wellen auseinander. Dann wird sie an den fest eingespannten Enden reflektiert, um sich anschließend in der Mitte wieder zu vereinigen. Danach geht sie in die Anfangsauslenkung zurück.

5.2. Energie in Abhängigkeit vom Hindernis

In diesem Abschnitt wird der Einfluss des Hindernisses auf die Energieabweichung betrachtet. Dazu wird zuerst die Breite des Hindernisses variiert. Anschließend wird das Hindernis entlang der x_3 -Achse verschoben. Zum Abschluss wird der Einfluss der Krümmung des Hindernisses betrachtet.

In diesem Abschnitt gilt für die Anfangsauslenkung

$$u^0(x) = \sin(\pi x)$$

und

$$u^0(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2).$$

Für die Anfangsgeschwindigkeit gilt $v^0 = 0$.

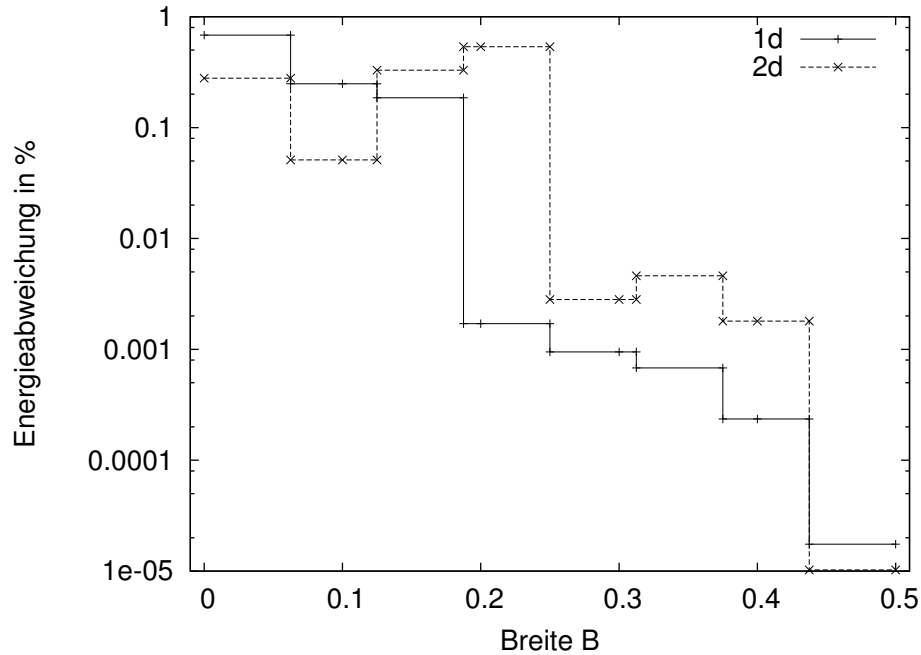


ABBILDUNG 5.2.1. Energieabweichung in Prozent in Abhängigkeit von der Breite des Hindernisses B für P_7

5.2.1. Energie in Abhängigkeit von der Breite des Hindernisses. Im Rahmen dieses Abschnittes wird betrachtet, wie sich eine Veränderung der Breite des Hindernisses auf den Energieverlust während der Rechnung auswirkt. Als Hindernis wird

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } |x - \frac{1}{2}| < B \\ -1, & \text{für } |x - \frac{1}{2}| \geq B \end{cases}$$

mit einer Konstanten $B \in (0, \frac{1}{2}]$ gewählt. Im zweidimensionalen Fall gilt entsprechend

$$\psi(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{für } \max\{|x_1 - \frac{1}{2}|, |x_2 - \frac{1}{2}|\} < B \\ -1, & \text{für } \max\{|x_1 - \frac{1}{2}|, |x_2 - \frac{1}{2}|\} \geq B \end{cases}$$

Aufgrund der in Kapitel 1 beschriebenen Diskretisierung ist für den Energieverlust zu erwarten, dass er sich in Form einer Treppenfunktion in Abhängigkeit von B ändert. Es gelte $h = 2^{-n}$. Dann ändert sich der Energieverlust immer dann, wenn von $B = nh$ nach $B = nh + \varepsilon$ übergegangen wird, wobei ε beliebig klein sein kann. Das heißt aber auch, dass es insgesamt $2^{n-1} - 1$ Sprünge gibt.

Die Rechnungen in diesem Abschnitt werden mit den Klassen `Width1d` und `Width2d` ausgeführt.

In Abbildung 5.2.1 ist die Energieabweichung in Abhängigkeit von B für P_7 und $h = 2^{-4}$ dargestellt. Das der Graph für den eindimensionalen Fall monoton fallend

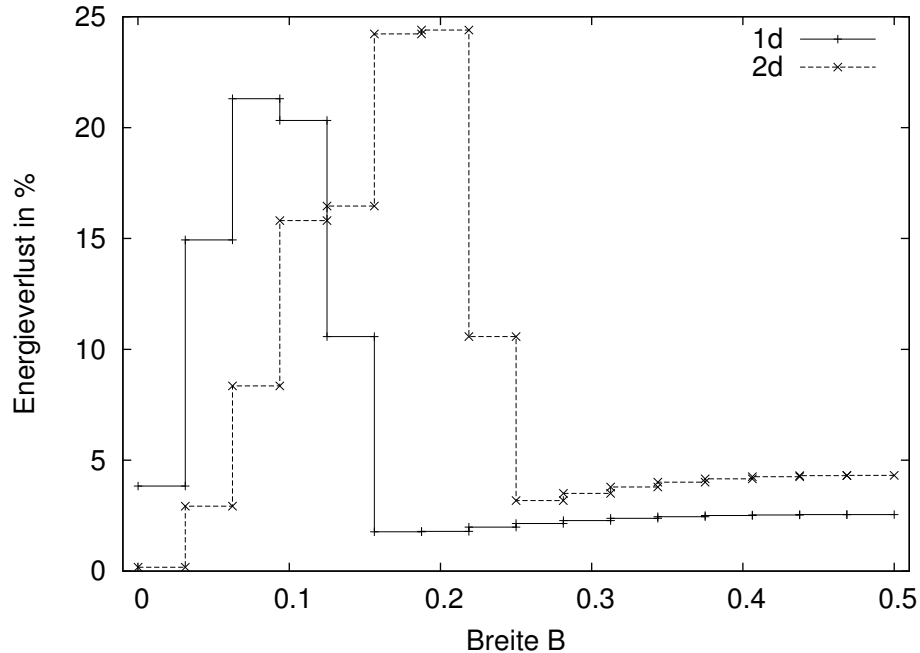


ABBILDUNG 5.2.2. Energieverlust in Abhängigkeit von der Breite B des Hindernisses für P_2

ist, ist nicht typisch für das Verhalten der Energieabweichung in Abhängigkeit von B . Die Graphen verlaufen normalerweise ähnlich zu dem des zweidimensionalen Falls. Dabei sind die Energieabweichungen allerdings für B gegen $\frac{1}{2}$ kleiner als für B gegen 0.

In Abbildung 5.2.2 ist für P_2 der Energieverlust in Prozent gegen B aufgetragen. Dabei wird $h = 2^{-5}$ gewählt. Der Energieverlust ist für B gegen 0 sehr klein. Er steigt dann auf sein Maximum an. Von dort fällt er wieder ab, bis ein Minimum erreicht ist. Von dort steigt der Energieverlust dann wieder leicht an, wobei sich der Anstieg mit zunehmenden B verlangsamt.

Der Verlauf der Graphen ist für andere h und k qualitativ gleich. Im zweidimensionalen bleiben die Energieverluste auch bei kleineren h und k ähnlich hoch, während sie im eindimensionalen kleiner werden.

Die Diskretisierung mit dem G - α Verfahren mit den Parameter P_2 ist also für kleine und große Breiten vernünftig. Für mittlere Breiten ist die Diskretisierung ungeeignet. In dem Verzeichnis `Filme/Width/` sind Filme zu den Rechnungen für verschiedene B enthalten. Die Zahl im Namen des Filmes gibt die Breite des Hindernisses an. Dabei werden nur die Nachkommastellen angegeben. In den Filmen für $B = 0.01$ beachte man, dass auf dem Hindernis hochfrequente Schwingungen entstehen. Für P_2 wird diese Schwingung sehr schnell gedämpft. Für P_7 breitet sie sich hingegen auf

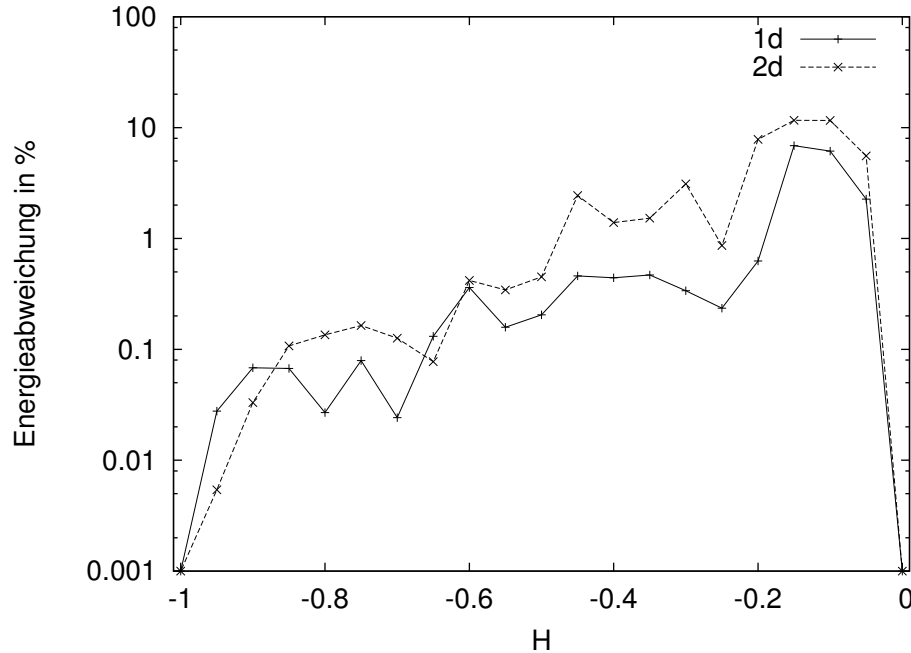


ABBILDUNG 5.2.3. Die Energieabweichung für die Parameter P_7 in Abhängigkeit von H

der ganze Länge aus. Dieses Beispiel zeigt die fehlende numerische Dissipation des Newmark Verfahrens mit den Parametern P_7 . Deshalb sollte das G - α Verfahren mit den Parametern P_α zur Diskretisierung des Problems mit $B = 0.01$ benutzt werden. Für $-1 < \psi < 0$ erhält man ähnliche Ergebnisse. Die Energieabweichung bleibt aber in Abhängigkeit von ψ ab einem bestimmten $B < \frac{1}{2}$ konstant. Man erhält entsprechend weniger Sprünge.

5.2.2. Energie in Abhängigkeit von der Höhe des Hindernisses. Es werden nun die Auswirkungen einer Verschiebung des Hindernisses entlang der x_3 -Achse betrachtet. Für das Hindernis gilt $\psi(x) = H$ mit einer Konstanten $H \in [-1, 0]$. In diesem Abschnitt sind also auch die Grenzfälle des letzten Kapitels enthalten.

In Abbildung 5.2.3 ist für die Parameter P_7 die Energieabweichung gegen H abgebildet. Die Rechnungen werden mit den Klassen `Height1d` und `Height2d` durchgeführt. Für die in Abbildung 5.2.3 dargestellten Ergebnisse wird $h = 2^{-4}$ gewählt. Die Energieabweichungen sind in den beiden Grenzfällen $H = 0$ und $H = -1$ klein. Die Energieabweichung steigt von $H = -1$ aus an. Sie erreicht für $H = -0.15$ ihr Maximum. Das Maximum der Energieabweichung ist in der Größenordnung von 10 %.

In Abbildung 5.2.4 ist der Energieverlust in Abhängigkeit von H für P_2 mit $h = 2^{-4}$ dargestellt. Für wachsendes H steigt der Energieverlust an. Er erreicht sein

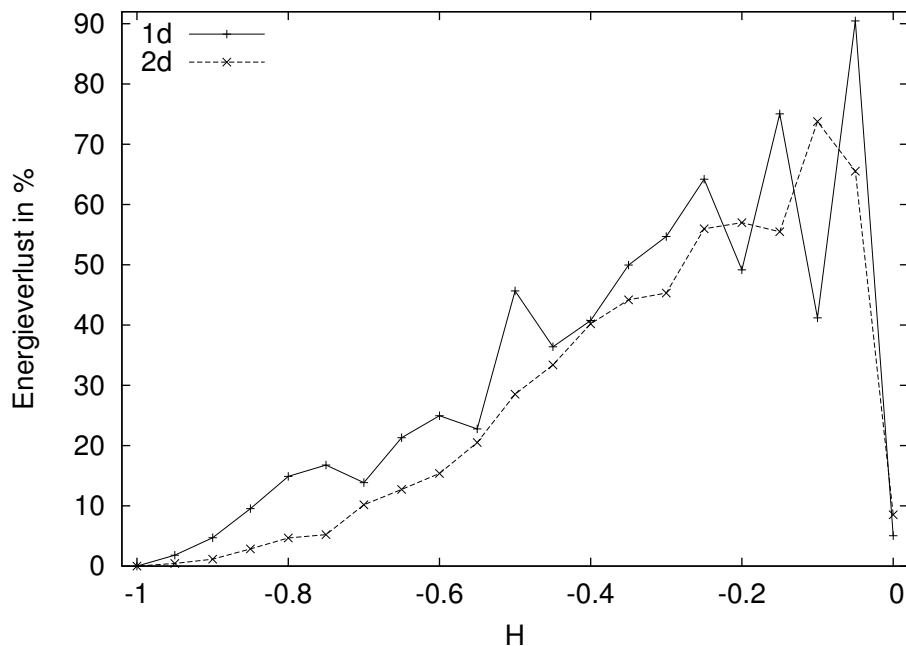


ABBILDUNG 5.2.4. Energieverlust für P_2 in Abhängigkeit von H

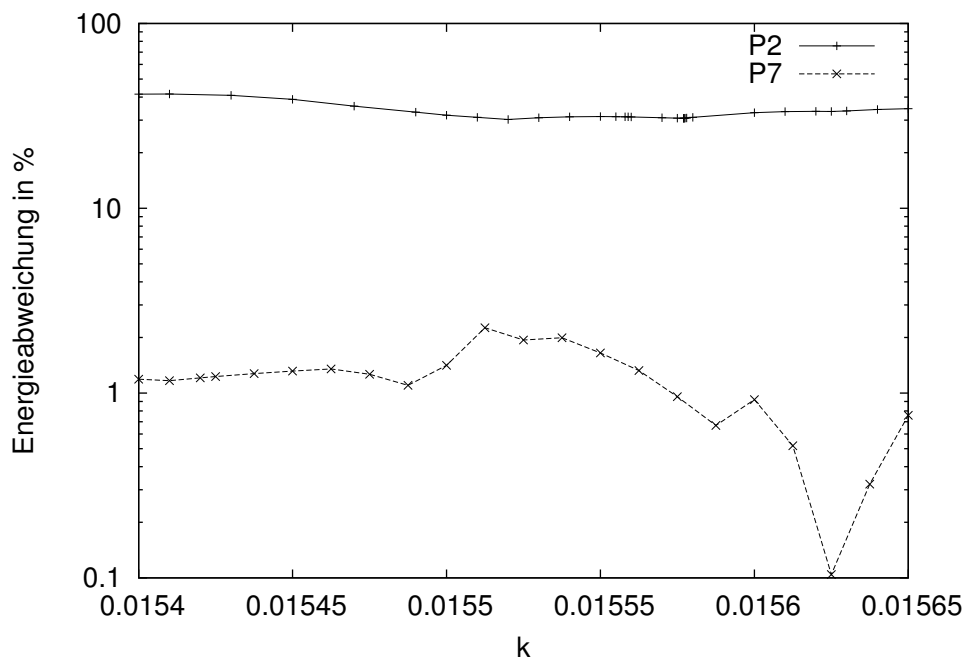


ABBILDUNG 5.2.5. Energieabweichung in Abhängigkeit von k für $H = -\frac{1}{2}$

Maximum in dem Bereich bei $H = -0.1$. Von dort fällt er dann wieder steil ab. Der Energieverlust ist mit bis zu 90% sehr groß und die Diskretisierung sind außer für $H = 0$ und $H < -0.9$ schlecht.

Die Rechnungen werden allerdings mit einer konstanten Zeitschrittlänge gemacht. Eine Anpassung an die verschiedenen H hätte den Betrag des Energieverlust reduziert, aber nicht die generelle Tendenz beseitigt, wie Abbildung 5.2.5 zeigt. Es ist also nur für $H = 0$ und $H < -0.9$ möglich, die Voraussetzung (3.3.3) von Theorem 3.3.1 zu erfüllen.

Diese Rechnungen zeigen, dass die Diskretisierung der Probleme mit H im Bereich von -0.1 schwierig ist. Denn beide betrachteten Verfahren ergeben keine vernünftige Diskretisierung für diese H .

In dem Verzeichnis `Filme/Height/` befinden sich Filme zu den verschiedenen Hindernissen. Die Zahl in den Namen der Filme gibt den Wert von H an. Zu beachten sind die hochfrequenten Schwingungen die nach dem Kontakt bei der Diskretisierung mit dem G - α Verfahren mit den Parametern P_2 entstehen.

5.2.3. Energie in Abhängigkeit von der Krümmung des Hindernisses.

Jetzt wird untersucht, wie sich die Krümmung des Hindernisses auf den Energieverlust auswirkt.

5.2.3.1. *Konvexe Hindernisse.* Die Hindernisse seien mit $K \in [-1, 0]$

$$\psi_K(x) = K \sin(\pi x)$$

und

$$\psi_K(x_1, x_2) = \psi_K(x_1) \psi_K(x_2).$$

Die Hindernisse sind konvex und es gilt

$$\psi_K(0) = \psi_K(1) = \psi_K(x_1, 0) = \psi_K(0, x_2) = \psi_K(x_1, 1) = \psi_K(1, x_2) = 0.$$

Für $K = 0$ erhält man das ebene Hindernis $\psi = 0$ und für $K = -1$ ergibt sich eine freie Schwingung, da $\psi_K(x) = -\sin(\pi x)$ ist, was der maximalen negativen Auslenkung der analytischen Lösung entspricht. Die Rechnungen werden mit den Klassen `Convex1d` und `Convex2d` ausgeführt.

Für die Parameter P_7 ist in Abbildung 5.2.6 der Verlauf der Energieabweichung in Prozent der Anfangsenergie in Abhängigkeit von der Krümmung K des Hindernisses für $h = 2^{-4}$ dargestellt. Die Energieabweichung ist mit maximal 1% immer klein. Sie wird für K gegen 0 und -1 minimal. Die Energieabweichung hängt von der Krümmung des Graphen ab. Allerdings sind die Unterschiede so klein, dass man den Effekt vernachlässigen kann.

In Abbildung 5.2.7 ist für P_2 der Energieverlust in Prozent der Anfangsenergie gegen die Krümmung K des Hindernisses für $h = 2^{-5}$ aufgetragen. Der Energieverlust ist

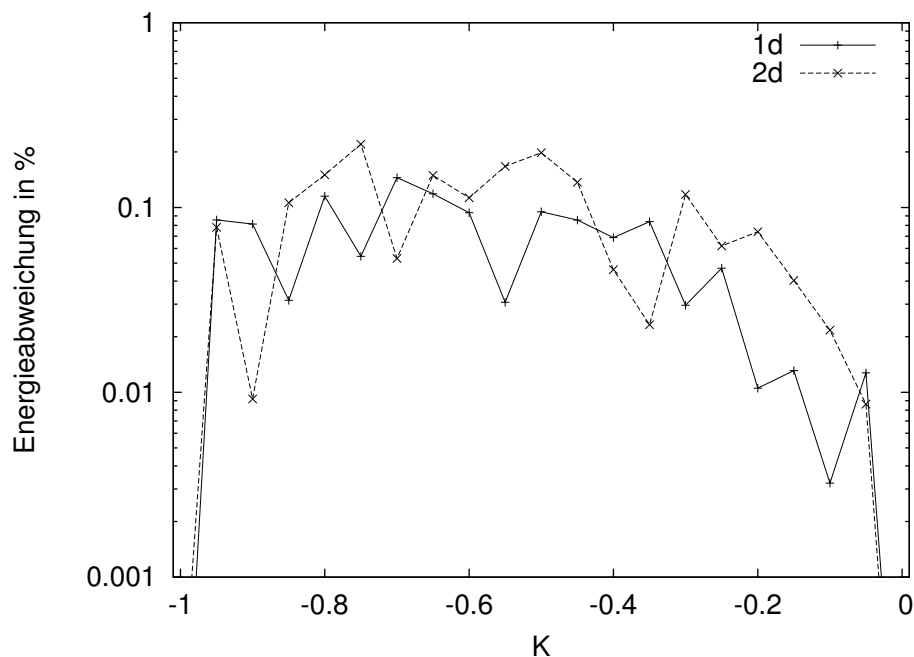


ABBILDUNG 5.2.6. Energieabweichung in % der Anfangsenergie für P_7 in Abhängigkeit von K für konvexe Hindernisse

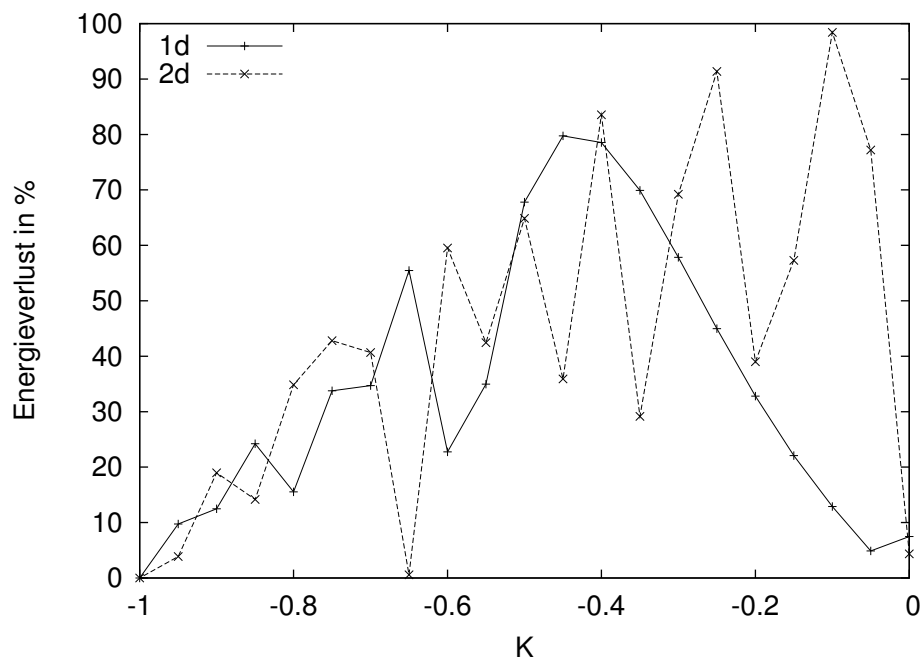


ABBILDUNG 5.2.7. Energieverlust in % der Anfangsenergie für P_2 in Abhängigkeit von K für konvexe Hindernisse

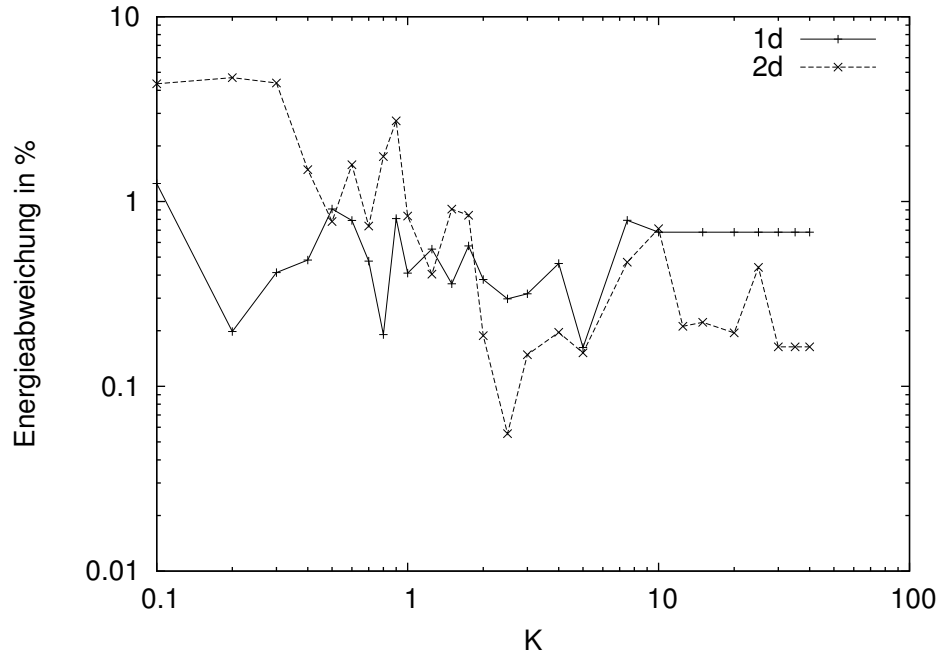


ABBILDUNG 5.2.8. Energieabweichung in % der Anfangsenergie für P_7 in Abhängigkeit von K für konkave Hindernisse

für K gegen 0 und -1 minimal. Die Grafik zeigt eindeutig, dass der Energieverlust von der Krümmung abhängt. Die Graphen weisen erhebliche Sprünge auf. So wechseln sich Fälle mit fast 100% Energieverlust mit Fällen mit 30% ab.

Für verschiedene K sind im Verzeichnis `Filme/Convex/` Filme zu den einzelnen Parametern abgelegt. Die Filme zeigen, dass die Reflexionen am Hindernis ohne die Erzeugung von zusätzlichen Schwingungen ablaufen. Für P_2 sieht man sehr deutlich den Energieverlust.

5.2.3.2. *Konkave Hindernisse.* Als Hindernisse werden

$$\psi_K(x) = K \sin(\pi x) - K$$

mit $K \in [0, \infty)$ und

$$\psi_K(x_1, x_2) = \psi_K(x_1) \psi_K(x_2)$$

gewählt. Die Hindernisse sind konkav und es gilt $\psi_K\left(\frac{1}{2}\right) = \psi_K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$. Für $K = 0$ erhält man das ebene Hindernis $\psi = 0$. Für große K wird das Hindernis sehr schmal, so dass ab einem K_1 nur noch ein Knoten Kontakt mit dem Hindernis hat. Dieses K_1 hängt einzig von h ab. Je kleiner h ist desto größer wird K_1 . Ab diesem K_1 bleibt der Energieverlust konstant. Die Rechnungen werden mit den Klassen `Concave1d` und `Concave2d` durchgeführt.

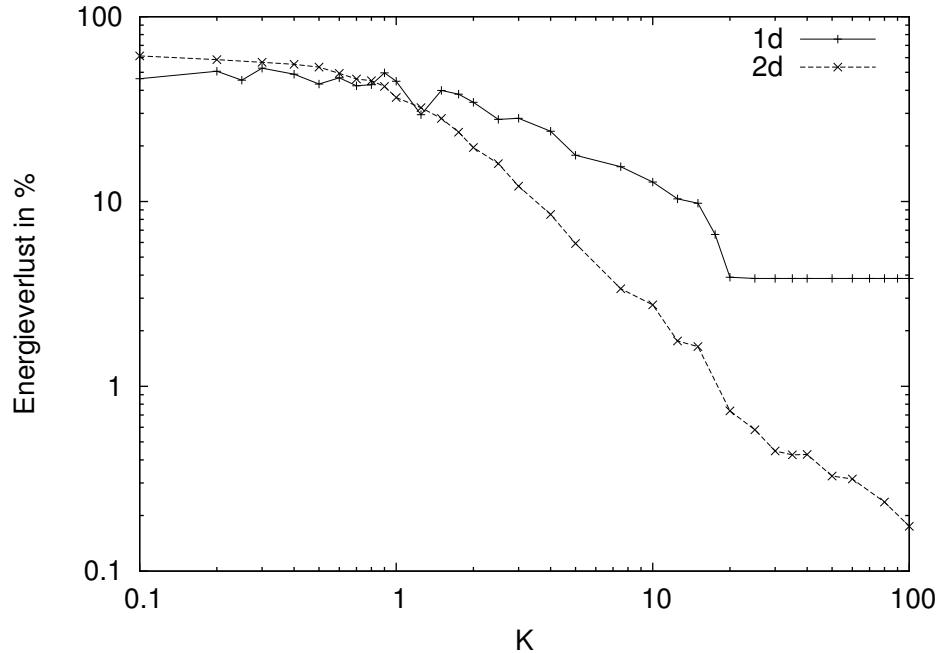


ABBILDUNG 5.2.9. Energieverlust in % der Anfangsenergie für P_2 in Abhängigkeit von K für konkave Hindernisse

In Abbildung 5.2.8 ist für die Parameter P_7 die Energieabweichung in Prozent der Anfangsenergie gegen die Krümmung K des konkaven Hindernisses für $h = 2^{-4}$ aufgetragen. Die oben beschriebenen Effekte der Diskretisierung sind gut zu sehen. Für den eindimensionalen Fall sind die Energieabweichungen durchweg in der Größenordnung von einem Prozent und somit vernachlässigbar. Im zweidimensionalen ist die Energieabweichung für kleine K zwischen 4 und 10%. Damit kann sie nicht unbedingt vernachlässigt werden. Sie wird aber mit abnehmenden h und k und zunehmenden K so klein, dass sie vernachlässigbar ist.

Der Energieverlust in Prozent der Anfangsenergie in Abhängigkeit von der Krümmung K des konkaven Hindernisses ist für P_2 in Abbildung 5.2.9 für $h = 2^{-5}$ dargestellt. Die Graphen verlaufen im Gegensatz zu denen für P_7 wesentlich glatter. Für kleine K ist der Energieverlust in der Größenordnung von 40 bis 50%. Er sinkt mit zunehmenden K auf seinen Grenzwert ab. Die Grenzwerte des Energieverlusts sind im zweidimensionalen kleiner als im eindimensionalen. Sie sind insbesondere kleiner als die Grenzwerte für die Parameter P_7 .

Filme zu verschiedenen K sind in dem Verzeichnis `Filme/Concave/` abgelegt. Die Filme weisen große Unterschiede auf. Für P_7 sind die Diskretisierungen für $K = \frac{1}{4}$ und $K = \frac{1}{2}$ sehr gut. Die Reflexionen werden berechnet, ohne das hochfrequente

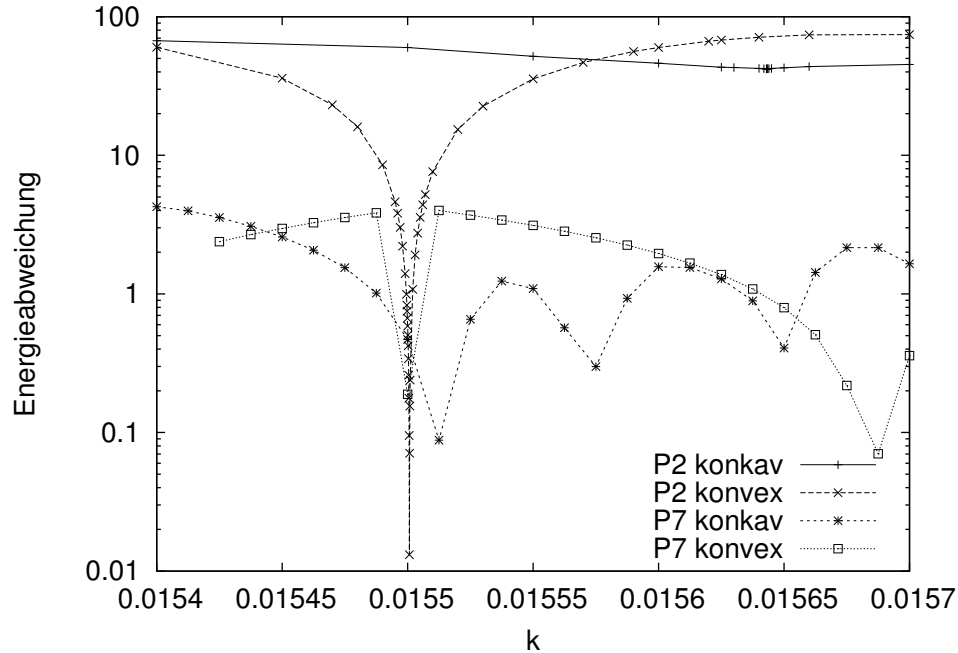


ABBILDUNG 5.2.10. Die Energieabweichung in Abhängigkeit von k

Schwingungen entstehen. Für P_2 entstehen aber genau bei diesen Rechnungen hochfrequente Schwingungen. Für $K = 5$ ist das Verhalten genau umgekehrt. Für P_2 kommt der Knoten auf dem Hindernis schnell zur Ruhe, wodurch das Entstehen von hochfrequenten Schwingungen vermieden wird. Für P_7 dauert dies wesentlich länger, wodurch dann zusätzliche Schwingungen entstehen.

5.2.3.3. *Der Einfluss von k .* In diesem Abschnitt wird untersucht, ob sich die Voraussetzung (3.3.3) von Theorem 3.3.1 für gekrümmte Hindernisse erfüllen lässt.

In Abbildung 5.2.10 ist der Verlauf der Energieabweichung in Prozent der Anfangsenergie in Abhängigkeit von k für $h = 2^{-5}$ zu sehen. Dabei wird als konvexes Hindernis $\psi_{-\frac{1}{2}}$ und als konkaves $\psi_{\frac{1}{2}}$ verwendet. Für andere h und andere ψ ist das Verhalten aber qualitativ gleich. Für konkave Hindernisse ist für die Parameter P_2 der Energieverlust minimal mit 42.1% und maximal mit 67.1% auf dem dargestellten Intervall. Deshalb ist die Diskretisierung unzureichend.

Für konvexe Hindernisse erhält man eine ähnliche Aussage wie in Abschnitt 4.3.2. Für ein bestimmtes k wird der Energieverlust minimal mit 0.01%. Der maximale Energieverlust beträgt 74.3%. Damit ist man in der Lage mit den Parameter P_2 dieses Problem vernünftig zu diskretisieren.

Die Minima des Energieverlusts für konvexe Hindernisse erhält man immer dann, wenn

$$\frac{\arccos(K)}{k\pi} \in \mathbb{N}$$

ist. Durch numerische Ungenauigkeiten verschiebt sich die Lage des Minimums zu etwas kleineren k . Im zweidimensionalen muss

$$\frac{\arccos(K)}{\sqrt{2}k\pi} \in \mathbb{N}$$

gelten.

Für konkave Hindernisse gelten die Gleichungen aus Abschnitt 4.3.2, da $\psi_K\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ist. Dabei verschiebt sich die Lage des Minimums ebenfalls durch numerische Ungenauigkeiten etwas zu größeren k .

Im Unterschied zu Abschnitt 4.3.2 erhält man für P_7 für konvexe Hindernisse einen ähnlichen Verlauf wie für die Parameter P_2 . Allerdings bleiben die Energieabweichungen auch für nicht optimale k in einem vertretbaren Rahmen. Auch für konkave Hindernisse verläuft der Graph nicht in Form einer Gerade. Er schwankt ständig zwischen positiven und negativen Werten des Energieverlustes hin und her. Deshalb entstehen dann auch die Minima in der Energieabweichung. Wenn man k nur genau genug wählt, erhält man eine Energieabweichung von 0 %.

Dieser Abschnitt zeigt, dass die Krümmung des Hindernisses Einfluss auf die Energieabweichung hat. Er zeigt auch, dass konvexe Hindernisse vernünftig mit dem G- α Verfahren diskretisiert werden können. Für konkave Hindernisse kann das G- α Verfahren nur für große K angewendet werden. Für diese K ist es dem Newmark Verfahren mit den Parameter P_7 vorzuziehen, da die entstehenden hochfrequenten Schwingungen gedämpft werden.

5.3. Schlussfolgerungen

Bevor im nächsten Kapitel dynamische Signorini Probleme betrachtet werden, werden die Ergebnisse für die dynamischen Hindernisprobleme zusammengefasst.

Im allgemeinen sollte zur Diskretisierung von dynamischen Hindernisproblemen das Newmark Verfahren mit den Parametern P_7 gewählt werden. Denn für dieses Verfahren ist die Qualität der Diskretisierung weitgehend unabhängig von den Hindernissen und Anfangswerten. Zudem ist die Konvergenz schneller als für das G- α Verfahren mit den Parametern P_α . Dafür muss man einen deutlich erhöhten Aufwand und die fehlende numerische Dissipation akzeptieren.

Das G - α Verfahren mit den Parametern P_α sollte nur zur Diskretisierung von dynamischen Hindernisproblemen eingesetzt werden, wenn der Zeitpunkt des Kontakts im voraus bekannt ist und der Kontakt gleichzeitig für alle Kontaktknoten eintritt. Denn nur dann lässt sich die Voraussetzung (3.3.3) von Theorem 3.3.1 erfüllen. Wenn das Hindernis sehr schmal ist oder das Hindernis der Auslenkung zum Zeitpunkt des Kontakts entspricht, kann man die obigen Bedingungen erfüllen. Für schmale Hindernisse ist die Diskretisierung mit dem G - α Verfahren mit den Parametern P_α der mit dem Newmark Verfahren mit den Parametern P_7 vorzuziehen, da die entstehenden hochfrequenten Schwingungen von dem G - α Verfahren besser gedämpft werden.

Das dynamische Signorini Problem

Bisher wurden ein- und zweidimensionale dynamische Hindernisprobleme betrachtet. In diesem Kapitel werden die Betrachtungen auf dynamische Signorini Probleme ausgedehnt. Zuerst werden die zur Formulierung des Problems benötigten Begriffe und Zusammenhänge aus der Elastizitätstheorie kurz eingeführt. Dann wird die schwache Formulierung des dynamischen Signorini Problems angegeben. Die Diskretisierung dieses Problems erfolgt analog zu dem Vorgehen in Kapitel 1. Zum Abschluss werden zwei numerische Beispiele betrachtet: Ein Cantilever Beam und eine Kugel, die auf einen festen Untergrund treffen.

6.1. Das dynamische Signorini Problem

In diesem Abschnitt wird das dynamische Signorini Problem formuliert. Dabei werden einige Begriffe und Gesetze aus der linearen Elastizitätstheorie verwendet, die zuerst kurz eingeführt werden. Für eine ausführliche Darstellung wird auf [8, 28, 31] verwiesen. Anschließend wird das dynamische Signorini Problem in der schwachen Formulierung angegeben. Dabei zeigt sich die Analogie zu den in Kapitel 1 formulierten dynamischen Hindernisproblemen.

Die hier vorgestellte Formulierung des dynamischen Signorini Problems wird in [22] beschrieben. Andere Formulierungen findet man in [16, 17, 23].

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet. Mit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ wird das Verschiebungsfeld bezeichnet. Es sei

$$Y := \left\{ \varepsilon \in [L^2(\Omega)]^{3 \times 3} \mid \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \right\}.$$

Es wird der Fall kleiner Verzerrungen betrachtet. Deshalb werden die Verzerrungen für $u \in H^1(\Omega)$ als

$$\varepsilon(u) := \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T)$$

definiert. Es gilt $\varepsilon(u) \in Y$.

Der Elastizitätstensor C wird definiert als

$$C_{ijkl} := \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Dabei sei δ das Kronecker-Symbol, E der Elastizitäts- oder Youngsche-Modul und ν die Querkontraktionszahl. Es gelte $E > 0$ und $0 < \nu < \frac{1}{2}$. Der Elastizitätstensor ist ein Tensor vierter Stufe. Er ist symmetrisch und positiv definit auf Y , das heißt, es gilt $C_{ijkl} = C_{klij}$ und

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} > 0$$

für alle ε aus Y mit $\varepsilon \neq 0$ und fast überall auf Ω . Durch C wird die Bilinearform

$$a(u, v) = (C\varepsilon(u), \varepsilon(v))$$

mit $u, v \in [H^1(\Omega)]^3$ induziert. Die Bilinearform a ist symmetrisch und elliptisch.

Es wird ein lineares Materialgesetz der Form

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

zur Bestimmung des Spannungstensors $\sigma \in Y$ verwendet. Man schreibt auch kurz $\sigma = C\varepsilon$.

Die Dichte des Materials sei durch die Funktion $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und als zeitlich konstant angenommen.

Der Rand Γ von Ω wird in vier Teile Γ_D , Γ_F , Γ_W und Γ_C zerlegt. Auf Γ_D werden die Verschiebungen in Form einer Funktion u_D vorgegeben. Mit Γ_C wird der Teil des Randes bezeichnet, der im Kontakt mit dem Untergrund steht. Auf Γ_F wirken äußere Kräfte. Auf Γ_W werden keine Bedingungen vorgegeben.

Mit N wird der Normalenvektor der Kontaktfläche Γ_C bezeichnet. Der Index N kennzeichnet den Wert einer Größe in Richtung der Normalen. Die Funktion g gibt den Abstand zwischen dem Körper Ω und dem Untergrund in Richtung der Normalen N an.

Die Kontaktbedingungen haben nun die Form

$$g(x, t) \geq 0$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $t \in I$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} u_N - g = 0 &\Rightarrow \sigma_N \leq 0 \\ u_N - g < 0 &\Rightarrow \sigma_N = 0 \end{aligned} .$$

Es ergibt sich die kinematischen Kontaktbedingung

$$\sigma_N (u_N - g) = 0$$

auf Γ_C .

Es sei

$$W := \left\{ w \in [H^1(\Omega)]^3 \mid w = u_D \text{ f.ü. auf } \Gamma_D \right\}$$

und

$$V := \left[W^{2,\infty} \left(I; [L^2(\Omega)]^3 \right) \cap L^\infty \left(I; W \right) \right]^3.$$

Die Menge $K \subset V$ sei die Menge der Verschiebungen, die die kinematischen Kontaktbedingungen erfüllen.

Es wird direkt die schwache Formulierung des dynamischen Signorini Problems angegeben.

PROBLEM 6.1.1. Gesucht ist eine Funktion $u : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ aus K , so dass

$$(6.1.1) \quad (\rho \ddot{u}(t), u(t) - \varphi(t)) + a(u(t), u(t) - \varphi(t)) \geq (f(t), u(t) - \varphi(t))$$

für alle $\varphi \in K$ und fast alle $t \in I$ gilt. Weiter gelte $u(t=0) = u^0$ und $\dot{u}(t=0) = v^0$. Dabei sei $u^0 \in W$, $v^0 \in [L^2(\Omega)]^3$ und $f \in L^\infty \left(I; [L^2(\Omega)]^3 \right)$.

Das dynamische Signorini Problem unterscheidet sich im wesentlichen durch die Verwendung des Normalenvektors N und dadurch, dass die Kontaktfläche ein Teil von Γ und nicht von Ω ist, von den in Kapitel 1 dargestellten Hindernisproblemen.

6.2. Diskretisierung

In diesem Abschnitt wird die Diskretisierung des Problems 6.1.1 besprochen. Dabei wird analog zu Kapitel 1 verfahren. Zuerst wird das Problem in der Zeit und anschließend im Ort diskretisiert.

6.2.1. Zeitdiskretisierung. Es werden die Bezeichnungen von Abschnitt 1.4 verwendet. Für die Menge der kinematisch zulässigen Verschiebungen gilt im Fall der Zeitdiskretisierung

$$\tilde{K} = \{ \varphi \in W \mid g(x) \geq 0 \text{ f.ü. auf } \Gamma_C \}.$$

Damit ergibt die Zeitdiskretisierung von Problem 6.1.1 mit dem G- α Verfahren das folgende Problem.

PROBLEM 6.2.1. Finde $u : Z \rightarrow \tilde{K}$ mit $u^0 = u_0$ und $v^0 = v_0$ so, dass für alle $\varphi \in \tilde{K}$ und alle $n \in \{1, 2, \dots, N\}$

$$(6.2.1) \quad (\rho a_{\alpha_B}^n, \varphi - u^n) + a(u_{\alpha_H}^n, \varphi - u^n) \geq (f_{\alpha_H}^n, \varphi - u^n)$$

gilt.

Um im weiteren die Notation zu vereinfachen, wird die Bilinearform

$$c(\omega, \varphi) := \frac{1 - \alpha_B}{\beta k^2} (\rho \omega, \varphi) + (1 - \alpha_H) a(\omega, \varphi)$$

für $\omega, \varphi \in \tilde{K}$ und das Funktional

$$b^n(\varphi) := (F^n, \varphi) - \alpha_H a(u^{n-1}, \varphi)$$

definiert, wobei

$$F^n := f_{\alpha_H}^n - \alpha_B \rho a^{n-1} + (1 - \alpha_B) \rho \left[\frac{1}{\beta k^2} u^{n-1} + \frac{1}{\beta k} v^{n-1} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) a^{n-1} \right]$$

ist. Durch Einsetzen von den Gleichungen (1.4.3) und (1.4.4) in die Ungleichung (6.2.1) ergibt sich die Ungleichung

$$(6.2.2) \quad c(u^n, \varphi - u^n) \geq b^n(\varphi - u^n).$$

Für $\varphi \in W$ wird das Funktional

$$J^n(\varphi) := \frac{1}{2} c(\varphi, \varphi) - b^n(\varphi)$$

definiert. Die Formulierung von Problem 1.4.1 als Minimierungsproblem lautet wie folgt.

PROBLEM 6.2.2. Finde $u : Z \rightarrow \tilde{K}$ mit $u^0 = u_0$ und $v^0 = v_0$ so, dass für alle $n \in \{1, 2, \dots, N\}$

$$u^n = \min_{\varphi \in \tilde{K}} J^n(\varphi)$$

gilt.

Die Äquivalenz der Probleme 6.2.1 und 6.2.2 zeigt man analog zu dem Beweis von Proposition 1.4.3.

6.2.2. Ortsdiskretisierung. Das Gebiet Ω sei so beschaffen, dass es sich in M Hexaeder zerlegen lässt. Es wird wieder eine reguläre und zulässige Zerlegung \mathbb{T}_h verwendet. Mit h wird die Länge der längsten Kante eines Hexaeders bezeichnet. Es sei

$$S_h := \{v \in W \mid v|_{T_i} \in \mathcal{P}_2, v|_{\partial T_i} \in \mathcal{P}_1, T_i \in \mathbb{T}\}.$$

Es wird hier eine trilineare Basis verwendet, die zum Beispiel in [8] näher beschrieben wird. Die Interpolation I_h wird analog zu Kapitel 1 definiert.

Die zulässige Menge ist

$$K_h = \{\varphi \in S_h \mid g(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in P_C\}.$$

Dabei ist P_C die Menge aller Knoten auf dem Rand Γ_C . Die Finite Elemente Diskretisierung ist wie bei der Diskretisierung der dynamischen Hindernisprobleme nicht unbedingt konform.

Damit erhält man folgende diskrete Form von Problem 6.1.1.

PROBLEM 6.2.3. Finde $u_h : Z \rightarrow K_h$ mit $u_h^0 = I_h u_0$ und $v_h^0 = I_h v_0$ so, dass für alle $\varphi \in K_h$ und alle $n \in \{1, 2, \dots, N\}$

$$(6.2.3) \quad (\rho a_{h,\alpha_B}^n, \varphi - u_h^n) + a(u_{h,\alpha_H}^n, \varphi - u_h^n) \geq (I_h f_{\alpha_H}^n, \varphi - u_h^n)$$

gilt.

Die äquivalente Formulierung als Minimierungsproblem lautet:

PROBLEM 6.2.4. Suche $u_h : Z \rightarrow K_h$ mit $u_h^0 = I_h u_0$ und $v_h^0 = I_h v_0$ so, dass in jedem Zeitschritt $t_n, 1 \leq n \leq N$, u_h^n das Funktional J_h^n über der Menge K_h minimiert. Dabei ist J_h^n das diskrete Analogon zu J^n .

Im Rahmen dieser Arbeit wird nur der Fall betrachtet, in dem der Normalenvektor zur Kontaktfläche parallel zu einer der Koordinatenachsen ist. Somit kann das in Abschnitt 1.5.3 vorgestellten cg-PSSOR Verfahrens ohne größere Modifikationen verwendet werden. Im allgemeinen Fall sind erhebliche Modifikationen an der Projektion nötig, die in [32] beschrieben werden.

In dem hier betrachteten Fall muss lediglich bei der Beschreibung des Hindernisses beachtet werden, dass die unterschiedlichen Anfangskoordinaten der Knoten einbezogen werden.

6.3. Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden zwei Beispiele für dynamische Signorini Probleme betrachtet. Das eine ist ein Cantilever Beam, der durch eine äußere Kraft auf eine Unterlage gepresst wird, und das andere eine Kugel, die mit konstanter Geschwindigkeit auf einen festen Untergrund trifft.

6.3.1. Kugel mit festem Untergrund. Es sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$. Weiter gelte $u^0 = 0$ und $v^0 = (0, 0, -1)^T$. Die Dichte ρ sei konstant gleich 1 kg/m^3 auf Ω . Das Hindernis liege in der x_1 - x_2 -Ebene und sei durch $\psi(x_1, x_2) = -1.4$ gegeben. Es wirken keine Kräfte, also gilt $f = 0$. Es werden keine Randbedingungen außer den Kontaktbedingungen vorgegeben. Der Elastizitätsmodul E ist gleich 500 GPa und die Querkontraktionszahl ν gleich 0.3 . Die Rechnungen werden mit der Klasse `Sphere` durchgeführt.

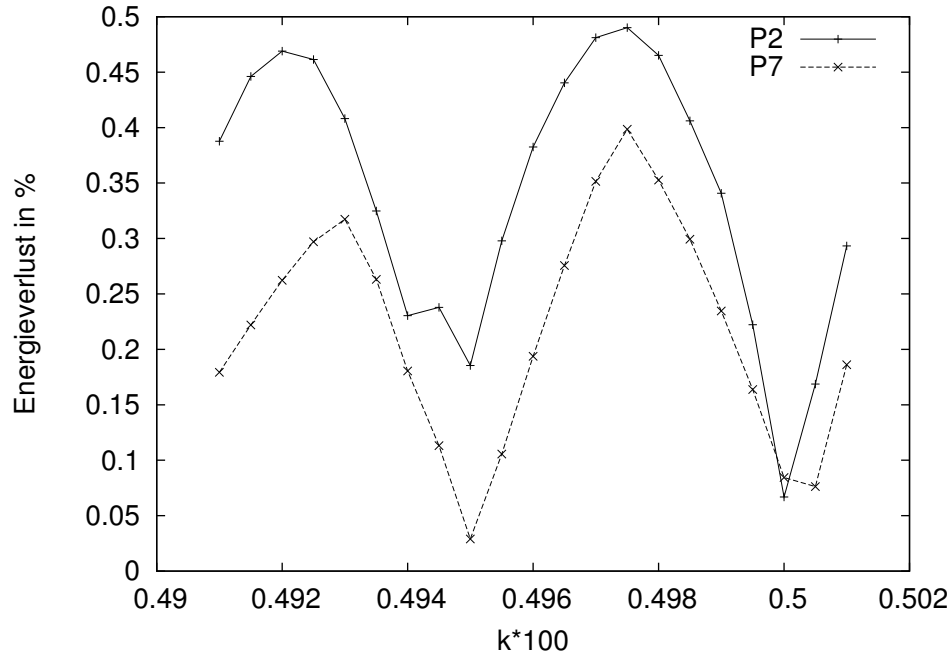


ABBILDUNG 6.3.1. Energieverlust in Prozent der Anfangsenergie in Abhängigkeit von k für die Kugel

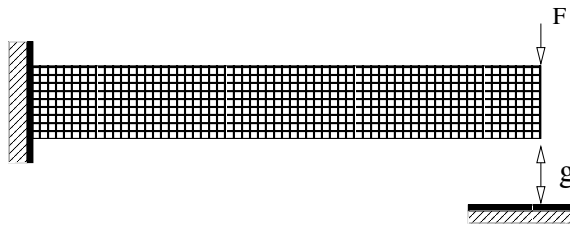


ABBILDUNG 6.3.2. Darstellung des Cantilever Beams

Für 448 trilineare Hexaeder Elemente ist in Abbildung 6.3.1 der Energieverlust in Prozent der Anfangsenergie gegen die Zeitschrittlänge k aufgetragen. Der Energieverlust bleibt für P_7 und P_2 kleiner als 0.5%. Für dieses Beispiel sind also die Einschränkungen für die Zeitschrittlänge k für die Parameter P_2 , wie sie für dynamische Hindernisprobleme beobachtet werden, nicht zu sehen.

In dem Verzeichnis Filme/Sphere/ findet man die Filme zu diesem Beispiel.

6.3.2. Cantilever Beam. Jetzt wird die Verformung eines Cantilever Beams unter einer äußeren Kraft F betrachtet. Dabei tritt an der Spitze des Cantilever

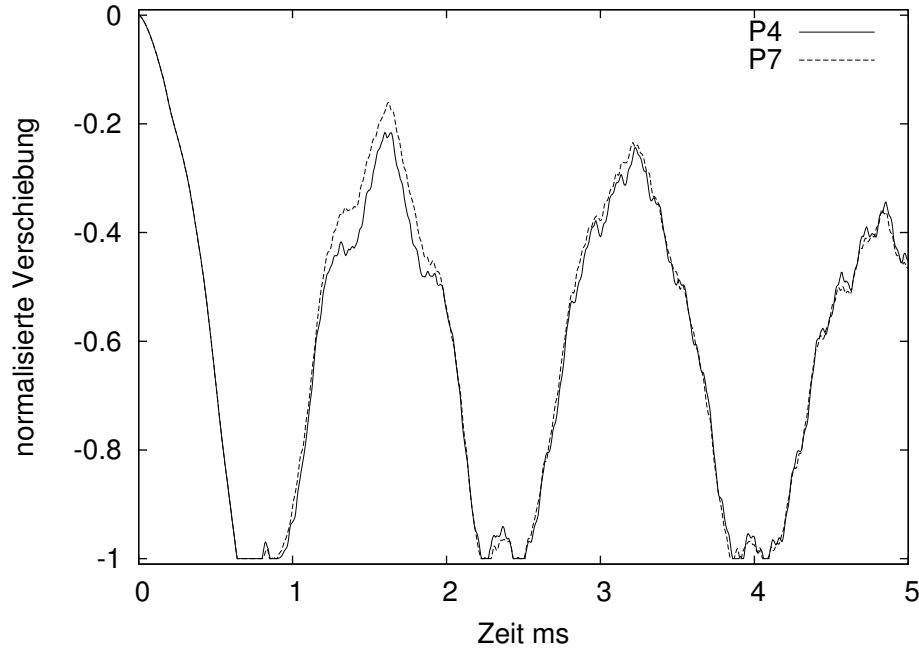


ABBILDUNG 6.3.3. Normierte Verschiebung an der Spitze des Cantilever Beams

Beams Kontakt mit einem festen Untergrund auf. In Abbildung 6.3.2 ist eine schematische Darstellung des betrachteten Problems zu sehen. Das Rechengebiet sei

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_1 \leq 0.2, 0 \leq x_2, x_3 \leq 0.02 \right\}.$$

Weiter gilt $u^0 = v^0 = 0$. Das Hindernis liege in der x_1 - x_2 Ebene und sei durch

$$\psi(x_1, x_2) = \begin{cases} -0.003 & 0.15 \leq x_1 \leq 0.2 \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

parametrisiert. Für den Cantilever Beam wird $\rho = 2770 \text{ kg/m}^3$, $E = 73 \text{ GPa}$ und $\nu = 0.33$ gewählt. Eine Kraft von 10^3 N wirkt auf $\Gamma_F = \{x \in \Gamma \mid x_1 = 0.2, x_2 = 0.02\}$. Auf $\Gamma_D = \{x \in \Gamma \mid x_1 = 0\}$ gelte $u = 0$. Die Rechnungen werden mit der Klasse Bar ausgeführt.

In Abbildung 6.3.3 ist der Verlauf der Verschiebung in x_3 Richtung für einen Knoten an der Spitze des Cantilever Beams dargestellt. Die Verschiebung ist gegen den maximalen Abstand zum Hindernis normalisiert. Es werden 2048 trilineare Hexaeder Elemente und eine Zeitschrittlänge von $k = 5 \cdot 10^{-6}$ verwendet. Im Verzeichnis Filme/CantileverBeam/ befinden sich die Filme zu dieser Abbildung, wobei nur jeder dritte Zeitschritt verwendet wird.

Die Rechnung wird für die Parameter P_4 und P_7 ausgeführt. Die Ergebnisse unterscheiden sich nicht für die beiden Parameter. Die Ergebnisse stimmen qualitativ mit den Ergebnissen überein, die in [21] für ein ähnliches Problem ermittelt werden.

Die beiden Beispiele zeigen, dass sowohl für die Parameter P_7 als auch für die Parameter P_α keine genaue Wahl der Zeitschrittlänge nötig ist. Zudem sind die Ergebnisse annähernd identisch. Damit sind die beiden Verfahren für dynamische Signorini Probleme als gleichwertig zu betrachten. Aufgrund der numerischen Dissipation sollte also das G- α Verfahren mit den Parametern P_α zur Zeitdiskretisierung von dynamischen Signorini Problemen verwendet werden.

Zusammenfassung und Ausblick

Die Eigenschaften des G - α Verfahrens im Hinblick auf dynamische Kontaktprobleme werden in dieser Arbeit untersucht. Dazu werden zwei Klassen von dynamischen Kontaktproblemen betrachtet: dynamische Hindernisprobleme und dynamische Signorini Probleme. Diese Probleme werden mit dem G - α Verfahren in der Zeit und mit der Finite Elemente Methode im Ort diskretisiert. Dabei entsteht in jedem Zeitschritt ein endlich dimensionales Minimierungsproblem mit Ungleichheitsnebenbedingungen, das mit cg-PSSOR Verfahren gelöst wird.

Anhand der Analyse des G - α Verfahrens für gewöhnliche Differentialgleichungen und eines Modellproblems werden optimale Parameter für den Fall mit Kontakt bestimmt. Man erhält ein klassisches Newmark Verfahren mit den Parametern $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$. Wenn die Zeitschrittlänge so gewählt wird, dass der Kontakt genau zum Zeitpunkt eines Zeitschritts auftritt, gibt es eine Menge P_α von Parametern für das G - α Verfahren, die optimal sind. Die zusätzliche Voraussetzung ist der Grund, warum die Lösungen für dynamische Hindernisprobleme unter Verwendung der Parameter P_α nur in Spezialfällen vernünftig sind. Deshalb ist im allgemeinen das Newmark Verfahren mit den Parametern $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$ zur Lösung von dynamischen Hindernisproblemen vorzuziehen.

Bei numerischen Rechnungen für dynamische Signorini Probleme wird kein Unterschied zwischen den beiden Verfahren festgestellt. Auch ist eine genaue Wahl der Zeitschrittlänge in den Beispielen für das G - α Verfahren mit den Parameter P_α nicht nötig. Somit ist das G - α Verfahren mit den Parametern P_α aufgrund der numerischen Dissipation zur Diskretisierung von dynamischen Signorini Problemen vorzuziehen.

Bei allen Rechnungen werden bisher Reibungseffekte vernachlässigt. Diese Effekte erfordern die Formulierung eines Reibungsfunktional, das nicht differenzierbar ist. Deshalb ist eine Regularisierung des Reibungsfunktional erforderlich. Dabei entstehen zusätzliche Regularisierungsfehler in der Diskretisierung. Zudem wird nur der Kontakt mit einem festen Untergrund betrachtet. Der Fall des dynamischen Kontakts zwischen zwei oder mehr Körpern ist noch zu betrachten. In [15, 16, 21, 23] findet man verschiedene Ansätze zur Lösung solcher Probleme.

Für die Diskretisierung der Probleme mit Kontakt wird eine kleinere Zeitschrittlänge als im Fall ohne Kontakt verwendet. Damit wird der Aufwand für die Berechnung einer Lösung erheblich größer. Um den Aufwand zu senken bieten sich verschiedene Vorgehensweisen an. Die Zeitschrittlänge und die Parameter des G - α Verfahrens können im Verlauf der Rechnung an das Problem angepasst werden, wodurch die Anzahl der Zeitschritte reduziert wird. In jedem Zeitschritt ist ein endlich dimensionales Minimierungsproblem zu lösen. Die Dimension dieses Problems kann durch eine Gitteradaption reduziert werden.

Überlegungen zu Zeitschrittverfahren mit variabler Schrittweite und variablen Parametern findet man in [11]. A posteriori Abschätzungen und Gitteradaption für lineare elliptische Probleme sind unter anderem in [28] beschrieben. Der Fall für statische Hindernisprobleme wird zum Beispiel in [32] betrachtet.

Literaturverzeichnis

- [1] H. Blum, D. Braess, F.T. Suttmeier: A Cascadic Multigrid Algorithm for Variational Inequalities, *Computing and Visualization in Science*, to appear
- [2] J. Chung, G.M. Hulbert: A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method, *Journal of Applied Mechanics*, 60:371-375, 1993
- [3] A. Brandt, C.W. Cryer: Multigrid algorithms for the solution of linear complementarity problems arising from free boundary problems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 4:655-684, 1980
- [4] R. Glowinski, J.L. Lions, R. Trémoières: *Numerical Analysis of Variational Inequalities*, North-Holland
- [5] L.C. Evans: *Partial Differential Equations*, AMS, 1998
- [6] J.L. Lions: *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, 1969
- [7] N. Kikucji, J.T. Oden: *Contact problems in elasticity*, SIAM, 1988
- [8] T.J.R. Hughes: *The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications, 2000
- [9] W.L. Wood, M. Bossak, O.C. Zienkiewicz: An Alpha Modification of Newmark's Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15:1562-1566, 1981
- [10] C. Hoff, T.J.R. Hughes, G. Hulbert, P.J. Pahl: Extended Comparison of the HHT- α Method and the θ_1 -Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 76:87-93, 1989
- [11] E. Hairer, S.P. Nørsett, G. Wanner: *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems*, Springer, 1993
- [12] G. Dahlquist: On Accuracy and unconditional stability of linear multistep methods for second order differential equations, *BIT*, 18:133-136, 1978
- [13] T. Belytschko, T.J.R. Hughes: *Computational Methods for transient analysis*, North-Holland, 1983
- [14] J.D. Lambert: *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1973
- [15] A.B. Chaudhary, K.J. Bathe: A Solution Method for static and dynamic Analysis of three-dimensional contact Problems with Friction, *Computers & Structures*, 24:855-873, 1986
- [16] A. Czekanski, S.A. Meguid: Analysis of dynamic frictional contact problems using variational inequalities, *Finite Elements in Analysis and Design*, 37:861-879, 2001
- [17] J.A.C. Martins, J.T. Oden: Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and frictional interface laws, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* 11:407-428, 1987

- [18] C.W. Gear: Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1971
- [19] C.A. Addison, W.H. Enright: Properties of multistep formulas intended for a class of second order ODEs, SIAM Journal for Numerical Analysis, 21:327-339, 1984
- [20] P.A. Tipler: Physik, Spektrum, 2000
- [21] A. Czekanski, S.A. Meguid, N. El-Abbasi, M.H. Refaat: On the elastodynamic solution of frictional contact problems using variational inequalities, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50:611-627, 2001
- [22] D. Talaslidis, P.D. Panagiotopoulos: A linear finite element approach to the solution of the variational inequalities arising in contact problems of structural dynamics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 18:1505-1520, 1982
- [23] P. Wriggers, T. Vu Van, E. Stein: Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction, Computers and Structures, 37:319-331, 1990
- [24] J.T. Oden, J.A.C. Martins: A numerical analysis of class of problems in elastodynamics with friction, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 40:327-360, 1983
- [25] L. Amerio, G. Prouse: Study of the motion of a string vibrating against an obstacle, Rend. Math., 2, 8, ser VI:563-585, 1977
- [26] C. Johnson: Numerical solution of partial differential equations by the finite element method, Cambridge University Press, 1987
- [27] www.mathematik.uni-dortmund.de/lisx/research/software/sofar/index.html
- [28] D. Braess: Finite Elemente, Springer, 2003
- [29] D. Werner: Funktionalanalysis, Springer, 2002
- [30] N.M. Newmark: A Method of Computation for Structural Dynamics, Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE, 85 No. EM3, 67-94, 1959
- [31] R. Rannacher: Elastizitätstheorie, Vorlesungsskriptum
- [32] A. Schröder: Fehlerkontrollierte Finite Elemente Simulationen höherer Ordnung für Probleme der Fertigungstechnik, Doktor Arbeit, to appear
- [33] G. Duvaut, J.L. Lions: Inequalities in Mechanics and Physics, Springer, 1976
- [34] I. Hlavaček, J. Haslinger, J. Nečas, J. Lovisek: Solution of Variational Inequalities in Mechanics, Springer, 1988
- [35] D. Kuhl, M.A. Crisfield: Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45:569-599, 1999

ANHANG A

Die numerische Rechnung des Modellproblems

In diesem Kapitel werden die Gleichungen zur Bestimmung der numerischen Näherungen an die analytische Lösung von Problem 3.1.1 angegeben. Dabei wird Gleichung (3.1.2) verwendet, um u^n zu bestimmen. Mit den Gleichungen (1.4.3) und (1.4.4) werden aus u^n dann die Werte von a^n und v^n abgeleitet.

Aufgrund der Anfangsbedingungen gilt $u^1 = 0$. Damit ergibt sich

$$a^1 = -\frac{u^0 + kv^0}{\beta k^2}$$

und

$$v^1 = \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) v^0 - \frac{\gamma u^0}{\beta k}.$$

Für den zweiten Zeitschritt erhält man

$$(A.0.1) \quad u^2 = -\frac{-2kv^0\beta(\alpha_B - 2) + (u^0 + kv^0)(\alpha_B - 1)(2\gamma + 1) + 2\beta u^0}{2\beta(\alpha_B - 1)}.$$

Es gilt entweder $u^2 > 0$ oder $u^2 = 0$. Für $u^2 > 0$ gilt

$$(A.0.2) \quad a^2 = -\alpha_B \frac{u^0 + v^0 k}{\beta k^2 (\alpha_B - 1)}$$

und

$$(A.0.3) \quad v^2 = v^0 - \frac{((\gamma + 1)\alpha_B - 1)(u^0 + v^0 k)}{\beta k (\alpha_B - 1)}.$$

Die Rechnung ist damit abgeschlossen.

Für $u^2 = 0$ ist

$$a^2 = -\frac{2\beta(u^0 + 2kv^0) - (2\gamma + 1)(u^0 + kv^0)}{2\beta^2 k^2}$$

und

$$v^2 = \frac{2(\beta - \gamma)^2 v^0 k - 2\beta(\gamma + 1)u^0 + (\gamma - 2\beta)v^0 k + (2\gamma + 1)\gamma u^0}{2k\beta^2}.$$

Für den dritten Zeitschritt erhält man

$$(A.0.4) \quad u^3 = \frac{(\gamma + \frac{1}{2})^2}{\beta^2} (u^0 + v^0 k) + \frac{v^0 k (\alpha_B - 3) - u^0}{\alpha_B - 1} - \frac{v^0 k (4(\gamma + 1)\alpha_B - 6\gamma - 5) + u^0 ((3 + 2\gamma)\alpha_B - 4(\gamma + 1))}{2\beta(\alpha_B - 1)}.$$

Weiter gilt

$$(A.0.5) \quad a^3 = -\alpha_B \frac{2\beta(u^0 + 2kv^0) - (2\gamma + 1)(u^0 + v^0 k)}{2\beta^2 k^2 (\alpha_B - 1)}$$

und

$$(A.0.6) \quad v^3 = v^0 + \frac{u^0 + v^0 k}{2k\beta^2} - \frac{2u^0 + 3v^0 k}{k\beta} + \frac{(2\gamma^2\alpha_B + \gamma(3\alpha_B - 2))(u^0 + v^0 k) - 2\beta\gamma\alpha_B(u^0 + 2v^0 k)}{2k\beta^2(\alpha_B - 1)}.$$

Damit ist dieser Fall abgeschlossen. Die numerischen Näherungen an die Lösung von Problem 3.1.1 sind somit bekannt.