

# Einbettungen von 4-regulären Graphen in den dreidimensionalen Raum

Dissertation  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften  
der Universität Dortmund

Dem Fachbereich Mathematik  
der Universität Dortmund  
vorgelegt im März 1996  
von Jörg Sawollek

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>1 Knoten und Verkettungen</b>	<b>5</b>
1.1 Grundlegende Eigenschaften von Verkettungen und deren Diagrammen . . . . .	6
1.2 Polynom invarianten für Verkettungen . . . . .	8
1.3 Graphentheoretische Grundlagen . . . . .	15
1.4 Zusammenhänge zwischen Knoten- und Graphentheorie . . . .	19
<b>2 Knäuel</b>	<b>27</b>
2.1 Grundlegende Definitionen . . . . .	27
2.2 Eine Summenformel für Knäuel . . . . .	32
2.3 Rekursionsprinzip für rationale Knäuel . . . . .	40
<b>3 Grapheninvarianten</b>	<b>43</b>
3.1 Elementare Grapheninvarianten . . . . .	45
3.2 Weitere Grapheninvarianten . . . . .	46
3.3 Eigenschaften von Graphen in $\mathbb{R}^3$ und deren Diagrammen . . .	54
<b>4 Der Achtergraph</b>	<b>62</b>
4.1 Der alternierende prime Fall . . . . .	63
4.2 Eine einfache Verallgemeinerung . . . . .	75
4.3 Der alternierende zusammengesetzte Fall . . . . .	77
4.4 Ein nicht alternierender Graph . . . . .	82

<b>5</b>	<b>Alternierende Graphendiagramme</b>	<b>85</b>
5.1	Transformationen von Graphendiagrammen . . . . .	86
5.2	Graphen mit höchstens drei Ecken vom Grad vier . . . . .	88
5.3	Weitere Klassen alternierender Graphen . . . . .	95
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>102</b>

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Einbettungen von Graphen – aufgefaßt als eindimensionale Zellenkomplexe – in den dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$ . Die Betrachtung derartiger Einbettungen stellt in natürlicher Weise eine Verallgemeinerung der Knotentheorie dar, in deren Rahmen Einbettungen einer oder mehrerer Kopien der 1-Sphäre  $\mathbb{S}^1$  in  $\mathbb{R}^3$  untersucht werden, denn  $\mathbb{S}^1$  läßt sich als (topologischer) Graph interpretieren. Ähnlich wie im Rahmen der Knotentheorie können Aussagen über Einbettungen von Graphen anhand von Diagrammen – also Projektionen von  $\mathbb{R}^3$  auf eine geeignete Ebene – gewonnen werden.

Es werden stets 4-reguläre Graphen betrachtet, d.h. an jeder Ecke eines solchen Graphen enden vier (nicht notwendig verschiedene) Kanten. Zusätzliche Ecken vom Grad zwei sind ebenfalls zugelassen, da die betrachtete Äquivalenzklasseneinteilung unter Hinzufügen oder Weglassen von Ecken vom Grad zwei erhalten bleibt. In diesem erweiterten Sinne läßt sich  $\mathbb{S}^1$  darstellen als 4-regulärer Graph ohne Ecken vom Grad vier.

Ein Schwerpunkt der Arbeit liegt in der Untersuchung der Frage, ob sich ein Teil der sogenannten *Tait-Vermutungen* ([Tait1898]), der in dem folgenden Satz für Verkettungen formuliert ist, auf Graphen in  $\mathbb{R}^3$  übertragen läßt:

**Satz 1.5** *Sei  $L$  eine Verkettung in  $\mathbb{R}^3$  und  $D$  ein alternierendes, reduziertes Diagramm von  $L$  mit  $n$  Kreuzungen. Dann gilt:*

- a) *Es gibt kein Diagramm von  $L$  mit weniger als  $n$  Kreuzungen, d.h.  $D$  ist in minimaler Darstellung.*
  
- b) *Ist  $L$  prim, so besitzt jedes nicht alternierende Diagramm von  $L$  mehr als  $n$  Kreuzungen.*

Diesen Satz konnten unabhängig voneinander Thistlethwaite ([Thist87], Th. 2 & Cor. 1), Murasugi ([Mura87], Th. A & B) und Kauffman ([Kauf87], Th. 2.10) beweisen, indem sie Aussagen über Verkettungsdiagramme mit Hilfe einer Polynom invarianten, dem sogenannten *Klammerpolynom*, herleiteten.

Im ersten Kapitel der Arbeit werden zunächst Grundlagen aus der Knotentheorie zusammengestellt, wobei nach der Einführung des bereits erwähnten Klammerpolynoms und des *Kauffman–Polynoms* wesentliche Eigenschaften dieser beiden Polynom invarianten aufgezählt werden. Mit Hilfe der Polynom invarianten ist es möglich, den Beweis von Satz 1.5 zu führen (siehe Beweis des Satzes auf Seite 11 und Bemerkung 2 auf Seite 15). Anschließend werden Zusammenhänge zwischen Knoten- und Graphentheorie aufgezeigt.

Kapitel 2 ist den sogenannten *Knäueln* gewidmet. Neben der Entwicklung eines Begriffsapparats zur Behandlung von Knäueln werden vor allem zwei Methoden eingeführt, die der Berechnung insbesondere von Termen des Kauffman–Polynoms eines Verkettungsdiagramms dienen: die *Summenformel für Knäuel* und das *Rekursionsprinzip für rationale Knäuel*. Mit Hilfe von Knäueln werden dann in Kapitel 3 neue Invarianten von Graphen in  $\mathbb{R}^3$  bzw. deren Diagrammen eingeführt. Desweiteren werden Eigenschaften für Graphen in  $\mathbb{R}^3$  und für Graphendiagramme definiert, die aus der Knotentheorie bekannte Begriffe verallgemeinern.

Im vierten und fünften Kapitel werden alternierende Graphendiagramme untersucht und Verallgemeinerungen von Satz 1.5 bewiesen. Dabei ist das vierte Kapitel der Beschäftigung mit dem „kleinsten“ (echten) 4-regulären Graphen, dem *Achtergraphen*, vorbehalten, während in Kapitel 5 verschiedene Klassen von Graphen mit mehr als einer Ecke vom Grad vier betrachtet werden.

Besonders danken möchte ich an dieser Stelle Prof. Dr. D. Erle für die Betreuung der Arbeit und allen Freundinnen und Freunden für das, was im Leben wichtiger ist als Mathematik.

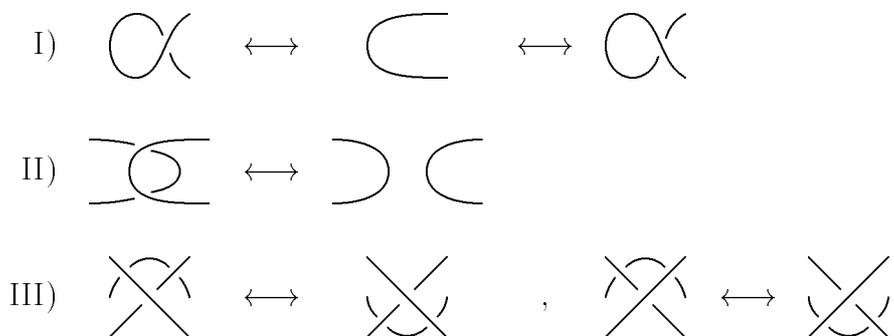
# Kapitel 1

## Knoten und Verkettungen

Eine *Verkettung*  $L$  ist das Bild einer Einbettung von  $k \geq 1$  disjunkten Kopien der 1-Sphäre  $\mathbb{S}^1$  in  $\mathbb{R}^3$ . Ist  $k = 1$ , so heißt  $L$  *Knoten*. Zwei Verkettungen  $L_1, L_2$  heißen *äquivalent*, wenn ein orientierungserhaltender Homöomorphismus  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $h(L_1) = L_2$  existiert.

Elementare Definitionen und Ergebnisse der Knotentheorie finden sich zum Beispiel in [Bur85] oder [Rolf76]. Im folgenden werden stets zahme Verkettungen in  $\mathbb{R}^3$  und reguläre *Verkettungsdiagramme* betrachtet, d.h. Bilder von Projektion auf eine geeignete Ebene zuzüglich Über- und Unterkreuzungsinformationen der Doppelpunkte.

Zwei Verkettungsdiagramme  $D$  und  $D'$  heißen *äquivalent*,  $D \sim D'$ , wenn sie sich durch eine endliche Anzahl der Reidemeister-Bewegungen I–III und einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus der Ebene auf sich ineinander umformen lassen:



Die Äquivalenzklasse von  $D$  wird mit  $[D]$  bezeichnet. Zwei Verkettungen sind genau dann äquivalent, wenn sie äquivalente Diagramme besitzen.

## 1.1 Grundlegende Eigenschaften von Verkettungen und deren Diagrammen

### Definition

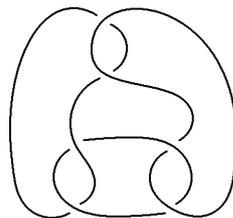
- (i) Eine Verkettung  $L$  heißt *zerfallend* („split link“), falls eine 2-Sphäre  $S \approx \mathbb{S}^2$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus L$  existiert, so daß keine der beiden Komponenten von  $\mathbb{R}^3 \setminus S$  mit  $L$  leeren Schnitt hat.
- (ii)  $L$  sei eine nicht zerfallende Verkettung. Dann heißt  $L$  *zusammengesetzt*, falls sich  $L$  darstellen läßt als zusammenhängende Summe  $L = L_1 \# L_2$  und  $L_1, L_2$  keine trivialen Knoten sind; andernfalls heißt  $L$  *prim*.
- (iii)  $D$  sei ein zusammenhängendes Verkettungsdiagramm. Dann heißt  $D$  *zusammengesetzt*,  $D = D_1 \# D_2$ , falls eine einfach geschlossene Kurve  $c$  in  $\mathbb{R}^2$  existiert, die  $D$  in genau zwei Punkten transversal schneidet, so daß jede der beiden Komponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus c$  Kreuzungen von  $D$  enthält; andernfalls heißt  $D$  *prim*.

### Bemerkungen:

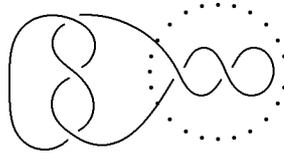
1. Es ist zu beachten, daß die Begriffe *zusammengesetzt* bzw. *prim* nur für nicht zerfallende Verkettungen bzw. zusammenhängende Verkettungsdiagramme definiert sind.
2. Zerfallende Verkettungen können zusammenhängende Verkettungsdiagramme besitzen:



3. Zusammengesetzte Verkettungen können prime Verkettungsdiagramme besitzen:



4. Zusammengesetzte Verkettungsdiagramme können prime Verkettungen darstellen:



**Definition** Ein Verkettungsdiagramm heißt *alternierend*, falls sich beim Durchlaufen einer jeden Komponente der Verkettung Über- und Unterkreuzungen jeweils abwechseln. Eine Verkettung heißt *alternierend*, falls sie ein alternierendes Verkettungsdiagramm besitzt.

**Definition** Eine Kreuzung  $p$  eines Verkettungsdiagramms  $D$  heißt *Isthmus*, falls  $D \setminus \{p\}$  mehr Komponenten als  $D$  hat. Besitzt  $D$  keinen Isthmus, so heißt  $D$  *reduziert*.



Reduzieren eines Isthmus

**Bemerkungen:**

1. Ein Verkettungsdiagramm, das nicht reduziert ist, läßt sich schrittweise reduzieren, bis es keinen Isthmus mehr besitzt.
2. Ein alternierendes Verkettungsdiagramm ist auch nach dem Reduzieren eines Isthmus alternierend.
3. Ein primes Verkettungsdiagramm mit mehr als einer Kreuzung ist reduziert.

**Satz 1.1** *Ist  $D$  Diagramm einer Verkettung  $L$ , das alternierend und reduziert ist, so gilt:*

- a)  *$D$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $L$  nicht zerfallend ist.*

b)  $D$  ist genau dann prim, wenn  $L$  prim ist.

**Beweis:** [Mena84], Th. 1 – Teil a) findet sich auch schon in [Auma56], Th. 10.2, [Crow59], Th. 5.7, und [Crow59'], Th. 3.6

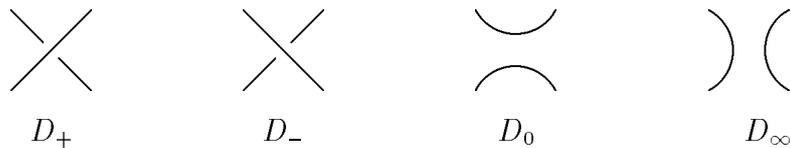
□

**Bezeichnungen:** Sind  $D$ ,  $D_1$  und  $D_2$  Verkettungsdiagramme, so bezeichnet

- $\overline{D}$  das *gespiegelte* Diagramm (überkreuzende Stränge werden zu unterkreuzenden und umgekehrt),
- $D_1 \# D_2$  eine *zusammenhängende Summe* von  $D_1$  und  $D_2$ ,
- $D_1 \sqcup D_2$  die *disjunkte Summe* von  $D_1$  und  $D_2$ ,
- $\#D$  die *Anzahl der Kreuzungen* von  $D$ .

## 1.2 Polynomvarianten für Verkettungen

Ist  $D$  das Diagramm einer Verkettung in  $\mathbb{R}^3$ , so seien die Diagramme  $D_+$ ,  $D_-$ ,  $D_0$  und  $D_\infty$  identisch außerhalb einer „kleinen“ Umgebung einer fest gewählten Kreuzung und innerhalb der Umgebung definiert durch:



**Definition** Für ein Verkettungsdiagramm  $D$  ist das *Klammerpolynom*  $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$  definiert durch die Eigenschaften:

- (i)  $\langle D \rangle = 1$ , falls  $D$  einfach geschlossene Kurve
- (ii)  $\langle D_{\succ} \rangle = \Leftrightarrow A^3 \langle D_{\supset} \rangle$  und  $\langle D_{\searrow} \rangle = \Leftrightarrow A^{-3} \langle D_{\supset} \rangle$
- (iii)  $\langle D_{\times} \rangle = A \langle D_{\succ} \rangle + A^{-1} \langle D_{\searrow} \rangle$

Die Differenz zwischen dem höchsten und dem niedrigsten Exponenten des Klammerpolynoms heißt *Spann* und wird mit  $sp(\langle D \rangle)$  bezeichnet.



Das Klammerpolynom ist invariant unter den Reidemeister–Bewegungen II und III, der Spann des Klammerpolynoms ist invariant unter den Reidemeister–Bewegungen I–III, und es gelten die folgenden elementaren Eigenschaften:

**Satz 1.2** *Sind  $D, D_1$  und  $D_2$  Verkettungsdiagramme, so gilt:*

a)  $\langle \overline{D} \rangle (A) = \langle D \rangle (A^{-1})$

b)  $\langle D_1 \# D_2 \rangle = \langle D_1 \rangle \cdot \langle D_2 \rangle$

c)  $\langle D_1 \sqcup D_2 \rangle = \Leftrightarrow (A^2 + A^{-2}) \langle D_1 \rangle \cdot \langle D_2 \rangle$

**Beweis:** Teil a) folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß sich in den definierenden Relationen des Klammerpolynoms beim Übergang von  $D$  zu  $\overline{D}$  die Rollen von  $A$  und  $A^{-1}$  vertauschen. Die Teile b) und c) lassen sich mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl der Kreuzungen zeigen.

□

**Definition** Ist  $D$  Diagramm einer orientierten Verkettung  $L$  und  $p$  eine Kreuzung von  $D$ , so ist  $\varepsilon(p) \in \{\Leftrightarrow 1, 1\}$  definiert durch:



Die *Verdrillungszahl* („writhe“) von  $D$  ist dann

$$w(D) := \sum_p \varepsilon(p).$$



Eine Invariante bezüglich der Reidemeister-Bewegungen I–III läßt sich für orientierte Verkettungsdiagramme definieren durch:

$$f_D(A) := (\Leftrightarrow A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$$

Denn die Verdrillungszahl ist invariant unter den Reidemeister-Bewegungen II/III und ändert sich um  $\pm 1$ , wenn eine Reidemeister-Bewegung I angewendet wird.

**Satz 1.3** *Es sei  $L$  eine Verkettung in  $\mathbb{R}^3$  und  $D$  ein zusammenhängendes Diagramm von  $L$  mit  $n$  Kreuzungen. Dann gilt:*

- a)  $sp(\langle D \rangle) \leq 4n$
- b) *Ist  $D$  reduziert und alternierend, so ist  $sp(\langle D \rangle) = 4n$ .*
- c) *Ist  $D$  prim und nicht alternierend, so ist  $sp(\langle D \rangle) < 4n$ .*

*Entsprechende Aussagen gelten für  $f_D$ .*

**Beweis:** siehe [Thist87], Th. 1 & 2, oder [Mura87], Th. 1–3

□

**Korollar 1.4** *Es sei  $L$  eine Verkettung in  $\mathbb{R}^3$ , die in  $k \geq 1$  nicht zerfallende Komponenten („split components“) zerfällt, und  $D$  ein Diagramm von  $L$  mit  $n$  Kreuzungen. Dann gilt:*

- a)  $sp(\langle D \rangle) \leq 4(n + k \Leftrightarrow 1)$
- b) *Ist  $D$  reduziert und alternierend, so ist  $sp(\langle D \rangle) = 4(n + k \Leftrightarrow 1)$ .*

**Beweis:**  $D$  kann höchstens  $k$  Zusammenhangskomponenten besitzen. Unter Berücksichtigung von Satz 1.2 c) folgt Teil a) daher unmittelbar aus Satz 1.3 a) und Teil b) aus Satz 1.3 b), da wegen Satz 1.1 ein reduziertes, alternierendes Diagramm von  $L$  genau  $k$  Zusammenhangskomponenten hat.

□

**Satz 1.5** Sei  $L$  eine Verkettung in  $\mathbb{R}^3$  und  $D$  ein alternierendes, reduziertes Diagramm von  $L$  mit  $n$  Kreuzungen. Dann gilt:

- a) Es gibt kein Diagramm von  $L$  mit weniger als  $n$  Kreuzungen, d.h.  $D$  ist in minimaler Darstellung.
- b) Ist  $L$  prim, so besitzt jedes nicht alternierende Diagramm von  $L$  mehr als  $n$  Kreuzungen.

**Beweis:** Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 1.3 und Korollar 1.4. □



**Definition** Für ein Verkettungsdiagramm  $D$  ist das *Kauffman-Polynom*  $\mathcal{K}_D(a, z) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$  definiert durch die Eigenschaften:

- (i)  $\mathcal{K}_D(a, z) = 1$ , falls  $D$  einfach geschlossene Kurve
- (ii)  $\mathcal{K}_{D_{\nearrow}} = a \mathcal{K}_{D_{\searrow}}$  und  $\mathcal{K}_{D_{\nwarrow}} = a^{-1} \mathcal{K}_{D_{\swarrow}}$
- (iii)  $\mathcal{K}_{D_{\times}} + \mathcal{K}_{D_{\times}} = z(\mathcal{K}_{D_{\smile}} + \mathcal{K}_{D_{\frown}})$

Gleichung (iii) wird als *Rekursionsformel für das Kauffman-Polynom* bezeichnet, und der höchste Exponent in der Variablen  $z$  heißt  $z$ -Grad von  $\mathcal{K}_D$ .



Das Kauffman-Polynom ist invariant unter den Reidemeister-Bewegungen II und III, der  $z$ -Grad ist invariant unter den Reidemeister-Bewegungen I–III, und es gelten die folgenden elementaren Eigenschaften:

**Satz 1.6** Sind  $D$ ,  $D_1$  und  $D_2$  Verkettungsdiagramme, so gilt:

- a)  $\mathcal{K}_{\overline{D}}(a, z) = \mathcal{K}_D(a^{-1}, z)$
- b)  $\mathcal{K}_{D_1 \# D_2} = \mathcal{K}_{D_1} \mathcal{K}_{D_2}$

$$c) \ , \ , D_1 \sqcup D_2 = \mu, \ , D_1, \ , D_2 \text{ mit } \mu := \Leftrightarrow 1 + (a + a^{-1})z^{-1}$$

**Beweis:** [Kauf90], Lemma 2.6 und Lemma 2.8

□

Während die Wohldefiniertheit und Invarianzeigenschaften des Klammerpolynoms elementar nachgerechnet werden können, erfordert der entsprechende Nachweis für das Kauffman–Polynom wesentlich mehr Aufwand, siehe Th. 2.3 in [Kauf90].

Eine Invariante bezüglich der Reidemeister–Bewegungen I–III läßt sich für orientierte Verkettungsdiagramme wie beim Klammerpolynom definieren durch:

$$F_D(a, z) := a^{-w(D)} \ , \ , D(a, z)$$

**Lemma 1.7** *Ist  $D$  ein Verkettungsdiagramm mit  $n$  Kreuzungen und das Kauffman–Polynom in der Darstellung  $\ , \ , D(a, z) = \sum u_{rs} a^r z^s$ , so gilt:*

$$u_{rs} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad n + r + s \text{ gerade}$$

**Beweis:** siehe [Thist88], Prop. 3 (ii)

□

**Lemma 1.8** *Ist  $D$  Diagramm einer Verkettung mit  $c$  Komponenten, so gilt:*

$$\ , \ , D(i, z) = i^{w(D)} (\Leftrightarrow 1)^{c-1}$$

*Ist das Kauffman–Polynom in der Darstellung  $\ , \ , D(a, z) = \sum \varphi_s(a) z^s$ , so ist demzufolge  $\varphi_0 \neq 0$  und  $\varphi_s(i) = 0$  für  $s \neq 0$ .*

**Beweis:** siehe [Thist88], Prop. 3 (i)

□

**Definition** Ein Verkettungsdiagramm besitzt eine *Brücke der Länge  $b$*  oder  *$b$ -Brücke*, falls  $b \in \mathbb{N}$  (paarweise verschiedene) Kreuzungen existieren, so daß beim Durchlaufen einer Komponente der Verkettung diese Kreuzungen aufeinanderfolgen und alle überquert oder alle unterquert werden.

**Bemerkung:** Ein Verkettungsdiagramm ist also genau dann alternierend, wenn es keine  $b$ -Brücke mit  $b \geq 2$  besitzt.

**Satz 1.9** *Es sei  $D$  ein Verkettungsdiagramm mit  $n \geq 1$  Kreuzungen, welches zusammenhängende Summe von Verkettungsdiagrammen  $D_1, \dots, D_k$  ist. Weiter sei  $b_i$  die Länge der längsten Brücke von  $D_i$  für  $i = 1, \dots, k$ . Ist das Kauffman-Polynom in der Darstellung  $\langle D \rangle(a, z) = \sum u_{rs} a^r z^s$ , so gilt:*

$$u_{rs} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |r| + s \leq n \quad \text{und} \quad s \leq n \Leftrightarrow (b_1 + \dots + b_k)$$

*Insbesondere ist also  $z\text{-Grad}(\langle D \rangle) \leq n \Leftrightarrow k$ .*

**Beweis:** siehe [Thist88], Th. 4

□

**Korollar 1.10** *Ist  $D$  ein Verkettungsdiagramm mit  $n \geq 1$  Kreuzungen, das eine  $b$ -Brücke besitzt, so ist*

$$z\text{-Grad}(\langle D \rangle) \leq n \Leftrightarrow b \leq n \Leftrightarrow 1.$$

□

Satz 1.9 motiviert die folgende

**Definition** Es sei  $D$  ein Verkettungsdiagramm mit Kauffman-Polynom  $\langle D \rangle(a, z) = \sum_{r,s} u_{rs} a^r z^s = \sum_s \varphi_s(a) z^s$ , und  $Sp(\varphi_s)$  bezeichne den Spann von  $\varphi_s$ . Dann ist die *Komplexität*  $K(D)$  definiert durch:

$$K(D) := \max \left\{ s + \frac{1}{2} Sp(\varphi_s) \mid \varphi_s \neq 0 \right\}$$

★

Die Komplexität eines Verkettungsdiagramms ist invariant unter den Reidemeister-Bewegungen I–III. Wegen Lemma 1.7 ist  $K(D)$  ganzzahlig, und nach Lemma 1.8 und Satz 1.9 gilt für jedes Verkettungsdiagramm  $D$  mit  $n \geq 0$  Kreuzungen:

$$0 \leq K(D) \leq n$$

Nach Definition ist  $K(D) \geq z\text{-Grad}(, D)$ . Ist  $z\text{-Grad}(, D) \geq 1$ , so folgt außerdem, daß  $K(D) \geq z\text{-Grad}(, D) + 1$  ist, denn wegen Lemma 1.8 kann der zu  $z\text{-Grad}(, D)$  gehörige Koeffizient des Kauffman-Polynoms keine Konstante sein.

**Satz 1.11** *Es sei  $D$  ein Verkettungsdiagramm mit  $n \geq 1$  Kreuzungen, welches prim, alternierend und reduziert ist. Dann ist  $z\text{-Grad}(, D) = n \Leftrightarrow 1$ , und der zugehörige Summand ist von der Form  $\kappa(a + a^{-1})z^{n-1}$  mit  $\kappa \in \mathbb{N}$ .*

**Beweis:** siehe [Thist88], Th. 5 und nachfolgende Bemerkungen

□

**Bemerkung:** Die Voraussetzung von Satz 1.11 läßt sich äquivalent formulieren durch:  $D$  ein Verkettungsdiagramm mit  $n \geq 2$  Kreuzungen, welches prim und alternierend ist. Denn es gibt kein reduziertes Verkettungsdiagramm mit genau einer Kreuzung, und jedes prime Diagramm mit mindestens zwei Kreuzungen ist reduziert.

**Korollar 1.12** *Ein Verkettungsdiagramm  $D$  mit  $n \geq 2$  Kreuzungen, das keine kreuzungsfreien Komponenten besitzt, ist genau dann prim, alternierend (und reduziert), wenn  $z\text{-Grad}(, D) = n \Leftrightarrow 1$  ist.*

**Beweis:** Die Behauptung folgt aus Satz 1.11, da wegen Satz 1.6 und Korollar 1.10 immer  $z\text{-Grad}(, D) < n \Leftrightarrow 1$  gilt, falls  $D$  nicht alle drei Eigenschaften erfüllt.

□

**Korollar 1.13** *Es sei  $D$  ein Verkettungsdiagramm mit  $n \geq 0$  Kreuzungen, welches alternierend und reduziert ist. Dann ist  $K(D) = n$ .*

**Beweis:** Da sich jede Verkettung eindeutig in Primfaktoren zerlegen läßt (s. [Bur85], Th. 7.12, und [Hashi58], Main Th.), ist es nach Satz 1.1 möglich,  $D$  darzustellen als

$$D = (D_1^1 \# \dots \# D_{i_1}^1) \sqcup \dots \sqcup (D_1^k \# \dots \# D_{i_k}^k),$$

wobei jedes  $D_j^i$  ein primes, alternierendes, reduziertes Verkettungsdiagramm ist. Nach Satz 1.11 ist  $K(D_j^i) = \#D_j^i$  (falls  $\#D_j^i = 0$  ist, gilt dies natürlich ohnehin), und aus

$$\mu_{, D} = \mu^{k-1} \prod_{i,j} \mu_{, D_j^i}$$

(Satz 1.6) folgt:

$$K(D) = \sum_{i,j} K(D_j^i) = n$$

□

### Bemerkungen:

1. Unter den Voraussetzungen von Satz 1.11 gilt also:

$$K(D) = z\text{-Grad}(\mu_{, D}) + 1 = n$$

Im Gegensatz zum  $z$ -Grad des Kauffman-Polynoms ist die Komplexität additiv bezüglich disjunkter und zusammenhängender Summe von alternierenden Verkettungsdiagrammen.

2. Aus den Korollaren 1.10, 1.12 und 1.13 folgt unmittelbar Satz 1.5.

## 1.3 Graphentheoretische Grundlagen

Elementare Begriffe der Graphentheorie können z.B. aus [Tutte84] entnommen werden. Ein (*abstrakter*) Graph  $G$  besteht aus einer *Eckenmenge*  $V(G)$ , einer *Kantenmenge*  $E(G)$  und einer *Inzidenzabbildung*, die einer Kante  $e \in E(G)$  ihre beiden *Enden*  $u, v \in V(G)$  zuordnet, wobei Mehrfachkanten und Schleifen zugelassen sind:

**Definition** Ist  $G$  ein Graph, so heißt  $e \in E(G)$

- (i) *Mehrfachkante*, falls die Enden von  $e$  verschieden sind und es mindestens eine weitere Kante gibt, welche dieselben Enden wie  $e$  hat;
- (ii) *Schleife* („loop“), falls die beiden Enden von  $e$  identisch sind.

**Definition** Es sei  $G$  ein Graph.

- (i) Ein *Weg* in  $G$  ist eine alternierende Sequenz  $v_0, e_1, v_1, \dots, e_r, v_r$  von Ecken und Kanten, so daß  $v_{i-1}, v_i$  Ecken der Kante  $e_i$  sind für  $i = 1, \dots, r$  und  $e_i \neq e_j$  für  $i \neq j$  ist.
- (ii) Ein *Zyklus* in  $G$  ist ein Weg  $v_0, e_1, v_1, \dots, e_r, v_0$  mit  $r \geq 2$ , so daß  $v_i \neq v_j$  für  $i \neq j$  ist.
- (iii)  $G$  heißt *zusammenhängend*, falls je zwei Ecken von  $G$  durch einen Weg verbunden werden können.
- (iv) Eine Kante  $e \in E(G)$  heißt *Isthmus*, falls  $G \setminus e$  mehr Zusammenhangskomponenten als  $G$  hat.



Der Graph, der durch *Zusammenziehen einer Kante*  $e \in E(G)$  entsteht, werde mit  $G/_e$  bezeichnet. Ein *gewichteter Graph* sei stets ein Graph  $G$  zusammen mit einer Abbildung  $\sigma : E(G) \rightarrow \{\Leftrightarrow 1, 1\}$ .

Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß sich die Begriffe *zusammenhängend*, *Weg*, *Zyklus*, *Zusammenziehen einer Kante* für abstrakte Graphen ebenso topologisch deuten lassen, siehe hierzu auch Abschnitt 1.4.

**Definition** Zu einem Graphen  $G$  ist das *Tutte-Polynom*  $\chi_G(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$  definiert durch die Eigenschaften:

- (i)  $\chi_G = 1$ , falls  $E(G) = \emptyset$
- (ii)  $\chi_G = x\chi_{G/_e}$ , falls  $e \in E(G)$  Isthmus

- (iii)  $\chi_G = y\chi_{G \setminus e}$ , falls  $e \in E(G)$  Schleife
- (iv)  $\chi_G = \chi_{G \setminus e} + \chi_{G/e}$ , falls  $e \in E(G)$  weder Isthmus noch Schleife



Das Tutte–Polynom ist eine Invariante abstrakter Graphen, genaueres siehe [Tutte84], chap. IX. Zu Verallgemeinerungen des Tutte–Polynoms siehe auch [Yett90].

**Definition** Ein zusammenhängender Teilgraph  $T$  eines Graphen  $G$  heißt *Spannbaum*, falls  $T$  alle Ecken von  $G$  enthält und keine Zyklen oder Schleifen besitzt.

**Definition** Sei  $G$  ein Graph mit  $k$  Kanten, welche mit den Zahlen  $1, \dots, k$  durchnummeriert sind mittels einer Bijektion  $\tau : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ . Ist  $T$  ein Teilgraph von  $G$ , so heißt eine Kante

- (i)  $e \in T$  *intern aktiv*, falls es keine Kante  $e' \in G \setminus T$  mit  $\tau(e') < \tau(e)$  gibt, so daß  $e$  auf einem Zyklus von  $T \cup e'$  liegt, und andernfalls *intern inaktiv*;
- (ii)  $e \in G \setminus T$  *extern aktiv*, falls es keine Kante  $e'$  auf einem Zyklus von  $T \cup e$  mit  $\tau(e') < \tau(e)$  gibt, und andernfalls *extern inaktiv*.

**Satz 1.14** *Ist  $G$  ein zusammenhängender Graph, so gilt:*

$$\chi_G(x, y) = \sum_{T \subset G} x^{r(T)} y^{s(T)},$$

wobei  $r(T)$  die Anzahl der intern aktiven und  $s(T)$  die Anzahl der extern aktiven Kanten des Spannbaums  $T$  bezüglich einer beliebigen Numerierung der Kanten von  $G$  bezeichnet.

**Beweis:** siehe [Tutte84], Th. IX.65

□

**Definition**  $G$  sei ein Graph.

- (i) Eine Ecke  $v \in V(G)$  heißt *zerlegende Ecke*, falls Teilgraphen  $H$  und  $K$  von  $G$  existieren, die jeweils mindestens eine Kante besitzen, so daß  $G = H \cup K$  und  $H \cap K = \{v\}$ .
- (ii)  $G$  heißt *2-zusammenhängend*, falls  $G$  zusammenhängend ist und keine zerlegende Ecke besitzt.
- (iii) Ein *Block* von  $G$  ist ein maximaler 2-zusammenhängender Teilgraph von  $G$ .

**Lemma 1.15** *Ein Graph  $G$  ist genau dann 2-zusammenhängend, wenn je zwei verschiedene Kanten von  $G$  auf einem Zyklus liegen.*

**Beweis:** siehe [Tutte84], Th. III.18

□

**Lemma 1.16** *Ist  $G$  ein Graph, so gilt:*

- a) *Jede Ecke und jede Kante von  $G$  ist in einem Block von  $G$  enthalten.*
- b) *Jede Kante von  $G$  liegt in genau einem Block von  $G$ .*
- c) *Je zwei verschiedene Blöcke von  $G$  haben höchstens eine Ecke gemeinsam.*

**Beweis:** siehe [Tutte84], III.13 und III.22

□

**Lemma 1.17** *Ist  $G$  ein Graph, der keine isolierte Ecke (d.h. keine Zusammenhangskomponente, die nur aus einer Ecke besteht) besitzt, so enthält jeder Block von  $G$  mindestens eine Kante.*

**Beweis:** siehe [Tutte84], III.16

□

**Lemma 1.18** *Ist  $G$  ein 2-zusammenhängender Graph mit mindestens zwei Kanten und  $e \in E(G)$  beliebig, so ist  $G \setminus e$  2-zusammenhängend oder  $G/e$  2-zusammenhängend.*

**Beweis:** siehe [Tutte84], Th. III.33

□

**Lemma 1.19** *Ist  $G$  ein Graph mit Tutte-Polynom  $\chi_G(x, y) = \sum_{r,s \geq 0} v_{rs} x^r y^s$ , so gilt:*

- a) *Besitzt  $G$  mindestens eine Kante, so ist  $v_{0,0} = 0$ .*
- b) *Läßt sich  $G$  darstellen als Vereinigung zweier Teilgraphen  $H$  und  $K$ , die keine Kante und höchstens eine Ecke gemeinsam haben, so gilt  $\chi_G = \chi_H \cdot \chi_K$ . Besitzen  $H$  und  $K$  jeweils mindestens eine Kante, so ist außerdem  $v_{1,0} = v_{0,1} = 0$ .*

**Beweis:** Teil a) läßt sich leicht mittels vollständiger Induktion nach Anzahl der Kanten von  $G$  zeigen. Teil b) folgt aus Teil a) und [Tutte84], Th. IX.60.

□

## 1.4 Zusammenhänge zwischen Knoten- und Graphentheorie

Als sehr fruchtbar für die Knotentheorie hat sich das von Carl Bankwitz eingeführte Konzept erwiesen, Verkettungsdiagrammen Graphen zuzuordnen. Im folgenden wird die Konstruktion kurz beschrieben, für Details siehe [Bank30], S. 145/146, [Auma56], S. 377/378, oder [Bur85], S. 16.

Ein zusammenhängendes Verkettungsdiagramm zerfällt in Gebiete, die sich schwarz und weiß färben lassen, so daß keine zwei Gebiete gleicher Farbe eine Kante gemeinsam haben und das unbeschränkte Gebiet weiß ist. Bezüglich einer solchen Färbung heißt dann eine Kreuzung *positiv*, falls der

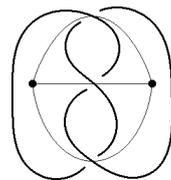
überkreuzende Strang beim Drehen gegen den Uhrzeigersinn auf den unterkreuzenden Strang ein schwarzes Gebiet überstreicht, andernfalls *negativ*:



Jedem schwarzen Gebiet wird eine Ecke und jeder Kreuzung des Diagramms eine Kante zugeordnet. Die Enden einer Kante sind die beiden (nicht notwendig verschiedenen) Ecken der schwarzen Gebiete, welche an die Kreuzung grenzen. Der so definierte Graph wird zu einem gewichteten Graphen, indem einer Kante der Wert  $+1$  zugeordnet wird, falls die zugehörige Kreuzung positiv ist, und der Wert  $-1$ , falls die Kreuzung negativ ist.

Für nicht zusammenhängende Verkettungsdiagramme wird der Graph als disjunkte Vereinigung der zu den einzelnen Komponenten des Diagramms gehörigen Graphen definiert.

Der auf diese Weise konstruierte Graph ist ein planarer Graph, dessen Einbettung in die Ebene so gewählt werden kann, daß sich die Ecken im Inneren der schwarz gefärbten Gebiete befinden und die Kanten genau einen Schnittpunkt mit den Rändern – nämlich einen Kreuzungspunkt – haben und ansonsten ebenfalls ganz im Inneren der Gebiete liegen:



Daraus läßt sich ersehen, daß jedem Verkettungsdiagramm genau ein planarer Graph zugeordnet ist und auch umgekehrt aus jedem in die Ebene eingebetteten gewichteten Graphen eindeutig ein Verkettungsdiagramm konstruiert werden kann.

Werden die Farben Schwarz und Weiß in der Schwarz/Weiß-Färbung des Diagramms vertauscht, liefert eine analoge Konstruktion den zum ursprünglichen Graphen (*geometrisch*) *dualen* Graphen. Die beiden Graphen sind im allgemeinen nicht zueinander isomorph. Für die weiteren Betrachtungen wird es jedoch in der Regel unerheblich sein, welcher der Graphen bzw. welche

der beiden möglichen Schwarz/Weiß-Färbungen gewählt wird. Durch diese Wahlmöglichkeit kann man sich von der Auszeichnung eines bestimmten Gebietes des Diagramms als das unbeschränkte Gebiet befreien, d.h. es kann ein beliebiges Gebiet des Diagramms als das unbeschränkte angenommen werden.

**Bemerkung:** Ein Verkettungsdiagramm ist genau dann alternierend, wenn die Kreuzungen einer jeden Komponente nach Schwarz/Weiß-Färbung des Diagramms alle positiv oder alle negativ sind.

**Lemma 1.20** *Es sei  $D$  ein zusammenhängendes Verkettungsdiagramm mit  $n \geq 0$  Kreuzungen und  $G$  der zugehörige Graph. Dann ist  $D$  genau dann prim, wenn  $G$  2-zusammenhängend ist.*

**Beweis:** Der Beweis des Lemmas läßt sich rein algebraisch führen, indem ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen dem Kauffman-Polynom eines alternierenden Verkettungsdiagramms und dem Tutte-Polynom des zugehörigen Graphen ausgenutzt wird.

Da die Eigenschaft „prim“ eines Verkettungsdiagramms unabhängig davon ist, ob die einzelnen Kreuzungen bzgl. einer Schwarz/Weiß-Färbung positiv oder negativ sind, genügt es, die Behauptung für alternierende Verkettungsdiagramme zu zeigen, deren Kreuzungen bezüglich einer gegebenen Schwarz/Weiß-Färbung alle positiv sind. Für  $n \in \{0, 1\}$  ist  $D$  immer prim und  $G$  immer 2-zusammenhängend, daher sei im folgenden  $n \geq 2$ .

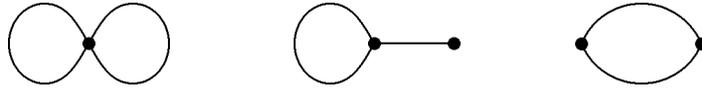
Sind dann Kauffman- bzw. Tutte-Polynom in der Darstellung  $\chi_D(a, z) = \sum p_s(a)z^s$  und  $\chi_G(x, y) = \sum v_{rs}x^r y^s$ , so gilt nach [Thist88], Th. 5 und nachfolgender Bemerkung (zum Fall  $n = 2$ ):

$$p_{n-1}(a) = v_{1,0}a^{-1} + v_{0,1}a$$

Wegen Korollar 1.12 ist  $D$  also genau dann prim, wenn  $v_{1,0} > 0$  oder  $v_{0,1} > 0$  gilt.

Ist nun  $G$  nicht 2-zusammenhängend, so zerfällt  $G$  in mehrere Blöcke, die nach Lemma 1.17 jeweils mindestens eine Kante enthalten. Daher ist nach Lemma 1.19 b)  $v_{1,0} = v_{0,1} = 0$ .

Ist andererseits  $G$  2-zusammenhängend, so läßt sich induktiv zeigen, daß  $v_{1,0} = v_{0,1} > 0$ . Für  $n = 2$  lassen sich die (bis auf Isomorphie) verschiedenen zusammenhängenden Graphen leicht angeben:

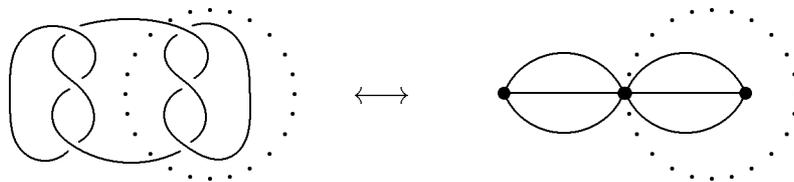


Offensichtlich ist nur der dritte Graph 2-zusammenhängend, und er besitzt das Tutte-Polynom  $\chi_G(x, y) = x + y$ , d.h.  $v_{1,0} = v_{0,1} = 1$ .

Ist  $n \geq 3$  und die Aussage für alle Graphen mit höchstens  $n \Leftrightarrow 1$  Kanten gezeigt, so folgt die Behauptung mit Lemma 1.18 aus der Rekursionsformel  $\chi_G = \chi_{G \setminus e} + \chi_{G/e}$  für eine beliebige Kante  $e \in E(G)$ , die wegen des 2-Zusammenhangs von  $G$  kein Isthmus und keine Schleife sein kann.

□

**Bemerkung:** Der Beweis von Lemma 1.20 läßt sich auch geometrisch führen. Denn ist  $G$  nicht 2-zusammenhängend, so zerfällt der Graph nach den Lemmata 1.16 und 1.17 in mehrere Blöcke, die jeweils mindestens eine Kante enthalten; und ist  $D$  nicht prim, so existiert eine einfach geschlossene Kurve  $c$ , die  $D$  in genau zwei Punkten transversal schneidet, so daß in Innen- und Außengebiet von  $\mathbb{R}^2 \setminus c$  Kreuzungen von  $D$  liegen. Die Kurve  $c$  läßt sich so wählen, daß sie die planare Einbettung von  $G$  in genau einer Ecke schneidet, so daß in den beiden Gebieten von  $\mathbb{R}^2 \setminus c$  Kanten von  $G$  liegen:



Dies ist natürlich für alle Situationen, die durch die möglichen Färbungen der einzelnen Gebiete entstehen, zu überprüfen.

★

Im allgemeinen kann ein planarer Graph verschiedene Einbettungen in die Ebene besitzen, und die zugehörigen Verkettungsdiagramme können in

verschiedenen Äquivalenzklassen liegen (Mutation!). Für das Kauffman- und das Klammerpolynom gilt jedoch:

**Satz 1.21** *Das Kauffman–Polynom eines Verkettungsdiagramms  $D$  hängt nur von dem Isomorphietyp des zu  $D$  gehörigen gewichteten planaren Graphen ab und nicht von der Einbettung des Graphen in die Ebene.*

**Beweis:** siehe [Lip90], Lemma 8

□

**Korollar 1.22** *Das Klammerpolynom eines Verkettungsdiagramms  $D$  hängt nur von dem Isomorphietyp des zu  $D$  gehörigen gewichteten planaren Graphen ab und nicht von der Einbettung des Graphen in die Ebene.*

**Beweis:** Das Klammerpolynom läßt sich mit Hilfe des Kauffman–Polynoms ausdrücken (siehe [Kauf88], S. 222 unten):

$$\langle D \rangle = \sum_D (\Leftrightarrow A^3, A + A^{-1})$$

□



Über die Darstellung des Tutte–Polynoms mit Hilfe von Spannbäumen fand Thistlethwaite einen Zusammenhang zwischen dem Klammerpolynom eines Verkettungsdiagramms und dem zum Diagramm gehörigen Graphen. Dazu werden die Kanten des Graphen wieder mit den Zahlen  $1, \dots, |E(G)|$  durchnummeriert. Bezüglich eines Spannbauums  $T \subset G$  wird jeder Kante  $e \in E(G)$  ein Zustand zugeordnet, welcher jeweils durch eines der Symbole  $L, D, \ell, d, \bar{L}, \bar{D}, \bar{\ell}, \bar{d}$  bezeichnet wird. Ist  $e$  eine positive Kante, so hat sie den Zustand  $L$  bzw.  $D$ , falls  $e \in T$  aktiv bzw. inaktiv ist, und den Zustand  $\ell$  bzw.  $d$ , falls  $e \in G \setminus T$  aktiv bzw. inaktiv ist. Für negative Kanten werden völlig analog die Zustände  $\bar{L}, \bar{D}, \bar{\ell}, \bar{d}$  definiert.

Ist nun ein Spannbaum  $T_i$  gegeben, so ordne einer Kante  $e_j \in G$  je nach oben beschriebenem Zustand ein Element  $\mu_{ij} \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$  gemäß der folgenden Tabelle zu:

Zustand von $e_j$	$L$	$D$	$\ell$	$d$	$\bar{L}$	$\bar{D}$	$\bar{\ell}$	$\bar{d}$
$\mu_{ij}$	$\Leftrightarrow A^{-3}$	$A$	$\Leftrightarrow A^3$	$A^{-1}$	$\Leftrightarrow A^3$	$A^{-1}$	$\Leftrightarrow A^{-3}$	$A$

Dann gilt:

**Satz 1.23** *Für ein zusammenhängendes Verkettungsdiagramm  $D$  ist*

$$\langle D \rangle = \sum_{T_i \subset G} \prod_{e_j \in E(G)} \mu_{ij},$$

wobei die Summe über alle Spann bäume von  $G$  läuft. Insbesondere ist der Term auf der rechten Seite unabhängig von der gewählten Numerierung.

**Beweis:** siehe [Thist87], S. 305/6

□

**Bemerkungen:**

1. Der Term auf der rechten Seite der Gleichung von Satz 1.23 läßt sich als *gewichtetes Tutte–Polynom*  $\bar{\chi}_G \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$  des zusammenhängenden Graphen  $G$  interpretieren. Für einen nicht zusammenhängende Graphen  $G$  mit Zusammenhangskomponenten  $G_1, \dots, G_k$  ist das Tutte–Polynom als

$$\bar{\chi}_G := (\Leftrightarrow A^2 \Leftrightarrow A^{-2})^{k-1} \prod_{i=1}^k \bar{\chi}_{G_i}$$

zu definieren, damit sich Satz 1.23 auf beliebige Verkettungsdiagramme verallgemeinern läßt (siehe Lemma 1.2 c)).

2. Vertauschen der Farben einer Schwarz/Weiß–Färbung entspricht dem Übergang des Graphen  $G$  zu seinem (geometrischen) Dualgraphen  $G^*$ . Es gilt  $\bar{\chi}_G = \bar{\chi}_{G^*}$  (siehe [Thist87], S. 306), d.h. das verallgemeinerte Tutte–Polynom und damit auch das Klammerpolynom ist unabhängig von der Schwarz/Weiß–Färbung des Diagramms.



Jeder Spannbaum von  $G$  entspricht nach Satz 1.23 einem Monom des Klammerpolynoms. Ein Spannbaum heißt *maximal*, falls der Exponent des zugehörigen Monoms maximal ist unter allen derartigen Exponenten, und *minimal*, falls der Exponent des Monoms minimal ist. Natürlich brauchen die Exponenten von maximalen oder minimalen Spannbäumen nicht dem maximalen bzw. minimalen Exponenten des Klammerpolynoms zu entsprechen, denn es existieren möglicherweise mehrere solche Spannbäume, deren Monome unterschiedliches Vorzeichen haben und sich aufheben.



Thistlethwaite entdeckte auch einen Zusammenhang zwischen dem Kauffman–Polynom eines Verkettungsdiagramms und dem zum Diagramm gehörigen Graphen, mit dessen Hilfe sich die folgende Spezialisierung von Satz 1.9 zeigen läßt. Zuvor noch einige Festlegungen.

Ist  $G$  ein gewichteter Graph, so bezeichne  $G_+$  den Teilgraphen von  $G$ , der aus sämtlichen Ecken von  $G$  und den positiven Kanten von  $G$  besteht. Der Graph  $\overline{G_+}$  entstehe aus  $G$  durch Zusammenziehen aller negativen Kanten von  $G$ . Entsprechend werden Graphen  $G_-$  und  $\overline{G_-}$  aus  $G$  konstruiert.

**Satz 1.24** *Sei  $D$  ein zusammenhängendes Verkettungsdiagramm mit  $n \geq 1$  Kreuzungen und zugehörigem Graphen  $G$ . Das Kauffman–Polynom von  $D$  sei in der Darstellung  $\chi_D(a, z) = \sum u_{rs} a^r z^s$  gegeben.*

a) *Besitzt  $G_+$  einen Isthmus oder  $\overline{G_-}$  eine Schleife, so gilt:*

$$u_{rs} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r + s < n$$

b) *Besitzt  $G_-$  einen Isthmus oder  $\overline{G_+}$  eine Schleife, so gilt:*

$$u_{rs} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow r + s < n$$

**Beweis:** [Thist88'], Th. 1 und Cor. 1.1

□

**Korollar 1.25** Sei  $D$  ein zusammenhängendes Verkettungsdiagramm mit  $n \geq 1$  Kreuzungen und zugehörigem Graphen  $G$ . Das Kauffman-Polynom von  $D$  sei in der Darstellung  $\chi_D(a, z) = \sum u_{rs} a^r z^s$  gegeben. Besitzt dann  $G_+$  oder  $G_-$  einen Isthmus oder besitzt  $\overline{G_+}$  oder  $\overline{G_-}$  eine Schleife, so ist  $K(D) < n$ .

□

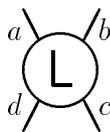
# Kapitel 2

## Knäuel

### 2.1 Grundlegende Definitionen

Knäuel werden im Sinne Conways als Teile von Verkettungsdiagrammen definiert (siehe [Con70]). Für die weiteren Betrachtungen sei ohne Einschränkung die Projektionsabbildung  $p$ , die einer Verkettung ihr Diagramm zuordnet, in der Form  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$  gegeben.

**Definition** Eine Kreisscheibe in einem Verkettungsdiagramm, deren Rand die Projektion der Verkettung in genau vier Punkten transversal schneidet, heißt *Knäuel* und wird symbolisch dargestellt durch:



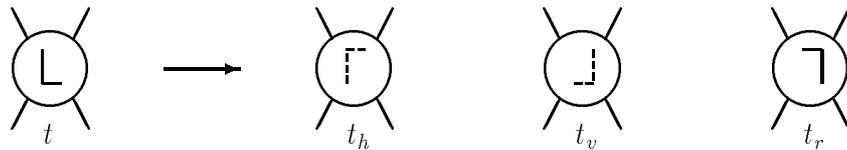
Zwei Knäuel heißen *äquivalent*, wenn sie durch endlich viele Reidemeister-Bewegungen vom Typ I–III und einen Homöomorphismus der Kreisscheibe auf sich, welcher den Rand festläßt, ineinander übergehen.



Der Buchstabe „L“ gibt die „Lage“ des Knäuels an, d.h. die Bezeichnung der Punkte  $a, b, c, d$  ist durch das „L“ eindeutig festgelegt (und umgekehrt). Die Bedeutung wird anhand der nachfolgend definierten Operationen

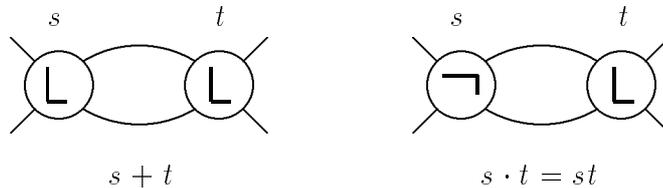
deutlich werden. Ist der Buchstabe gestrichelt dargestellt, so wird dadurch symbolisiert, daß die „Rückseite“ der Kreisscheibe zu sehen ist.

Die Koordinatenachsen der Projektionsebene seien derart gewählt, daß der Nullpunkt Mittelpunkt der Kreisscheibe ist und die Punkte  $a, b, c, d$  auf den Winkelhalbierenden liegen. Dann entstehen aus einem Knäuel  $t$  durch Drehung um  $180^\circ$  um eine der drei Koordinatenachsen die Knäuel  $t_h, t_v$  und  $t_r$ :



Werden jeweils zwei verschiedene dieser Operationen hintereinandergeschaltet, so ergibt sich die dritte, also zum Beispiel  $t_{hv} = t_r$ .

**Definition** Sind  $s$  und  $t$  Knäuel, so werden die Verknüpfungen „+“ und „ $\cdot$ “ definiert durch:



Bei der Verknüpfung „ $\cdot$ “ wird das Knäuel  $s$  um  $180^\circ$  um die Winkelhalbierende  $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y = \pm x\}$  gedreht und an der Projektionsebene gespiegelt (d.h. Über- und Unterkreuzungen werden vertauscht).

Einige ausgezeichnete Knäuel sind:



**Definition** (i) Die Knäuel  $0, n = 1 + \dots + 1$  und  $\bar{n} = \bar{1} + \dots + \bar{1}$  heißen *ganzzahlig*.

(ii) Ist ein Knäuel  $t$  von der Form  $t = a_1 \dots a_n$  mit ganzzahligen Knäueln

$a_1, \dots, a_n$  oder ist  $t = \infty$ , so heißt  $t$  *rational*. Die Menge aller rationaler Knäuel wird mit  $\mathcal{K}$  bezeichnet.

(iii) Die rationalen Knäuel lassen sich in drei verschiedene Klassen einteilen, je nachdem ob der in  $a$  endende Strang mit dem in  $b$ ,  $c$  oder  $d$  endenden Strang verbunden ist.  $0$ ,  $1$  und  $\infty$  sind Repräsentanten der verschiedenen Klassen, welche daher mit  $\mathcal{K}_0$ ,  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_\infty$  bezeichnet werden.



Einem rationalen Knäuel  $a_1 \dots a_n$  mit  $a_1 \neq 0, \dots, a_{n-1} \neq 0$ , falls  $n \geq 2$ , wird durch den Kettenbruch

$$a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \dots + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1}}}$$

eine Zahl aus  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  zugeordnet. Es läßt sich zeigen, daß zwei Knäuel genau dann äquivalent sind, wenn die Werte der Kettenbrüche gleich sind (siehe [Con70], S. 331/332, oder [Bur85], S. 196). Daher wird im weiteren Text ein rationales Knäuel  $r$  mit dieser Zahl identifiziert, d.h. die Schreibweise  $r > 0$  bedeutet zum Beispiel, daß der zu  $r$  gehörige Kettenbruch positiven Wert ( $\neq \infty$ ) hat. Desweiteren gilt:

**Lemma 2.1** *Jedes rationale Knäuel aus  $\mathcal{K} \setminus \{0, \infty, 1, \bar{1}\}$  läßt sich darstellen in einer Normalform  $a_1 \dots a_n$ , so daß gilt:  $|a_1| \geq 2$ ,  $a_1 \neq 0$ ,  $\dots$ ,  $a_{n-1} \neq 0$  und alle  $a_i \geq 0$  oder alle  $a_i \leq 0$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Die Normalformdarstellung ist eindeutig bestimmt, d.h. es gilt:*

$$a_1 \dots a_n = b_1 \dots b_m \quad \Rightarrow \quad m = n \text{ und } a_i = b_i \text{ für } i = 1, \dots, n$$

**Beweis:** siehe [Con70], S. 332, oder auch [Sawo91], Sätze 3.8 und 3.10

□

**Bemerkung:** Nach Lemma 2.1 liegt in der Äquivalenzklasse eines jeden rationalen Knäuels  $r$  immer ein Repräsentant  $r'$  in Normalformgestalt. Sind  $r$  und  $r'$  Teile von Verkettungsdiagrammen  $D$  bzw.  $D'$ , die außerhalb der zu den Knäueln gehörigen Kreisscheiben identisch sind, so unterscheiden sich

die jeweiligen Klammer- und Kauffman-Polynome der Diagramme lediglich durch einen Faktor  $(\Leftrightarrow A^3)^p$  bzw.  $a^p$  mit  $p \in \mathbb{Z}$  voneinander. Der Spann des Klammerpolynoms,  $z$ -Grad des Kauffman-Polynoms und Komplexität von  $D$  und  $D'$  sind sogar identisch. Daher treten im weiteren rationale Knäuel in der Regel in Normalformgestalt auf, sofern dies keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

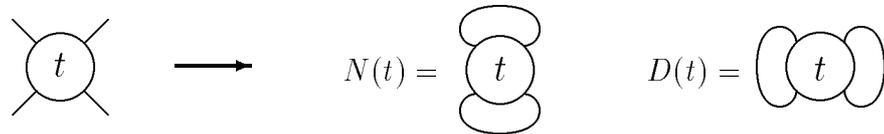
**Lemma 2.2** *Für jedes rationale Knäuel  $t$  gilt:*

$$t = t_h = t_v = t_r$$

**Beweis:** siehe [Sawo91], Satz 3.13 (a)

□

**Definition** Ist  $t$  ein Knäuel, so werden die Verkettungsdiagramme  $N(t)$  und  $D(t)$  definiert durch:



**Bemerkung:** Ein Knäuel  $t$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $N(t)$  und  $D(t)$  beide zusammenhängend sind.

**Definition** Ein Knäuel  $t$  heißt *alternierend*, falls  $N(t)$  und  $D(t)$  beide alternierend sind.

**Definition** Ein zusammenhängendes Knäuel  $t$  heißt

- (i) *lokal zusammengesetzt* („locally knotted“), wenn  $N(t)$  und  $D(t)$  beide zusammengesetzt sind, und andernfalls *lokal prim*;
- (ii) *zusammengesetzt*, wenn  $N(t)$  oder  $D(t)$  zusammengesetzt ist, und andernfalls *prim*.

**Lemma 2.3** *Ein zusammenhängendes Knäuel  $t$  ist genau dann lokal prim, wenn  $N(t + 1)$  prim ist.*

**Beweis:** Die Eigenschaft „prim“ ist unabhängig von einer Änderung der Über- und Unterkreuzungsinformationen eines Diagramms. Daher genügt es, die Aussage für den Fall zu zeigen, daß  $t + 1$  alternierend ist. Da das Knäuel  $t$  zusammenhängend ist, besitzt es mindestens eine Kreuzung und das Diagramm  $D = N(t + 1)$   $n \geq 2$  Kreuzungen. Nach Korollar 1.12 ist  $D$  genau dann prim, wenn  $z\text{-Grad}(, D) = n \Leftrightarrow 1$  gilt. Für  $n = 2$  ist  $t$  lokal prim und  $z\text{-Grad}(, D) = 1$ , d.h. die Behauptung gilt. Sei also  $n \geq 3$ .

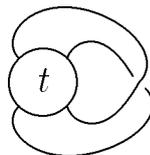
Die Rekursionsformel für das Kauffman–Polynom, angewendet auf die Kreuzung von  $D$ , die nicht zu  $t$  gehört, ist von der Form:

$$, D = , D_+ = \Leftrightarrow , D_- + z(, D_0 + , D_\infty)$$

$D_-$  ist nicht alternierend und besitzt somit eine 2–Brücke, d.h. nach Satz 1.9 ist  $z\text{-Grad}(, D_-) \leq n \Leftrightarrow 2$ . Daher ist  $z\text{-Grad}(, D) = n \Leftrightarrow 1$  genau dann erfüllt, wenn  $z\text{-Grad}(, D_0) = n \Leftrightarrow 2$  oder  $z\text{-Grad}(, D_\infty) = n \Leftrightarrow 2$  ist. Wegen Korollar 1.12 ist dies genau dann der Fall, wenn  $D_0 = N(t)$  oder  $D_\infty = D(t)$  prim, d.h.  $t$  lokal prim ist. □

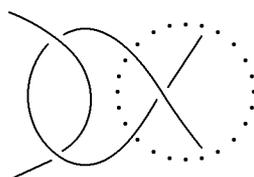
**Bemerkungen:**

1. Ein zusammenhängendes Knäuel  $t$  ist genau dann lokal zusammengesetzt, wenn im Inneren der zu  $t$  gehörigen Kreischeibe  $D \approx \mathbb{D}^2$  eine einfach geschlossene Kurve  $c$  existiert, die  $t$  in genau zwei Punkten transversal schneidet, so daß jede der beiden Komponenten von  $D \setminus c$  Kreuzungen von  $t$  enthält. Denn ist  $t$  lokal zusammengesetzt und somit nach Lemma 2.3  $N(t + 1)$  zusammengesetzt, so zerfällt die Ebene ohne den Rand von  $D$  und die im Komplement von  $D$  liegenden Stränge von  $N(t + 1)$  in fünf Gebiete:



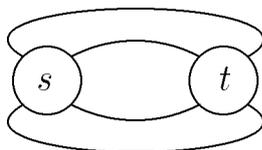
Mit Hilfe des Satzes von Jordan–Schönflies läßt sich leicht erkennen, daß eine einfach geschlossene Kurve, die das Diagramm in genau zwei Punkten transversal schneidet und nicht im Inneren von  $D$  liegt, derart deformiert werden kann, daß sie ganz im Inneren eines der fünf Gebiete verläuft.

2. Ein zusammenhängendes Knäuel  $t$  ist genau dann lokal prim, wenn einer der beiden Graphen zu  $N(t)$  und  $D(t)$  2-zusammenhängend ist (siehe Lemma 1.20).
3. Rationale Knäuel in Normalformgestalt sind alternierend.
4. Rationale Knäuel mit mindestens einer Kreuzung sind lokal prim (siehe Korollar 2.11), und rationale Knäuel mit mindestens zwei Kreuzungen sind zusammengesetzt:



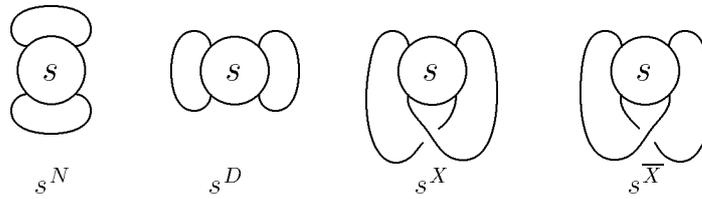
## 2.2 Eine Summenformel für Knäuel

Im Verlauf dieses Abschnitts wird eine Formel zur Berechnung des Kauffman-Polynoms von  $N(s + t)$  angegeben, wobei  $s$  und  $t$  beliebige Knäuel sind.



$$N(s + t) = (s + t)^N$$

Mit  $s^N$ ,  $s^D$ ,  $s^X$ ,  $s^{\bar{X}}$  werden die abgebildeten Verkettungsdiagramme bezeichnet:



$A^i := \langle \cdot, s^i \rangle$  für  $i \in \{N, D, X, \overline{X}\}$  seien die zugehörigen Kauffman-Polynome, und analog werden  $t^N, t^D, t^X, t^{\overline{X}}$  bzw.  $B^N, B^D, B^X, B^{\overline{X}}$  definiert. Ist desweiteren  $\mu := \langle \cdot, 1 + (a + a^{-1})z^{-1} \rangle$  und  $\tau := 1 + (a + a^{-1})\langle \cdot, z \leftrightarrow z^{-1} \rangle$ , so gilt für das Kauffman-Polynom die folgende *Summenformel für Knäuel*:

$$\begin{aligned} & \langle \cdot, (a + a^{-1})^2(1 \leftrightarrow 3z^{-2} + (a + a^{-1})z^{-3})(A + B)^N \rangle \\ &= (A^N, A^D, A^X) \underbrace{\begin{pmatrix} \mu\tau \leftrightarrow a^{-2} & 1 \leftrightarrow \tau & a^{-1} \leftrightarrow a\mu \\ 1 \leftrightarrow \tau & \mu\tau \leftrightarrow a^2 & a \leftrightarrow a^{-1}\mu \\ a^{-1} \leftrightarrow a\mu & a \leftrightarrow a^{-1}\mu & \mu^2 \leftrightarrow 1 \end{pmatrix}}_{=: M} \begin{pmatrix} B^N \\ B^D \\ B^X \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die obige Formel läßt sich mit Hilfe der *Skein-Theorie* aus [Lick87] herleiten, analog zu der entsprechenden Formel für das verallgemeinerte Jones-Polynom ([Lick87], Proposition 12).

Ausmultiplizieren der Einträge von  $M$  und Ausklammern von  $\langle \cdot, (a + a^{-1}) \rangle$  liefert die folgende Gestalt der Matrix  $\langle \cdot, (a + a^{-1})^{-1} \rangle M$ :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} z - a - 2z^{-1} + (a + a^{-1})z^{-2} & z - z^{-1} & -1 + az^{-1} \\ z - z^{-1} & z - a^{-1} - 2z^{-1} + (a + a^{-1})z^{-2} & -1 + a^{-1}z^{-1} \\ -1 + az^{-1} & -1 + a^{-1}z^{-1} & 2z^{-1} - (a + a^{-1})z^{-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z & z & -1 \\ z & z & -1 \\ -1 & -1 & 2z^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a - 2z^{-1} + (a + a^{-1})z^{-2} & -z^{-1} & az^{-1} \\ -z^{-1} & -a^{-1} - 2z^{-1} + (a + a^{-1})z^{-2} & a^{-1}z^{-1} \\ az^{-1} & a^{-1}z^{-1} & -(a + a^{-1})z^{-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die erste der beiden Matrizen in der Summe gestattet die nachstehenden

Umformungen:

$$\begin{aligned}
& (A^N, A^D, A^X) \begin{pmatrix} z & z & \Leftrightarrow 1 \\ z & z & \Leftrightarrow 1 \\ \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 1 & 2z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^N \\ B^D \\ B^X \end{pmatrix} \\
&= (A^N, A^D, A^X) \begin{pmatrix} z(B^N + B^D) \Leftrightarrow B^X \\ z(B^N + B^D) \Leftrightarrow B^X \\ \Leftrightarrow (B^N + B^D) + 2z^{-1}B^X \end{pmatrix} \\
&= (A^N, A^D, A^X) \begin{pmatrix} B^{\bar{X}} \\ B^{\bar{X}} \\ z^{-1}(B^X \Leftrightarrow B^{\bar{X}}) \end{pmatrix} \\
&= (A^N + A^D \Leftrightarrow z^{-1}A^X)B^{\bar{X}} + z^{-1}A^X B^X \\
&= z^{-1}A^{\bar{X}}B^{\bar{X}} + z^{-1}A^X B^X
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Darstellung der Summenformel, die im weiteren Text verwendet wird:

**Satz 2.4** *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

$$\begin{aligned}
& (a + a^{-1})(1 \Leftrightarrow 3z^{-2} + (a + a^{-1})z^{-3})(A + B)^N \\
&= z^{-1}A^{\bar{X}}B^{\bar{X}} + z^{-1}A^X B^X \Leftrightarrow aA^N B^N + az^{-1}A^X B^N \Leftrightarrow a^{-1}A^D B^D \\
&+ a^{-1}z^{-1}A^X B^D + az^{-1}A^N B^X + a^{-1}z^{-1}A^D B^X \Leftrightarrow (a + a^{-1})z^{-2}A^X B^X \\
&\Leftrightarrow 2z^{-1}A^N B^N \Leftrightarrow z^{-1}A^N B^D \Leftrightarrow z^{-1}A^D B^N \Leftrightarrow 2z^{-1}A^D B^D \\
&+ (a + a^{-1})z^{-2}A^N B^N + (a + a^{-1})z^{-2}A^D B^D
\end{aligned}$$

**Beweis:** Wegen der Rekursionsformel für das Kauffman-Polynom genügt es, die Richtigkeit der Summenformel für je zwei Knäuel aus  $\{0, \infty, 1\}$  zu überprüfen, was durch einfaches Nachrechnen geschieht. □

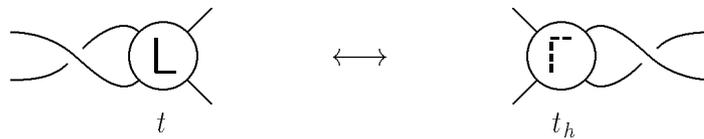
**Bemerkung:** An der Gestalt der linken Seite der Summenformel für Knäuel erkennt man, daß sich die Summanden von  $(A + B)^N$  mit höchstem und zweithöchstem Exponenten in der Variablen  $z$  direkt aus den entsprechenden Summanden auf der rechten Seite ablesen lassen.



Mit Hilfe der Summenformel für Knäuel lassen sich recht schnell einige Eigenschaften des Kauffman–Polynoms herleiten:

**Definition** (i) Sind  $s$  und  $t$  Knäuel und  $D = N(s+t)$ , so heißt  $D' = N(s+t_i)$  für ein  $i \in \{h, t, r\}$  ein *Mutant* von  $D$ , und der Übergang von  $D$  zu  $D'$  heißt *Mutation*.

(ii) Ist  $t$  ein Knäuel, so heißt der Übergang von  $1+t$  zu  $t_h+1$  bzw. von  $\bar{1}+t$  zu  $t_h+\bar{1}$  oder jeweils umgekehrt „*flype*“:



(Zur Herkunft des Begriffes „flype“ siehe die Erläuterung in [Mena93], S. 113.)

**Lemma 2.5** a) Das Kauffman–Polynom eines Verkettungsdiagramms  $D = N(s+t)$  ist invariant unter Mutation.

b) Das Kauffman–Polynom eines Verkettungsdiagramms ist invariant unter Anwendung von „flypes“, d.h. für beliebige Knäuel  $s$  und  $t$  gilt:

$$, N(s+1+t) = , N(s+t_h+1) \quad \text{und} \quad , N(s+\bar{1}+t) = , N(s+t_h+\bar{1})$$

c)  $t_1, \dots, t_k$  seien beliebige Knäuel. Dann ist das Kauffman–Polynom von  $N(t_1 + \dots + t_k)$  unabhängig von der Reihenfolge der  $t_i$ , d.h. das Kauffman–Polynom von  $N(t_{\sigma(1)} + \dots + t_{\sigma(k)})$  ist identisch für jede Permutation  $\sigma$  auf  $\{1, \dots, k\}$ .

**Beweis:**

**zu a):**

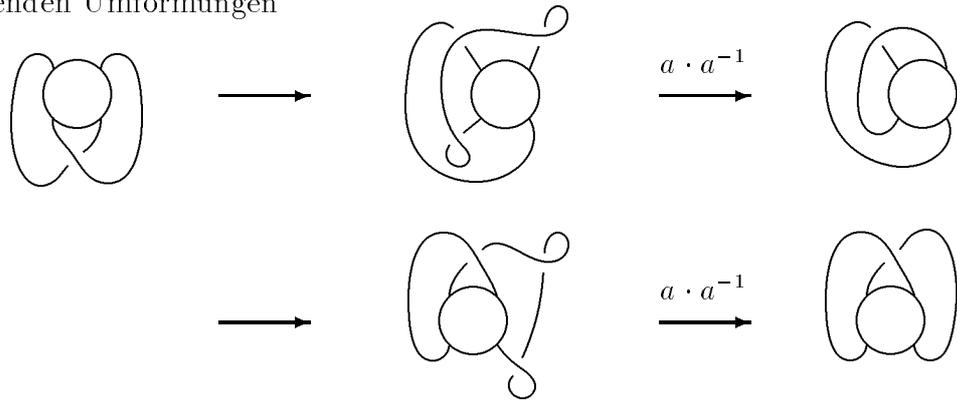
Versehe das Knäuel  $t$  mit einer beliebigen Orientierung. Mit  $i \in \{h, t, r\}$  gilt dann für die orientierten Kauffman–Polynome

$$F_{t^N} = F_{t_i^N} \quad \text{und} \quad F_{t^D} = F_{t_i^D},$$

denn  $t^N$  und  $t_i^N$  bzw.  $t^D$  und  $t_i^D$  sind jeweils Diagramme äquivalenter Verkettungen in  $\mathbb{R}^3$ . Da außerdem auch die Verdrillungszahlen von  $t^N$  und  $t^D$  invariant unter der Mutation bleiben, folgt auch für das jeweilige Kauffman-Polynom:

$$\langle \cdot, t^N \rangle = \langle \cdot, t_i^N \rangle \quad \text{und} \quad \langle \cdot, t^D \rangle = \langle \cdot, t_i^D \rangle$$

Unter Berücksichtigung der Invarianz des Kauffman-Polynoms unter den folgenden Umformungen



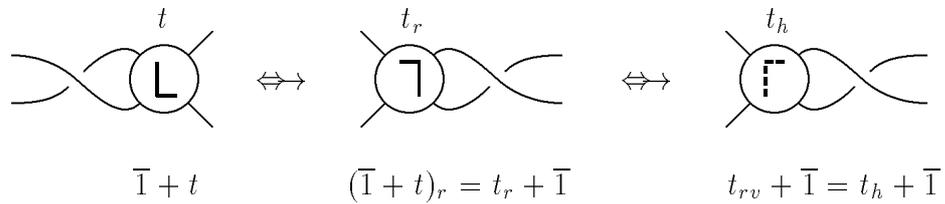
folgt mit dem gleichen Argument auch:

$$\langle \cdot, t^X \rangle = \langle \cdot, t_i^X \rangle$$

Die Behauptung ergibt sich nun unmittelbar aus der Summenformel für Knäuel.

**zu b):**

Ein „flype“ läßt sich darstellen als Hintereinanderschaltung von zwei Mutationen:



Nach Teil a) gilt somit

$$\langle \cdot, N(s+\bar{1}+t) \rangle = \langle \cdot, N(s+(\bar{1}+t)_r) \rangle = \langle \cdot, N(s+t_r+\bar{1}) \rangle = \langle \cdot, N(s+t_{rv}+\bar{1}) \rangle = \langle \cdot, N(s+t_h+\bar{1}) \rangle$$

und entsprechend für 1 anstelle von  $\bar{1}$ .

**zu c):**

Zeige die Aussage mittels vollständiger Induktion nach  $k$ . Für  $k = 1$  ist die Behauptung sicherlich erfüllt. Sei also  $k \geq 2$  und die Behauptung gezeigt für Summen von  $k \Leftrightarrow 1$  Knäueln. Für  $t_k = 0$  ist die Aussage nach Induktionsvoraussetzung erfüllt. Für  $t_k = \infty$  ergibt sich das Kauffman-Polynom als Produkt der Kauffman-Polynome von  $t_1^D, \dots, t_{k-1}^D$  und ist somit unabhängig von der Reihenfolge der  $t_i$ . Für  $t_k = 1$  läßt sich das Knäuel  $t_k$  mittels eines „flypes“ an eine beliebige Position befördern, so daß zusammen mit den Teilen a) und b) die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung folgt. Unter Benutzung der Summenformel für Knäuel ergibt sich nun die Aussage für eine beliebige Wahl von  $t_k$ . □

**Bemerkung:** Teil c) von Lemma 2.5 folgt auch mit Satz 1.21, da die zu  $N(t_{\sigma(1)+\dots+\sigma(k)})$  gehörigen Graphen alle vom gleichen Isomorphietyp sind.

**Lemma 2.6** *s und t seien lokal prime Knäuel. Ist  $s + t$  alternierend mit n Kreuzungen, so gilt*

$$z\text{-Grad}(, N(s+t)) = n \Leftrightarrow 1,$$

und der zugehörige Summand des Kauffman-Polynoms ist von der Form

$$\kappa(a + a^{-1})z^{n-1} \quad \text{mit } \kappa > 0.$$

**Beweis:** Verwende im folgenden die Bezeichnungen von Satz 2.4. Da  $s + t$  alternierend ist, sind entweder  $s^X$  und  $t^X$  beide alternierend oder  $s^{\overline{X}}$  und  $t^{\overline{X}}$  beide alternierend. Wegen Lemma 1.6 a) genügt es, den ersten Fall zu betrachten.

Hat  $s$  genau  $k \geq 2$  Kreuzungen, so ist nach Voraussetzung  $s^N$  oder  $s^D$  prim, alternierend und reduziert, und die Summanden mit Exponenten  $k \Leftrightarrow 1$  in der Variablen  $z$  in den zugehörigen Kauffman-Polynomen lassen sich nach Satz 1.11 darstellen in der Form  $\kappa_N(a + a^{-1})z^{k-1}$  bzw.  $\kappa_D(a + a^{-1})z^{k-1}$  mit  $\kappa_N, \kappa_D \geq 0$  und  $\kappa_N + \kappa_D > 0$ . Da das (nicht alternierende) Diagramm  $s^{\overline{X}}$  eine 2-Brücke besitzt, gilt  $z \Leftrightarrow \text{Grad}(A^{\overline{X}}) \leq k \Leftrightarrow 1$ . Wegen der Rekursionsformel

$$A^X + A^{\overline{X}} = z(A^N + A^D)$$

ist daher  $z \Leftrightarrow \text{Grad}(A^X) = k$ , und der zugehörige Summand ist von der Form  $\kappa_X(a + a^{-1})z^k$  mit  $\kappa_X = \kappa_N + \kappa_D > 0$ . Hat  $s$  genau eine Kreuzung, d.h. ist  $s = \bar{1}$ , so gilt die Aussage über das Kauffman-Polynom von  $s^X$  ebenfalls (mit  $\kappa_X = 1$ ).

Da sich völlig analog für  $t$  anstelle von  $s$  argumentieren läßt, folgt, daß  $z \Leftrightarrow \text{Grad}(B^X) = n \Leftrightarrow k$  und daher  $z \Leftrightarrow \text{Grad}(z^{-1}A^XB^X) = n \Leftrightarrow 1$  ist mit zugehörigem Summanden von der Form  $\kappa(a + a^{-1})^2z^{n-1}$  für ein  $\kappa > 0$ . Wegen der 2-Brücken von  $s^{\bar{X}}$  und  $t^{\bar{X}}$  (beide sind nicht alternierend) ist  $z \Leftrightarrow \text{Grad}(z^{-1}A^{\bar{X}}B^{\bar{X}}) \leq n \Leftrightarrow 3$ , und alle anderen Summanden auf der rechten Seite der Summenformel für Knäuel sind ebenfalls von geringerem  $z$ -Grad als der Term  $z^{-1}A^XB^X$ . Somit folgt die Behauptung aus Satz 2.4.  $\square$

**Korollar 2.7** *Sind  $s$  und  $t$  lokal prime Knäuel, so ist  $N(s+t)$  prim und das Knäuel  $s+t$  lokal prim.*

**Beweis:** Da die Eigenschaft „prim“ unter Vertauschung von Über- und Unterkreuzungen erhalten bleibt, genügt es, die Aussage für den Fall zu zeigen, daß  $s+t$  alternierend ist. Dann folgt wegen Korollar 1.12 unmittelbar aus Lemma 2.6, daß  $N(s+t)$  prim ist. Da  $s$  und  $t$  nach Voraussetzung zusammenhängende Knäuel sind, ist auch  $s+t$  zusammenhängend und somit lokal prim.  $\square$

**Lemma 2.8**  *$s$  und  $t$  seien alternierende Knäuel mit jeweils mindestens zwei Kreuzungen, und die Summe der Kreuzungszahlen sei  $n$ . Ist  $s$  prim,  $t$  lokal prim und  $s+t$  nicht alternierend, dann gilt*

$$z\text{-Grad}(, N(s+t)) = n \Leftrightarrow 2,$$

und der zugehörige Summand des Kauffman-Polynoms ist von der Form

$$\begin{cases} (\kappa_1 a + \kappa_2 a^{-1})(a + a^{-1})z^{n-2} & \text{falls } t \text{ prim} \\ \kappa a^{\pm 1}(a + a^{-1})z^{n-2} & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } \kappa, \kappa_1, \kappa_2 > 0.$$

**Beweis:** Da  $s + t$  nicht alternierend ist, sind entweder  $s^X$  und  $t^{\bar{X}}$  beide alternierend oder  $s^{\bar{X}}$  und  $t^X$ . Wegen Lemma 1.6 a) genügt es, den ersten Fall zu betrachten. Da beide Knäuel aus jeweils mindestens zwei Kreuzungen bestehen und zusammenhängend sind, besitzen dann  $s^{\bar{X}}$  und  $t^X$  je eine 3-Brücke.

Hat  $s$  die Kreuzungszahl  $k \geq 2$ , so ergeben sich für die  $z$ -Grade der Kauffman-Polynome der zu  $s$  gehörigen Diagramme:

	$A^N$	$A^D$	$A^X$	$A^{\bar{X}}$
$s$ prim	$k \Leftrightarrow 1$	$k \Leftrightarrow 1$	$k$	$\leq k \Leftrightarrow 2$

$t$  besitzt  $n \Leftrightarrow k$  Kreuzungen, und für die  $z$ -Grade der Kauffman-Polynome der zugehörigen Diagramme folgt entsprechend:

	$B^N$	$B^D$	$B^X$	$B^{\bar{X}}$
$N(t)$ prim	$n \Leftrightarrow k \Leftrightarrow 1$	$\leq n \Leftrightarrow k \Leftrightarrow 1$	$\leq n \Leftrightarrow k \Leftrightarrow 2$	$n \Leftrightarrow k$
$D(t)$ prim	$\leq n \Leftrightarrow k \Leftrightarrow 1$	$n \Leftrightarrow k \Leftrightarrow 1$	$\leq n \Leftrightarrow k \Leftrightarrow 2$	$n \Leftrightarrow k$

Aus den beiden Tabellen läßt sich ersehen, daß alle Summanden auf der rechten Seite der Summenformel von Satz 2.4 einen kleineren  $z$ -Grad als  $n \Leftrightarrow 2$  besitzen bis auf die Terme:

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow a A^N B^N + a z^{-1} A^X B^N \Leftrightarrow a^{-1} A^D B^D + a^{-1} z^{-1} A^X B^D \\
 & = a B^N (\Leftrightarrow A^N + z^{-1} A^X) + a^{-1} B^D (\Leftrightarrow A^D + z^{-1} A^X) \\
 & = a B^N (A^D \Leftrightarrow z^{-1} A^{\bar{X}}) + a^{-1} B^D (A^N \Leftrightarrow z^{-1} A^{\bar{X}})
 \end{aligned}$$

Wegen  $z\text{-Grad}(, A^{\bar{X}}) \leq k \Leftrightarrow 2$  kommen als Summanden mit  $z$ -Grad  $n \Leftrightarrow 2$  also nur

$$a B^N A^D + a^{-1} B^D A^N$$

in Frage. Die Terme mit maximalem Exponenten der beiden Summanden sind von der Form  $\kappa_1 a (a + a^{-1})^2 z^{n-2}$  bzw.  $\kappa_2 a^{-1} (a + a^{-1})^2 z^{n-2}$  mit  $\kappa_1, \kappa_2 \geq 0$  und  $\kappa_1 + \kappa_2 > 0$ , wobei  $\kappa_1, \kappa_2$  genau dann beide positiv sind, wenn  $t$  prim ist.  $\square$

**Bemerkung:** Der Beweis von Lemma 2.8 zeigt, daß die Behauptung des Lemmas bereits gilt, wenn  $s$  und  $t$  lokal prime Knäuel sind, so daß  $N(s)$  und  $D(t)$  beide prim oder  $D(s)$  und  $N(t)$  beide prim sind.



Auch in Bezug auf das Klammerpolynom läßt sich eine Summenformel für Knäuel herleiten (und durch Einsetzen der Knäuel  $0, \infty$  beweisen):

$$\Leftrightarrow (A^4 + 1 + A^{-4})(A + B)^N = (A^2 + A^{-2})(A^N B^N + A^D B^D) + A^N B^D + A^D B^N$$

### 2.3 Rekursionsprinzip für rationale Knäuel

Neben der Summenformel für Knäuel ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Berechnung bestimmter Terme des Kauffman–Polynoms eines Verkettungsdiagramms, in dem rationale Knäuel vorkommen, das *Rekursionsprinzip für rationale Knäuel*. Dabei wird das Kauffman–Polynom induktiv *entlang den ganzzahligen Anteilen* eines rationalen Knäuels in Normalformgestalt berechnet, was im folgenden an einem Beispiel demonstriert werden soll.

Es sei  $r > 1$  ein rationales Knäuel in Normalformgestalt  $a_1 \dots a_s$  mit  $n \geq 2$  Kreuzungen gegeben. Dann läßt sich wie folgt zeigen, daß  $z\text{-Grad}(, N(r)) = n \Leftrightarrow 1$  und der zugehörige Summand von der Form  $(a + a^{-1})z^{n-1}$  ist.

Zeige die Behauptung zunächst mittels vollständiger Induktion für den Fall  $s = 1$ , d.h.  $r$  ist ein ganzzahliges Knäuel mit Normalform  $k \geq 2$ . Für  $k = 2$  liefert das Anwenden der Rekursionsformel für das Kauffman–Polynom an einer der beiden Kreuzungen (unter Benutzung von Reidemeister–Bewegungen I und II):

$$, N(2) = \Leftrightarrow, \circ \sqcup \circ + z(a + a^{-1}) = \Leftrightarrow \mu + (a + a^{-1})z$$

Für  $k \geq 3$  liefert die Rekursionsformel entsprechend (unter Benutzung von Reidemeister–Bewegungen I):

$$, N(k) = , D_+ = \Leftrightarrow, D_- + z(a^{k-1} + , N(k-1))$$

Da  $D_-$  eine 3–Brücke besitzt, ist nach Korollar 1.10  $z\text{-Grad}(, D_-) \leq k \Leftrightarrow 3$ , und die Behauptung folgt aus der Induktionsvoraussetzung.

Ist  $s \in \mathbb{N}$  beliebig, so zeige die Behauptung mittels vollständiger Induktion nach  $s$ . Der Induktionsanfang  $s = 1$  ist bereits gemacht, sei also  $s \geq 2$  und die Aussage für rationale Knäuel mit kürzerer Normalform gezeigt.

Der Induktionsschritt wird nun mit einer weiteren Induktion nach  $a_1 \geq 2$  gezeigt. Ist  $a_1 = 2$ , so liefert das rekursive Auflösen nach einer der beiden Kreuzungen von  $a_1$ :

$$, N(2a_2 \dots a_s) = , D_+ = \Leftrightarrow, D_- + z(a^{\pm 1}, N(a_2 \dots a_s) + , N((a_2+1)a_3 \dots a_s)),$$

wobei der Exponent von  $a$  positiv ist, falls  $s$  ungerade ist, und negativ, falls  $s$  gerade ist. Die Knäuel  $a_2 \dots a_s$  und  $(a_2 + 1)a_3 \dots a_s$  haben eine Normalformdarstellung von geringerer Länge als  $s$ , d.h. es ist  $z\text{-Grad}(, N(a_2 \dots a_s)) = n \Leftrightarrow 3$  (auch für  $a_2 \dots a_s = 1$  erfüllt) und  $z\text{-Grad}(, N((a_2+1)a_3 \dots a_s)) = n \Leftrightarrow 2$  nach Induktionsvoraussetzung der Induktion nach  $s$ , und wegen der 3-Brücke von  $D_-$  folgt die Aussage für den Fall  $a_1 = 2$ .

Ebenso ergibt sich die Behauptung im Induktionsschritt aus der Rekursionsformel

$$, N(ka_2 \dots a_s) = , D_+ = \Leftrightarrow, D_- + z(a^{\pm(k-1)}, N(a_2 \dots a_s) + , N((k-1)a_2 \dots a_s)) \quad \text{für } k \geq 3$$

– wiederum unter Berücksichtigung der 3-Brücke von  $D_-$ .



Analog zu diesem Beispiel lassen sich die folgenden beiden Lemmata beweisen:

**Lemma 2.9** *Ist  $B$  ein rationales Knäuel mit  $n \geq 2$  Kreuzungen in Normalformgestalt  $a_1 \dots a_s$  mit  $a_s \geq 1$  gegeben, so haben die Kauffman-Polynome von  $B^N, B^D, B^X$  und  $B^{\bar{X}}$  die folgende Gestalt:*

a)  $, B^N = (a + a^{-1})z^{n-1} + \dots$

b)  $, B^D = \begin{cases} a^{a_s}(a + a^{-1})z^{n-a_s-1} + \dots & \text{falls } s \geq 2 \\ a^n & \text{falls } s = 1 \end{cases}$

c)  $, B^{\bar{X}} = (a + a^{-1})z^n + \dots$

d)  $, B^X = \begin{cases} a^{-a_{s-1}}(a + a^{-1})z^{n-a_{s-1}-2} + \dots & \text{falls } s \geq 3 \text{ und } a_s = 1 \\ (a + a^{-1})z^{n-2} + \dots & \text{falls } s \geq 2 \text{ und } a_s > 1 \\ a^{-a_1} & \text{falls } s = 2 \text{ und } a_s = 1 \\ (a + a^{-1})z^{n-2} + \dots & \text{falls } s = 1 \text{ und } n \geq 3 \\ a^{-1} & \text{falls } n = 2 \end{cases}$

Dabei stehen die drei Punkte jeweils für Terme von niederem  $z$ -Grad.  $\square$

**Lemma 2.10** *Ist  $B$  ein rationales Knäuel mit  $n \geq 2$  Kreuzungen in Normalformgestalt  $a_1 \dots a_s 0$  mit  $a_s \geq 1$  gegeben, so haben die Kauffman-Polynome von  $B^N$ ,  $B^D$ ,  $B^X$  und  $B^{\bar{X}}$  die folgende Gestalt:*

$$\begin{aligned}
 a) \quad ,_{B^N} &= \begin{cases} a^{-a_s}(a + a^{-1})z^{n-a_s-1} + \dots & \text{falls } s \geq 2 \\ a^{-n} & \text{falls } s = 1 \end{cases} \\
 b) \quad ,_{B^D} &= (a + a^{-1})z^{n-1} + \dots \\
 c) \quad ,_{B^{\bar{X}}} &= (a + a^{-1})z^n + \dots \\
 d) \quad ,_{B^X} &= \begin{cases} a^{a_s-1}(a + a^{-1})z^{n-a_s-2} + \dots & \text{falls } s \geq 3 \text{ und } a_s = 1 \\ (a + a^{-1})z^{n-2} + \dots & \text{falls } s \geq 2 \text{ und } a_s > 1 \\ a^{a_1} & \text{falls } s = 2 \text{ und } a_s = 1 \\ (a + a^{-1})z^{n-2} + \dots & \text{falls } s = 1 \text{ und } n \geq 3 \\ a & \text{falls } n = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dabei stehen die drei Punkte jeweils für Terme von niederem  $z$ -Grad.  $\square$

**Bemerkung:** Die Lemmata 2.9 und 2.10 gelten entsprechend für negative rationale Knäuel unter Vertauschung von  $a$  und  $a^{-1}$  und von  $B^X$  und  $B^{\bar{X}}$ .

**Korollar 2.11** *Rationale Knäuel mit mindestens einer Kreuzung sind lokal prim.*

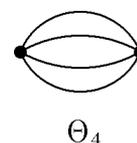
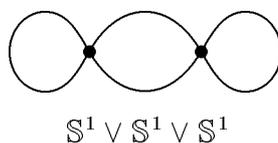
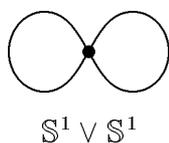
**Beweis:** Für Knäuel mit einer Kreuzung ist dies klar, und für ein Knäuel  $r$  mit  $n \geq 2$  Kreuzungen genügt es, die Aussage für alternierende Knäuel und somit für rationale Knäuel in Normalformgestalt zu zeigen. Nach den Lemmata 2.9 und 2.10 ist immer  $z\text{-Grad}(,_{N(r)}) = n \Leftrightarrow 1$  oder  $z\text{-Grad}(,_{D(r)}) = n \Leftrightarrow 1$ , und die Behauptung folgt mit Korollar 1.12.  $\square$

**Bemerkung:** Das Rekursionsprinzip für rationale Knäuel läßt sich auch zur Berechnung des Klammerpolynoms verwenden.

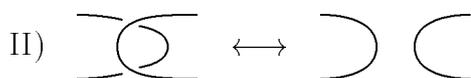
# Kapitel 3

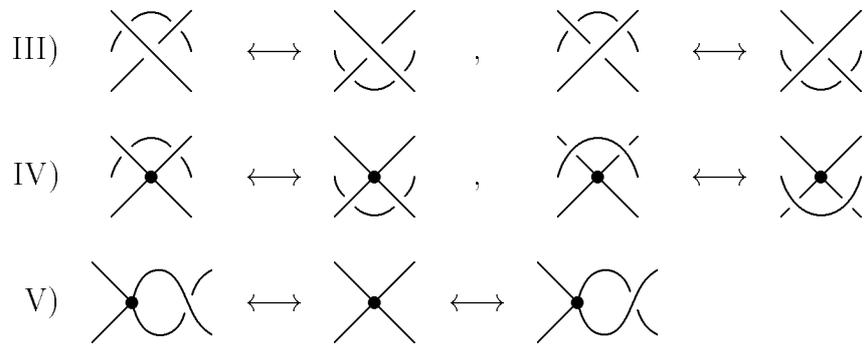
## Grapheninvarianten

Ein *topologischer Graph* ist ein eindimensionaler Zellenkomplex bestehend aus 0-Zellen  $v_1, \dots, v_k$  und 1-Zellen  $e_1, \dots, e_m$ . Dem topologischen Graphen entspricht ein *abstrakter Graph* mit Eckenmenge  $V = \{v_1, \dots, v_k\}$  und Kantenmenge  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ . Im folgenden werden *4-reguläre* Graphen betrachtet, d.h. jede Ecke des Graphen ist vom Grad 4, also zum Beispiel:



Ist  $G$  ein topologischer Graph, so ist ein *Graph  $\mathcal{G}$  in  $\mathbb{R}^3$*  das Bild einer Einbettung von  $G$  in  $\mathbb{R}^3$ . Zwei Graphen  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  in  $\mathbb{R}^3$  heißen *äquivalent*, wenn ein orientierungserhaltender Homöomorphismus  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $h(\mathcal{G}_1) = \mathcal{G}_2$  existiert. Einbettungen topologischer Graphen in  $\mathbb{R}^3$  lassen sich anhand von (regulären) Graphendiagrammen untersuchen. Zwei Graphendiagramme  $D$  und  $D'$  heißen *äquivalent*,  $D \sim D'$ , wenn sie sich durch eine endliche Anzahl der Reidemeister-Bewegungen I–V und einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus der Ebene auf sich ineinander umformen lassen:





Die Äquivalenzklasse von  $D$  wird mit  $[D]$  bezeichnet. Zwei Graphen in  $\mathbb{R}^3$  sind genau dann äquivalent, wenn sie äquivalente Diagramme besitzen (siehe [Kauf89], Th. 2.1, oder [Yett89], Th. 1.7).

Die Betrachtung von Graphen in  $\mathbb{R}^3$  stellt eine natürliche Verallgemeinerung der Knotentheorie dar, denn die 1-Sphäre  $\mathbb{S}^1$  läßt sich als 2-regulärer Graph auffassen – zum Beispiel in der Form:



Die Reidemeister-Bewegungen vom Typ IV bzw. V entsprechen an Ecken vom Grad 2 den Reidemeister-Bewegungen II bzw. I, d.h. die Äquivalenzklassen der Einbettungen von  $\mathbb{S}^1$  als Graph in  $\mathbb{R}^3$  entsprechen denen der Knotentheorie. Da das Hinzufügen oder Weglassen von Ecken vom Grad 2 in diesem Sinne den Typ des Graphen in  $\mathbb{R}^3$  nicht ändert, wird im folgenden die Möglichkeit zugelassen, daß die betrachteten Graphen auch Ecken vom Grad 2 besitzen. Alle Graphen, die ausschließlich Ecken vom Grad 2 und 4 haben, werden daher als 4-regulär (im topologischen Sinne) bezeichnet, und in dieser Sprechweise ist  $\mathbb{S}^1$  ein 4-regulärer Graph mit 0 Ecken vom Grad 4.

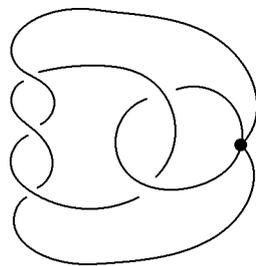
Im weiteren werden in der Regel *planare* Graphen betrachtet, d.h. solche Graphen, die eine kreuzungsfreie Einbettung in die Ebene zulassen. Ist  $\mathcal{G}$  ein Graph in  $\mathbb{R}^3$  und  $D$  ein kreuzungsfreies Diagramm von  $\mathcal{G}$ , so ist  $D$  bis auf Äquivalenz von Graphendiagrammen eindeutig bestimmt (folgt aus [Lip90], Cor. 6) und heißt *triviales Diagramm* von  $\mathcal{G}$ . Besitzt  $\mathcal{G}$  ein triviales Diagramm, so ist daher auch  $\mathcal{G}$  bis auf Äquivalenz von Graphen in  $\mathbb{R}^3$  eindeutig bestimmt und heißt *trivialer Graph* (siehe auch [Mason69]). Es sei an

dieser Stelle erwähnt, daß sämtliche hier besprochenen Invarianten ebenfalls für nicht planare Graphen erklärt sind.

Bisher konnten rekursiv definierte Polynomvarianten von Verkettungsdiagrammen wie Klammer- und Kauffman-Polynom meist nur unter Einschränkungen auf Graphendiagramme verallgemeinert werden, z.B. für Graphen, bei denen jede Ecke nicht mehr als drei Kanten besitzt (siehe z.B. [Yama89]), oder für andere Äquivalenzrelationen von Graphendiagrammen (siehe z.B. [Jon91] oder [Kauf92]). Kürzlich ist es gelungen, den Ansatz von Yamada auf beliebige Graphen zu erweitern ([Yoko96]).

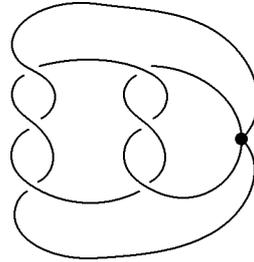
### 3.1 Elementare Grapheninvarianten

Zu einem Graphen  $\mathcal{G}$  in  $\mathbb{R}^3$  können aus der Menge der in  $\mathcal{G}$  enthaltenen Teilgraphen Invarianten gewonnen werden. So besitzt ein  $\Theta_4$ -Graph die Menge der vier  $\Theta_3$ -Graphen, die durch Weglassen je einer der vier Kanten des  $\Theta_4$ -Graphen entstehen, als Invariante, und der *Achtergraph*  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  die beiden Knoten, die jeweils durch Weglassen einer der beiden Schleifen gebildet werden. Mit diesen Invarianten lassen sich im speziellen Fall schon Aussagen über den eingebetteten Graphen machen. Es werde zum Beispiel das folgende Diagramm eines Achtergraphen in  $\mathbb{R}^3$  betrachtet:



Der Graph enthält eine Kleeblattschlinge und ist daher nicht trivial. Diese Art der Argumentation versagt allerdings schon in einfachen Fällen, wie das

folgende Diagramm zeigt:

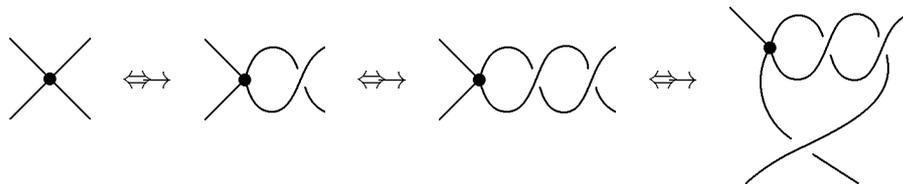


Die beiden im Graphen enthaltenen Knoten sind trivial, und es läßt sich daher mit Hilfe dieser Invarianten nicht entscheiden, ob das Diagramm äquivalent zu einem trivialen Graphendiagramm des Achtergraphen ist. Ein nicht trivialer planarer Graph, der nur triviale Teilgraphen besitzt, heißt *minimal verknotet* (siehe [Sim90], [Scharl91]). Mit den im nächsten Abschnitt beschriebenen Grapheninvarianten läßt sich zeigen, daß der durch obiges Diagramm dargestellte Graph in der Tat nicht trivial ist.

### 3.2 Weitere Grapheninvarianten

Rekursiv definierte Polynom invarianten wie das Yamada–Polynom lassen sich nicht ohne weiteres auf Graphen mit Ecken vom Grad größer als drei erweitern, so daß sie invariant unter allen fünf Reidemeister–Bewegungen bleiben. Die Schwierigkeiten bei einer solchen Verallgemeinerung liegen in der Invarianz unter der Reidemeister–Bewegung V.

Betrachtet man die Anwendung mehrerer Reidemeister–Bewegungen vom Typ V an einer Ecke, so fällt die Ähnlichkeit der entstehenden Verdrillungen mit der Bauart rationaler Knäuel auf:



Diese Beobachtung motiviert die Definition der Invarianten, die im Verlaufe des Abschnitts vorgestellt werden.

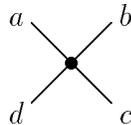
Im folgenden werden stets Einbettungen eines (im erweiterten Sinne) 4–regulären Graphen mit  $k \geq 1$  Ecken vom Grad vier in  $\mathbb{R}^3$  betrachtet. Ist  $D$

Diagramm eines Graphen in  $\mathbb{R}^3$ , so bezeichne  $V(D)$  die Bildmenge der Ecken vom Grad vier in der Ebene.

**Definition** (i) Ein *numeriertes Graphendiagramm* ist ein Paar  $(D, \omega)$  bestehend aus einem Graphendiagramm  $D$  und einer Bijektion  $\omega : \{1, \dots, k\} \rightarrow V(D)$ .

(ii) Zwei numerierte Graphendiagramme  $(D_1, \omega_1)$  und  $(D_2, \omega_2)$  heißen *äquivalent (als numerierte Graphendiagramme)*, falls ein orientierungserhaltender Homöomorphismus  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  existiert, so daß  $h(D_1) = D_2$  und  $h \circ \omega_1 = \omega_2$  ist.

(iii)  $D$  sei ein numeriertes Graphendiagramm. Eine *Orientierung* einer Ecke  $v_i$  vom Grad vier in  $D$  ist gegeben durch eine Markierung der an  $v_i$  grenzenden Kantenstücke mit  $a, b, c, d$ , wobei die Buchstaben alphabetisch im Uhrzeigersinn angeordnet sein sollen, d.h. die Orientierung der Ecke ist durch die Bezeichnung eines Kantenstückes mit dem Buchstaben  $a$  bereits eindeutig festgelegt:

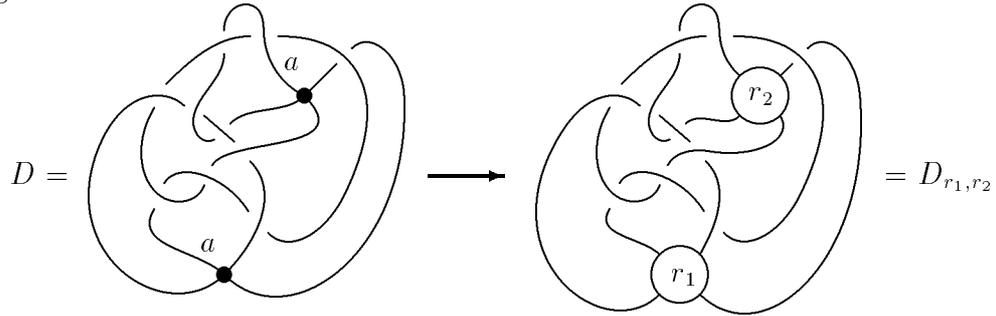


Ein numeriertes Graphendiagramm, in dem jede Ecke vom Grad vier orientiert ist, heißt *eckenorientiertes Graphendiagramm*.

### Bemerkungen:

1. Die Numerierung der Ecken vom Grad vier eines numerierten Graphendiagramms erfolgt im weiteren Text meist implizit durch die Beschreibung der Menge  $V(D)$  in der Form  $\{v_1, \dots, v_k\}$ , ohne daß die Abbildung  $\omega$  erwähnt wird.
2. Die Einführung des Begriffes „Eckenorientierung“ hat rein technische Gründe. Daher wurde auf die (naheliegende) Definition einer Äquivalenzrelation zwischen eckenorientierten Graphendiagrammen verzichtet.

**Definition** Ist  $D$  ein eckenorientiertes Graphendiagramm eines Graphen mit  $k$  Ecken vom Grad vier und sind  $r_1, \dots, r_k \in \mathcal{K} \cup \{\bullet\}$ , so bezeichne  $D_{r_1, \dots, r_k}$  das Graphendiagramm, welches durch Ersetzen einer kleinen Umgebung der Ecke  $v_i$  durch das rationale Knäuel  $r_i$  für jedes  $i$  mit  $r_i \neq \bullet$  entsteht, wobei beim Ersetzen einer Ecke die gegebene Eckenorientierung berücksichtigt wird:



Für eine Teilmenge  $I$  von  $\{1, \dots, k\}$  mit  $|I| \geq 0$  Elementen definiere

$$\mathcal{L}^I(D) := \{[D_{r_1, \dots, r_k}] \mid r_j \in \mathcal{K}, \text{ falls } j \in I; r_j = \bullet, \text{ falls } j \notin I\},$$

wobei die eckigen Klammern Äquivalenzklassen von Graphendiagrammen ohne Eckennumerierung bezeichnen. Es sei speziell:

$$\mathcal{L}(D) := \mathcal{L}^{\{1, \dots, k\}}(D)$$

Dann gilt:

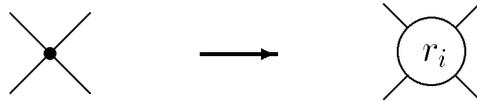
**Satz 3.1** *Es sei  $D$  ein numeriertes Graphendiagramm mit einer beliebigen Eckenorientierung.*

- $\mathcal{L}^I(D)$  ist eine (wohldefinierte) Invariante numerierter Graphendiagramme, d.h.  $\mathcal{L}^I(D)$  ist unabhängig von der Eckenorientierung des Diagramms, und sind  $D$  und  $D'$  äquivalent als numerierte Graphendiagramme, so gilt  $\mathcal{L}^I(D) = \mathcal{L}^I(D')$ .
- $\mathcal{L}(D)$  ist eine (wohldefinierte) Invariante von Graphendiagrammen, d.h.  $\mathcal{L}(D)$  ist unabhängig von der Eckennumerierung und -orientierung des Diagramms, und sind  $D$  und  $D'$  äquivalente Graphendiagramme, so gilt  $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D')$ .

**Beweis:**

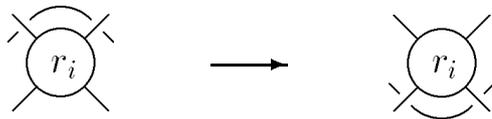
zu a):

Es sei  $[D_{r_1, \dots, r_k}] \in \mathcal{L}^I(D)$  beliebig. Das Diagramm  $D_{r_1, \dots, r_k}$  entsteht aus  $D$ , indem eine kleine Umgebung einer Ecke  $v_i$  für  $i \in I$  durch ein Knäueldiagramm ersetzt wird:

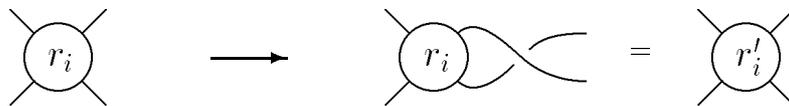


Eine Änderung der Eckenorientierung an der Ecke  $v_i$  läßt wegen Lemma 2.2 entweder  $r_i$  unverändert oder entspricht dem Übergang von  $r_i$  zu dem rationalen Knäuel  $r'_i := \overline{r_i \bar{0}}$ .

$D$  läßt sich durch endlich viele Reidemeister-Bewegungen I–V in das Diagramm  $D'$  überführen. Diese Sequenz von Umformungen kann auf das Graphendiagramm  $D_{r_1, \dots, r_k}$  angewendet werden, indem jede Reidemeister-Bewegung IV durch eine Sequenz von Reidemeister-Bewegungen III ersetzt wird, so daß



und jede Reidemeister-Bewegung V ersetzt wird durch eine Umformung vom Typ



Die letztgenannte Umformung entspricht also dem Austauschen des rationalen Knäuels  $r_i$  durch das ebenfalls rationale Knäuel  $r'_i$ .

Die gesamte Sequenz von Umformungen des Diagramms  $D_{r_1, \dots, r_k}$  oder das Ändern der Eckenorientierung führt somit zu einem Diagramm  $D_{s_1, \dots, s_k}$  mit  $[D_{s_1, \dots, s_k}] \in \mathcal{L}(D')$  für rationale Knäuel  $s_1, \dots, s_k$ ; d.h.  $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D')$ . Analog ergibt sich die umgekehrte Inklusion, also die Gleichheit.

zu b):

Ist  $[D_{r_1, \dots, r_k}] \in \mathcal{L}(D)$ , so entsteht das Diagramm  $D_{r_1, \dots, r_k}$  aus  $D$ , indem eine kleine Umgebung einer jeden Ecke  $v_1, \dots, v_k$  durch ein rationales Knäuel ersetzt wird. Eine Änderung der Eckennumerierung entspricht dem Übergang von  $D_{r_1, \dots, r_k}$  zu dem Diagramm  $D_{r_{\sigma(1)}, \dots, r_{\sigma(k)}}$  für eine Permutation  $\sigma$  auf  $\{1, \dots, k\}$ . Da mit  $[D_{r_1, \dots, r_k}]$  aber auch jedes  $[D_{r_{\sigma(1)}, \dots, r_{\sigma(k)}}]$  ein Element von  $\mathcal{L}(D)$  ist, folgt die Behauptung zusammen mit Teil a).  $\square$

**Beispiel:**  $D$  sei ein Diagramm des trivialen Achtergraphen in  $\mathbb{R}^3$  und eine Eckenorientierung so gewählt, daß das Einsetzen eines rationalen Knäuels  $r$  wie abgebildet geschieht:

$$D = \text{Achterknoten} \iff \text{Achterknoten mit Knäuel } r = D_r$$

Ist  $r$  ein ganzzahliges Knäuel  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , so ist  $[D_r] = [D_0]$  (Anwendung von Reidemeister-Bewegungen I). Ist  $r$  in Normalformgestalt  $a_1 \dots a_{s+1}$  mit  $s \geq 1$  und  $a_{s+1} \neq 0$ , so ergibt sich ebenfalls durch Anwendung von Reidemeister-Bewegungen I, daß  $[D_r] = [D_{a_1 \dots a_s 0}]$  gilt. Liegt  $r$  dagegen in der Menge

$$\mathcal{R} := \{a_1 \dots a_s 0 \mid a_1 \dots a_s 0 \text{ Normalformgestalt}\} \cup \{0, \infty\},$$

so ist  $D_r$  in minimaler Darstellung, denn nach Lemma 2.10 ist  $z\text{-Grad}(D_r) = \#r \Leftrightarrow 1$  für  $r \neq 0, \infty$ . Daher gilt:

$$\mathcal{L}(D) = \{[D_r] \mid r \in \mathcal{R}\}$$

★

Aus der – etwas unhandlichen – Invarianten  $\mathcal{L}^I(D)$  soll nun eine weitere Invariante von Graphendiagrammen abgeleitet werden. Die zu den Diagrammen  $D_{r_1, \dots, r_k}$  gehörigen Knoten bzw. Verkettungen unterscheiden sich elementar – eventuell schon durch die Anzahl ihrer Komponenten – voneinander, wenn die  $r_1, \dots, r_k$  aus verschiedenen der Klassen  $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_\infty, \mathcal{K}_1$  sind. Ist z.B.  $k = 1$ , so entstehen durch Einsetzen von rationalen Knäueln aus den genannten Klassen in zwei Fällen Knoten und in einem eine Verkettung aus

zwei Komponenten. Daher erscheint es natürlich, zu  $i_1, \dots, i_k \in \{0, \infty, 1, \bullet\}$  die Teilmengen

$$\mathcal{L}^{i_1, \dots, i_k}(D) := \{[D_{r_1, \dots, r_k}] \mid r_j \in \mathcal{K}_{i_j}, \text{ falls } i_j \neq \bullet; r_j = \bullet, \text{ falls } i_j = \bullet\}$$

von  $\mathcal{L}(D)$  zu betrachten. Ist dann

$$m_{i_1, \dots, i_k} := \min\{\#\tilde{D} \mid [\tilde{D}] = [D_{r_1, \dots, r_k}] \in \mathcal{L}^{i_1, \dots, i_k}(D)\},$$

so definiere weiter:

$$\mathcal{L}_{\min}^{i_1, \dots, i_k}(D) := \{[D_{r_1, \dots, r_k}] \in \mathcal{L}^{i_1, \dots, i_k}(D) \mid \#\tilde{D} = m_{i_1, \dots, i_k} \text{ für ein } \tilde{D} \in [D_{r_1, \dots, r_k}]\}$$

Definiert man für  $I \subset \{1, \dots, k\}$  das ungeordnete(!)  $3^{|I|}$ -Tupel

$$\mathcal{L}_{\min}^I(D) := (\mathcal{L}_{\min}^{i_1, \dots, i_k}(D))_{i_j},$$

wobei  $i_j \in \{0, \infty, 1\}$ , falls  $j \in I$ , und  $i_j = \bullet$ , falls  $j \notin I$ , gelte, und

$$\mathcal{L}_{\min}(D) := \mathcal{L}_{\min}^{\{1, \dots, k\}}(D),$$

so erhält man weitere Invarianten:

**Satz 3.2** *Es sei  $D$  ein numeriertes Graphendiagramm mit einer beliebigen Eckenorientierung.*

- a)  $\mathcal{L}_{\min}^I(D)$  ist eine (wohldefinierte) Invariante numerierter Graphendiagramme, d.h.  $\mathcal{L}_{\min}^I(D)$  ist unabhängig von der Eckenorientierung des Diagramms, und sind  $D$  und  $D'$  äquivalent als numerierte Graphendiagramme, so gilt  $\mathcal{L}_{\min}^I(D) = \mathcal{L}_{\min}^I(D')$ .
- b)  $\mathcal{L}_{\min}(D)$  ist eine (wohldefinierte) Invariante von Graphendiagrammen, d.h.  $\mathcal{L}_{\min}(D)$  ist unabhängig von der Eckennumerierung und -orientierung des Diagramms, und sind  $D$  und  $D'$  äquivalente Graphendiagramme, so gilt  $\mathcal{L}_{\min}(D) = \mathcal{L}_{\min}(D')$ .

**Beweis:**  $\mathcal{L}_{\min}^I(D)$  besteht aus allen Mengen  $\mathcal{L}_{\min}^{i_1, \dots, i_k}(D)$  mit  $i_j \in \{0, \infty, 1\}$  für  $j \in I$  und  $i_j = \bullet$  sonst. Die Änderung der Eckenorientierung an einer Ecke  $v_j$  mit  $j \in I$  entspricht dem Ersetzen von  $i_j$  durch ein  $i'_j \in \{0, \infty, 1\}$ . Durchläuft  $i_j$  alle Werte aus  $\{0, \infty, 1\}$ , so durchläuft auch  $i'_j$  alle diese Werte. Daher ist  $\mathcal{L}_{\min}^I(D)$  unabhängig von der gegebenen Eckenorientierung. Der Rest der Behauptung folgt mit Satz 3.1. □

**Definition** Für  $I \subset \{1, \dots, k\}$  mit  $|I| = i \in \mathbb{N}_0$  heißen die Mengen  $\mathcal{L}^I(D)$  und  $\mathcal{L}_{min}^I(D)$  Invarianten  $i$ -ter Stufe.

**Bemerkung:** Die Invarianten 0. Stufe eines Diagramms  $D$  entsprechen jeweils der Äquivalenzklasse von  $D$ :

$$\mathcal{L}^\emptyset(D) = \{[D]\} \quad , \quad \mathcal{L}_{min}^\emptyset(D) = (\{[D]\})$$

**Beispiele:**

1. Ist  $D$  das Diagramm eines trivialen Achtergraphen, so gilt:

$$\mathcal{L}_{min}(D) = (\{[\bigcirc]\}, \{[\bigcirc]\}, \{[\bigcirc \sqcup \bigcirc]\})$$

2. Das Diagramm eines Achtergraphen in  $\mathbb{R}^3$  sei von der Form:

$$\begin{array}{l}
 D = \text{Diagramm 1} = \text{Diagramm 2} \# \text{Diagramm 3} \\
 \Leftrightarrow D_r = \text{Diagramm 4} \# \text{Diagramm 5}
 \end{array}$$

Außerdem sei  $D(t)$  alternierend und reduziert mit  $n$  Kreuzungen. Ersetzen der Ecke durch eines der rationalen Knäuel aus  $\mathcal{R} := \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  liefert jeweils ein Verkettungsdiagramm mit  $n$  Kreuzungen (evtl. nach Anwendung von Reidemeister-Bewegungen I), und die Menge  $\mathcal{R}$  enthält Elemente aus allen dreien der rationalen Knäuelklassen.

Andererseits ist nach Korollar 1.13  $K(D(t)) = n$ , und nach Lemma 2.10 ist  $K(D(r)) = \#r$  für  $r \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{R}$ . Somit gilt

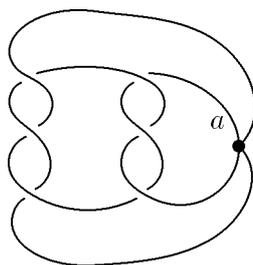
$$K(D(t) \# D(r)) = K(D(t)) + K(D(r)) = n + \#r \geq n + 1,$$

d.h. jedes zu  $D(t) \# D(r)$  äquivalente Diagramm besitzt mindestens  $n+1$  Kreuzungen. Insgesamt folgt:

$$\mathcal{L}_{min}(D) = (\{[D(t)]\}, \{[D(t)]\}, \{[D(t) \sqcup \bigcirc]\})$$

An dem Wert von  $\mathcal{L}_{min}(D)$  läßt sich unmittelbar ablesen, daß  $D$  in minimaler Darstellung ist. Denn ist  $D'$  ein Graphendiagramm mit  $n'$  Kreuzungen und  $D \sim D'$ , so besitzen  $D'_0$  und  $D'_\infty$  jeweils  $n'$  Kreuzungen. Da sämtliche Diagramme aus  $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D')$  mindestens  $n$  Kreuzungen besitzen, muß  $n' \geq n$  gelten.

3. Es sei  $D$  das Graphendiagramm von Seite 46:

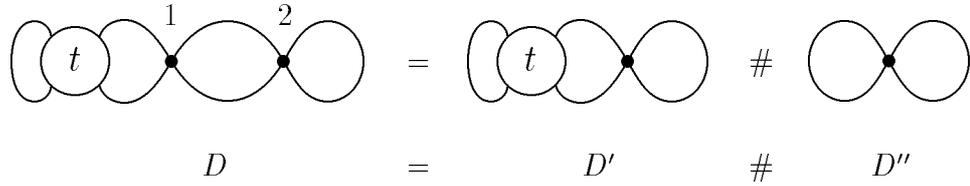


Mit der Summenformel für Knäuel läßt sich zeigen, daß  $z\text{-Grad}(, D_r) \geq 6$  für  $r \in \mathcal{K} \setminus \{0, \infty, 1, \bar{1}, 2\}$  gilt, d.h. die minimale Kreuzungszahl der zugehörigen Verkettung ist mindestens 7. Einsetzen der übrigen rationalen Knäuel ergibt, daß  $[D_\infty] = 3_1 \# 3_1$ ,  $[D_0] = 6_1^2$ ,  $[D_1] = \bar{3}_1$ ,  $[D_{\bar{1}}] = 7_4$  und  $[D_2] = 6_3^2$  gilt (alle Bezeichnungen von Verkettungen, die hier mit den Äquivalenzklassen von Verkettungsdiagrammen identifiziert werden, gehen auf die Tabellen in [Rolf76] zurück). Es folgt:

$$\mathcal{L}_{min}(D) = ( \{3_1 \# 3_1\}, \{6_1^2, 6_3^2\}, \{\bar{3}_1\} )$$

Ist  $D'$  ein Diagramm mit  $n'$  Kreuzungen und  $D \sim D'$ , so besitzen  $D'_0$  und  $D'_\infty$  jeweils  $n'$  Kreuzungen. Da 0 und  $\infty$  aus zwei verschiedenen der drei Klassen rationaler Knäuel sind und  $\mathcal{L}_{min}(D) = \mathcal{L}_{min}(D')$  in zwei der drei Einträge ausschließlich Diagramme mit mindestens 6 Kreuzungen enthält, ist  $n' \geq 6$  und somit  $D$  in minimaler Darstellung. Insbesondere ist das Graphendiagramm  $D$  nicht äquivalent zum trivialen Diagramm des Achtergraphen (vgl. Beispiel auf Seite 46).

4. Es sei  $D$  das folgende numerierte Graphendiagramm eines Graphen  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  in  $\mathbb{R}^3$ :



$D(t)$  sei alternierend und reduziert mit  $n \geq 1$  Kreuzungen. Dann folgt wie in Beispiel 2, daß für die Invarianten 1. Stufe gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{min}^{\{1\}}(D) &= (\{[D(t)\#D'']\}, \{[D(t)\#D'']\}, \{[D(t)\sqcup D'']\}) \\ &= (\{[D']\}, \{[D']\}, \{[D(t)\sqcup D'']\}) \end{aligned}$$

und

$$\mathcal{L}_{min}^{\{2\}}(D) = (\{[D']\}, \{[D']\}, \{[D'\sqcup \circ]\})$$

Es ist  $[D'\sqcup \circ] \neq [D(t)\sqcup D'']$ , was zum Beispiel an den Verkettungen, die jeweils durch Weglassen einer Schleife des Achtergraphen entstehen, zu sehen ist. Somit gilt auch  $\mathcal{L}_{min}^{\{1\}}(D) \neq \mathcal{L}_{min}^{\{2\}}(D)$ , d.h. ist  $\tilde{D}$  das Diagramm, welches aus  $D$  durch Vertauschung der Nummern 1 und 2 entsteht, so sind  $D$  und  $\tilde{D}$  nicht äquivalent als numerierte Graphendiagramme.

Die Invariante 2. Stufe ist von der Form:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{min}(D) &= (\{[D(t)]\}, \{[D(t)]\}, \{[D(t)]\}, \{[D(t)]\}, \{[D(t)\sqcup \circ]\}, \\ &\quad \{[D(t)\sqcup \circ]\}, \{[D(t)\sqcup \circ]\}, \{[D(t)\sqcup \circ]\}, \\ &\quad \{[D(t)\sqcup \circ \sqcup \circ]\}) \end{aligned}$$

### 3.3 Eigenschaften von Graphen in $\mathbb{R}^3$ und deren Diagrammen

**Definition** Es sei  $\mathcal{G}$  ein Graph in  $\mathbb{R}^3$  mit  $k \geq 0$  Ecken vom Grad vier. Dann heißt ein Diagramm  $D$  von  $\mathcal{G}$

- (i) *prim*, falls bezüglich einer beliebigen Eckenorientierung  $D_{r_1, \dots, r_k}$  prim ist für jede Wahl von  $r_i \in \{0, \infty\}$  mit  $i = 1, \dots, k$ ;

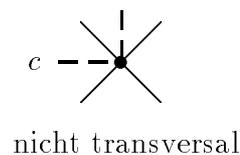
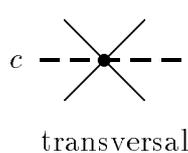
- (ii) *zusammengesetzt*, falls  $D$  zusammenhängend und nicht prim ist;
- (iii) *reduziert*, falls bezüglich einer beliebigen Eckenorientierung  $D_{r_1, \dots, r_k}$  reduziert ist für jede Wahl von  $r_i \in \{0, \infty\}$  mit  $i = 1, \dots, k$ ;
- (iv) *alternierend*, falls bezüglich einer beliebigen Eckenorientierung  $D_{r_1, \dots, r_k}$  alternierend ist für jede Wahl von  $r_i \in \{0, \infty\}$  mit  $i = 1, \dots, k$ .

### Bemerkungen:

1. Ein primes Graphendiagramm ist zusammenhängend.
2. Ist  $D$  zusammenhängendes Diagramm eines Graphen in  $\mathbb{R}^3$  mit  $k$  Ecken vom Grad vier und  $r_1, \dots, r_k \in \{0, \infty\}$ , so ist (bezüglich einer gegebenen Eckenorientierung) das Verkettungsdiagramm  $D_{r_1, \dots, r_k}$  genau dann nicht prim, wenn es nicht zusammenhängend ist oder wenn es zusammengesetzt ist. Daher ist  $D$  genau dann zusammengesetzt, wenn eine einfach geschlossene Kurve  $c$  in  $\mathbb{R}^2$  existiert, so daß einer der beiden folgenden Fälle eintritt:

- $c$  schneidet  $D$  genau in  $m \geq 1$  Ecken „transversal“, so daß jede der beiden Komponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus c$  nicht leeren Schnitt mit  $D$  hat.
- $c$  schneidet  $D$  in genau zwei Punkten, welche keine Ecken des Graphen sind, und in  $m \geq 0$  Ecken des Graphen transversal, so daß jede der beiden Komponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus c$  Kreuzungen oder Ecken von  $D$  enthält.

Dabei bedeutet „transversaler Schnitt mit einer Ecke“, daß nach Ersetzen der Ecke durch das Knäuel 1 die Kurve  $c$  jeden der beiden Stränge des Knäuels transversal in genau einem Punkt schneidet:



Mit dieser Charakterisierung lassen sich in naheliegender Weise die Definitionen „prim“ bzw. „zusammengesetzt“ von Graphendiagrammen auf Graphen in  $\mathbb{R}^3$  übertragen, siehe die Definition „prim“ bzw. „zusammengesetzt“ für Verkettungen. Im weiteren wird die Begriffsbildung jedoch nur für Graphendiagramme benötigt.

**Definition** Ein zusammenhängendes Graphendiagramm  $D$  heißt *zusammengesetzt als Graphendiagramm*,  $D = D' \# D''$ , falls eine einfach geschlossene Kurve  $c$  in  $\mathbb{R}^2$  existiert, die  $D$  in genau zwei Punkten, welche keine Ecken des Graphen sind, transversal schneidet, so daß jede der beiden Komponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus c$  Kreuzungen oder Ecken von  $D$  enthält; andernfalls heißt  $D$  *prim als Graphendiagramm*.

**Bemerkungen:**

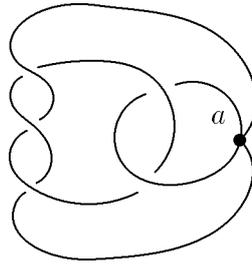
1. Ein primes Graphendiagramm ist auch prim als Graphendiagramm.
2. Ein Graphendiagramm, das zusammengesetzt als Graphendiagramm ist, ist zusammengesetzt.
3. Für den Fall, daß der betrachtete Graph in  $\mathbb{R}^3$  keine Ecken vom Grad vier besitzt, fallen die Eigenschaften „prim“ und „prim als Graphendiagramm“ bzw. „zusammengesetzt“ und „zusammengesetzt als Graphendiagramm“ zusammen und entsprechen den bekannten Begriffen der Knotentheorie. Warum die auf den ersten Blick ungewöhnlichen Definitionen der Eigenschaften „prim“ bzw. „zusammengesetzt“ sinnvoll sind, wird sich an späterer Stelle zeigen, wenn es darum geht, Satz 1.5 auf Graphendiagramme zu verallgemeinern.

**Beispiele**

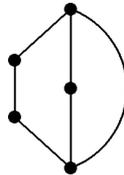
1. Das triviale Diagramm eines Graphen  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  in  $\mathbb{R}^3$  ist zusammengesetzt als Graphendiagramm:



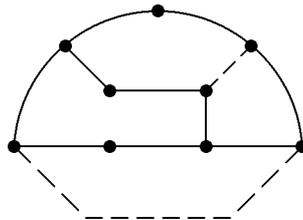
2. Das Diagramm



eines Achtergraphen in  $\mathbb{R}^3$  ist zusammengesetzt, da  $D_\infty = 3_1 \# 2_1^2$  zusammengesetzt ist.  $D$  ist aber prim als Graphendiagramm, weil  $D_1$  prim ist, denn der zum Knotendiagramm gehörige Graph ist 2-zusammenhängend, da je zwei verschiedene Kanten auf einem Zyklus liegen (Lemma 1.15):



3. Das Diagramm eines  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ -Graphen auf Seite 48 ist prim, da die Verkettungsdiagramme  $D_{0,0}$ ,  $D_{0,\infty}$ ,  $D_{\infty,0}$ ,  $D_{\infty,\infty}$  jeweils prim sind. Denn die zu den Diagrammen gehörigen Graphen, die aus dem abgebildeten durch Weglassen oder Zusammenziehen der gestrichelten Kanten entstehen, sind 2-zusammenhängend, da je zwei verschiedene Kanten auf einem Zyklus liegen:



**Lemma 3.3** *Es sei  $\mathcal{G}$  ein Graph in  $\mathbb{R}^3$  mit  $k \geq 1$  Ecken vom Grad vier und  $D$  ein eckenorientiertes Diagramm von  $\mathcal{G}$ . Dann gilt:*

- a)  *$D$  ist genau dann prim als Graphendiagramm, wenn  $D_{1,\dots,1}$  prim ist.*
- b) *Ist  $D$  prim, so ist jedes Diagramm  $D_{r_1,\dots,r_k}$  mit rationalen Knäueln  $r_1, \dots, r_k$  in Normalformgestalt prim.*
- c) *Ist  $D$  prim und reduziert, so ist jedes  $D_{r_1,\dots,r_k}$  mit rationalen Knäueln  $r_1, \dots, r_k$  in Normalformgestalt prim und reduziert.*

**Beweis:** Teil a) ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Begriffes „prim als Graphendiagramm“, und die Teile b), c) folgen induktiv aus Korollar 2.7.  $\square$

**Lemma 3.4** *Es sei  $\mathcal{G}$  ein Graph in  $\mathbb{R}^3$  mit  $k \geq 1$  Ecken vom Grad vier und  $D$  ein eckenorientiertes Diagramm von  $\mathcal{G}$  mit  $n \geq 0$  Kreuzungen. Existieren  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{0, \infty\}$ , so daß  $D_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k}$  reduziert, alternierend und prim ist, so ist  $D$  ein alternierendes Graphendiagramm.*

**Beweis:** Da für den Fall  $n = 0$  nichts zu zeigen ist, wird im weiteren  $n \geq 1$  angenommen. Ist  $D = D' \# D''$ , so daß  $D''$  ein kreuzungsfreies Graphendiagramm mit mindestens einer Ecke ist, so ist  $D$  genau dann alternierend, wenn  $D'$  alternierend ist. Im folgenden kann daher ohne Einschränkung vorausgesetzt werden, daß  $D$  nicht von dieser Form ist. Zeige nun mittels vollständiger Induktion nach  $k$ , daß  $\mu_1, \dots, \mu_k \in \{1, \bar{1}\}$  existieren, so daß  $D_{\mu_1, \dots, \mu_k}$  ein reduziertes, alternierendes, primes Verkettungsdiagramm ist.

Sei also zunächst  $k = 1$ . Die Rekursionsformel für das Kauffman–Polynom liefert:

$$z \cdot D_1 + D_{\bar{1}} = z(D_0 + D_\infty)$$

Nach Voraussetzung ist  $D_0$  oder  $D_\infty$  reduziert, alternierend und prim, und beide Diagramme sind zusammenhängend, denn andernfalls ließe sich  $D$  darstellen in der Form  $D = D' \# D''$ , so daß  $D''$  ein triviales Achtergraphendiagramm ist – im Widerspruch zur Voraussetzung. Nach Satz 1.11 besitzt daher das Polynom auf der rechten Seite der Gleichung den  $z$ -Grad  $n$ , denn die Koeffizienten von  $z^{n-1}$  der zu  $D_0$  bzw.  $D_\infty$  gehörigen Kauffman–Polynome sind von der Form  $\kappa_0(a + a^{-1})$  bzw.  $\kappa_\infty(a + a^{-1})$  mit  $\kappa_0, \kappa_\infty \geq 0$  und  $\kappa_0 + \kappa_\infty > 0$  (nach Satz 1.11 und Korollar 1.12 sind  $\kappa_0$  und  $\kappa_\infty$  insbesondere nicht negativ, da  $D_0$  und  $D_\infty$  beide zusammenhängend sind). Da  $D_0$  und  $D_\infty$  zusammenhängend sind und  $n \geq 1$  gilt, besitzt entweder  $D_1$  oder  $D_{\bar{1}}$  eine 2–Brücke, und das zugehörige Kauffman–Polynom ist nach Satz 1.9 von kleinerem  $z$ -Grad als  $n$ . Wähle  $\mu_1 \in \{1, \bar{1}\}$  so, daß  $D_{\mu_1}$  keine 2–Brücke hat. Dann ist  $z\text{-Grad}(D_{\mu_1}) = n$ , und mit Korollar 1.12 folgt die Behauptung für den Fall  $k = 1$ .

Sei nun  $k \geq 2$  und die Behauptung für Graphen mit höchstens  $k \Leftrightarrow 1$  Ecken gezeigt. Nach Voraussetzung existieren  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{0, \infty\}$ , so daß  $D_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k}$  reduziert, alternierend, prim ist, und nach Induktionsvoraussetzung gibt es  $\mu_1, \dots, \mu_{k-1} \in \{1, \bar{1}\}$ , so daß  $D_{\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \varepsilon_k}$  reduziert, alternierend, prim ist. Betrachte nun die Rekursionsformel für das Kauffman–Polynom angewendet an der  $k$ -ten Ecke des Diagramms:

$$, D_{\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, 1} + , D_{\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \bar{1}} = z(, D_{\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, 0} + , D_{\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \infty})$$

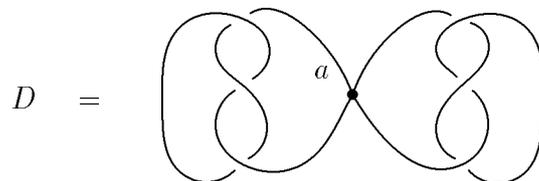
Völlig analog zum Fall  $k = 1$  folgt, daß  $D_{\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k}$  reduziert, alternierend und prim ist für ein  $\mu_k \in \{1, \bar{1}\}$ .

Da  $D_{\mu_1, \dots, \mu_k}$  alternierend ist, gilt dies auch für  $D_{\nu_1, \dots, \nu_k}$  mit beliebigen  $\nu_1, \dots, \nu_k \in \{0, \infty\}$ , d.h. das Graphendiagramm  $D$  ist alternierend. □

**Korollar 3.5** *Es sei  $\mathcal{G}$  ein Graph in  $\mathbb{R}^3$  mit  $k \geq 1$  Ecken vom Grad vier und  $D$  ein eckenorientiertes Diagramm von  $\mathcal{G}$  mit  $n \geq 0$  Kreuzungen. Existieren  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{0, \infty, \cdot\}$ , so daß  $D_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k}$  reduziert, alternierend und prim ist, so ist  $D$  ein alternierendes Graphendiagramm.*

**Beweis:** Die Behauptung folgt unmittelbar aus Lemma 3.4, indem jedes  $\varepsilon_j = \cdot$  durch ein beliebiges Element aus  $\{0, \infty\}$  ersetzt wird. □

**Bemerkung:** Lemma 3.4 gilt im allgemeinen nicht ohne die Voraussetzung „prim“:



$D_\infty$  ist reduziert und alternierend, aber  $D$  ist nicht alternierend, weil  $D_0$  nicht alternierend ist.

**Definition** Ein Graph  $\mathcal{G}$  in  $\mathbb{R}^3$  heißt

- (i) *alternierend*, falls  $\mathcal{G}$  ein alternierendes Diagramm besitzt;
- (ii) *amphichiral*, falls  $\mathcal{G}$  ein Diagramm  $D$  besitzt mit  $D \sim \overline{D}$ ;
- (iii) *chiral*, falls  $\mathcal{G}$  nicht amphichiral ist.

**Bemerkung:**

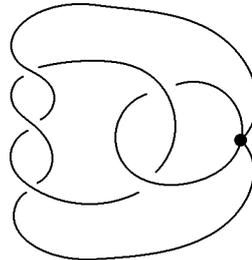
Es gilt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\overline{D}) &= \{ [\overline{D}_{r_1, \dots, r_k}] \mid r_1, \dots, r_k \in \mathcal{K} \} \\
 &= \{ [\overline{D}_{\overline{r_1}, \dots, \overline{r_k}}] \mid r_1, \dots, r_k \in \mathcal{K} \} \\
 &= \{ [\overline{D}_{r_1, \dots, r_k}] \mid r_1, \dots, r_k \in \mathcal{K} \} \\
 &=: \mathcal{L}(D)
 \end{aligned}$$

und entsprechend  $\mathcal{L}_{min}(\overline{D}) = \overline{\mathcal{L}_{min}(D)}$ .

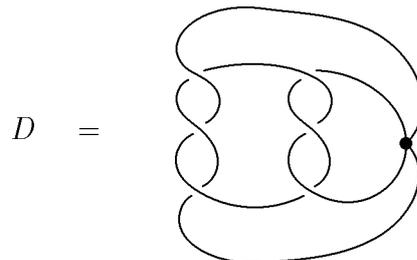
**Beispiele:**

1. Der Achtergraph mit Diagramm



ist chiral, da einer der beiden Knoten, die durch Weglassen einer Schleife des Graphen entstehen, eine Kleeblattschlinge ist. Die Kleeblattschlinge ist chiral (was sich zum Beispiel am zugehörigen Klammer- bzw. Kauffman-Polynom ablesen läßt) und somit auch der Achtergraph.

2. Der Achtergraph mit Diagramm



ist chiral, denn

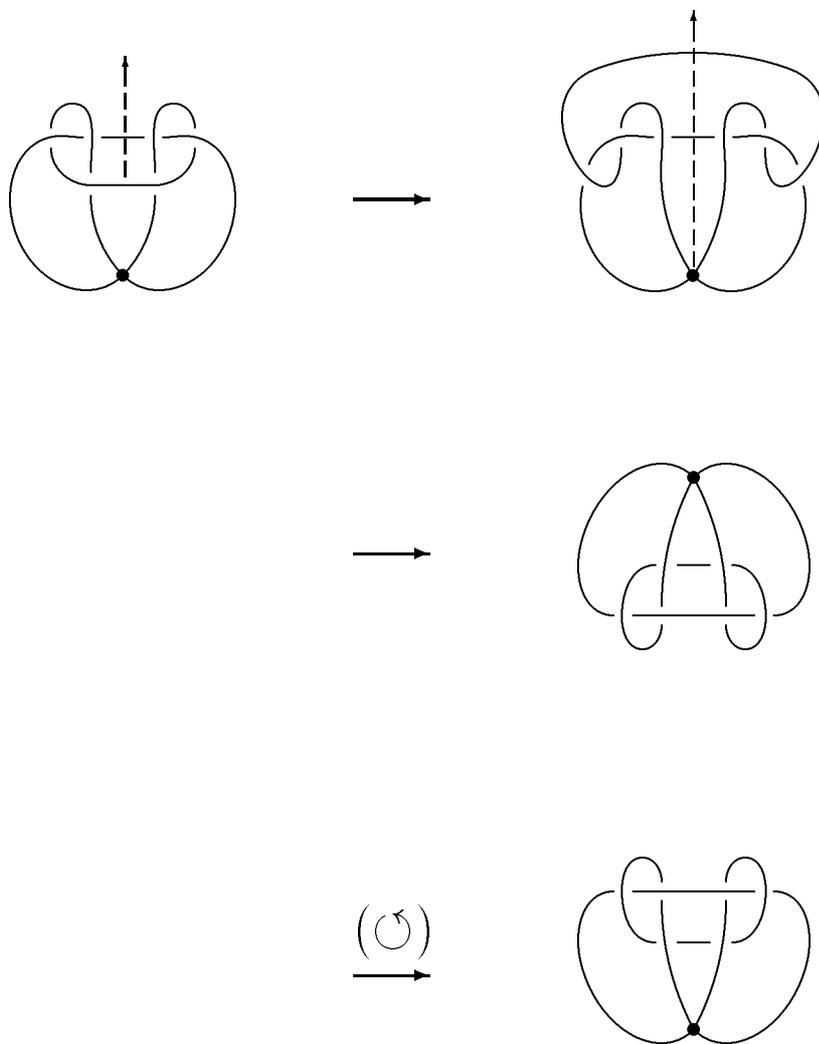
$$\mathcal{L}_{min}(D) = (\{3_1\#3_1\}, \{6_1^2, 6_3^2\}, \{\overline{3_1}\})$$

(Beispiel 3 auf Seite 53) und

$$\mathcal{L}_{min}(\overline{D}) = (\{\overline{3_1}\#\overline{3_1}\}, \{\overline{6_1^2}, \overline{6_3^2}\}, \{3_1\})$$

sind nicht identisch, da die Kleeblattschlinge  $3_1$  chiral ist.

3. Das folgende Diagramm  $D$  eines Achtergraphen in  $\mathbb{R}^3$  ist amphichiral:



# Kapitel 4

## Der Achtergraph

In diesem Kapitel werden Diagramme von Graphen in  $\mathbb{R}^3$  mit nur einer Ecke vom Grad vier betrachtet, d.h. Einbettungen des Achtergraphen  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  bzw. der disjunkten Vereinigung  $(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1) \sqcup \mathbb{S}^1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{S}^1$  in  $\mathbb{R}^3$ , wobei unterschiedslos auch für den verallgemeinerten Fall die Bezeichnung *Achtergraph* benutzt wird. Für bestimmte Klassen von Graphendiagrammen – insbesondere den reduzierten, alternierenden, primen – lassen sich recht genaue Aussagen über die Invarianten  $\mathcal{L}(D)$  und  $\mathcal{L}_{min}(D)$  machen. Daraus wird dann eine Verallgemeinerung von Satz 1.5 hergeleitet.

Graphendiagramme eines Achtergraphen lassen sich durch ein – nicht notwendig rationales – Knäuel  $t$  in der folgende Form angeben:

$$D^t = \begin{array}{c} \text{Diagramm mit Knäuel } t \\ N(t + \bullet) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{Diagramm mit Knäuel } t \text{ und } r \\ N(t + r) \end{array} = D_r^t$$

Die Bezeichnung  $N(t + \bullet)$  steht für das abgebildete Graphendiagramm mit einer Eckenorientierung, die derart gewählt ist, daß nach dem Ersetzen der Ecke durch ein rationales Knäuel  $r$  das Verkettungsdiagramm  $N(t + r)$  entsteht.

Die Ecke des Graphen liege im unbeschränkten Gebiet, was zur Folge hat, daß nach der üblichen Schwarz–Weiß–Färbung des Verkettungsdiagramms

$D_r^t$  ein positives Knäuel  $r$  positive Kreuzungen besitzt (und ein negatives Knäuel negative). Diese Wahl bedeutet sicherlich keine Einschränkung an die Allgemeinheit der Situation und hat keinen Einfluß auf die unten angestellten Berechnungen von Klammer- und Kauffman-Polynomen.

**Bemerkung:** Ist  $D = N(t + \cdot)$  ein Graphendiagramm und  $t$  ein rationales Knäuel, so ist  $D$  Diagramm des trivialen Achtergraphen in  $\mathbb{R}^3$ , denn  $t$  läßt sich mit Hilfe von Reidemeister-Bewegungen I–III in Normalformgestalt bringen und  $D$  anschließend mit Reidemeister-Bewegungen vom Typ V zum trivialen Diagramm des Achtergraphen umformen.

## 4.1 Der alternierende prime Fall

Zu einem reduzierten, alternierenden, primen Graphendiagramm  $D$  lassen sich die Invarianten  $\mathcal{L}(D)$  und  $\mathcal{L}_{min}(D)$  genau angeben. Dazu werden nun Klammer- und Kauffman-Polynom von  $D$  analysiert.

Aussagen über das Kauffman-Polynom sind bereits durch die Untersuchungen von Knäuelsummen in Abschnitt 2.3 bekannt:

**Lemma 4.1**  $D^t = N(t + \cdot)$  sei reduziert, alternierend, prim und  $r$  ein rationales Knäuel in Normalformgestalt mit  $r \neq 1$ , falls  $t + 1$  nicht alternierend, und  $r \neq \bar{1}$  sonst. Dann gilt:

$$z\text{-Grad}(\cdot, D_r^t) = \begin{cases} \#D_r^t \Leftrightarrow 1 & \text{falls } D_r^t \text{ alternierend} \\ \#D_r^t \Leftrightarrow 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Beweis:** Für  $r \in \{0, \infty\}$  folgt die Behauptung aus Satz 1.11 und andernfalls aus Lemma 2.6 bzw. Lemma 2.8.

□

**Bemerkung:** Lemma 4.1 läßt sich auch direkt beweisen, indem das *Rekursionsprinzip für rationale Knäuel* angewendet wird (siehe Abschnitt 2.3).

**Lemma 4.2**  $D^t = N(t + \cdot)$  sei reduziert, alternierend, prim und  $r$  ein rationales Knäuel in Normalformgestalt mit  $r \neq 1$ , falls  $t + 1$  nicht alternierend, und  $r \neq \bar{1}$  sonst. Dann gilt:

$$K(D_r^t) = \begin{cases} \#D_r^t & \text{falls } D_r^t \text{ alternierend} \\ \#D_r^t \Leftrightarrow 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

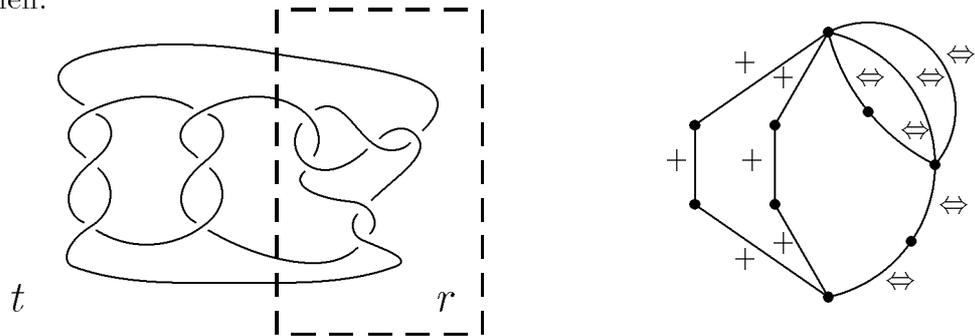
**Beweis:** Für  $r \in \{0, \infty\}$  folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 1.11. Sei also  $r \notin \{0, \infty\}$ .

Es gilt allgemein  $K(D_r^t) \leq \#D_r^t$  (Satz 1.9). Ist  $D_r^t$  alternierend, so folgt daher die Aussage aus Lemma 2.6. Ist  $D_r^t$  nicht alternierend, ergibt sich aus Lemma 2.8, daß  $K(D_r^t) \geq \#D_r^t \Leftrightarrow 1$  ist. Mit Korollar 1.25 folgt die Gleichheit, da der zu dem rationalen Knäuel gehörige Teilgraph  $G_r$  einen Isthmus besitzt, falls  $0 < |r| < 1$  ist, und  $\overline{G_r}$  eine Schleife, falls  $|r| > 1$  gilt. □



Mit den Ergebnissen von Lemma 4.1 bzw. Lemma 4.2 ist klar, daß unter den dort genannten Voraussetzungen das Verkettungsdiagramm  $D_r^t$  entweder bereits in minimaler Darstellung ist (falls  $D_r^t$  alternierend) oder eine minimale Darstellung höchstens eine Kreuzung weniger besitzt als  $D_r^t$ . Mit Hilfe des Klammerpolynoms läßt sich zeigen, daß das Diagramm in der Tat in jedem Fall in minimaler Darstellung ist.

Der Spann des Klammerpolynoms von  $D_r^t$  wird durch die Betrachtung minimaler und maximaler Spannbäume des zu  $D_r^t$  gehörigen gewichteten Graphen  $G$  abgeschätzt (Satz 1.23). Ist  $D_r^t$  nicht alternierend, so zerfällt  $G$  auf die folgende Art und Weise in einen positiven und einen negativen Teilgraphen:



**Definition** Sind  $G_1, G_2$  Teilgraphen eines Graphen  $G$ , so daß  $G = G_1 \cup G_2$  und  $G_1 \cap G_2 = \{a, b\}$  mit  $a, b \in V(G)$  gilt, dann heißt  $G$  *Zweipunktvereinigung* von  $G_1$  und  $G_2$ ,  $G = G_1 \vee_2 G_2$ .



Die Zweipunktvereinigung von Graphen entspricht als graphentheoretische Konstruktion der Knäuelsumme als Zusammensetzung von Verkettungsdiagrammen.

Im folgenden wird die oben skizzierte Situation betrachtet, daß der zu  $D_r^t$  gehörige Graph  $G$  als Zweipunktvereinigung aus einem positiven Teilgraphen  $G^+$  und einem negativen Teilgraphen  $G^-$  zusammengesetzt ist, wobei wegen Lemma 1.2 a) stets ohne Einschränkung angenommen werde, daß  $G^+$  der zu  $t$  gehörige und  $G^-$  der zu  $r$  gehörige Teilgraph ist.

Auf die gewünschte Abschätzung des Spanns des Klammerpolynoms wird nun in mehreren Schritten hingearbeitet.

**Lemma 4.3** *Es sei  $G^+$  ein 2-zusammenhängender, positiver, gewichteter Graph mit  $n \geq 2$  Ecken und  $m \geq 2$  Kanten. Sind die Kanten von  $G^+$  mittels einer Bijektion  $\tau : E(G^+) \rightarrow \{1, \dots, m\}$  numeriert, so gilt:*

- a) *Es existiert genau ein minimaler Spannbaum  $T_{min}$  von  $G^+$ .  $G^+$  hat bezüglich  $T_{min}$  den Zustand  $L^{n-1}d^{m-n+1}$ .*
- b) *Es existiert genau ein maximaler Spannbaum  $T_{max}$  von  $G^+$ .  $G^+$  hat bezüglich  $T_{max}$  den Zustand  $D^{n-1}\ell^{m-n+1}$ .*

**Beweis:** Da  $G^+$  zusammenhängend ist, besteht ein Spannbaum des Graphen aus genau  $n \Leftrightarrow 1$  Kanten. Bezüglich eines gegebenen Spannbaumes  $T$  besitzt jede Kante von  $T$  einen der Zustände  $L, D$  und jede Kante von  $G^+ \setminus T$  einen der Zustände  $\ell, d$ . Nach der Tabelle auf Seite 24 ist der Exponent des zu  $L$  gehörigen Monoms kleiner als der des zu  $D$  gehörigen Monoms, und der Exponent des zu  $\ell$  gehörigen Monoms ist größer als der des zu  $d$  gehörigen Monoms. Falls ein Spannbaum existiert, der den Zustand  $L^{n-1}d^{m-n+1}$  liefert, so ist dieser daher minimal, und einer, der den Zustand  $D^{n-1}\ell^{m-n+1}$  liefert, maximal.

**zu a):**

Wähle sukzessive  $n \Leftrightarrow 1$  Kanten mit kleinstmöglicher Nummer, so daß ein Spannbaum  $T_{min}$  von  $G^+$  entsteht, d.h. wähle zunächst die Kante  $e$  mit  $\tau(e) = 1$  und dann jeweils die Kante mit der kleinsten Nummer, so daß kein Zyklus entsteht. Die Kanten von  $T_{min}$  sind nach Konstruktion aktiv und die  $m \Leftrightarrow n + 1$  übrigen Kanten von  $G^+$  inaktiv, da  $T_{min}$  mindestens eine Kante besitzt und wegen des 2-Zusammenhangs von  $G^+$  je zwei Kanten auf einem Zyklus liegen (Lemma 1.15). Also liefert  $T_{min}$  den Zustand  $L^{n-1}d^{m-n+1}$ .

Ist  $T$  ein von  $T_{min}$  verschiedener Spannbaum von  $G^+$ , so ist jede Kante  $e \in T \setminus T_{min}$  inaktiv, da sie auf einem Zyklus liegt, der eine Kante  $e' \in (G^+ \setminus T) \cap T_{min}$  enthält, und  $\tau(e') < \tau(e)$  gilt. Somit ist  $T_{min}$  eindeutig bestimmt.

**zu b):**

Ähnlich wie bei Teil a) wähle sukzessive  $n \Leftrightarrow 1$  Kanten mit größtmöglicher Nummer, so daß ein Spannbaum  $T_{max}$  von  $G^+$  entsteht, der nach Konstruktion den Zustand  $D^{n-1}\ell^{n-m+1}$  hat und eindeutig bestimmt ist.

□

**Korollar 4.4**  $G^+$  sei ein zusammenhängender, positiver, gewichteter Graph mit  $n \geq 2$  Ecken und  $m \geq 2$  Kanten, und jeder Block des Graphen bestehe aus mindestens zwei Kanten. Sind die Kanten von  $G^+$  mittels einer Bijektion  $\tau : E(G^+) \rightarrow \{1, \dots, m\}$  numeriert, so gilt:

- a) Es existiert genau ein minimaler Spannbaum  $T_{min}$  von  $G^+$ .  $G^+$  hat bezüglich  $T_{min}$  den Zustand  $L^{n-1}d^{m-n+1}$ .
- b) Es existiert genau ein maximaler Spannbaum  $T_{max}$  von  $G^+$ .  $G^+$  hat bezüglich  $T_{max}$  den Zustand  $D^{n-1}\ell^{m-n+1}$ .

**Beweis:** Ein Spannbaum von  $G^+$  besteht aus der Vereinigung von Spannbäumen der einzelnen Blöcke, und die Behauptung folgt wie bei Lemma 4.3, wobei zu beachten ist, daß eine Kante genau dann aktiv bzw. inaktiv ist, wenn sie es bezüglich des Blockes ist, der sie enthält.

□

**Korollar 4.5**  $G^+$  sei ein zusammenhängender, positiver, gewichteter Graph mit  $n \geq 1$  Ecken und  $m \geq 1$  Kanten, wobei  $t \geq 0$  Blöcke aus genau einer Kante bestehen, welche keine Schleife ist, und  $s \geq 0$  Kanten Schleifen sind. Sind die Kanten von  $G^+$  mittels einer Bijektion  $\tau : E(G^+) \rightarrow \{1, \dots, m\}$  numeriert, so gilt:

- a) Es existiert genau ein minimaler Spannbaum  $T_{\min}$  von  $G^+$ .  $G^+$  hat bezüglich  $T_{\min}$  den Zustand  $L^{n-1} \ell^s d^{m-n-s+1}$ .
- b) Es existiert genau ein maximaler Spannbaum  $T_{\max}$  von  $G^+$ .  $G^+$  hat bezüglich  $T_{\max}$  den Zustand  $L^t D^{n-t-1} \ell^{m-n+1}$ .

**Beweis:** Ein Spannbaum von  $G^+$  besteht aus der Vereinigung von Spannbäumen der einzelnen Blöcke. Besitzt ein Block genau eine Kante, so ist diese wegen Lemma 1.15 bezüglich eines beliebigen Spannbaums aktiv. Besteht ein solcher Block aus einer Kante, die keine Schleife ist, so ist diese Kante in jedem Spannbaum von  $G^+$  enthalten und intern aktiv. Eine Schleife ist in keinem Spannbaum von  $G^+$  enthalten und extern aktiv. Die Behauptung folgt zusammen mit Korollar 4.4. □

**Bemerkungen:**

1. Die Aussagen von Lemma 4.3 bzw. Korollar 4.4 und 4.5 gelten für negative Graphen „sinngemäß“, d.h. unter den Voraussetzungen von Lemma 4.3 besitzt ein negativer Graph einen eindeutig bestimmten minimalen Spannbaum, der den Zustand  $\overline{D}^{n-1} \overline{\ell}^{m-n+1}$  liefert, usw.
2. Da der Spannbaum eines zusammenhängenden Graphen aus der Vereinigung von Spannbäumen der einzelnen Blöcke besteht, lassen sich sämtliche Aussagen leicht auf den Fall verallgemeinern, daß ein zusammenhängender Graph beliebig aus positiven und negativen Blöcken zusammengesetzt ist.
3. Da der Spannbaum eines Graphen aus der Vereinigung von Spannbäumen der einzelnen Zusammenhangskomponenten besteht, gelten die Aussagen entsprechend für nicht zusammenhängende Graphen.

**Lemma 4.6** *Es sei  $G = G^+ \vee_2 G^-$  ein zusammenhängender, gewichteter Graph, der aus einem positiven Teilgraphen  $G^+$  und einem negativen Teilgraphen  $G^-$  zusammengesetzt ist, so daß  $G^+ \cap G^- = \{a, b\}$  ist.  $G^+$  besitze  $n \geq 2$  Ecken und  $m \geq 2$  Kanten und habe keinen Block, der nur aus einer Kante besteht. Außerdem bestehe jeder Weg in  $G^+$ , der von  $a$  nach  $b$  führt, aus mindestens zwei Kanten. Werden die Kanten von  $G$  mittels einer Bijektion  $\tau : E(G) \rightarrow \{1, \dots, |E(G)|\}$  derart numeriert, daß  $\tau(E(G^+)) = \{1, \dots, m\}$  ist, so gilt:*

- a) *Ein Spannbaum von  $G^-$  kann auf genau eine Weise zu einem Spannbaum von  $G$  ergänzt werden, so daß die Kanten von  $G^+$  den Zustand  $L^{n-2}d^{m-n+2}$  besitzen.*
- b) *Ein Spannbaum von  $G^-$  kann auf genau eine Weise zu einem Spannbaum von  $G$  ergänzt werden, so daß die Kanten von  $G^+$  den Zustand  $D^{n-2}\ell^{m-n+2}$  besitzen.*

**Beweis:**

zu a):

In dem nach Korollar 4.4 eindeutig bestimmten minimalen Spannbaum  $T_{min}$  von  $G^+$  gibt es genau einen Weg von  $a$  nach  $b$ . Es sei  $e_{max} \in T_{min}$  die Kante auf diesem Weg mit der größten Nummer. Ist  $T^-$  ein beliebiger Spannbaum von  $G^-$ , so ist  $T := T^- \cup (T_{min} \setminus e_{max})$  ein Spannbaum von  $G$ . Da  $T_{min}$  minimaler Spannbaum von  $G^+$  ist und  $e_{max}$  maximal gewählt wurde, sind sämtliche Kanten von  $T_{min} \setminus e_{max}$  aktiv, denn ein Zyklus, auf dem Kanten von  $T_{min} \setminus e_{max}$  liegen, kann nur von einer Kante aus  $G^+ \setminus T$  geschlossen werden.  $e_{max}$  ist inaktiv, denn nach Voraussetzung existiert mindestens eine Kante  $e \neq e_{max}$  aus  $T_{min}$  mit  $\tau(e) < \tau(e_{max})$ , die auf dem Weg von  $a$  nach  $b$  liegt. Die Kanten von  $G^+ \setminus T_{min}$  sind alle inaktiv, da  $T_{min}$  minimaler Spannbaum von  $G^+$  ist. Die Kanten von  $G^+$  haben in  $G$  also den Zustand  $L^{n-2}d^{m-n+2}$ .

Wird eine Kante  $e \neq e_{max}$ , die auf dem Weg von  $a$  nach  $b$  liegt, aus  $T_{min}$  entfernt, so enthält der entsprechende Spannbaum von  $G$  mindestens eine inaktive Kante in  $T_{min} \setminus e$ , d.h. er ist nicht maximal. Da umgekehrt der  $G^+$ -Anteil eines Spannbaums von  $G$  vom Zustand  $L^{n-2}d^{m-n+2}$  zu einem minimalen Spannbaum von  $G^+$  ergänzt werden kann, indem die kleinstmögliche

Kante von  $G^+$  hinzugefügt wird, d.h. jeder maximale Spannbaum von  $G$  auf die beschriebene Weise aus dem maximalen Spannbaum von  $G^+$  konstruiert werden kann, folgt die Eindeutigkeitsaussage.

**zu b):**

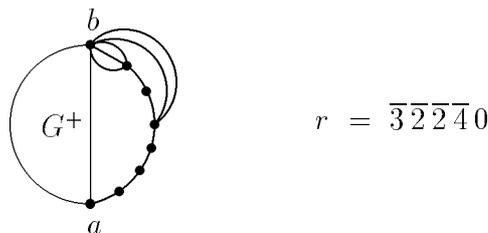
Der Beweis erfolgt analog zu dem von Teil a), indem aus dem maximalen Spannbaum  $T_{max}$  von  $G^+$  die Kante auf dem Weg von  $a$  nach  $b$  mit der kleinsten Nummer entfernt wird. Im Unterschied zu der Argumentation in Teil a) ist zusätzlich zu berücksichtigen, daß die Kanten von  $G^+$ , welche nicht in dem konstruierten Spannbaum von  $G$  liegen, aktiv sind, weil jede Kante von  $G^-$  nach Voraussetzung eine größere Nummer hat als eine beliebige Kante von  $G^+$ .

□

**Lemma 4.7**  *$t$  sei ein zusammenhängendes Knäuel, und  $D^t = N(t + \cdot)$  sei reduziert und alternierend. Ist dann  $r$  ein rationales Knäuel in Normalformgestalt, so daß  $D_r^t$  nicht alternierend ist, so gilt:*

$$sp(\langle D_r^t \rangle) \leq 4(\#D_r^t \Leftrightarrow 2)$$

**Beweis:** Da  $t$  und  $r$  jeweils alternierend sind,  $t + r$  jedoch nicht, läßt sich der zu  $D_r^t$  gehörige Graph  $G$  darstellen als Zweipunktvereinigung eines positiven Graphen  $G^+$  und eines negativen Graphen  $G^-$ :  $G = G^+ \vee_2 G^-$  mit  $G^+ \cap G^- = \{a, b\}$ . Wegen Lemma 1.2 a) kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß  $G^+$  der zu  $t$  gehörige und  $G^-$  der zu  $r$  gehörige Teilgraph ist. Dann besitzt jeder Block von  $G^+$  mindestens zwei Kanten, und jeder Weg in  $G^+$  von  $a$  nach  $b$  besteht aus mindestens zwei Kanten, da  $N(t)$  und  $D(t)$  reduziert sind.  $G^+$  besitzt  $m_+ \geq 2$  Kanten und  $n_+ \geq 2$  Ecken.  $G^-$  besteht aus den Teilgraphen  $G_{a_1}, \dots, G_{a_k}$ , die den ganzzahligen Knäueln  $a_1, \dots, a_k$  entsprechen:



$G^-$  besitzt  $m_- \geq 1$  Kanten und  $n_- \geq 2$  Ecken.

Zeige die Aussage für den Fall  $0 < |r| < 1$ . Für  $|r| > 1$  folgt die Behauptung analog oder – einfacher – durch Übergang zum Dualgraphen von  $G$ , der ebenfalls der Graph eines reduzierten und alternierenden Verkettungsdiagramms ist und das gleiche Klammerpolynom besitzt (siehe [Thist87], S. 306). Es sei also  $r$  in der Normalform  $\overline{a_1} \overline{a_2} \dots \overline{a_k} 0$  gegeben mit  $a_1 \geq 2$  und  $a_i \geq 1$  für  $i \in \{2, \dots, k\}$ . Die Kanten von  $G$  seien mittels einer Bijektion  $\tau : \{1, \dots, |E(G)|\} \rightarrow E(G)$  derart durchnummeriert, daß für  $e^+ \in E(G^+)$ ,  $e^- \in E(G^-)$  stets  $\tau(e^+) < \tau(e^-)$  gelte und für  $e \in E(G_{a_i})$ ,  $e' \in E(G_{a_j})$  mit  $i < j$  stets  $\tau(e) > \tau(e')$  sei.

Da  $G^+$  und  $G^-$  genau die Ecken  $a, b$  gemeinsam haben, enthält ein Spannbaum von  $G$  entweder einen Spannbaum von  $G^+$  ergänzt durch Kanten von  $G^-$ , die keinen Spannbaum von  $G^-$  bilden, oder einen Spannbaum von  $G^-$  ergänzt durch Kanten von  $G^+$ , die keinen Spannbaum von  $G^+$  bilden. Konstruiere nun die maximalen und minimalen Spannbäume von  $G$  durch „bestmögliche“ Ergänzungen der maximalen bzw. minimalen Spannbäume von  $G^+$  und  $G^-$ . Diese Spannbäume liefern dann die maximalen und minimalen Terme des Klammerpolynoms von  $D_r^t$ .

Es sei  $T_{max}^+$  der nach Korollar 4.4 eindeutig bestimmte maximale Spannbaum von  $G^+$  und  $T_{max}^-$  der nach Korollar 4.5 eindeutig bestimmte maximale Spannbaum von  $G^-$ . Argumentiere nun wie im Beweis von Lemma 4.6. Ist  $e_{max} \in T_{max}^-$  die Kante auf dem Weg von  $a$  nach  $b$  mit der größten Nummer, so wird durch  $T := T_{max}^+ \cup (T_{max}^- \setminus e_{max})$  ein Spannbaum von  $G$  definiert. Die Kante  $e_{max}$  ist dann inaktiv, da sie auf einem Zyklus mit Kanten von  $T_{max}^+$  liegt, welche eine kleinere Nummer als  $e_{max}$  haben. Wegen der maximalen Wahl von  $e_{max}$  und der Maximalität von  $T_{max}^-$  sind die Kanten von  $T_{max}^- \setminus e_{max}$  aktiv und die Kanten von  $G^- \setminus T_{max}^-$  inaktiv. Die Kanten von  $T_{max}^+$  haben wegen der Numerierung von  $G^+$  und  $G^-$  bezüglich  $G$  jeweils den gleichen Zustand wie bezüglich  $G^+$ .  $T$  liefert somit den Zustand:

$$D^{n_+ - 1} \ell^{m_+ - n_+ + 1} \overline{L}^{n_- - 2} \overline{d}^{m_- - n_- + 2} \rightsquigarrow (\Leftrightarrow 1)^{m_+ - n_+ + n_- - 1} A^{3m_+ - 2n_+ + m_- + 2n_- - 2}$$

Wird ein beliebiger Spannbaum  $T^-$  von  $G^-$  zu einem Spannbaum von  $G$  ergänzt, dann sind wegen der gegebenen Numerierung sämtliche Kanten von  $T^-$  inaktiv. Der Zustand, der einen maximalen Exponenten in  $A$  ergibt, ist

daher von der Form

$$D^{n_+ - 2} \ell^{m_+ - n_+ + 2} \overline{D}^{n_- - 1} \overline{d}^{m_- - n_- + 1} \rightsquigarrow (\Leftrightarrow 1)^{m_+ - n_+ + 2} A^{3m_+ - 2n_+ + m_- - 2n_- + 6}$$

– sofern ein Spannbaum existiert, der diesen Zustand realisiert. Ist  $n_- > 2$ , so gilt  $2n_- \Leftrightarrow 2 > \Leftrightarrow 2n_- + 6$ , und der zuerst konstruierte Spannbaum ist der eindeutig bestimmte maximale. Ist  $n_- = 2$ , d.h.  $r = \overline{1}$ , so heben sich die beiden maximalen Terme auf.

Es sei  $T_{min}^+$  der nach Korollar 4.4 eindeutig bestimmte minimale Spannbaum von  $G^+$  und  $T_{min}^-$  der nach Korollar 4.5 eindeutig bestimmte minimale Spannbaum von  $G^-$ . Ist  $e_{min}$  die Kante von  $G_{a_k}$  mit der kleinsten Nummer, so wird durch  $T := T_{min}^+ \cup (T_{min}^- \setminus e_{min})$  ein Spannbaum von  $G$  definiert, da  $e_{min}$  auf dem Weg von  $a$  nach  $b$  in  $T_{min}^-$  liegt. Die Kante  $e_{min}$  ist dann inaktiv, da sie auf einem Zyklus mit Kanten von  $T_{min}^+$  liegt, welche eine kleinere Nummer als  $e_{min}$  haben. Wegen der minimalen Wahl von  $e_{min}$  und der Minimalität von  $T_{min}^-$  sind die Kanten von  $T_{min}^- \setminus e_{min}$  inaktiv und die Kanten von  $G^- \setminus T_{min}^-$  aktiv, denn letztere liegen nicht auf Zyklen, die Kanten von  $T_{min}^+$  enthalten. Die Kanten von  $T_{min}^+$  haben wegen der Numerierung von  $G^+$  und  $G^-$  bezüglich  $G$  jeweils den gleichen Zustand wie bezüglich  $G^+$ .  $T$  liefert somit den Zustand:

$$L^{n_+ - 1} d^{m_+ - n_+ + 1} \overline{D}^{n_- - 2} \overline{\ell}^{m_- - n_- + 1} \overline{d} \rightsquigarrow (\Leftrightarrow 1)^{n_+ + m_- - n_-} A^{-m_+ - 2n_+ - 3m_- + 2n_- + 2}$$

Jede andere Kantenwahl in  $G^-$  führt zu einem Monom mit größerem Exponenten. Denn bezüglich eines Spannbaums  $T$  von  $G$ , der einen Spannbaum von  $G^+$  enthält, ist eine Kante von  $G^- \setminus T$  immer inaktiv, da sie auf einem Zyklus mit Kanten von  $G^+$  liegt, d.h. es existiert kein solcher Spannbaum von  $G$ , der einen kleineren Exponenten als  $T_{min}$  liefert. Außerdem besitzt ein Spannbaum von  $G$ , der einen Spannbaum von  $G^+$  und die Kante  $e_{min}$  enthält, mindestens eine aktive Kante aus  $G^-$ . Denn enthält er eine andere Kante von  $G_{a_k}$  als  $e_{min}$  nicht, so ist  $e_{min}$  eine aktive Kante des Spannbaums, und enthält ein Spannbaum sämtliche Kanten von  $G_{a_k}$ , so sind diese wegen der Numerierung der  $G_{a_i}$  alle aktiv. In jedem Fall ist in einem derartigen Spannbaum mindestens ein aktive Kante vorhanden.

Der nach Korollar 4.5 eindeutig bestimmte minimale Spannbaum von  $G^-$  mit Zustand  $\overline{D}^{n_- - 1} \overline{\ell}^{m_- - n_- + 1}$  kann nach Lemma 4.6 auf genau eine Weise zu

einem Spannbaum von  $G$  ergänzt werden, so daß die Kanten von  $G^+$  den Zustand  $L^{n_+ - 2} d^{m_+ - n_+ + 2}$  haben. Die Kanten von  $G^-$  besitzen bezüglich des Spannbaums von  $G$  den gleichen Zustand wie bezüglich des Spannbaums von  $G^-$ , denn die Kanten von  $G^-$ , welche nicht zu dem Spannbaum von  $G$  gehören, sind aktiv, da sie nur Zyklen in  $G^-$  schließen. Der so konstruierte Spannbaum von  $G$  liefert also (als einzig möglicher) den Zustand:

$$L^{n_+ - 2} d^{m_+ - n_+ + 2} \overline{D}^{n_- - 1} \overline{\ell}^{m_- - n_- + 1} \rightsquigarrow (\Leftrightarrow 1)^{n_+ + m_- - n_- - 1} A^{-m_+ - 2n_+ - 3m_- + 2n_- + 2}$$

Die beiden minimalen Terme heben sich auf, und daher ist der Spann des Klammerpolynoms von  $D_r^t$  mindestens um 4 (für  $r = \overline{1}$  sogar um mindestens 8) kleiner als die Differenz der Exponenten, die zu den maximalen und minimalen Spannbäumen gehören:

$$sp(\langle D_r^t \rangle) \leq (4m_+ + 4m_- \Leftrightarrow 4) \Leftrightarrow 4 = 4(\#D_r^t \Leftrightarrow 2)$$

□

**Satz 4.8** *Ist  $D^t = N(t + \cdot)$  ein reduziertes, alternierendes, primes Graphendiagramm und  $r$  ein rationales Knäuel in Normalformgestalt mit  $r \neq 1$ , falls  $t+1$  nicht alternierend, und  $r \neq \overline{1}$  sonst, so ist  $D_r^t$  in minimaler Darstellung. Insbesondere gilt:*

$$\mathcal{L}_{min}(D^t) = \begin{cases} (\{[D_0^t]\}, \{[D_\infty^t]\}, \{[D_1^t]\}) & \text{falls } D_1^t \text{ nicht alternierend} \\ (\{[D_0^t]\}, \{[D_\infty^t]\}, \{[D_{\overline{1}}^t]\}) & \text{sonst} \end{cases}$$

oder

$$\mathcal{L}_{min}(D^t) = (\{[D_0^t]\}, \{[D_\infty^t]\}, \{[D_1^t], [D_{\overline{1}}^t]\})$$

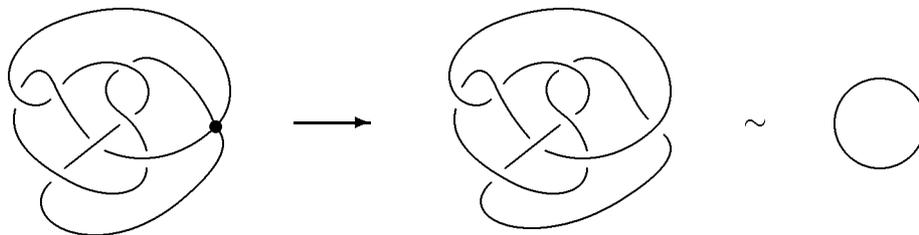
**Beweis:** Es sei  $n = \#D_r^t$  und  $L$  die zu  $D_r^t$  gehörige Verkettung. Ist  $D_r^t$  alternierend, so ist  $z\text{-Grad}(\cdot, D_r^t) = n \Leftrightarrow 1$  nach Lemma 4.1, und nach Satz 1.9 besitzt jedes Diagramm von  $L$  mindestens  $n$  Kreuzungen. Also ist  $D_r^t$  in minimaler Darstellung.

Ist  $D_r^t$  nicht alternierend, dann ist nach Lemma 4.1  $z\text{-Grad}(\cdot, D_r^t) = n \Leftrightarrow 2$ . Nach Satz 1.9 besitzt dann jedes Diagramm von  $L$  mindestens  $n \Leftrightarrow 1$  Kreuzungen, und ein Diagramm  $D$  von  $L$  mit genau  $n \Leftrightarrow 1$  Kreuzungen muß reduziert

und alternierend sein (Korollar 1.12). Nach Satz 1.3 und Satz 1.2 c) ist in diesem Fall jedoch  $sp(\langle D_r^t \rangle) = sp(\langle D \rangle) \geq 4(n \Leftrightarrow 1)$  – im Widerspruch zu Lemma 4.7. Also gibt es kein Diagramm von  $L$  mit weniger als  $n$  Kreuzungen, d.h.  $D_r^t$  ist in minimaler Darstellung.  $\square$

### Bemerkungen:

1. Ist  $D^t = N(t + \bullet)$  ein reduziertes, alternierendes, primes Graphendiagramm und  $t + 1$  nicht alternierend, so ist  $D_1^t$  im allgemeinen nicht in minimaler Darstellung:



2. Ist  $D^t = N(t + \bullet)$  ein reduziertes, alternierendes, primes Graphendiagramm und  $r$  ein rationales Knäuel, das nicht in Normalformgestalt ist und äquivalent zu einem rationalen Knäuel  $s$  in Normalformgestalt, so folgt mit  $z\text{-Grad}(\langle D_r^t \rangle) = z\text{-Grad}(\langle D_s^t \rangle)$  und  $sp(\langle D_r^t \rangle) = sp(\langle D_s^t \rangle)$  aus dem Beweis von Satz 4.8, daß  $D_r^t$  mindestens so viele Kreuzungen hat wie  $D_s^t$ , d.h. die Elemente von  $\mathcal{L}_{min}(D^t)$  lassen sich immer durch rationale Knäuel in Normalformgestalt beschreiben.
3. Die Aussage von Satz 4.8 gilt im allgemeinen nicht ohne die Voraussetzung „prim“: siehe Beispiel 3 auf Seite 53.

**Satz 4.9** *Es sei  $\mathcal{G}$  ein Achtergraph in  $\mathbb{R}^3$  und  $D^t$  ein Diagramm von  $\mathcal{G}$  mit  $n$  Kreuzungen, das reduziert, alternierend und prim ist. Dann gilt:*

- a) *Es gibt kein Diagramm von  $\mathcal{G}$  mit weniger als  $n$  Kreuzungen.*
- b) *Jedes nicht alternierende Diagramm von  $\mathcal{G}$  besitzt mehr als  $n$  Kreuzungen.*

**Beweis:****zu a):**

Angenommen, es gibt ein Diagramm  $D$  von  $\mathcal{G}$  mit weniger als  $n$  Kreuzungen. Bezüglich einer beliebigen Eckenorientierung haben dann  $D_0$  und  $D_\infty$  weniger als  $n$  Kreuzungen, d.h. in zwei der drei Einträge von  $\mathcal{L}_{min}(D) = \mathcal{L}_{min}(D^t)$  stehen Verkettungsdiagramme mit weniger als  $n$  Kreuzungen – im Widerspruch zu Satz 4.8.

**zu b):**

Angenommen, es gibt ein nicht alternierendes Diagramm  $D$  von  $\mathcal{G}$  mit  $n$  Kreuzungen, welches – ohne Einschränkung – keine kreuzungsfreien Komponenten enthalte. Bezüglich einer beliebigen Eckenorientierung sind dann wegen Lemma 3.4  $D_0$  und  $D_\infty$  Verkettungsdiagramme mit  $n \geq 2$  Kreuzungen, die nicht alle drei Eigenschaften reduziert, alternierend, prim haben, d.h. es gilt  $z\text{-Grad}(, D_0) \leq n \Leftrightarrow 2$  und  $z\text{-Grad}(, D_\infty) \leq n \Leftrightarrow 2$  (Korollar 1.12) – im Widerspruch zu der Tatsache, daß nach Satz 4.8  $\mathcal{L}_{min}(D) = \mathcal{L}_{min}(D^t)$  in zwei der drei Einträge Verkettungsdiagramme vom  $z\text{-Grad } n \Leftrightarrow 1$  enthält. □

**Bemerkungen:**

1. Teil b) von Satz 4.9 gilt im allgemeinen nicht ohne die Voraussetzung „prim“:



2. Das Beispiel von Bemerkung 1 zeigt auch, daß Teil b) von Satz 4.9 im allgemeinen nicht mit der Voraussetzung „prim als Graphendiagramm“ anstelle von „prim“ gilt, denn das Diagramm ist prim als Graphendiagramm (siehe Beispiel 2 auf Seite 57).

## 4.2 Eine einfache Verallgemeinerung

Der Beweis der Aussage über die Minimalität des Diagramms  $D_r^t$  von Satz 4.8 läßt sich nicht so einfach auf die allgemeinere Situation übertragen, daß ein Diagramm eines Achtergraphen in  $\mathbb{R}^3$  als zusammenhängende oder disjunkte Summe zusammengesetzt ist aus einem Graphendiagramm, das reduziert, alternierend, prim ist, und reduzierten, alternierenden Verkettungsdiagrammen. Denn die Frage, ob die minimale Kreuzungszahl von Verkettungsdiagrammen im allgemeinen Fall additiv bezüglich zusammenhängender bzw. disjunkter Summe ist, steht noch offen. Für wesentliche Teile der Aussage von Satz 4.8 ist eine Verallgemeinerung jedoch ohne Schwierigkeiten möglich:

**Satz 4.10** *Das Graphendiagramm  $D = D^t \# D'$  sei zusammengesetzt aus einem reduzierten, alternierenden, primen Graphendiagramm  $D^t = N(t + \cdot)$  und einem – nicht notwendig zusammenhängenden – reduzierten, alternierenden Verkettungsdiagramm  $D'$ . Dann gilt:*

$$\mathcal{L}_{\min}(D) = \begin{cases} (\{[D_0]\}, \{[D_\infty]\}, \{[D_1]\}) & \text{falls } D_1^t \text{ nicht alternierend} \\ (\{[D_0]\}, \{[D_\infty]\}, \{[D_{\overline{1}}]\}) & \text{sonst} \end{cases}$$

oder

$$\mathcal{L}_{\min}(D) = (\{[D_0]\}, \{[D_\infty]\}, \{[D_1], [D_{\overline{1}}]\})$$

**Beweis:** Es sei  $n = \#D$ ,  $r \in \mathcal{K}$  in Normalformgestalt und  $L_r$  die zu  $D_r$  gehörige Verkettung. Wegen Satz 1.1 läßt sich das Verkettungsdiagramm  $D'$  darstellen als

$$D' = (D^{1,1} \# \dots \# D^{1,i_1}) \sqcup \dots \sqcup (D^{k,1} \# \dots \# D^{k,i_k})$$

mit reduzierten, alternierenden, primen Verkettungsdiagrammen  $D^{i,j}$ , d.h. es ist  $K(D^{i,j}) = \#D^{i,j}$  nach Korollar 1.13, und wegen Satz 1.6 gilt:

$$K(D_r) = K(D_r^t) + \sum_{i,j} K(D^{i,j}) = K(D_r^t) + \#D'$$

Ist  $t + r$  alternierend, so ist  $K(N(t + r)) = \#N(t + r)$  nach Lemma 4.2 und somit  $K(D_r) = n + \#r = \#D_r$ , d.h.  $D_r$  ist wegen Satz 1.9 in minimaler Darstellung.

Besitzt das Knäuel  $r$  mindestens zwei Kreuzungen und ist  $t + r$  nicht alternierend, dann gilt nach Lemma 4.2  $K(N(t + r)) = \#N(t + r) \Leftrightarrow 1$  und somit  $K(D_r) = n + \#r \Leftrightarrow 1$ , d.h.  $L_r$  läßt sich durch kein Diagramm mit weniger als  $n + \#r \Leftrightarrow 1 \geq n + 1$  Kreuzungen darstellen.

Die Diagramme  $D_0, D_\infty$  haben  $n$  Kreuzungen, die Diagramme  $D_1, D_{\bar{1}}$  haben  $n + 1$  Kreuzungen, und unter den Knäueln  $0, \infty, 1, \bar{1}$  sind Repräsentanten aller drei Klassen rationaler Knäuel. Diagramme mit nicht mehr als  $n + 1$  Kreuzungen können nach obigen Überlegungen außer den vier genannten Knäueln nur Knäuel  $r$  mit

$$n + \#r \Leftrightarrow 1 \leq n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \#r \leq 2$$

liefern, also nur die Knäuel 2 und 20. Diese liegen in der gleichen Knäuelklasse wie 0 bzw.  $\infty$ . Diagramme, die zu  $D_2$  oder  $D_{20}$  äquivalent sind, haben jedoch mindestens eine Kreuzung mehr als  $D_0$  bzw.  $D_\infty$ . Daher folgt die Behauptung über die Gestalt von  $\mathcal{L}_{min}(D)$ .

□

### Bemerkungen:

1. Der Beweis von Satz 4.10 zeigt, daß sich der Satz auf die Situation verallgemeinern läßt, daß  $D'$  beliebig aus reduzierten, alternierenden Diagrammen bezüglich zusammenhängender und disjunkter Summe zusammengesetzt ist, also selbst nicht notwendig alternierend ist.
2. Satz 4.10 gilt auch für  $t \in \{0, \infty\}$ . Dann ist  $[D_1] = [D_{\bar{1}}]$  und

$$\mathcal{L}_{min}(D) = (\{[D_0]\}, \{[D_\infty]\}, \{[D_1]\})$$

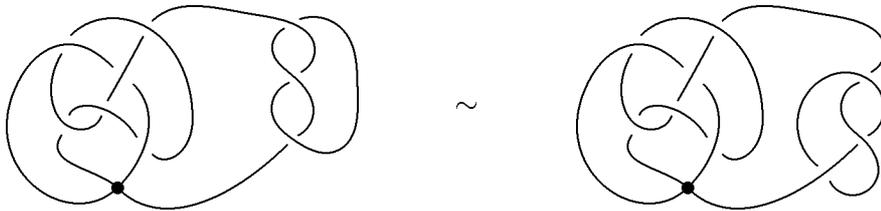
(siehe Beispiel 2 auf Seite 52).

**Satz 4.11** *Es sei  $\mathcal{G}$  ein Achtergraph in  $\mathbb{R}^3$ , und das Diagramm  $D = D^t \# D'$  von  $\mathcal{G}$  sei zusammengesetzt aus einem reduzierten, alternierenden, primen Graphendiagramm  $D^t = N(t + \cdot)$  und einem reduzierten, alternierenden Verkettungsdiagramm  $D'$ . Hat  $D$  dann  $n$  Kreuzungen, so gibt es kein Diagramm von  $\mathcal{G}$  mit weniger als  $n$  Kreuzungen.*

**Beweis:** Angenommen, es gibt ein Diagramm  $\tilde{D}$  von  $\mathcal{G}$  mit weniger als  $n$  Kreuzungen. Bezüglich einer beliebigen Eckenorientierung haben dann  $\tilde{D}_0$  und  $\tilde{D}_\infty$  weniger als  $n$  Kreuzungen, d.h. in zwei der drei Einträge von  $\mathcal{L}_{min}(\tilde{D}) = \mathcal{L}_{min}(D)$  stehen Verkettungsdiagramme mit weniger als  $n$  Kreuzungen – im Widerspruch zu Satz 4.10.

□

**Bemerkung:** Teil b) von Satz 4.9 gilt im allgemeinen nicht unter den Voraussetzungen von Satz 4.11:



### 4.3 Der alternierende zusammengesetzte Fall

Ein Graphendiagramm  $D^t = N(t + \cdot)$  ist nach den Lemmata 3.3 und 2.3 genau dann prim als Graphendiagramm, wenn das Knäuel  $t$  lokal prim ist. Wie in Bemerkung 1 nach Lemma 2.3 folgt, daß sich ein Diagramm  $D^t$ , welches prim als Graphendiagramm ist, darstellen läßt in der Form

$$D^t = N(t_1 + \dots + t_k + \cdot)$$

mit zusammenhängenden Knäueln  $t_1, \dots, t_k$ , so daß  $D(t_i)$  für jeden Index  $i \in \{1, \dots, k\}$  prim ist. Ein alternierendes, reduziertes Diagramm läßt sich daher in obiger Form darstellen, so daß jedes  $D(t_i)$  reduziert, alternierend und prim ist.

Ist  $D^t = N(t + \cdot)$  ein reduziertes, alternierendes Graphendiagramm und  $r$  ein rationales Knäuel, so kann die Differenz zwischen der Anzahl der Kreuzungen von  $D_r^t$  und dem  $z$ -Grad des Kauffman-Polynoms bzw. der Komplexität des Diagramms beliebig groß werden, wie an dem Beispiel auf Seite 80 zu sehen sein wird. Die Abschätzung in dem folgenden Lemma ist daher nicht so grob, wie es zunächst scheint.

**Lemma 4.12**  $t_1, \dots, t_k$  seien zusammenhängende Knäuel, so daß  $D(t_i)$  für jedes  $i \in \{1, \dots, k\}$  reduziert, alternierend, prim und  $t_1 + \dots + t_k$  alternierend mit  $n$  Kreuzungen ist. Ist dann  $r$  ein rationales Knäuel in Normalformgestalt mit  $m \geq 2$  Kreuzungen und  $D_r = N(t_1 + \dots + t_k + r)$ , so gilt:

$$z\text{-Grad}(, D_r) \geq n + m \Leftrightarrow k \Leftrightarrow 1 \quad \text{und} \quad K(D_r) \geq n + m \Leftrightarrow k$$

Insbesondere ist  $K(D_r) \geq \frac{n}{2} + m$ .

**Beweis:** Ist  $t_1 + \dots + t_k + r$  alternierend, so gilt nach Lemma 2.6

$$z\text{-Grad}(, D_r) = n + m \Leftrightarrow 1 \quad \text{und} \quad K(D_r) = n + m,$$

und es ist nichts zu zeigen. Sei also  $t_1 + \dots + t_k + r$  nicht alternierend und ohne Einschränkung  $r > 0$ .

Ist  $0 < r < 1$ , so gilt wegen Lemma 2.8 und nachfolgender Bemerkung

$$z\text{-Grad}(, D_r) = n + m \Leftrightarrow 2 \quad \text{und} \quad K(D_r) = n + m \Leftrightarrow 1,$$

und die Behauptung ist erfüllt.

Ist  $r > 1$ , so läßt sich die Aussage über  $z\text{-Grad}(, D_r)$  induktiv mit dem Rekursionsprinzip für rationale Knäuel zeigen. Für  $r = 2$  liefert die Rekursionsformel für das Kauffman-Polynom angewendet auf eine der beiden Kreuzungen von  $r$  den Induktionsanfang:

$$, D_2 = \Leftrightarrow, N(t_1 + \dots + t_k) + z(a, N(t_1 + \dots + t_k + \infty) + , N(t_1 + \dots + t_k + 1))$$

Das Kauffman-Polynom

$$, N(t_1 + \dots + t_k + \infty) = \prod_{i=1}^k , D(t_i)$$

(Satz 1.6 b)) ist nach Satz 1.11 vom  $z$ -Grad  $n \Leftrightarrow k$  mit zugehörigem Summanden

$$\kappa(a + a^{-1})^k z^{n-k} \quad \text{für ein } \kappa > 0.$$

Wegen Satz 1.24 enthält das Kauffman-Polynom von  $N(t_1 + \dots + t_k + 1)$  keinen Summanden der Form  $u_{k+1, n-k} a^{k+1} z^{n-k}$ , da der zu  $r$  gehörige Teilgraph  $G_+$  einen Isthmus besitzt. Da das Kauffman-Polynom von  $N(t_1 + \dots + t_k)$  nach Satz 1.9 keinen Summanden der Form  $u_{k+1, n-k+1} a^{k+1} z^{n-k+1}$  besitzt, hat  $, D_2$  einen nicht verschwindenden Summanden der Form

$$\kappa a^{k+1} z^{n+m-k-1},$$

und die Behauptung ist wahr für  $r = 2$ .

Ist  $r = a$  ganzzahlig mit  $a \geq 3$ , so lautet die Rekursionsformel für das Kauffman-Polynom angewendet an einer der Kreuzungen von  $r$ :

$$, D_a = \Leftrightarrow , D_{a-2} + z(a^{k-1}, N(t_1 + \dots + t_k + \infty) + , D_{a-1})$$

Das Kauffman-Polynom von  $D_{a-1}$  enthält nach Induktionsvoraussetzung einen nicht verschwindenden Summanden der Form  $\kappa a^{k+1} z^{n+a-k-2}$ . Wegen

$$z\text{-Grad}(, \Gamma_{N(t_1 + \dots + t_k)}) = n \Leftrightarrow k < n + a \Leftrightarrow 2$$

kann kein Summand von  $, N(t_1 + \dots + t_k)$  diesen Term aufheben, und wegen

$$\#D_{a-2} = n + a \Leftrightarrow 2 < (n + a \Leftrightarrow k \Leftrightarrow 2) + 1 + (k + 1)$$

kann nach Satz 1.9 kein Summand von  $, D_{a-2}$  den Term  $\kappa a^{k+1} z^{n+a-k-1}$  aufheben, d.h. das Kauffman-Polynom von  $D_a$  enthält einen nicht verschwindenden Summanden der Form  $\kappa a^{k+1} z^{n+a-k-1}$ , und es folgt die Behauptung für  $r = a$ .

Mit einer weiteren Induktion läßt sich wie in Abschnitt 2.3 für ein beliebiges rationales Knäuel  $r$  mit  $m \geq 2$  Kreuzungen zeigen, daß das Kauffman-Polynom von  $D_r$  einen nicht verschwindenden Term vom  $z$ -Grad  $n + m \Leftrightarrow k \Leftrightarrow 1$  enthält.

Damit ist die Behauptung über den  $z$ -Grad des Kauffman-Polynoms von  $D_r$  gezeigt. Die Aussage

$$K(D_r) \geq n + m \Leftrightarrow k$$

über die Komplexität von  $D_r$  folgt unmittelbar, da das Verkettungsdiagramm mindestens eine Kreuzung hat. Da jedes Knäuel  $t_i$  mindestens zwei Kreuzungen besitzt, ist  $n \geq 2k$  und somit  $K(D_r) \geq \frac{n}{2} + m$ . □

**Korollar 4.13** *Ist  $\mathcal{G}$  ein Achtergraph in  $\mathbb{R}^3$  und  $D$  ein reduziertes, alternierendes Diagramm von  $G$  mit  $n \geq 1$  Kreuzungen, so ist  $\mathcal{G}$  nicht trivial.*

**Beweis:**  $D$  läßt sich darstellen in der Form

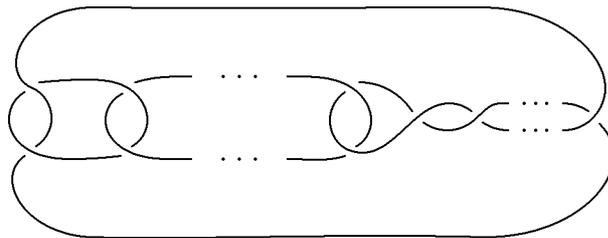
$$N(t_1 + \dots + t_k + \cdot) \# D'$$

für ein  $k \geq 0$ , so daß  $D(t_1), \dots, D(t_k)$  jeweils reduziert, alternierend, prim und  $D'$  ein reduziertes, alternierendes Verkettungsdiagramm ist.

Ist  $k = 0$ , so ist  $D$  zusammengesetzt aus einem trivialen Achtergraphendiagramm und einem reduzierten, alternierenden Verkettungsdiagramm. Es läßt sich dann wie in Beispiel 2 auf Seite 52 zeigen, daß  $D$  in minimaler Darstellung ist, also insbesondere nicht trivial.

Ist  $k \geq 1$ , so gilt  $K(D_0) = K(D_\infty) = n$  nach Korollar 1.13, und für ein rationales Knäuel  $r$  in Normalformgestalt mit mindestens zwei Kreuzungen ist nach Lemma 4.12  $K(D_r) > 2$ , d.h. in mindestens zwei der drei Einträge von  $\mathcal{L}_{min}(D)$  stehen nicht triviale Verkettungsdiagramme. Daher ist  $D$  kein Diagramm des trivialen Achtergraphen in  $\mathbb{R}^3$ , denn alle drei Einträge der Invarianten eines trivialen Achtergraphendiagramms können durch kreuzungsfreie Verkettungsdiagramme repräsentiert werden. □

**Beispiel:** Es sei  $D_n^k = N(\underbrace{\bar{2}0 + \bar{2}0 + \dots + \bar{2}0}_k + n)$ :



Für  $n \geq k \geq 2$  und  $n > k = 1$  gilt

$$z\text{-Grad}(, D_n^k) = k + n \Leftrightarrow 1$$

mit zugehörigem Summanden  $a^k(a + a^{-1})z^{k+n-1}$ , denn das Diagramm läßt sich durch schrittweises „Entdrillen“ zu einem reduzierten, alternierenden, primen Diagramm mit  $k + n$  Kreuzungen umformen:

$$N(\bar{2}0 + \dots + \bar{2}0 + n) = N(20 + \dots + 20 + n \Leftrightarrow k)$$

Für sämtliche Ungleichungen von Lemma 4.12 gilt in diesem Fall also die Gleichheit.  $D_n^k$  besitzt  $2k + n$  Kreuzungen, d.h. die Differenz zwischen Kreuzungszahl des Diagramms und  $z$ -Grad des zugehörigen Kauffman-Polynoms ist  $k + 1$  und kann mit wachsendem  $k$  beliebig groß werden. Eine entsprechende Aussage gilt für die Kapazität des Diagramms.



**Satz 4.14**  $t_1, t_2, t_3$  seien zusammenhängende Knäuel, so daß  $D(t_i)$  für jedes  $i \in \{1, 2, 3\}$  reduziert, alternierend, prim und die Summe  $t_1 + t_2 + t_3$  alternierend ist.  $D'$  sei ein reduziertes und alternierendes Verkettungsdiagramm. Ist dann  $D$  Diagramm eines Achtergraphen  $\mathcal{G}$  in  $\mathbb{R}^3$  von der Form

$$D = N(t_1 + t_2 + \cdot) \# D' \quad \text{oder} \quad D = N(t_1 + t_2 + t_3 + \cdot)$$

mit  $n$  Kreuzungen, so stehen in mindestens zwei von drei Einträgen der Invarianten  $\mathcal{L}_{\min}(D)$  Verkettungsdiagramme mit  $n$  Kreuzungen, und es gibt kein Diagramm von  $\mathcal{G}$  mit weniger als  $n$  Kreuzungen.

**Beweis:** Ist  $D = N(t_1 + t_2 + \cdot) \# D'$ , so gilt für ein rationales Knäuel  $r$  in Normalformgestalt mit  $m \geq 2$  Kreuzungen nach Lemma 4.12:

$$K(D_r) = K(N(t_1 + t_2 + \cdot)) + K(D') \geq \#N(t_1 + t_2 + \cdot) + m \Leftrightarrow 2 + \#D' \geq n$$

Also läßt sich  $D_r$  nicht mit weniger als  $n$  Kreuzungen darstellen. Ebenso besitzen  $D_0$  und  $D_\infty$  wegen  $K(D_0) = K(D_\infty) = n$  keine Darstellung mit weniger als  $n$  Kreuzungen. Daher stehen in mindestens zwei von drei Einträgen der Invarianten  $\mathcal{L}_{\min}(D)$  Verkettungsdiagramme mit mindestens  $n$  Kreuzungen.

Ist  $D = N(t_1 + t_2 + t_3 + \cdot)$ , so gilt für ein rationales Knäuel  $r$  in Normalformgestalt mit  $m \geq 2$  Kreuzungen nach Lemma 4.12:

$$z\text{-Grad}(, D_r) \geq n + m \Leftrightarrow 4 \geq n \Leftrightarrow 2$$

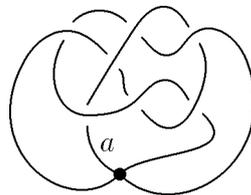
Somit läßt sich  $D_r$  nicht mit weniger als  $n \Leftrightarrow 1$  Kreuzungen darstellen. Ein zu  $D_r$  äquivalentes Diagramm mit  $n \Leftrightarrow 1$  Kreuzungen müßte wegen Korollar 1.12 reduziert und alternierend sein und daher nach Satz 1.3 b) und Satz 1.2 c)  $sp(< D_r >) \geq 4(n \Leftrightarrow 1)$  gelten – im Widerspruch zu Lemma 4.7. Also besitzt jede Darstellung von  $D_r$  mindestens  $n$  Kreuzungen, und wie im vorherigen Fall folgt, daß in zwei von drei Einträgen der Invarianten  $\mathcal{L}_{min}(D)$  Verkettungsdiagramme mit mindestens  $n$  Kreuzungen stehen.

Wird nun für einen der beiden Fälle angenommen, es existiere ein Diagramm  $\tilde{D}$  von  $\mathcal{G}$  mit weniger als  $n$  Kreuzungen, dann haben bezüglich einer beliebigen Eckenorientierung die Verkettungsdiagramme  $\tilde{D}_0$  und  $\tilde{D}_\infty$  weniger als  $n$  Kreuzungen – im Widerspruch zu der Aussage über  $\mathcal{L}_{min}(D) = \mathcal{L}_{min}(\tilde{D})$ .

□

## 4.4 Ein nicht alternierender Graph

Mit den Ergebnissen dieses Kapitels kann nun gezeigt werden, daß ein Achtergraph in  $\mathbb{R}^3$  existiert, der kein alternierendes Diagramm besitzt. Es sei  $D^t$  das folgende Graphendiagramm:



Mit der Summenformel für Knäuel oder dem Rekursionsprinzip für rationale Knäuel läßt sich nachrechnen, daß gilt:

$$\mathcal{L}_{min}(D^t) = (\{5_1\}, \{\overline{5_1}\}, \{6_2^2\})$$

(Einsetzen von  $\bar{1}, 0, \infty$ ). Das Kauffman-Polynom zu den Diagrammen von  $\bar{5}_1$  bzw.  $\overline{\bar{5}}_1$  hat den  $z$ -Grad 4, und die Komplexität ist jeweils 5. Für jedes rationale Knäuel  $r \in \mathcal{K} \setminus \{\bar{1}, 0\}$  ist  $z\text{-Grad}(, D_r^t) \geq 5$  und  $K(D_r^t) \geq 6$ .

Angenommen, es existiert ein zu  $D^t$  äquivalentes Diagramm  $D$ , das alternierend ist.  $D$  sei ohne Einschränkung reduziert, denn das Reduzieren eines Isthmus in einem alternierenden Verkettungsdiagramm führt wieder zu einem alternierenden Diagramm.  $D$  läßt sich dann darstellen in der Form

$$D = N(t_1 + \dots + t_k + \cdot) \# D'$$

für ein  $k \geq 0$ , so daß  $D(t_i)$  reduziert, alternierend, prim für  $i \in \{1, \dots, k\}$  und  $D'$  ein reduziertes, alternierendes Verkettungsdiagramm ist.

Ist  $k = 0$  und  $D^t$  somit zusammengesetzt aus dem Diagramm des trivialen Achtergraphen und einem reduzierten, alternierenden Verkettungsdiagramm, so gilt nach Beispiel 2 auf Seite 52

$$\mathcal{L}_{min}(D) = (\{[D']\}, \{[D']\}, \{[D' \sqcup \bigcirc]\}),$$

d.h. in allen drei Einträgen von  $\mathcal{L}_{min}(D)$  stehen Diagramme mit identischer minimaler Kreuzungszahl – im Widerspruch zu der Gestalt von  $\mathcal{L}_{min}(D^t) = \mathcal{L}_{min}(D)$ .

Ist  $k \geq 1$ , so hat  $D$   $n \geq 6$  Kreuzungen. Andernfalls wäre  $z\text{-Grad}(, D_1) < 4$  oder  $z\text{-Grad}(, D_{\bar{1}}) < 4$ , da eines der beiden Diagramme eine 3-Brücke hätte – im Widerspruch zu der Aussage über den  $z$ -Grad von  $, D_r^t$ . Wegen Lemma 4.12 gilt zudem  $n \leq 7$ . Denn andernfalls wäre  $K(D_r) \geq m + 4 \geq 6$  für jedes rationale Knäuel  $r$  mit  $m \geq 2$  Kreuzungen und  $K(D_0) = K(D_\infty) = n \geq 8$ , d.h. in mindestens zwei der drei Einträge von  $\mathcal{L}_{min}(D)$  stünden Diagramme mit einer Komplexität größer als 5 – im Widerspruch zu der Gestalt von  $\mathcal{L}_{min}(D^t) = \mathcal{L}_{min}(D)$ .

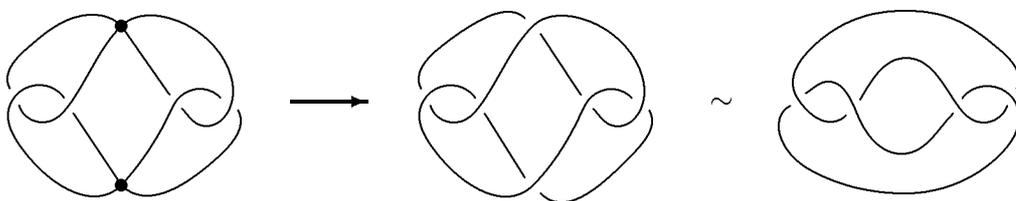
Da jedes der Knäuel  $t_i$  mindestens zwei Kreuzungen besitzt, gilt wegen  $n \leq 7$  also  $1 \leq k \leq 3$ . Mit  $n \geq 6$  folgt aus Satz 4.8 bzw. Satz 4.14, daß in zwei der drei Einträge von  $\mathcal{L}_{min}(D)$  Verkettungsdiagramme mit mindestens 6 Kreuzungen stehen, wobei für den Fall  $k = 3$  zu beachten ist, daß wegen  $\#D' = 0$  die Gleichung  $z\text{-Grad}(, D_r) = z\text{-Grad}(, N(t_1+t_2+t_3+r))$  gilt und somit Satz 4.14 auch auf diesen Fall angewendet werden kann. Wiederum ergibt sich ein Widerspruch zu der Gestalt von  $\mathcal{L}_{min}(D^t) = \mathcal{L}_{min}(D)$ .

Also führt die Existenz des Diagramms  $D$  in jedem Fall zu einem Widerspruch. Daher besitzt der zu  $D^t$  gehörige Achtergraph in  $\mathbb{R}^3$  kein alternierendes Diagramm.

# Kapitel 5

## Alternierende Graphendiagramme

Die Aussage über  $\mathcal{L}_{min}(D)$  von Satz 4.8 (und somit auch Satz 4.9) läßt sich nicht ohne weiteres auf Diagramme von 4-regulären Graphen in  $\mathbb{R}^3$  mit mehr als einer Ecke vom Grad vier verallgemeinern. Denn bei der Berechnung des Kauffman-Polynoms wurde entscheidend verwendet, daß für ein Verkettungsdiagramm  $D$  mit  $n \geq 1$  Kreuzungen  $z\text{-Grad}(, D)$  nach oben durch  $n \Leftrightarrow b$  abgeschätzt werden kann, wobei  $b$  die Länge der längsten Brücke des Diagramms bezeichnet (Korollar 1.10). Diese Abschätzung läßt sich im allgemeinen nicht verbessern, wenn mehrere Brücken existieren. Betrachte dazu zum Beispiel das folgende Verkettungsdiagramm  $D$ , das aus einem alternierenden Graphendiagramm entsteht, indem die beiden Ecken (bzgl. geeigneter gewählter Eckenorientierung) durch das rationale Knäuel 1 ersetzt werden:



Das Diagramm besitzt zwei 3-Brücken, und es ist  $z\text{-Grad}(, D) = \#D \Leftrightarrow 3$ .

Wie die gewünschte Verallgemeinerung von Satz 4.9 erreicht werden kann, wenn das Ersetzen der Ecken eines alternierenden Graphendiagramms durch 1 bzw.  $\bar{1}$ , so daß 3-Brücken entstehen, zu einer genügend großen Absenkung

des  $z$ -Grades führt, wird in Abschnitt 5.3 untersucht. Zuvor wird ein anderer Weg beschritten, um eine Verallgemeinerung von Satz 4.9 auf Graphen mit höchstens drei Ecken vom Grad vier zu erzielen. Es werden dazu Aussagen über die Elemente von  $\mathcal{L}(D)$  hergeleitet, indem Äquivalenzumformungen von Graphendiagrammen mit Hilfe von *Transformationsknäueln* beschrieben werden.

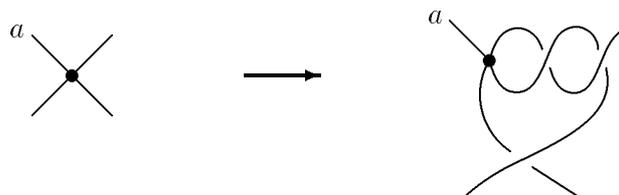
Im gesamten Kapitel werden stets 4-reguläre Graphen im erweiterten Sinne betrachtet, d.h. jede Ecke eines Graphen sei vom Grad zwei oder vier.

## 5.1 Transformationen von Graphendiagrammen

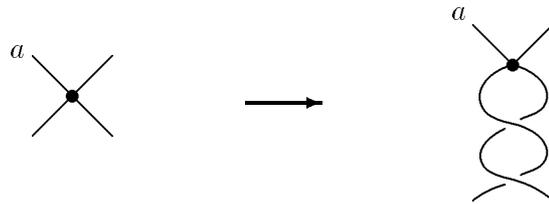
Wie aus dem Beweis von Satz 3.1 hervorgeht, entspricht der Übergang von einem Graphendiagramm  $D$  zu einem äquivalenten Diagramm  $\tilde{D}$  mittels den angewendeten Reidemeister-Bewegungen vom Typ V an jeder Ecke des Graphen in gewissem Sinne einem rationalen Knäuel.

**Definition**  $\mathcal{G}$  sei ein Graph in  $\mathbb{R}^3$  mit  $k \geq 1$  Ecken vom Grad vier. Sind  $D$  und  $\tilde{D}$  eckenorientierte Diagramme von  $\mathcal{G}$  und ist  $D_{0,\dots,0} = \tilde{D}_{t_1,\dots,t_k}$  für rationale Knäuel  $t_1, \dots, t_k$ , so heißt  $t_j$  mit  $j \in \{1, \dots, k\}$  das  $j$ -te *Transformationsknäuel* der Transformation von  $D$  nach  $\tilde{D}$ . Sind  $r_1, \dots, r_k$  rationale Knäuel, so wird mit  $r_j * t_j$  das Knäuel bezeichnet, in welches das Knäuel  $r_j$  nach Einsetzen in die  $j$ -te Ecke des Graphendiagramms  $D$  durch die Transformation umgeformt wird, d.h. es ist  $D_{r_1,\dots,r_k} = \tilde{D}_{r_1*t_1,\dots,r_k*t_k}$ .

**Beispiele:** Die Umformung



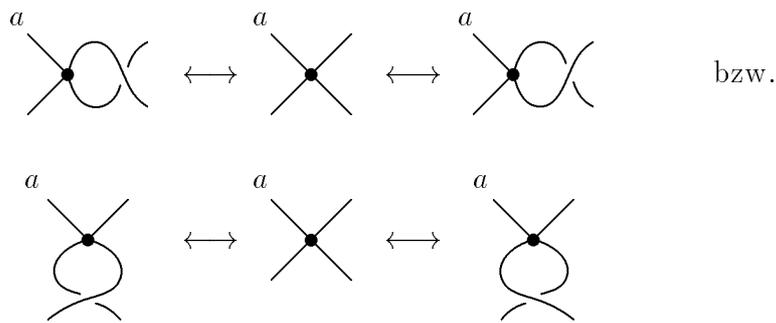
wird durch das Transformationsknäuel  $t = 210 \in \mathcal{K}$  beschrieben und die Umformung



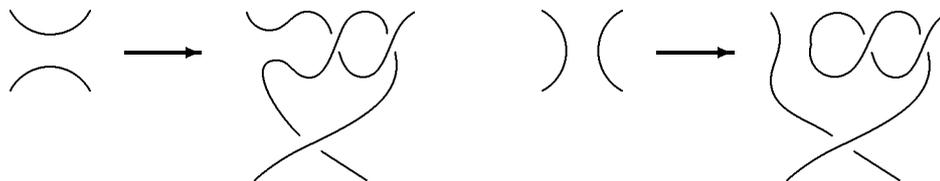
durch das Transformationsknäuel  $0\bar{2}0$ .



Da das Kauffman–Polynom nach Lemma 2.5 b) invariant unter Anwendung von „flypes“ ist, kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß bezüglich einer angegebenen Eckenorientierung nur die folgenden Reidemeister–Bewegungen vom Typ V vorkommen:



Ein Transformationsknäuel  $t$  läßt sich dann in der Form  $t = b_1 \dots b_s$  mit ganzzahligen Knäueln  $b_1, \dots, b_s$  darstellen, wobei  $b_1 \dots b_s$  jedoch nicht notwendig in Normalformgestalt ist. Ein rationales Knäuel  $r = a_1 \dots a_l$  wird mittels des Transformationsknäuels  $t$  umgeformt zu dem Knäuel  $r * t = a_1 \dots a_{l-1}(a_l + b_1)b_2 \dots b_s$ . Insbesondere werden die Knäuel  $0, \infty$  abgebildet auf  $t$  bzw. einem zu  $b_2 \dots b_s$  äquivalenten:



**Lemma 5.1** Sind  $r, \tilde{r}, t$  rationale Knäuel und  $r, \tilde{r}$  aus verschiedenen der Knäuelklassen  $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_\infty, \mathcal{K}_1$ , so sind auch  $r * t$  und  $\tilde{r} * t$  aus verschiedenen Knäuelklassen.

**Beweis:** Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Beobachtung, daß eine Reidemeister-Bewegung vom Typ V jeweils die Elemente zweier verschiedener Knäuelklassen ineinander überführt und die Elemente der dritten Klasse in sich.

□

## 5.2 Graphen mit höchstens drei Ecken vom Grad vier

Ähnlich wie schon in Kapitel 4 wird im folgenden eine Knäuelsumme mit rationalem Anteil  $r$  betrachtet:

$$D_r^t = N(t+r) = \text{Diagramm}$$

Im Unterschied zu vorhergehenden Betrachtungen ist jedoch das Knäuel  $t$  nicht notwendig alternierend. Denn  $D_r^t$  soll als Verkettungsdiagramm interpretiert werden, das aus einem Graphendiagramm durch Ersetzen von  $k \geq 2$  Ecken durch rationale Knäuel entstanden ist, wobei  $r$  ein ausgewähltes dieser Knäuel ist.

**Lemma 5.2** *Es sei  $t$  ein Knäuel, und zu einem rationalen Knäuel  $r$  sei  $D_r^t = N(t+r)$ . Weiter bezeichne  $p_0 := z\text{-Grad}(, D_0^t)$  und  $p_\infty := z\text{-Grad}(, D_\infty^t)$ . Ist dann  $p_\infty \geq p_0$ , so existiert höchstens ein rationales Knäuel  $r$  in Normalformgestalt mit  $r \geq 1$ , so daß  $z\text{-Grad}(, D_r^t) < p_\infty$  ist.*

**Beweis:** Der Beweis erfolgt unter Anwendung des Rekursionsprinzips für rationale Knäuel, d.h. es wird induktiv  $z\text{-Grad}(, D_r^t)$  berechnet. Verwende im weiteren die abkürzende Schreibweise  $,_r := , D_r^t$ .

Ist  $r = 2$ , so liefert die Rekursionsformel für das Kauffman-Polynom angewendet auf eine der beiden Kreuzungen von  $r$ :

$$,_2 = \Leftrightarrow ,_0 + z(a,_\infty + ,_1)$$

Es sei  $g := z\text{-Grad}(\cdot, 2)$ . Der weitere Beweis gliedert sich in zwei Fälle.

**1. Fall:**  $g \geq p_\infty + 1$

Dann ist  $z\text{-Grad}(\cdot, 1) \leq g \Leftrightarrow 1$ , und es läßt sich mittels einer doppelten Induktion zeigen, daß  $z\text{-Grad}(\cdot, r) = g + \#r \Leftrightarrow 2$  für  $r \neq 1$  ist. Ist  $s = 1$  und  $r$  ein ganzzahliges Knäuel mit Normalformgestalt  $k$ , so gilt die Behauptung für  $k = 2$  nach Voraussetzung und folgt im Induktionsschritt aus der Rekursionsformel

$$(*) \quad \cdot,_{k+1} = \Leftrightarrow \cdot,_{k-1} + z(a^k, \infty + \cdot, k),$$

also  $z\text{-Grad}(\cdot,_{k+1}) = g + k \Leftrightarrow 1$  für  $k \geq 2$ .

Ist  $s \geq 2$  und die Behauptung für rationale Knäuel der Länge  $s \Leftrightarrow 1$  gezeigt, so führe eine weitere Induktion nach  $a_1$  durch:

$$\cdot,_{2a_2 \dots a_s} = \Leftrightarrow a^{\pm a_2},_{a_3 \dots a_s} + z(a^{\mp 1},_{a_2 \dots a_s} + \cdot,_{(a_2+1)a_3 \dots a_s})$$

(mit  $\cdot,_{a_3 \dots a_s} = \cdot, \infty$ , falls  $s = 2$ ) liefert den Induktionsanfang, und mit

$$\cdot,_{(k+1)a_2 \dots a_s} = \Leftrightarrow \cdot,_{(k-1)a_3 \dots a_s} + z(a^{\mp k},_{a_2 \dots a_s} + \cdot,_{ka_2 \dots a_s}) \quad \text{für } k \geq 2$$

folgt die Behauptung im Induktionsschritt.

Somit ist in diesem Fall der  $z$ -Grad des Kauffman-Polynoms von  $D_r^t$  höchstens für  $r = 1$  kleiner als  $p_\infty$ .

**2. Fall:**  $g \leq p_\infty$

In diesem Fall ist  $z\text{-Grad}(\cdot, 1) = p_\infty$ . Ähnlich wie im ersten Fall führe eine doppelte Induktion durch. Betrachte zunächst wieder ganzzahlige Knäuel. Dann ist entweder  $z\text{-Grad}(\cdot, k) = p_\infty$  für jedes  $k \geq 1$  oder es existiert ein  $N \geq 2$  mit  $z\text{-Grad}(\cdot, N) \neq p_\infty$ . Tritt letzterer Fall ein, so wähle ein solches  $N$  minimal, und es sei  $h := z\text{-Grad}(\cdot, N)$ . Mit der Rekursionsformel (\*) ergibt sich:

$$z\text{-Grad}(\cdot,_{N+1}) = \begin{cases} p_\infty + 1 & \text{falls } h < p_\infty \\ p_\infty + 2 & \text{falls } h > p_\infty \end{cases}$$

(denn aus der Rekursionsformel folgt ebenfalls:  $h > p_\infty \Rightarrow h = p_\infty + 1$ ), und induktiv:

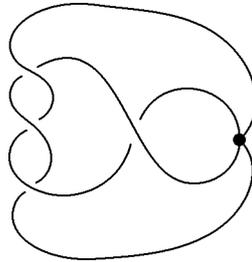
$$z\text{-Grad}(\cdot,_{N+l}) = \begin{cases} p_\infty + l & \text{falls } h < p_\infty \\ p_\infty + l + 1 & \text{falls } h > p_\infty \end{cases} \quad \text{für } l \geq 1$$

Mit einer weiteren Induktion nach  $s$  wie im ersten Fall folgt nun, daß der  $z$ -Grad des Kauffman-Polynoms von  $D_r^t$  für höchstens ein rationales Knäuel  $r$  mit  $r \geq 1$  kleiner als  $p_\infty$  ist. □

**Korollar 5.3** *Mit den Bezeichnungen von Lemma 5.2 sei  $p_\infty = p_0 =: p$ . Dann existiert für jeden der vier Fälle  $r \geq 1$ ,  $0 \leq r \leq 1$ ,  $\Leftrightarrow 1 \leq r \leq 0$  und  $r \leq \Leftrightarrow 1$  höchstens ein rationales Knäuel  $r$  in Normalformgestalt, so daß  $z\text{-Grad}(, D_r^t) < p$  ist.*

**Beweis:** Der Beweis von Lemma 5.2 läßt sich genauso für ein rationales Knäuel  $r$  mit  $0 \leq r \leq 1$  durchführen, wobei in den Rekursionsformeln lediglich  $a$  durch  $a^{-1}$  zu ersetzen ist. Die Aussage für die Fälle  $\Leftrightarrow 1 \leq r \leq 0$  und  $r \leq \Leftrightarrow 1$  folgt dann mit Satz 1.6 a) durch Betrachtung von  $\overline{D}_r^t$ . □

**Bemerkung:** Lemma 5.2 gilt im allgemeinen nicht ohne die Voraussetzung  $p_\infty \geq p_0$ :



Das Diagramm eines Achtergraphen in  $\mathbb{R}^3$  ist von der Form  $D = N(t + \cdot)$  mit  $t = \overline{31}$ . Es gilt  $p_\infty = 2 < 3 = p_0$ , jedoch ist

$$z\text{-Grad}(, D_1) = 0 < p_\infty \quad \text{und} \quad z\text{-Grad}(, D_2) = 1 < p_\infty .$$

**Lemma 5.4** *Es sei  $\mathcal{G}$  ein Graph in  $\mathbb{R}^3$  mit  $k \geq 2$  Ecken vom Grad vier und  $D$  ein eckenorientiertes Diagramm von  $\mathcal{G}$  mit  $n \geq 1$  Kreuzungen, das reduziert, alternierend und prim ist. Die Eckenorientierung sei dergestalt, daß  $D_{\overline{1}, \dots, \overline{1}}$  alternierend ist. Sind dann  $r_1, \dots, r_k$  rationale Knäuel in Normalformgestalt,*

so daß  $0 < r_i < 1$  für jedes  $i \in \{1, \dots, k\}$  oder  $r_i > 1$  für jedes  $i \in \{1, \dots, k\}$  gilt, so ist

$$z\text{-Grad}(\textcircled{D}_{r_1, \dots, r_k}) \geq n \Leftrightarrow k \Leftrightarrow 1 + \sum_{i=1}^k \#r_i.$$

Im Falle  $k = 2$  gilt die Gleichheit.

**Beweis:** Zeige die Behauptung zunächst für  $k = 2$  und  $r_1, r_2 > 1$ . Es sei  $r := r_1$ ,  $s := r_2$  und  $\textcircled{, r, s} := \textcircled{, D_{r, s}}$ . Führe den Beweis mit Hilfe des Rekursionsprinzips für rationale Knäuel nach  $s$ .

Ist  $s = 2$ , so liefert die Rekursionsformel für das Kauffman-Polynom angewendet auf eine der beiden Kreuzungen von  $s$ :

$$\textcircled{, r, 2} = \textcircled{, r, 0} + z(a \textcircled{, r, \infty} + \textcircled{, r, 1})$$

Nach Lemma 2.8 ist  $z\text{-Grad}(\textcircled{, r, 0}) = z\text{-Grad}(\textcircled{, r, \infty}) = n + \#r \Leftrightarrow 2$ , und nach Korollar 1.10 gilt  $z\text{-Grad}(\textcircled{, r, 1}) \leq n + \#r \Leftrightarrow 2$ , da  $D_{r, 1}$  eine 3-Brücke besitzt (denn  $D$  ist reduziert und prim). Der zu  $\textcircled{, r, \infty}$  gehörige Summand mit höchstem Exponenten in der Variablen  $z$  ist nach Lemma 2.8 von der Form  $\kappa a(a + a^{-1})z^{n+\#r-2}$  für ein  $\kappa > 0$  (wie aus dem Beweis von Lemma 2.8 hervorgeht, ist der Exponent von  $a^{\pm 1}$  hier positiv, da  $B^N = N(r)$  reduziert, alternierend und prim ist). Nach Satz 1.24 besitzt  $\textcircled{, r, 1}$  keinen Term der Form  $\lambda a^3 z^{n+\#r-2}$  mit  $\lambda \neq 0$  (wegen der Kante des zum Verkettungsdiagramm gehörigen Graphen, die der Kreuzung des Knäuels „1“ entspricht), d.h. es ist  $z\text{-Grad}(\textcircled{, r, 2}) = n + \#r \Leftrightarrow 1$ , und das Kauffman-Polynom enthält einen nicht verschwindenden Summanden der Form  $\kappa a^3 z^{n+\#r-1}$ .

Mit dem Rekursionsprinzip für rationale Knäuel läßt sich wie in Abschnitt 2.3 induktiv zeigen, daß  $\textcircled{, r, s}$  einen nicht verschwindenden Summanden der Form  $\kappa a^3 z^{n+\#r+\#s-3}$  enthält, und die Behauptung folgt für den Fall  $k = 2$ .

Ist nun  $k \geq 2$  beliebig und sind rationale Knäuel  $r_1, \dots, r_k > 1$  gegeben, so weise mittels vollständiger Induktion nach  $k$  völlig analog zum Induktionsanfang  $k = 2$  die Existenz eines nicht verschwindenden Summanden der Form  $\kappa a^{k+1} z^{n+\#r_1+\dots+\#r_k-k-1}$  nach.

Sind rationale Knäuel  $0 < r_1, \dots, r_k < 1$  gegeben, so läßt sich der Beweis unter Vertauschung der Rollen von  $a$  und  $a^{-1}$  völlig analog führen.

□

**Satz 5.5** *Es sei  $\mathcal{G}$  ein Graph in  $\mathbb{R}^3$  mit  $k \leq 3$  Ecken vom Grad vier und  $D$  ein Diagramm von  $\mathcal{G}$  mit  $n$  Kreuzungen, das alternierend, reduziert und prim ist. Dann gilt:*

- a) *Es gibt kein Diagramm von  $\mathcal{G}$  mit weniger als  $n$  Kreuzungen.*
- b) *Jedes nicht alternierende Diagramm von  $\mathcal{G}$  besitzt mehr als  $n$  Kreuzungen.*

**Beweis:** Es sei  $\tilde{D}$  ein zu  $D$  äquivalentes Graphendiagramm. Verseehe  $D$  und  $\tilde{D}$  mit einer beliebigen Eckennumerierung und -orientierung, wobei die Eckenorientierung von  $D$  ohne Einschränkung derart gewählt sei, daß  $D_{\overline{1}, \dots, \overline{1}}$  alternierend ist. Da die behaupteten Aussagen für  $n = 0$  oder  $n = 1$  offensichtlich richtig sind, sei im weiteren  $n \geq 2$ .

**k = 1 :**

Die Behauptung gilt nach Satz 4.9.

**k = 2 :**

Zu  $\varepsilon, \mu \in \{0, \infty\}$  existieren rationale Knäuel  $r$  und  $s$  in Normalformgestalt, so daß  $\tilde{D}_{\varepsilon, \mu} \sim D_{r, s}$  ist. Dabei können  $\varepsilon$  und  $\mu$  nach Lemma 5.1 so gewählt werden, daß  $r \neq 1$  und  $s \neq 1$  gilt.

Ist eines der beiden Knäuel  $r, s$  negativ oder aus der Menge  $\{0, \infty\}$ , so gilt nach den Lemmata 2.6, 2.8 und Satz 1.11:

$$z\text{-Grad}(\cdot, D_{r, s}) = \begin{cases} n + \#r + \#s \Leftrightarrow 1 & \text{falls } D_{r, s} \text{ alternierend} \\ n + \#r + \#s \Leftrightarrow 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls  $r, s$  nicht beide aus  $\{0, \infty\}$  sind, ist  $\#r \geq 2$  oder  $\#s \geq 2$  und somit

$$z\text{-Grad}(\cdot, \tilde{D}_{\varepsilon, \mu}) = z\text{-Grad}(\cdot, D_{r, s}) \geq n .$$

Also besitzt entweder  $\tilde{D}_{\varepsilon, \mu}$  und somit auch  $\tilde{D}$  mindestens  $n + 1$  Kreuzungen, oder es ist  $r, s \in \{0, \infty\}$ . In letzterem Fall hat  $\tilde{D}$  nach Korollar 1.12 genau  $n$  Kreuzungen, falls  $\tilde{D}_{\varepsilon, \mu}$  – bis auf kreuzungsfreie Komponenten – reduziert, alternierend, prim ist, und andernfalls mehr als  $n$  Kreuzungen.

Ist  $0 < r, s < 1$  oder  $r, s > 1$ , so gilt nach Lemma 5.4

$$z\text{-Grad}(\cdot, \tilde{D}_{\varepsilon, \mu}) = z\text{-Grad}(\cdot, D_{r, s}) = n \Leftrightarrow 3 + \#r + \#s \geq n + 1 ,$$

d.h.  $\tilde{D}$  hat mindestens  $n + 2$  Kreuzungen.

Ist  $0 < r < 1$  und  $s > 1$  (oder umgekehrt), so definiere

$$\tilde{\mu} := \begin{cases} 0 & \text{falls } \mu = \infty \\ \infty & \text{falls } \mu = 0 \end{cases}$$

und betrachte das rationale Knäuel  $\tilde{s}$  in Normalformgestalt, welches die Relation  $\tilde{D}_{\varepsilon, \tilde{\mu}} \sim D_{r, \tilde{s}}$  erfüllt. Gilt nicht  $\tilde{s} > 1$ , d.h. ist  $\tilde{s}$  negativ oder aus  $\{0, \infty\}$  oder ist  $0 < \tilde{s} < 1$ , so folgt wie in den vorangehenden Fällen

$$z\text{-Grad}(\tilde{D}_{\varepsilon, \tilde{\mu}}) = z\text{-Grad}(D_{r, \tilde{s}}) \geq n .$$

Da nach Lemma 2.8

$$z\text{-Grad}(D_{r, 0}) = z\text{-Grad}(D_{r, \infty}) = n + \#r \Leftrightarrow 2$$

ist, folgt für den Fall  $\tilde{s} > 1$  aus Lemma 5.2, daß entweder

$$z\text{-Grad}(\tilde{D}_{\varepsilon, \mu}) = z\text{-Grad}(D_{r, s}) \geq n + \#r \Leftrightarrow 2 \geq n$$

oder

$$z\text{-Grad}(\tilde{D}_{\varepsilon, \tilde{\mu}}) = z\text{-Grad}(D_{r, \tilde{s}}) \geq n + \#r \Leftrightarrow 2 \geq n$$

gilt, d.h.  $\tilde{D}$  besitzt in jedem Fall mindestens  $n + 1$  Kreuzungen.

Insgesamt hat  $\tilde{D}$  somit mindestens  $n$  Kreuzungen, d.h. es existiert kein Diagramm von  $\mathcal{G}$  mit weniger als  $n$  Kreuzungen. Besitzt  $\tilde{D}$  genau  $n$  Kreuzungen, so ist nach obigen Überlegungen  $\tilde{D}_{\varepsilon, \mu}$  – bis auf kreuzungsfreie Komponenten – reduziert, alternierend und prim, das Graphendiagramm  $\tilde{D}$  also nach Lemma 3.4 alternierend.

**k = 3 :**

Ähnlich wie im Fall  $k = 2$  seien  $\varepsilon, \mu, \nu \in \{0, \infty\}$  und  $r \neq 1, s \neq 1, t \neq 1$  rationale Knäuel in Normalformgestalt, so daß  $\tilde{D}_{\varepsilon, \mu, \nu} \sim D_{r, s, t}$  ist.

Ist eines der Knäuel  $r, s, t$  negativ oder aus der Menge  $\{0, \infty\}$ , so lassen sich wie im Fall  $k = 2$  Aussagen über den  $z$ -Grad des Kauffman-Polynoms von  $\tilde{D}_{\varepsilon, \mu, \nu}$  machen.

Ist  $0 < r, s, t < 1$  oder  $r, s, t > 1$ , so gilt nach Lemma 5.4

$$z\text{-Grad}(\tilde{D}_{\varepsilon, \mu, \nu}) = z\text{-Grad}(D_{r, s, t}) \geq n \Leftrightarrow 4 + \#r + \#s + \#t \geq n + 2 ,$$

d.h.  $\tilde{D}$  hat mindestens  $n + 3$  Kreuzungen.

In jedem anderen Fall gelten bis auf Vertauschung der Buchstaben  $r, s, t$  die Ungleichungen  $0 < r, s < 1$  und  $t > 1$ . Definiere

$$\tilde{\nu} := \begin{cases} 0 & \text{falls } \nu = \infty \\ \infty & \text{falls } \nu = 0 \end{cases}$$

und betrachte das rationale Knäuel  $\tilde{t}$  in Normalformgestalt, welches die Relation  $\tilde{D}_{\varepsilon, \mu, \tilde{\nu}} \sim D_{r, s, \tilde{t}}$  erfüllt. Gilt nicht  $\tilde{t} > 1$ , so folgt wie in den vorangehenden Fällen

$$z\text{-Grad}(\tilde{D}_{\varepsilon, \mu, \tilde{\nu}}) = z\text{-Grad}(D_{r, s, \tilde{t}}) \geq n .$$

Da nach Lemma 5.4

$$z\text{-Grad}(D_{r, s, 0}) = z\text{-Grad}(D_{r, s, \infty}) = n + \#r + \#s \Leftrightarrow 3$$

ist, folgt für den Fall  $\tilde{t} > 1$  aus Lemma 5.2, daß entweder

$$z\text{-Grad}(\tilde{D}_{\varepsilon, \mu, \tilde{\nu}}) = z\text{-Grad}(D_{r, s, t}) \geq n + \#r + \#s \Leftrightarrow 3 \geq n + 1$$

oder

$$z\text{-Grad}(\tilde{D}_{\varepsilon, \mu, \tilde{\nu}}) = z\text{-Grad}(D_{r, s, \tilde{t}}) \geq n + \#r + \#s \Leftrightarrow 3 \geq n + 1$$

gilt, d.h.  $\tilde{D}$  besitzt in jedem Fall mindestens  $n + 2$  Kreuzungen.

Mit den gleichen Argumenten wie im Fall  $k = 2$  folgt aus diesen Überlegungen die Behauptung. □

**Bemerkung:** Wie in Abschnitt 4.2 läßt sich Satz 5.5 auf die Situation verallgemeinern, daß  $D$  bezüglich zusammenhängender oder disjunkter Summe zusammengesetzt ist aus einem reduzierten, alternierenden, primen Graphendiagramm und reduzierten, alternierenden Verkettungsdiagrammen, indem die Komplexität von  $D$  betrachtet wird.

### 5.3 Weitere Klassen alternierender Graphen

In diesem Abschnitt werden zwei Klassen alternierender Graphen bzw. alternierender Graphendiagramme mit beliebiger Zahl der Ecken vom Grad vier vorgestellt, die eine Verallgemeinerung von Satz 1.5 zulassen. Die erste Klasse wird durch eine eher technische Eigenschaft charakterisiert:

**Definition** Es sei  $\mathcal{G}$  ein Graph in  $\mathbb{R}^3$  mit  $k \geq 1$  Ecken vom Grad vier und  $D$  ein alternierendes Diagramm von  $\mathcal{G}$  mit  $n \geq 1$  Kreuzungen.  $D$  werde mit einer beliebigen Eckennumerierung und einer Eckenorientierung versehen, so daß  $D_{\overline{1}, \dots, \overline{1}}$  alternierend ist. Dann heißt  $D$  *gradreduzierend*, falls für jede Wahl von  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{0, \infty, 1\}$  mit  $\varepsilon_j = 1$  für mindestens ein  $j \in \{1, \dots, k\}$  gilt:

$$z\text{-Grad}(, D_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k}) \leq n \Leftrightarrow 2$$

**Bemerkung:** Ist  $D$  Diagramm eines Achtergraphen in  $\mathbb{R}^3$  mit  $n \geq 1$  Kreuzungen, das reduziert, alternierend und prim ist, so ist  $D$  gradreduzierend.

**Lemma 5.6** *Es sei  $\mathcal{G}$  ein Graph in  $\mathbb{R}^3$  mit  $k \geq 1$  Ecken vom Grad vier und  $D$  ein eckenorientiertes Diagramm von  $\mathcal{G}$ , das reduziert, alternierend, prim und gradreduzierend ist. Dann gilt für  $i_1, \dots, i_k \in \{0, \infty\}$*

$$\mathcal{L}_{\min}^{i_1, \dots, i_k}(D) = \{[D_{i_1, \dots, i_k}]\},$$

und für rationale Knäuel  $r_1, \dots, r_k$  in Normalformgestalt mit  $r_j \in \mathcal{K}_{i_j}$  für  $j \in \{1, \dots, k\}$  und  $r_{j_0} \notin \{0, \infty\}$  für mindestens einen Index  $j_0 \in \{1, \dots, k\}$  ist  $[D_{r_1, \dots, r_k}] \neq [D_{i_1, \dots, i_k}]$ .

**Beweis:** Die Eckenorientierung des Graphendiagramms sei ohne Einschränkung so, daß  $D_{\overline{1}, \dots, \overline{1}}$  alternierend ist, und  $n$  bezeichne die Anzahl der Kreuzungen von  $D$ . Sind  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{0, \infty, 1\}$ , wobei die Anzahl der Einsen  $l \geq 1$  ist, so gilt nach Voraussetzung:

$$z\text{-Grad}(, D_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k}) \leq n \Leftrightarrow 2 = \#D_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k} \Leftrightarrow l \Leftrightarrow 2$$

Zeige nun, daß daraus für beliebige positive rationale Knäuel  $r_1, \dots, r_k$  in Normalformgestalt folgt:

$$z\text{-Grad}(, D_{r_1, \dots, r_k}) \begin{cases} \leq \#D_{r_1, \dots, r_k} \Leftrightarrow k \Leftrightarrow 2 & \text{falls } r_j = 1 \text{ für mindestens ein } j \\ = \#D_{r_1, \dots, r_k} \Leftrightarrow k \Leftrightarrow 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da die Aussage für den Fall  $k = 1$  nach Korollar 1.10 (für  $r_k = 1$ ) und Lemma 2.8 wahr ist, gelte für den weiteren Beweis  $k \geq 2$ .

Es sei  $l$  die Anzahl der Indizes  $j$  mit  $r_j = 1$ . Beweise die Aussage mittels vollständiger Induktion nach  $k \Leftrightarrow l \geq 0$ . Für  $k \Leftrightarrow l = 0$ , d.h.  $k = l$  und  $r_1 = \dots = r_k = 1$ , gilt die Aussage nach Voraussetzung. Sei im folgenden also  $k \Leftrightarrow l \geq 1$ . Es ist dann  $r_j \neq 1$  für mindestens ein  $j \in \{1, \dots, k\}$ , und ohne Einschränkung sei  $r_k \neq 1$ .

Betrachte zunächst den Fall, daß  $r_k = 2$  ist. Die Rekursionsformel für das Kauffman-Polynom angewendet auf eine der beiden Kreuzungen von  $r_k$  liefert dann:

$$, D_{r_1, \dots, r_{k-1}, 2} = , D_{r_1, \dots, r_{k-1}, 0} + z(a, D_{r_1, \dots, r_{k-1}, \infty} + , D_{r_1, \dots, r_{k-1}, 1})$$

$D_{r_1, \dots, r_{k-1}, 0}$  und  $D_{r_1, \dots, r_{k-1}, \infty}$  lassen sich als Graphendiagramme von Graphen mit  $k \Leftrightarrow 1$  Ecken auffassen, bei denen die Ecken durch positive rationale Knäuel ersetzt worden sind, wobei für  $l$  Indizes  $r_j = 1$  ist.  $D_{r_1, \dots, r_{k-1}, 1}$  ist aus dem Diagramm eines Graphen mit  $k$  Ecken entstanden, wobei für  $l + 1$  Indizes  $r_j = 1$  gilt. Auf alle drei Diagramme läßt sich wegen  $k \Leftrightarrow l \Leftrightarrow 1 < k \Leftrightarrow l$  die Induktionsvoraussetzung anwenden. Ist  $l \geq 1$ , so folgt aus den drei Ungleichungen, die nach Induktionsvoraussetzung gelten, die behauptete Ungleichung für das Kauffman-Polynom von  $D_{r_1, \dots, r_{k-1}, 2}$ . Ist  $l = 0$ , so folgt aus

$$z\text{-Grad}(, D_{r_1, \dots, r_{k-1}, 0}) = z\text{-Grad}(, D_{r_1, \dots, r_{k-1}, \infty}) = \#D_{r_1, \dots, r_{k-1}, \infty} \Leftrightarrow k$$

und

$$z\text{-Grad}(, D_{r_1, \dots, r_{k-1}, 1}) \leq \#D_{r_1, \dots, r_{k-1}, 1} \Leftrightarrow k \Leftrightarrow 2 = \#D_{r_1, \dots, r_{k-1}, \infty} \Leftrightarrow k \Leftrightarrow 1$$

die behauptete Gleichung für das Kauffman-Polynom von  $D_{r_1, \dots, r_{k-1}, 2}$ .

Mit dem Rekursionsprinzip für rationale Knäuel läßt sich die Aussage nun wie in Abschnitt 2.3 für ein beliebiges positives Knäuel  $r_k$  verifizieren.

Insbesondere gilt damit in der Situation, daß  $r_1, \dots, r_k$  nicht-negative rationale Knäuel mit  $r_i \neq 1$  sind, so daß  $r_i$  positiv für  $m$  Indizes und  $r_i \in \{0, \infty\}$  für  $k \Leftrightarrow m$  Indizes ist:

$$z\text{-Grad}(, D_{r_1, \dots, r_k}) = \#D_{r_1, \dots, r_k} \Leftrightarrow m \Leftrightarrow 1 \geq n + m \Leftrightarrow 1$$

Wird anstelle eines der  $m$  positiven rationalen Knäuel ein negatives eingesetzt, so erhöht sich der  $z$ -Grad des Kauffman-Polynoms wegen Lemma 2.6, und die obige Ungleichung behält ihre Gültigkeit.

Es gilt daher insgesamt: Werden die Ecken von  $D$  durch beliebige rationale Knäuel  $r_1, \dots, r_k$  aus den Knäuelklassen  $\mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_\infty$  ersetzt, so ist  $z\text{-Grad}(, D_{r_1, \dots, r_k}) \geq n$ , falls nicht  $r_i \in \{0, \infty\}$  für jedes  $i \in \{1, \dots, k\}$  gilt, d.h. das Verkettungsdiagramm läßt sich nicht mit weniger als  $n + 1$  Kreuzungen darstellen, falls nicht  $r_i \in \{0, \infty\}$  für jedes  $i \in \{1, \dots, k\}$  gilt. Da andererseits das Einsetzen von  $r_1, \dots, r_k \in \{0, \infty\}$  jeweils zu einem Verkettungsdiagramm mit  $n$  Kreuzungen führt, folgt die Behauptung über die Gestalt von  $\mathcal{L}_{\min}^{i_1, \dots, i_k}(D)$ .

□

**Lemma 5.7** *Es sei  $\mathcal{G}$  ein Graph in  $\mathbb{R}^3$  mit  $k \geq 1$  Ecken vom Grad vier und  $D$  ein eckenorientiertes Diagramm von  $\mathcal{G}$ , das reduziert, alternierend, prim und gradreduzierend ist. Dann gilt für  $i_1, \dots, i_k \in \{0, \infty, \cdot\}$*

$$\mathcal{L}_{\min}^{i_1, \dots, i_k}(D) = \{[D_{i_1, \dots, i_k}]\},$$

und sind  $r_1, \dots, r_k \in \mathcal{K} \cup \{\cdot\}$  mit  $r_j \in \mathcal{K}_{i_j}$  in Normalformgestalt für Indizes  $j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $i_j \neq \cdot$  und  $r_j = \cdot$  sonst, so daß  $r_{j_0} \notin \{0, \infty, \cdot\}$  für mindestens ein  $j_0 \in \{1, \dots, k\}$  ist, so gilt  $[D_{r_1, \dots, r_k}] \neq [D_{i_1, \dots, i_k}]$ .

**Beweis:** Es sei  $I := \{j \in \{1, \dots, k\} \mid i_j = \cdot\}$ , und  $l$  bezeichne die Anzahl der Elemente von  $I$ . Da für den Fall  $l = k$  nichts zu zeigen ist, werde im folgenden stets  $0 \leq l < k$  angenommen.

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach  $l \geq 0$ . Für  $l = 0$  gilt die Aussage nach Lemma 5.6. Sei also  $1 \leq l < k$  und die Behauptung bewiesen für den Fall, daß  $I$  höchstens  $l \Leftrightarrow 1$  Elemente hat.

Angenommen, es existiert ein Graphendiagramm  $\tilde{D}$  mit  $\tilde{D} \sim D_{r_1, \dots, r_k}$  für  $r_1, \dots, r_k \in \mathcal{K} \cup \{\cdot\}$ ,  $\#\tilde{D} \leq n$  und  $r_j \notin \{0, \infty, \cdot\}$  für ein  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Ersetze eine beliebige Ecke in  $\tilde{D}$  durch 0 bzw.  $\infty$ . Dies entspricht dem Ersetzen einer Ecke in  $D_{r_1, \dots, r_k}$ , welche die Nummer  $j$  habe, durch Knäuel  $r_j$  bzw.  $r'_j$  in Normalformgestalt aus – nach Lemma 5.1 verschiedenen – der Klassen  $\mathcal{K}_0$ ,  $\mathcal{K}_\infty$ ,  $\mathcal{K}_1$ . Somit ist  $r_j \in \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_\infty$  oder  $r'_j \in \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_\infty$ , d.h. in wenigstens einer Klasse  $\mathcal{L}^{i_1, \dots, i_k}(D)$  mit  $i_1, \dots, i_k \in \{0, \infty, \cdot\}$  existiert ein Teilgraph mit  $l \Leftrightarrow 1$  Ecken, der höchstens  $n$  Kreuzungen besitzt und durch Einsetzen von  $r_j \notin \{0, \infty\}$  bzw.  $r'_j \notin \{0, \infty\}$  in einer Ecke entsteht – im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung. □

**Satz 5.8** *Es sei  $\mathcal{G}$  ein Graph in  $\mathbb{R}^3$  und  $D$  ein Diagramm von  $\mathcal{G}$  mit  $n$  Kreuzungen, das reduziert, alternierend, prim und gradreduzierend ist. Dann gilt:*

- a) *Es gibt kein Diagramm von  $\mathcal{G}$  mit weniger als  $n$  Kreuzungen.*
- b) *Jedes nicht alternierende Diagramm von  $\mathcal{G}$  besitzt mehr als  $n$  Kreuzungen.*

**Beweis:**

**zu a):**

Angenommen, es gibt ein Diagramm  $\tilde{D}$  von  $\mathcal{G}$  mit weniger als  $n$  Kreuzungen.  $D$  und  $\tilde{D}$  werden mit einer beliebigen Eckennumerierung und -orientierung versehen. Wähle eine beliebige Ecke mit Nummer  $i$  aus und betrachte die Invariante  $\mathcal{L}_{min}^{\{i\}}(\tilde{D})$  1. Stufe. Es ist  $\mathcal{L}_{min}^{\{i\}}(\tilde{D}) = \mathcal{L}_{min}^{\{j\}}(D)$  für ein  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Bezeichnet  $\tilde{D}_r$  das Diagramm, welches durch Ersetzen der  $i$ -ten Ecke von  $\tilde{D}$  durch ein rationales Knäuel  $r$  entsteht, so haben  $\tilde{D}_0$  und  $\tilde{D}_\infty$  beide weniger als  $n$  Kreuzungen, d.h. in zwei von drei Einträgen der Invarianten  $\mathcal{L}_{min}^{\{i\}}(\tilde{D}) = \mathcal{L}_{min}^{\{j\}}(D)$  ist die minimale Kreuzungszahl kleiner als  $n$  – im Widerspruch zu Lemma 5.7.

**zu b):**

Angenommen, es gibt ein nicht alternierendes Diagramm  $\tilde{D}$  von  $\mathcal{G}$  mit  $n$

Kreuzungen. Wie in Teil a) verseehe  $D$  und  $\tilde{D}$  mit einer beliebigen Eckennumerierung und -orientierung und betrachte eine Invariante  $\mathcal{L}_{min}^{\{i\}}(D)$  1. Stufe. Bezeichnet  $\tilde{D}^r$  das Diagramm, welches durch Ersetzen der  $i$ -ten Ecke von  $\tilde{D}$  durch ein rationales Knäuel  $r$  entsteht, so sind  $\tilde{D}^0$  und  $\tilde{D}^\infty$  wegen Korollar 3.5 Graphendiagramme mit  $n \geq 2$  Kreuzungen, die – auch nach Weglassen aller kreuzungsfreier Komponenten – nicht alle drei Eigenschaften reduziert, alternierend, prim besitzen, d.h. es existieren  $\mu_1, \dots, \mu_{k-1} \in \{0, \infty\}$  und  $\nu_1, \dots, \nu_{k-1} \in \{0, \infty\}$ , so daß bezüglich einer gewählten Eckenorientierung für die beiden Verkettungsdiagramme  $z\text{-Grad}(\tilde{D}_{\mu_1, \dots, \mu_{k-1}}^0) \leq n \Leftrightarrow 2$  und  $z\text{-Grad}(\tilde{D}_{\nu_1, \dots, \nu_{k-1}}^\infty) \leq n \Leftrightarrow 2$  gilt – im Widerspruch zu der Tatsache, daß nach Lemma 5.7 die minimalen Graphendiagramme in zwei der drei Einträge von  $\mathcal{L}_{min}^{\{i\}}(\tilde{D}) = \mathcal{L}_{min}^{\{j\}}(D)$  eindeutig bestimmt und reduziert, alternierend, prim sind, d.h. beliebiges Ersetzen der Ecken durch Elemente aus  $\{0, \infty\}$  jeweils zu Verkettungsdiagrammen führt, deren Kauffman-Polynom den  $z$ -Grad  $n \Leftrightarrow 1$  hat (Korollar 1.12).

□

**Bemerkung:** Wie in Abschnitt 4.2 läßt sich Satz 5.8 auf die Situation verallgemeinern, daß  $D$  bezüglich zusammenhängender oder disjunkter Summe zusammengesetzt ist aus einem reduzierten, alternierenden, primen, gradreduzierenden Graphendiagramm und reduzierten, alternierenden Verkettungsdiagrammen.



Bei der folgenden Definition, in der die zweite der anfangs erwähnten Klassen alternierender Graphen bzw. Graphendiagramme eingeführt wird, ist der Begriff „Knäuel“ in offensichtlicher Verallgemeinerung der ursprünglichen Definition als Teil eines Graphendiagramms zu verstehen.

**Definition** Ist  $\mathcal{G}$  ein Graph in  $\mathbb{R}^3$  mit  $k \geq 1$  Ecken vom Grad vier, so heißt ein alternierendes Diagramm  $D$  von  $\mathcal{G}$  *eckentrennend*, falls in  $D$  paarweise disjunkte Knäuel  $t_1, \dots, t_k$  existieren, so daß jedes Knäuel genau eine Ecke des Diagramms enthält und bezüglich einer beliebigen Eckenorientierung das Ersetzen der Ecke in  $t_j$  für  $j \in \{1, \dots, k\}$  durch 1 oder  $\bar{1}$  zu einer 3-Brücke in  $t_j$  führt.

**Bemerkung:** Es gibt alternierende Graphendiagramme, die nicht eckentrennend sind. Ein Beispiel hierfür liefert das Diagramm auf Seite 85.

**Lemma 5.9** *Ein eckentrennendes Graphendiagramm ist gradreduzierend.*

**Beweis:** Es sei  $D$  ein eckentrennendes Graphendiagramm mit  $k \geq 1$  Ecken vom Grad vier, das mit einer Eckenorientierung versehen sei, so daß das Ersetzen einer Ecke durch 1 eine 3-Brücke liefert. Es seien  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{0, \infty, 1\}$ , und  $l \geq 1$  sei die Anzahl der Indizes  $j$  mit  $\varepsilon_j = 1$ . Es ist nun zu zeigen, daß gilt:

$$z\text{-Grad}(, D_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k}) \leq n \Leftrightarrow 2 = \#D_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k} \Leftrightarrow l \Leftrightarrow 2$$

Mittels vollständiger Induktion nach  $l$  wird gezeigt, daß sogar die Ungleichung

$$z\text{-Grad}(, D_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k}) \leq \#D_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k} \Leftrightarrow 2l \Leftrightarrow 1$$

erfüllt ist. Für  $l = 1$  gilt die Aussage nach Korollar 1.10, da  $D_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k}$  eine 3-Brücke besitzt. Sei also  $l \geq 2$  und die Behauptung für den Fall gezeigt, daß  $\varepsilon_j = 1$  für höchstens  $l \Leftrightarrow 1$  Indizes gilt.

$D_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k}$  läßt sich als Knäuelsumme  $N(s + t)$  darstellen, so daß  $t$  aus einem der Knäuel  $t_1, \dots, t_k$ , die wegen der Eigenschaft „gradreduzierend“ des Graphendiagramms existieren, durch Ersetzen der Ecke durch 1 hervorgeht. Bezeichnen  $A^N, A^D, A^X, A^{\bar{X}}$  die Kauffman-Polynome von  $s^N, s^D, s^X, s^{\bar{X}}$  und  $B^N, B^D, B^X, B^{\bar{X}}$  die von  $t^N, t^D, t^X, t^{\bar{X}}$ , so gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$z \Leftrightarrow \text{Grad}(A^i) \leq \begin{cases} \#s \Leftrightarrow 2(l \Leftrightarrow 1) \Leftrightarrow 1 & \text{für } i \in \{N, D\} \\ \#s \Leftrightarrow 2(l \Leftrightarrow 1) & \text{für } i \in \{X, \bar{X}\} \end{cases}$$

und wegen der 3-Brücke von  $t$ :

$$z \Leftrightarrow \text{Grad}(B^i) \leq \begin{cases} \#t \Leftrightarrow 3 & \text{für } i \in \{N, D\} \\ \#t \Leftrightarrow 2 & \text{für } i \in \{X, \bar{X}\} \end{cases}$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus der Summenformel für Knäuel, denn es gilt

$$z \Leftrightarrow \text{Grad}(z^{-1}A^{\bar{X}}B^{\bar{X}}) \leq \Leftrightarrow 1 + \#s \Leftrightarrow 2(l \Leftrightarrow 1) + \#t \Leftrightarrow 2 = \#D_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k} \Leftrightarrow 2l \Leftrightarrow 1$$

und ebenso für die übrigen Terme der Summenformel. □

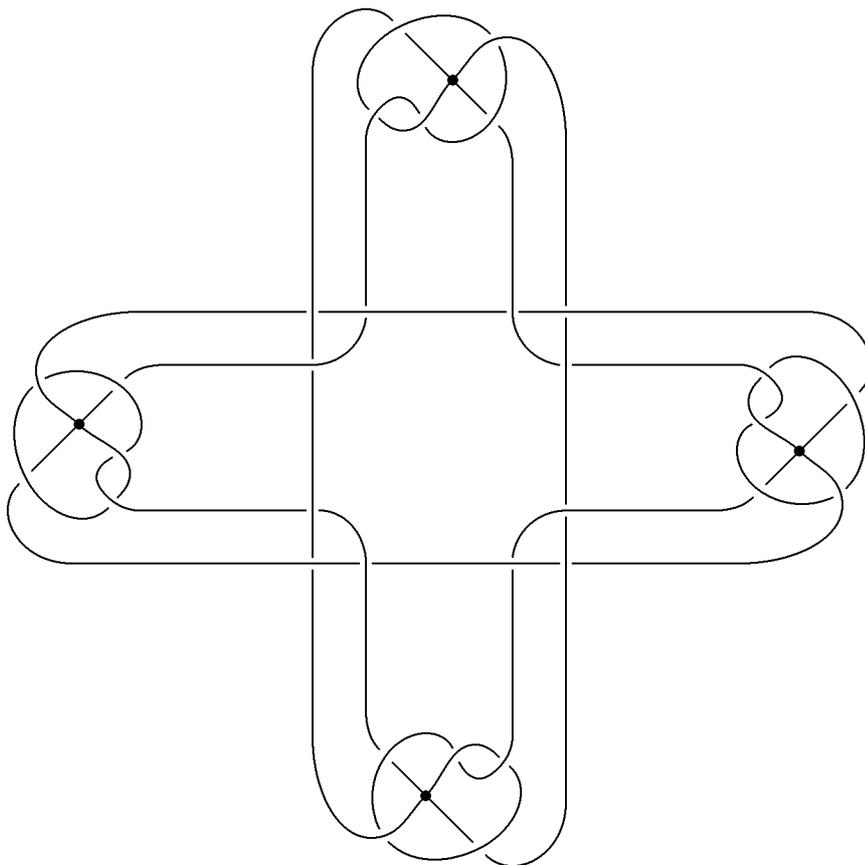
**Korollar 5.10** *Es sei  $\mathcal{G}$  ein Graph in  $\mathbb{R}^3$  und  $D$  ein Diagramm von  $\mathcal{G}$  mit  $n$  Kreuzungen, das reduziert, alternierend, prim und eckentrennend ist. Dann gilt:*

- a) *Es gibt kein Diagramm von  $\mathcal{G}$  mit weniger als  $n$  Kreuzungen.*
- b) *Jedes nicht alternierende Diagramm von  $\mathcal{G}$  besitzt mehr als  $n$  Kreuzungen.*

**Beweis:** Die Behauptung folgt mit Lemma 5.9 aus Satz 5.8.

□

**Beispiel:** Der unten abgebildete Graph mit 4 Ecken vom Grad vier erfüllt die Voraussetzungen von Korollar 5.10 und ist daher in minimaler Darstellung:



# Literaturverzeichnis

- [Auma56] Robert J. Aumann, *Asphericity of alternating knots*  
Annals of Mathematics 64, no. 2, Sep. 1956, S. 374–392
- [Bank30] Carl Bankwitz, *Über die Torsionszahlen der alternierenden Knoten*  
Mathematische Annalen 103, 1930, S. 145–161
- [Blei85] Steven A. Bleiler, *Prime tangles and composite knots*  
aus: *Knot Theory and Manifolds* (ed. Dale Rolfsen), Lecture Notes in Mathematics 1144, Springer 1985, S. 1–13
- [Bur85] Gerhard Burde/Heiner Zieschang, *Knots*  
de Gruyter, Berlin/New York 1985
- [Con70] John H. Conway, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*  
aus: *Computational Problems in Abstract Algebra* (ed. John Leech), Pergamon Press, Oxford 1970, S. 329–358
- [Crow59] Richard H. Crowell, *Nonalternating links*  
Illinois Journal of Mathematics 3, no. 1, March 1959, S. 101–120
- [Crow59'] Richard H. Crowell, *Genus of alternating link types*  
Annals of Mathematics 69, no. 2, March 1959, S. 258–275
- [Hashi58] Yoko Hashizume, *On the uniqueness of the decomposition of a link*  
Osaka Math. Journal 10, 1958, S. 283–300

- [Jon91] D. Jonish/Kenneth C. Millett, *Isotopy invariants of graphs*  
Trans. Amer. Math. Soc. 327, no. 2, Oct. 1991, S. 655–702
- [Kauf87] Louis H. Kauffman, *State models and the Jones polynomial*  
Topology 26, no. 3, 1987, S. 395–407
- [Kauf88] Louis H. Kauffman, *New Invariants in the Theory of Knots*  
Amer. Math. Monthly 95, 1988, S. 195–242
- [Kauf89] Louis H. Kauffman, *Invariants of graphs in three-space*  
Trans. Amer. Math. Soc. 311, no. 2, Feb. 1989, S. 697–710
- [Kauf90] Louis H. Kauffman, *An invariant of regular isotopy*  
Trans. Amer. Math. Soc. 318, no. 2, Apr. 1990, S. 417–471
- [Kauf92] Louis H. Kauffman/Pierre Vogel, *Link polynomials and a graphical calculus*  
Journal of Knot Theory and its Ramifications 1, no. 1, 1992, S. 59–104
- [Lick87] W.B.R. Lickorish/Kenneth C. Millett, *A polynomial invariant of oriented links*  
Topology 26, no. 1, 1987, S. 107–141
- [Lick88] W.B.R. Lickorish/Morwen B. Thistlethwaite, *Some links with non-trivial polynomials and their crossing-numbers*  
Comment. Math. Helvetici 63, 1988, S. 527–539
- [Lip90] A.S. Lipson, *Link signature, Goeritz matrices and polynomial invariants*  
l'Enseignements Math. 36, 1990, S. 93–114
- [Mason69] W.K. Mason, *Homeomorphic continuous curves in 2-space are isotopic in 3-space*  
Trans. Amer. Math. Soc. 142, 1969, S. 269–290
- [Mena84] William Menasco, *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*  
Topology 23, no. 1, 1984, S. 37–44

- [Mena93] William Menasco/Morwen B. Thistlethwaite, *The classification of alternating links*  
Annals of Mathematics 138, 1993, S. 113–171
- [Mura87] Kunio Murasugi, *Jones polynomials and classical conjectures in knot theory*  
Topology 26, no. 2, 1987, S. 187–194
- [Rolf76] Dale Rolfsen, *Knots and Links*  
Publish or Perrish, Berkeley 1976  
Second printing, with corrections, 1990
- [Sawo91] Jörg Sawollek, *Berechnung von Alexanderinvarianten zur Klassifikation verallgemeinerter Thetagraphen im Raum*  
Diplomarbeit, Universität Dortmund, Oktober 1991
- [Scharl91] Martin Scharlemann/Abigail Thompson, *Detecting unknotted graphs in 3-space*  
J. Diff. Geom. 34, 1991, S. 539–560
- [Sim90] Jonathan Simon/Keith Wolcott, *Minimally knotted graphs in  $\mathbb{S}^3$*   
Top. Appl. 37, 1990, S. 163–180
- [Tait1898] P.G. Tait, *On knots I, II, III*  
Scientific Papers, Vol. I, Cambridge Univ. Press, London, 1898,  
S. 273–347
- [Thist87] Morwen B. Thistlethwaite, *A spanning tree expansion of the Jones polynomial*  
Topology 26, no. 3, 1987, S. 297–309
- [Thist88] Morwen B. Thistlethwaite, *Kauffman's polynomial and alternating links*  
Topology 27, no. 3, 1988, S. 311–318
- [Thist88'] Morwen B. Thistlethwaite, *On the Kauffman polynomial of an adequate link*  
Invent. math. 93, 1988, S. 285–296

- [Tutte84] William T. Tutte, *Graph Theory*  
Encyclopedia of Mathematics and its Applications 21, Cambridge  
Univ. Press 1984
- [Yama89] Shûji Yamada, *An Invariant of Spatial Graphs*  
Journal of Graph Theory 13, no. 5, 1989, S. 537–551
- [Yett89] David N. Yetter, *Category Theoretic Representations of Knotted  
Graphs in  $\mathbb{S}^3$*   
Advances in Mathematics 77, 1989, S. 137–155
- [Yett90] David N. Yetter, *On Graph Invariants Given by Linear Recur-  
rence Relations*  
Journal of Combinatorial Theory, Series B 48 (1990), S. 6–18
- [Yoko96] Yoshiyuki Yokota, *Topological invariants of graphs in 3-space*  
Topology 35, no. 1, 1996, S. 77–87