

Zur Existenz und konformen Invarianz der Robinschen Funktion

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

Dem Fachbereich Mathematik
der Universität Dortmund
vorgelegt von

Marcus Stiemer
aus Dortmund

August 2001

Tag der mündlichen Prüfung: 27.09.2001

Vorsitzender: Prof. Dr. H. Blum
Erster Gutachter: Prof. Dr. K. Menke
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. N. Steinmetz

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Zur Robinschen Funktion	5
1.2	Der Beitrag der vorliegenden Arbeit	10
2	Die Robinsche Funktion	15
2.1	Regularität der Ränder	17
2.2	Existenz und Eindeutigkeit	19
2.2.1	Vorbereitung des Existenzbeweises	21
2.2.2	Existenz im 1. Fall (Neumann-Rand auf einer Randkomponente)	26
2.2.3	Vorbereitung für den Fall zweier Randkomponenten	31
2.2.4	Existenz im 2. Fall (Neumann-Rand auf zwei Randkomponenten)	41
2.2.5	Neumann-Rand auf mehr als zwei Randkomponenten	58
3	Konforme Abbildung mit Robinscher Funktion	59
4	Invarianzeigenschaften	87
4.1	Invarianz bei konformer Abbildung	88
4.1.1	Robin-Äquivalenz	88
4.1.2	Robin-Äquivalenz und konformer Typ	92
4.1.3	Robinsche Kapazität des Teilbogens einer Jordan-Kurve	95
4.1.4	Die Robinsche Kapazität einer Jordan-Kurve	99
4.2	Extremale Distanz	103
4.3	Minimale logarithmische Kapazität	118
4.4	Minimalgebiete	121
4.4.1	Definition und Beispiele	122
4.4.2	Einfach zusammenhängende Gebiete	125
4.4.3	Symmetrische Ringgebiete	126
A	Anhang	135
A.1	Zur Berechnung der Abbildungen	135
A.1.1	Prinzipielles Vorgehen	135
A.1.2	Menke-Punkte	136
A.1.3	Leja-Punkte	138

A.2 Symbolverzeichnis	139
Literaturverzeichnis	141

1 Einleitung

Es gibt drei wissenschaftliche Entwicklungen, die unabhängig voneinander auf die in dieser Arbeit untersuchte Robinsche Funktion führen, welche seit 1990 Gegenstand zahlreicher wissenschaftlicher Untersuchungen ist:

- gewisse gemischte Randwertprobleme in der ebenen Potentialtheorie,
- die Untersuchung der extremalen Verzerrung der logarithmischen Kapazität innerhalb einer bestimmten Klasse konformer Abbildungen und schließlich
- die Erforschung der von L.V. Ahlfors eingeführten extremalen Distanz einer Teilmenge des Randes eines ebenen Gebietes zu einem inneren Punkt dieses Gebietes.

Der erste Abschnitt dieser Einleitung dient einer kurzen Erläuterung der ersten beiden der drei oben angeführten Aspekte. Eine genauere Darstellung aller drei Punkte erfolgt an späterer Stelle. Im zweiten Abschnitt wird anschließend das Ziel und der Aufbau der vorliegenden Untersuchung dargestellt.

Herrn Professor Dr. K. Menke danke ich für die Vergabe dieses interessanten und ergiebigen Dissertationsthemas sowie für eine intensive und engagierte wissenschaftliche Betreuung. Darüber hinaus danke ich allen Dozenten und Mitarbeitern am Lehrstuhl IX des Fachbereichs Mathematik der Universität Dortmund für eine überaus lehrreiche Zeit und für ihre freundliche Unterstützung.

1.1 Zur Robinschen Funktion

Die Ursprünge der Potentialtheorie entstammen physikalischen Problemen, insbesondere der Himmelsmechanik, der Theorie elektromagnetischer Felder und der Wärmeleitung. Beispielsweise kann das Problem der stationären Temperaturverteilung, die sich in einem Körper $D \subset \mathbb{R}^3$ einstellt, in dessen Umgebung $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ eine konstante Temperatur von Null Grad gegeben ist, und dessen Oberfläche eine zeitlich konstante Wärmemenge $k \cdot f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \partial D$

mit $k > 0$ künstlich zugeführt wird¹, durch die folgende Randwertaufgabe modelliert werden: Gesucht ist eine Funktion $v : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$, die harmonisch in D ist und auf der Oberfläche ∂D der Bedingung

$$\frac{\partial v}{\partial n}(\vec{x}) + hv(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

genügt, wobei h eine positive Konstante ist und f eine stetige Funktion auf ∂D ([21], S. 230 f.). Überlegungen zu diesem Problem finden sich bereits bei I. Newton ([22], S. 69). Allgemein geht es bei potentialtheoretischen Randwertaufgaben um das Auffinden harmonischer Funktionen, die bestimmte Randbedingungen erfüllen. Wenn, wie im gerade erwähnten Beispiel, für eine Linearkombination aus Normalenableitung und Funktionswerten Randwerte vorgeschrieben werden, zählt die Randwertaufgabe zur dritten Art ([43], S. 35 ff.).

Zur Lösung der oben angeführten Randwertaufgabe sowie zur Lösung ihres zweidimensionalen (ebenen) Analogons wird die sogenannte Greensche Funktion für die Randwertaufgabe der dritten Art konstruiert. Sie wird auch Fundamentallösung der dritten Randwertaufgabe genannt. Wir werden uns im folgenden ausschließlich auf den Fall ebener Potentiale beschränken, das heißt, es gilt immer $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$. Dann ist die gesuchte Fundamentallösung $R(z, \zeta)$ für festes ζ definitionsgemäß eine Funktion, die in $D \setminus \{\zeta\}$ harmonisch ist und in ζ eine logarithmische Singularität besitzt. Weiter wird gefordert, daß R auf ∂D homogene Randbedingungen erfüllt, das heißt, für $z \in \partial D$ gilt

$$\frac{\partial R}{\partial n}(z, \zeta) + hR(z, \zeta) = 0.$$

Gelingt die Konstruktion einer Funktion, die diese Eigenschaften erfüllt, so lautet die Lösung v der gegebenen Randwertaufgabe

$$v(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} f(z) \cdot R(z, \zeta) |dz|$$

([21], S. 237 oder [9], S. 272). Eine elektrostatische Deutung dieser Formel besagt, daß v als das Potential einer Belegung von ∂D mit einer einfachen Schicht von Ladungen dargestellt werden kann ([23], S. 281). Daher ist es

¹Dies kann z.B. durch Bestrahlung mit Licht erfolgen.

üblich zu sagen, daß v ein Einzelschichtpotential ist.

Anscheinend war S. Bergman der erste, der die Greensche Funktion $R(z, \zeta)$ zur dritten potentialtheoretischen Randwertaufgabe Robinsche Funktion genannt hat ([8], S. 541 bzw. [22], S. 69), obwohl Gustave Robin (1855-1897) sich vermutlich nicht speziell mit der dritten Randwertaufgabe auseinandergesetzt hat. G. Robins Hauptverdienst liegt in der Konstruktion des Potentials für ein spezielles Neumann-Problem mittels Integralgleichungen, das später in der Russischen Literatur als Methode von Steklov-Robin bekannt wurde (z.B. [21], S. 153). Wir schließen uns in dieser Arbeit S. Bergman an und bezeichnen die Fundamentallösung der dritten potentialtheoretischen Randwertaufgabe ebenfalls als Robinsche Funktion. Wenn wir von der Greenschen Funktion $G(z, \zeta)$ in einem Gebiet D sprechen, ist dagegen immer die Fundamentallösung der ersten potentialtheoretischen Randwertaufgabe, des Dirichlet-Problems, gemeint.

In der moderneren Literatur wird die dritte Randwertaufgabe der Potentialtheorie zumeist allgemeiner formuliert: Gegeben sei $D \subset \mathbb{C}$ und eine auf ∂D stetige Funktion f . Weiter seien die Funktionen α und β auf ∂D erklärt. Gesucht ist nun eine in D harmonische Funktion u , die für $z \in \partial D$ die Bedingung

$$\alpha(z) \cdot u(z) + \beta(z) \cdot \frac{\partial u}{\partial n}(z) = f(z)$$

erfüllt ([43], S. 35 ff.). Wir betrachten nun eine abgeschlossene Teilmenge A von ∂D . Ihr Komplement $\partial D \setminus A$ bezüglich des Randes von D heiße B . Die allgemeine Formulierung der dritten Randwertaufgabe schließt auch den Fall ein, daß auf A ausschließlich Bedingungen an die Werte von u und auf B ausschließlich Bedingungen an die Normalenableitung² von u gestellt werden. Dies wird dadurch realisiert, daß für α die charakteristische Funktion der Menge A und für $\beta = 1 - \alpha$ die charakteristische Funktion der Menge B gewählt wird. In dieser Situation nennen wir A den Dirichlet-Rand und B den Neumann-Rand des Gebietes D . Genau dies ist die Situation, die in der vorliegenden Arbeit untersucht werden wird. Für den Fall, daß der Neumann-Rand B leer ist, handelt es sich bei $R(z, \zeta)$ um die Greensche Funktion in

²In dieser Einleitung verzichten wir bewußt auf die Diskussion der Glättevoraussetzungen, die an den Rand von D zu stellen sind. Dies wird im Text nachgeholt. Ebenso werden wir an dieser Stelle noch nicht klären, was wir genau unter *Bedingungen an die Normalenableitung* verstehen.

Ω . In diesem Sinne ist die hier betrachtete Robinsche Funktion eine Verallgemeinerung der Greenschen Funktion.

Die Robinsche Funktion $R(z, \zeta)$ eben solcher gemischter Randwertprobleme ist zu Beginn der 90er Jahre des 20. Jahrhunderts wieder in das Blickfeld des Forschungsinteresses gerückt: P. Duren und M. Schiffer entdeckten, daß die Robinsche Funktion in enger Beziehung zur Theorie konformer Abbildungen steht und ähnliche Invarianzeigenschaften besitzt, wie sie bei der Greenschen Funktion $G(z, \zeta)$ zu finden sind ([15],[16]). In diesem Zusammenhang sei an die Bestimmung der Greenschen Funktion durch „konformen Transport“ aus einem überschaubaren in ein gegebenes Gebiet, die Konstruktion der konformen Abbildung auf Normalgebiete und die Bedeutung der logarithmischen Kapazität erinnert, um nur drei Beispiele zu nennen.

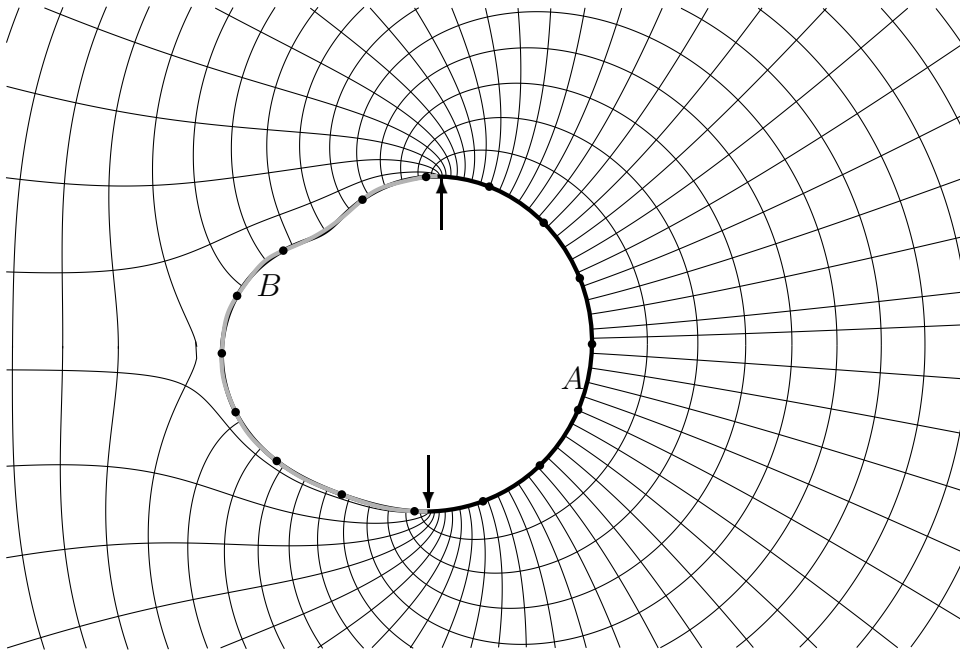


Abbildung 1

Die Abbildung 1 zeigt die Feld- und Niveaulinien der Robinschen Funktion eines einfach zusammenhängenden Gebietes Ω mit Pol in ∞ . Der Neumann-Rand ist in der Abbildung heller dargestellt als der Dirichlet-Rand. Die beiden gemeinsamen Häufungspunkte von Dirichlet- und Neumann-Rand sind durch je einen Pfeil

gekennzeichnet. Auf dem Dirichlet-Rand enden die Feldlinien in einem rechten Winkel zur Tangente an die Randkurve, während sie vom Neumann-Rand „weggedrückt“ werden. Bei den Niveaulinien verhält es sich genau andersherum: Die Niveaulinien enden im rechten Winkel auf dem Neumann-Rand, während sie tangential zum Dirichlet-Rand verlaufen.

Zur Berechnung der Niveau- und der Feldlinien wurde ein Extremalpunkt-System (Menke-Punkte) verwendet, das im Anhang kurz erläutert wird. Die Extremalpunkte sind ebenfalls im Bild eingezeichnet.

Die Kernfrage, mit der sich P. Duren und M. Schiffer auseinandersetzen, ist das folgende Variationsproblem ([16]): Es sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das ∞ enthält, und dessen Rand von n Jordan-Kurven berandet ist. Die Menge $A \subset \partial\Omega$ sei die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Teilbögen des Randes von Ω , und $B = \partial\Omega \setminus A$ sei ihr Komplement. Die Familie $\Sigma(\Omega)$ sei definiert als die Menge aller konformen Abbildungen f von Ω , die in Unendlich die Entwicklung $f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots$ besitzen ([19]). In dieser Situation stellen P. Duren und M. Schiffer die Frage, wie groß für $f \in \Sigma(\Omega)$ die minimale logarithmische Kapazität $\inf_{f \in \Sigma(\Omega)} \text{cap} f(A)$ des Bildes $f(A)$ der Teilmenge $A \subset \partial\Omega$ unter allen Funktionen $f \in \Sigma(\Omega)$ ist.

Zur Untersuchung dieses Problems führen sie die sogenannte Robinsche Kapazität $\rho(A)$ des Dirichlet-Randes von Ω ein, die ähnlich der logarithmischen Kapazität von A definiert ist und mit Hilfe der Robinschen Funktion berechnet werden kann. Das Hauptergebnis der aktuellen Forschung zur Robinschen Funktion ist nun, daß unter den genannten Voraussetzungen stets

$$\inf_{f \in \Sigma(\Omega)} \text{cap} f(A) = \min_{f \in \Sigma(\Omega)} \text{cap} f(A) = \rho(A)$$

gilt.

Der Zusammenhang zwischen dem hier vorgestellten Extremalproblem und der Fundamentallösung einer gemischten Randwertaufgabe wird durch die Schiffersche Variationsformel hergestellt: Sie liefert ein notwendiges Kriterium, das erfüllt ist, wenn $f_0 \in \Sigma(\Omega)$ auf eine Minimalsituation abbildet, das heißt, wenn

$$\text{cap} f_0(A) = \min_{f \in \Sigma(\Omega)} \text{cap} f(A)$$

gilt. Dieses Kriterium besagt, daß die Greensche Funktion G_0 im Außengebiet $\tilde{\Omega}_0$ von $f_0(A)$ für $z \in f_0(B) \subset \tilde{\Omega}_0$ die Bedingung $\frac{\partial G_0}{\partial n}(z) = 0$ erfüllt. Mit anderen Worten ist die Greensche Funktion G_0 in dem Gebiet $\tilde{\Omega}_0 \supset f(\Omega)$, das nur von $f(A)$ berandet wird, genau die Robinsche Funktion in $f(\Omega)$ mit Dirichlet-Rand $f(A)$ und Pol in ∞ .

1.2 Der Beitrag der vorliegenden Arbeit

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Existenz der Robinschen Funktion unter den von P. Duren und M. Schiffer behandelten Voraussetzungen³ nachzuweisen:

Die Existenz der Robinschen Funktion kann aus der Lösbarkeit des oben angeführten Variationsproblems, das P. Duren und M. Schiffer behandeln, gefolgert werden: Im Minimalgebiet ist die Robinsche Funktion genau die Greensche Funktion eines anderen Gebietes, womit ihre Existenz offensichtlich ist. Über konforme Invarianz kann die Existenz der Robinschen Funktion im Ausgangsgebiet gefolgert werden. Dieser Beweis liefert kein konstruktives Verfahren zur Bestimmung von R , da er auf der Schifferschen Variationsformel und der Existenz einer minimierenden Funktion in der Klasse $\Sigma(\Omega)$ basiert (siehe Abschnitt 4.3). Ein anderer, ebenfalls abstrakter Existenzbeweis für R folgt mit dem Existenzsatzes für die Lösung gemischter Randwertprobleme von Tsuji ([42], S. 31 f.). Dieser beruht auf Schottky-Verdoppelung und der Lösungstheorie des Dirichlet- und des Neumann-Problems auf Riemannschen Flächen (siehe Abschnitt 2.2.1). Schließlich kann die Existenz der Robinschen Funktion mit Hilbert-Raum-Methoden bewiesen werden (siehe Abschnitt 2.2.1), was ebenfalls nur in wenigen Spezialfällen zu numerisch zugänglichen Darstellungen für R führt.

Alle angeführten Beweismethoden sind insofern abstrakt, daß sie kein konkretes Verfahren liefern, mit dem die Robinsche Funktion bzw. die Robinsche Kapazität berechnet werden kann. Existenzbeweise, die in dem Sinne konstruktiv sind, daß sie die Bestimmung der Robinschen Funktion ermöglichen (explizite Orthogonalentwicklung oder konforme Abbildung auf bekannte Ex-

³Das Gebiet Ω ist von einer endlichen Anzahl „glatter“ Jordan-Kurven berandet, und der Dirichlet-Rand $A \subset \partial\Omega$ ist die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Teilbögen von $\partial\Omega$.

tremalkonfigurationen) sind nur für wenige und sehr spezielle Situationen bekannt.

Im zweiten Kapitel der vorliegenden Arbeit wird ein konstruktiver Existenzbeweis für die Robinsche Funktion (mit Pol in ∞) vorgestellt, der unter den zuvor genannten, allgemeinen Bedingungen anwendbar ist⁴. Dazu wird das gegebene Gebiet Ω zunächst durch eine konforme Abbildung Ψ auf ein Vollkreisgebiet Ω_0 nach P. Koebe so abgebildet, daß ∞ fest bleibt. Dieser vorbereitende Schritt kann ebenfalls durch ein konstruktives Verfahren bewerkstelligt werden, wie P. Koebe gezeigt hat. In Ω_0 betrachten wir nun das transportierte gemischte Randwertproblem mit Dirichlet-Rand $A_0 = f(A)$ und Neumann-Rand $B_0 = f(B)$. In Ω_0 wird die Robinsche Funktion durch alternierendes Spiegeln einer gewissen Greenschen Funktion an den Kreisen, die Punkte von B_0 enthalten, konstruiert. Die dabei verwendete Greensche Funktion ist in einem Gebiet definiert, das Ω_0 enthält und ebenfalls durch alternierende Spiegelungen erzeugt wird. Diesem Vorgehen liegt eine physikalische Deutung im Rahmen der Theorie elektrostatischer Felder zugrunde (siehe Abschnitt 2.2.3). Die in Ω_0 konstruierte Robinsche Funktion kann nun mit Hilfe der konformen Abbildung Ψ von Ω nach Ω_0 in das Ausgangsgebiet Ω „transportiert“ werden, da ihre definierenden Eigenschaften invariant unter konformer Abbildung sind.

Wir beschränken uns hier auf die Durchführung des Beweises in den Fällen, in denen der Neumann-Rand B einen nichtleeren Schnitt mit höchstens zwei der Ω berandenden Kurven besitzt. Es liegt auf der Hand, daß die verwendete Methode auch dann anwendbar ist, wenn Punkte des Neumann-Randes B auf mehr als zwei Randkomponenten von Ω liegen (siehe Abschnitt 2.2.5). Das konstruktive Wesen dieses Existenzbeweises wird anhand zweier Beispiele demonstriert, in denen die Robinsche Funktion und die Robinsche Kapazität explizit berechnet wird. Angesichts der geringen Zahl bekannter, expliziter Beispiele für die Robinsche Funktion sind diese Beispiele nicht nur als Anwendungen des im zweiten Kapitels bewiesenen Satzes von Interesse.

Im anschließenden dritten Kapitel wird die Robinsche Funktion zur Konstruktion der konformen Abbildung f eines einfach zusammenhängenden Gebietes auf ein gewisses Normalgebiet angewendet. Genauer ist das Aus-

⁴Tatsächlich funktioniert er sogar unter noch schwächeren Voraussetzungen.

gangsgebiet Ω Außengebiet einer (ausreichend glatten) Jordan-Kurve. Auf ihr ist eine abgeschlossene Teilmenge A ausgezeichnet. Wir betrachten die Robinsche Funktion R in Ω mit Dirichlet-Rand A und Pol in ∞ . Das Normalgebiet, auf das eine konforme Abbildung zu konstruieren ist, ist Teilmenge des Äußeren des Einheitskreises. Sein Rand hat die Gestalt einer Sonne; genauer wird der Dirichlet-Rand A auf den Einheitskreis abgebildet, und die Zusammenhangskomponenten des Neumann-Randes werden auf radiale Schlitze abgebildet, die jeweils genau einen Endpunkt auf dem Einheitskreis besitzen.

Die Existenz einer konformen Abbildung f eines endlich zusammenhängenden Gebietes, das ∞ enthält, bei der eine ausgezeichnete Randkomponente A auf einen Kreis und die übrigen Komponenten auf radiale Schlitze abgebildet werden, wurde bereits 1929 von H. Grötzsch durch die Lösung eines geometrischen Extremalproblems bewiesen: Die gesuchte Abbildungsfunktion f ist diejenige Abbildung in der Klasse $\Sigma(\Omega)$, die den Durchmesser des Bildes $f(A)$ minimiert⁵. Der hier bewiesene Satz erweitert die mit H. Grötzschs Ergebnis verbundene Existenzaussage auf eine Situation, in der A keine volle Komponente des Randes von Ω ist, und in der abzählbar viel „Strahlen“ auftreten dürfen. Im Falle endlich vieler Strahlen kann die Abbildung auf das „Sonnengebiet“ auch unter Verwendung einer Schwarz-Christoffel-Abbildung geschehen.

Bemerkenswert ist, daß das „Sonnengebiet“, das hier als Normalgebiet auftritt, ein Minimalgebiet für die Robinsche Kapazität ist. Letzteres bedeutet, daß

$$\rho(f(A)) = \text{cap}(f(A)) = \min_{g \in \Sigma(\Omega)} \text{cap}(g(A))$$

gilt, wobei $\Sigma(\Omega)$ wieder die Klasse aller wie gewohnt normierten konformen Abbildungen von Ω bezeichnet. Im Konferenzband der CMFT Konferenz in Zypern 1997 bemerkt P. Duren, daß für ein einfach zusammenhängendes Gebiet Ω mit Hilfe der Robinschen Funktion eine konforme Abbildung auf ein Sonnengebiet konstruiert werden könne. Bisher ist dies aber noch nicht unter den hier gestellten, allgemeinen Voraussetzungen bewiesen worden.

⁵Anstelle des Durchmessers kann auch der Umfang mit gleichem Resultat minimiert werden.

Das letzte Kapitel dieser Arbeit dient der Untersuchung der Robinschen Funktion und der Robinschen Kapazität im Rahmen der Theorie konformer Invarianten. Genauer ist die Robinsche Kapazität selbst keine konforme Invariante, wohl aber der Quotient $\frac{\rho(A)}{\text{cap}(\partial\Omega)}$, wobei $\partial\Omega$ der Rand des zugrunde liegenden Gebietes Ω ist. Die praktische Bedeutung dieser Untersuchung liegt darin, daß für wichtige Situationen Formeln zur Bestimmung der Robinschen Kapazität aus anderen, in der geometrischen Funktionentheorie gebräuchlichen Größen hergeleitet werden: Zum Beispiel wird eine Formel zur Bestimmung der Robinschen Kapazität des Teilbogens einer Jordan-Kurve aus dessen harmonischem Maß bewiesen. Außerdem wird eine Formel zur Berechnung der Robinschen Kapazität einer Randkomponente eines Ringgebietes aus harmonischem Maß und konformem Modul hergeleitet. Dies ist insbesondere deshalb interessant, da bisher nur in wenigen konkreten Situationen $\rho(A)$ berechnet wurde.

Aus systematischer Sicht steht im vierten Kapitel zunächst die Frage im Mittelpunkt, wann zwei gegebene Situationen (Ω_1, A_1) und (Ω_2, A_2) in dem Sinne äquivalent sind, daß die Robinsche Funktion R_2 in Ω_2 mit Dirichlet-Rand A_2 und Pol in ∞ durch konformen Transport aus der Robinschen Funktion R_1 in Ω_1 mit Dirichlet-Rand A_1 und Pol in ∞ hervorgeht. Letzteres bedeutet, daß $R_2 = R_1 \circ f$ gilt, wobei f eine geeignete konforme Abbildung von Ω_2 auf Ω_1 ist. Für den Fall, daß dieser Zusammenhang besteht, führen wir die Sprechweise „ (Ω_1, A_1) und (Ω_2, A_2) sind Robin-äquivalent“ ein.

Anschließend wird der Zusammenhang der Robin-Äquivalenz mit dem etwas abweichenden Begriff des konformen Typs, den L.V. Ahlfors eingeführt hat ([5], S. 70), in Zusammenhang gebracht. Dies ermöglicht, L.V. Ahlfors' Formel für die Anzahl konformer Invarianten, die den konformen Typ einer gegebenen Situation charakterisieren, der sogenannten Moduli, anzuwenden, und schließlich zu folgern, wie viele (wesentlich verschiedene) konforme Invarianten zu berechnen sind, damit $\frac{\rho(A)}{\text{cap}(\partial\Omega)}$ durch sie bestimmt werden kann.

Zuvor ist es notwendig, die Robinsche Funktion auch in Situationen zu erklären, in denen das zugrunde liegende Randwertproblem nicht im klassischen Sinne lösbar ist, da die Ränder des zugehörigen Gebietes nicht die notwendigen Glättevoraussetzungen aufweisen. Dies kann leicht über die Invarianzeigenschaften der Robinschen Funktion geschehen. In der Literatur

wird die Robinsche Funktion oft in diesem allgemeineren Kontext verwendet, ohne, daß die Argumente, die die Wohldefiniertheit von R in der erweiterten Situation garantieren, ausgeführt werden. Diese Problematik wird hier ausführlich erörtert.

Als nächstes wird der Beweis der Gleichheit von reduzierter extremaler Länge und $\frac{\rho(A)}{\text{cap}(\partial\Omega)}$ ausgeführt. Dies ist aus zwei Gründen sinnvoll: Einerseits ist L.V. Ahlfors' Beweis ([5] S. 79 f.) extrem knapp gehalten und verwendet nicht die von P. Duren und M. Schiffer viel später eingeführten Bezeichnungen. Die Rekapitulation von L.V. Ahlfors' Beweis an dieser Stelle stellt somit den Zusammenhang zwischen verschiedenen Begriffsbildungen dar. Andererseits erlaubt die genaue Analyse des Beweises, diesen zu verallgemeinern, und die Gleichheit von $\frac{\rho(A)}{\text{cap}(\partial\Omega)}$ und der reduzierten extremalen Länge von A zum Punkt ∞ in Ω auch dann zu beweisen, wenn das Randwertproblem für die Robinsche Funktion nicht sinnvoll gestellt werden kann. In seinem Beweis der konformen Invarianz der reduzierten extremalen Länge beschränkt L.V. Ahlfors sich ausdrücklich auf Gebiete mit glatten Rändern, in denen das gemischte Randwertproblem lösbar ist.

Der letzte Teil des vierten Kapitels folgt der Philosophie, die schon oft erwähnte Beziehung $\rho(A) = \inf_{f \in \Sigma(\Omega)} \text{cap}(f(A))$ in konkreten Situationen ohne Verwendung der Schifferschen Variationsformel durch die explizite Konstruktion eines Minimalgebietes nachzuweisen. Dies geschieht für einfach zusammenhängende Gebiete sowie für Ringgebiete mit einer zusätzlichen Symmetrie. Dabei wird unter anderem ein bisher nicht beachteter Typ von Minimalgebieten („Intervalle“) vorgestellt.

Schließlich können weitere Fragestellungen im Rahmen dieser Arbeit nur kurz angeschnitten werden: Das oben erwähnte Minimalgebiet eröffnet zum Beispiel einen Zusammenhang zwischen der Theorie der Robinschen Funktion und Abelschen Integralen, wie nur kurz erörtert wird.

Diese Arbeit wurde mit zahlreichen Bildern illustriert, die bis auf wenige Ausnahmen exakt berechnet wurden, und nicht nur einfache Skizzen sind. Die Implementierbarkeit auf einem Computer unterstreicht die konstruktive Natur der verwendeten Beweismethoden. Bei einigen Bildern wurden spezielle Punktsysteme verwendet: Zur Approximation der konformen Abbildung

auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet wurden Menke-Punkte ([27], [28], [29], [30]) mit hervorragenden Resultaten eingesetzt. Die Approximation der Greenschen Funktion eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes erfolgte mit Leja-Punkten ([26],[39], S. 257 ff.). Eine kurze Erläuterung zu diesen Punktsystemen und den verwendeten Approximationsmethoden ist im Anhang zu finden.

Die in dieser Arbeit entwickelten Verfahren zur Berechnung der Robinschen Funktion und der Robinschen Kapazität legen die Grundlage für die numerische Bestimmung dieser und damit auch anderer konformer Invarianten. Eine Durchführung dieses Programms würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen und soll daher an anderer Stelle geschehen.

2 Die Robinsche Funktion

Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ mit $\infty \in \Omega$. Weiter sei $A \subset \partial\Omega$ abgeschlossen und $B = \partial\Omega \setminus A$. Wir suchen eine Funktion $R : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, die das folgende Randwertproblem löst:

- (i) R ist harmonisch in $\Omega \setminus \{\infty\}$
- (ii) $R(z) - \log |z|$ ist harmonisch in einer Umgebung von ∞
- (iii) $R(z) = 0$ für $z \in A$
- (iv) $\frac{\partial R}{\partial n}(z) = 0$ für $z \in B$ (∇R stetig nach B fortgesetzt)

Eine Lösung dieses Problems heißt **Robinsche Funktion** in Ω mit Pol in ∞ . Entsprechend der jeweils geforderten Randbedingung heißt A **Dirichlet-Rand**, und B wird **Neumann-Rand** von Ω genannt. Im Spezialfall $A = \partial\Omega$ liegt das bekannte Randwertproblem für die Greensche Funktion in Ω mit Pol in ∞ vor.

Die nachfolgende Abbildung 2 zeigt die Niveaulinien (dunkle Linien) und die Feldlinien (helle Linien) der Robinschen Funktion mit Pol in ∞ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet. Der Dirichlet-Rand besteht hier aus drei Teilbögen und ist dunkel gekennzeichnet. Die drei komplementären Teilbögen des Neumann-Randes sind hell eingezeichnet. Auf dem Dirichlet-Rand enden die Feldlinien in einem

rechten Winkel zur Tangente an die Randkurve, während sie vom Neumann-Rand „weggedrückt“ werden. Bei den Niveaulinien verhält es sich genau andersherum: Die Niveaulinien enden im rechten Winkel auf dem Neumann-Rand, während sie tangential zum Dirichlet-Rand verlaufen.

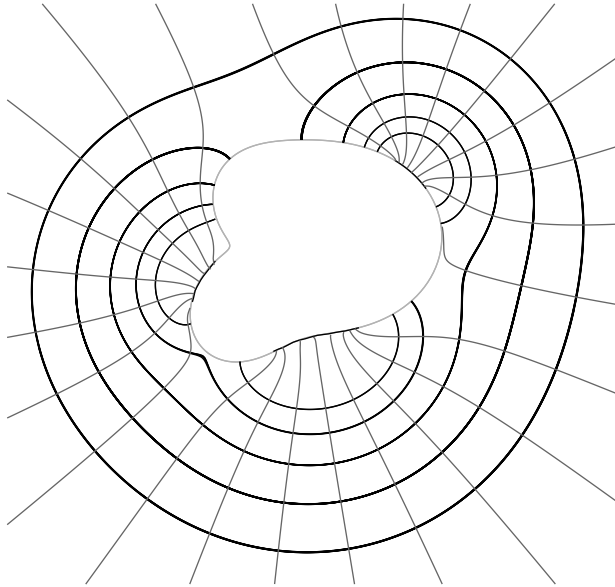


Abbildung 2

Im Falle der Existenz einer eindeutig bestimmten Robinschen Funktion R mit Pol in ∞ sei

$$\delta = \lim_{z \rightarrow \infty} R(z) - \log |z|.$$

Analog zur Definition der logarithmischen Kapazität sei die **Robinsche Kapazität** des Dirichlet-Randes A bezüglich Ω durch

$$\rho(A) = e^{-\delta}$$

erklärt.

Damit das angeführte Randwertproblem sinnvoll gestellt bzw. gelöst werden kann, bedarf es geeigneter Voraussetzungen an den Rand $\partial\Omega$. Die dazu erforderlichen Begriffe werden im folgenden Abschnitt kurz erläutert. Für eine ausführliche Darstellung sei auf [3], [11], [17] und [38] verwiesen.

2.1 Regularität der Ränder

Es sei Γ eine stetig differenzierbare Jordan-Kurve, die durch $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ parametrisiert werde. Dabei sei γ so gewählt, daß $\gamma'(t) \neq 0$ auf $]0, 2\pi[$ gelte, und in den Randpunkten die einseitigen Grenzwerte von γ' nicht verschwinden und gleich sind. Der Stetigkeitsmodul $\omega : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ von γ' ist durch

$$\omega(s) = \sup\{|\gamma'(t_1) - \gamma'(t_2)| : t_1, t_2 \in [0, 2\pi], |t_1 - t_2| \leq s\}$$

definiert. Die Kurve Γ heißt **Dini-glatt**, wenn für ein $\delta > 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\delta} \frac{\omega(s)}{s} ds < \infty$$

gilt (d.h., wenn γ' Dini-stetig ist).

Als Beispiel für Dini-glatte Jordan-Kurven seien Kurven angeführt, die eine Parameterdarstellung γ besitzen, deren Ableitung eine Hölder-Bedingung

$$|\gamma'(t_1) - \gamma'(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|^{\alpha}$$

mit $0 < \alpha < 1$ und $C > 0$ für $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ erfüllt. Aus der Hölder-Bedingung folgt

$$\frac{\omega(s)}{s} \leq Cs^{\alpha-1},$$

und somit die Dini-Glätte.

Wie Kellog und Warschawski gezeigt haben, impliziert die Dini-Glätte des Randes eines Gebietes die stetige Fortsetzbarkeit der Ableitung der Riemann-Abbildung auf den Rand des Einheitskreises und entsprechendes für die inverse Abbildung ([38], S. 48 sowie [24], [44] und [45]). Dadurch ist insbesondere sichergestellt, daß bei konformer Abbildung eines Gebietes Normalenvektoren wieder auf Normalenvektoren des Randes des Bildgebietes abgebildet werden. Letzteres wird beim Nachweis der Existenz der Robinschen Funktion sowie beim Nachweis ihrer Invarianzeigenschaften wesentlich sein.

Mit G bezeichnen wir die Greensche Funktion in Ω mit Pol in ∞ . Wenn eine Greensche Funktion existiert, so ist sie eindeutig bestimmt. Für die Existenz der Greenschen Funktion bedarf es geeigneter Regularitätsvoraussetzungen an $\partial\Omega$: Der Randpunkt $\zeta \in \partial\Omega$ heißt **regulär**, wenn es eine Umgebung

U von ζ und eine in $\overline{U \cap G}$ erklärte, subharmonische Funktion β gibt, die $\lim_{z \rightarrow \zeta} \beta(z) = 0$ und $\overline{\lim}_{z \rightarrow \omega} \beta(z) < 0$ für jedes $\omega \in \partial(U \cap \Omega) \setminus \{\zeta\}$ erfüllt. Die Funktion β heißt **Barriere** in ζ . Der Rand ∂G von G heißt **regulär**, wenn jeder Randpunkt von G regulär ist. Hinreichend für die Regularität eines Randpunktes ζ ist bereits, daß die Zusammenhangskomponente von $\partial\Omega$, in der ζ liegt, ein nichtausgeartetes Kontinuum ist.

Die Bedeutung der Regularität beruht darauf, daß das Dirichlet-Problem genau dann für jede stetige Randfunktion lösbar ist, wenn der Rand des gegebenen Gebietes regulär ist. Insbesondere existiert die Greensche Funktion $G(z)$ in Ω mit Pol in ∞ genau dann, wenn der Rand $\partial\Omega$ des Gebietes $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ regulär ist.

Ein weiteres, wichtiges Regularitätskriterium ist das Wiener-Kriterium. Es besagt, daß der Randpunkt ζ eines Gebietes Ω genau dann regulär ist, wenn es ein λ mit $0 < \lambda < 1$ gibt, so daß für die Mengen

$$L_n = \{z \in \mathbb{C} : \lambda^{n+1} \leq |z - \zeta| \leq \lambda^n\} \cap \partial\Omega$$

die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\log((\text{cap } L_n)^{-1})}$$

divergiert ([11], S. 376 ff., [39], S. 449 ff., [42], S. 104). Das Wiener-Kriterium ist notwendig und hinreichend für die Regularität eines Randpunktes. Wir werden im Text die Folgerung anwenden, daß die Divergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{cap } L_n}{\lambda^n}$$

hinreichend für die Regularität von ζ ist ([42], S. 104, [11], S. 378).

2.2 Existenz und Eindeutigkeit

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis der Existenz und der Eindeutigkeit der Robinschen Funktion unter den folgenden Voraussetzungen:

(V) Es sei Ω ein Gebiet (mit $\infty \in \Omega$), das von endlich vielen Dini-glatten Jordan-Kurven $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ berandet werde. Jede Zusammenhangskomponente des Dirichlet-Randes $A \subset \partial\Omega$ sei eine Jordan-Kurve oder ein abgeschlossener Jordan-Bogen.

Die anschließende Abbildung 3 illustriert die Voraussetzungen im Falle $n = 3$. Der Dirichlet-Rand von Ω ist dunkel gezeichnet, der Neumann-Rand hell.

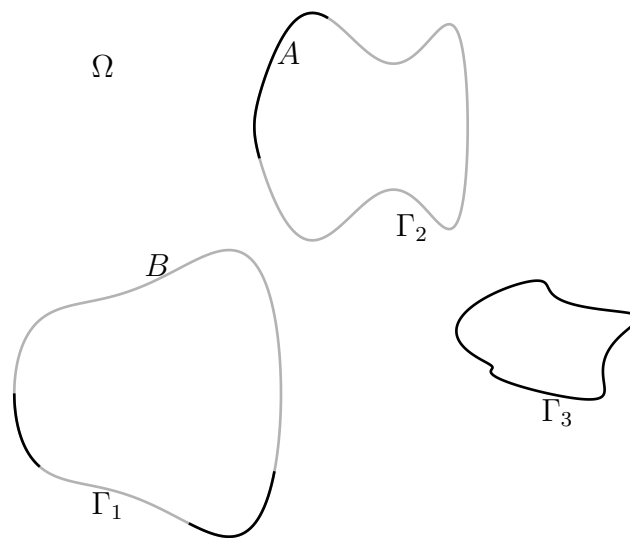


Abbildung 3

In dieser Arbeit werden wir uns auf die Fälle beschränken, daß

- der Neumann-Rand Teilmenge einer Jordan-Kurve ist, und, daß
- der Neumann-Rand Teilmenge zweier Jordan-Kurven ist.

Tatsächlich sind die im Text entwickelten Methoden auch geeignet, den Fall, daß der Neumann-Rand Teilmenge von mehr als zwei Randkomponenten ist, zu behandeln. Dies soll in dieser Arbeit nicht erörtert werden, da zusätzliche technische Schwierigkeiten auftreten, wie im Abschnitts 2.2.5 kurz erläutert wird.

Wir arbeiten in dieser Untersuchung unter etwas schwächeren Voraussetzungen als P. Duren, M. Schiffer, M. O'Neill und R. Thurman ([13], [15], [16], [14], [35]). Sobald Ω nicht einfach zusammenhängend ist, handelt es sich bei den dort zugelassenen Neumann-Rändern jeweils um die Vereinigung endlich vieler, abgeschlossener Teilbögen von $\partial\Omega$. Die im folgenden geschilderte Methode ist sogar unter noch schwächeren Voraussetzungen an die Beschaffenheit der Ränder von Ω anwendbar, als unter (V) angegeben wurden. Es scheint jedoch nicht sinnvoll, den Existenzbeweis an dieser Stelle für eine größere Klasse von Gebieten zu führen, da dies unverhältnismäßig aufwendige, rein technische Betrachtungen mit sich brächte. Statt dessen weisen wir an gegebener Stelle im Text auf Situationen hin, in denen ein Existenzbeweis ebenfalls mit der hier verwendeten Methode erbracht werden kann.

Satz 2.1 *Die Voraussetzungen (V) seien erfüllt. Dann gibt es genau eine, auf $\overline{\Omega}$ stetige Funktion R , die die Eigenschaften (i)-(iv) besitzt.*

Zunächst soll nur die Eindeutigkeitsaussage aus Satz 2.1 bewiesen werden.

Eindeutigkeit der Lösung

Wir nehmen an, R_1 und R_2 besitzen die Eigenschaften (i)-(iv), durch die die Robinsche Funktion definiert ist. Dann ist die Differenz $u = R_1 - R_2$ eine in Ω harmonische und auf $\overline{\Omega}$ stetige Funktion mit $u(z) = 0$ auf A und $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf B . Auf der kompakten Menge $\overline{\Omega}$ nimmt u Maximum und Minimum an. Das Maximumprinzip erzwingt, daß Maximum und Minimum auf $\partial\Omega = A \cup B$ angenommen werden. Angenommen, u wäre nicht identisch Null. Da auf A stets $u(z) = 0$ gilt, gäbe es eine Extremstelle $z_0 \in B$. Das Hopfsche Maximumprinzip erzwingt aber $\frac{\partial u}{\partial n}(z_0) > 0$, falls z_0 Maximalstelle ist bzw. $\frac{\partial u}{\partial n}(z_0) < 0$, falls z_0 Minimalstelle ist. Die Annahme, daß u nicht identisch Null ist, führt somit zu einem Widerspruch zu den geforderten Neumann-Randbedingungen. \square

2.2.1 Vorbereitung des Existenzbeweises

Die allgemeine Formulierung der dritten potentialtheoretischen Randwertaufgabe, die der hier gegebenen Definition der Robinschen Funktion zugrunde liegt, berücksichtigt auch Fälle, in denen die klassische Lösungstheorie, Einzelschichtpotentiale über die Lösung Fredholmscher Integralgleichung zu bestimmen (z.B. [18], S. 612 ff. oder [21]), nicht mehr anwendbar ist. Besondere Schwierigkeiten treten auch dadurch auf, daß gemeinsame Häufungspunkte von Dirichlet- und Neumann-Rand zugelassen sind. Ebenso wird es schwieriger, konstruktive Verfahren anzugeben, mit denen die Lösung einer gegebenen Randwertaufgabe (zumindest numerisch) bestimmt werden kann.

Ein abstrakter Existenzbeweis für das in dieser Arbeit interessierende Randwertproblem kann mit Hilfe der Schottky-Verdoppelung geführt werden: Hierbei wird für festes $\zeta \in \Omega$ die Existenz einer in Ω harmonischen Funktion g_ζ gezeigt, die auf A den Wert Null annimmt und auf B die Normalenableitung $-\frac{\partial G}{\partial n_z}(z, \zeta)$ besitzt. Hierbei ist G die Greensche Funktion von Ω mit Pol in ζ . M. Tsuji erreicht letzteres durch die Konstruktion zweier Riemannscher Flächen \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 mittels Schottky-Verdoppelung ([42], S. 31 f.): Es werden zwei Kopien des Gebietes Ω übereinander gelegt. Im ersten Fall werden die Dirichlet-Ränder miteinander verklebt und im zweiten Fall die Neumann-Ränder. Anschließend wird auf der Riemannschen Fläche \mathcal{R}_1 ein reines Neumann-Problem gelöst und auf der Fläche \mathcal{R}_2 ein reines Dirichlet-Problem. Ist u_1 die Lösung des Neumann-Problems auf \mathcal{R}_1 und u_2 die Lösung des Dirichlet-Problems auf \mathcal{R}_2 , so ist $g_\zeta = u_1 + u_2$ die Lösung des gemischten Randwertproblems im gegebenen Gebiet Ω . Schließlich ergibt sich die gesuchte Robinsche Funktion als $R(z, \zeta) = g_\zeta(z) + G(z, \zeta)$. In der Literatur sind leider keine klaren Aussagen zu finden, welche Glättevoraussetzungen an die Ränder von Ω zu stellen sind, damit diese Methode anwendbar ist. Der Nachteil dieses Existenzbeweises ist, daß er nicht konstruktiv ist und somit kein Verfahren zur Bestimmung der Lösung der Randwertaufgabe bereitstellt.

Eine weitere Möglichkeit eines Existenzbeweises ist durch Orthogonalentwicklung gegeben: Da Ω durch eine Möbius-Transformation konform auf ein beschränktes Gebiet abgebildet werden kann, und da die definierenden Eigenschaften der Robinschen Funktion konform äquivalent sind, dürfen wir in den beiden folgenden Absätzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon

ausgehen, daß Ω beschränkt ist. P. Duren und M. Schiffer zeigten, daß die Differenz

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi}(R(z, \zeta) - G(z, \zeta))$$

aus Robinscher Funktion und Greenscher Funktion $G(z, \zeta)$ in Ω mit Pol in ζ eine reproduzierende Kernfunktion für den Raum \mathcal{N} aller in Ω harmonischen Funktionen u ist, die auf dem Dirichlet-Rand den Wert Null annehmen und ein endliches Dirichlet-Integral

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u(x + iy)|^2 dx dy < \infty$$

besitzen ([15]). Das heißt, für jedes $u \in \mathcal{N}$ gilt

$$\int_{\Omega} \nabla K(x + iy, \zeta) \nabla u(x + iy) dx dy = u(\zeta).$$

Aus der Existenz eines vollständigen Orthonormalsystems $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{N} folgt unmittelbar die Existenz der Kernfunktion K , da diese durch die Entwicklung

$$K(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) u_n(\zeta)$$

dargestellt werden kann. Diese Reihe konvergiert bei festem ζ gleichmäßig in jeder kompakten Teilmenge von Ω , analog zur Bergmannschen Kernfunktion ([20]). Nun existiert die Greensche Funktion $G(z, \zeta)$ immer unter den Voraussetzungen, unter denen das gemischte Randwertproblem in Ω „sinnvoll“ gestellt werden kann. Daher folgt die Existenz der Robinschen Funktion $R(z, \zeta)$ aus der Existenz der reproduzierenden Kernfunktion.

Dieser Beweis ist konstruktiv, sobald es gelingt, ein vollständiges Orthonormalsystem in \mathcal{N} anzugeben. P. Duren und M. Schiffer haben dies für den Fall durchgeführt, daß $\Omega = \{1 < |z| < r\}$ mit $r > 1$ ein Kreisringgebiet ist ([15]). Dabei ist $A = \{|z| = 1\}$ der innere berandende Kreis und $B = \{|z| = r\}$ der äußere Kreis. B. Dittmar und R. Kühnau konstruierten ein vollständiges Orthonormalsystem für Gebiete Ω , die vom Rand des Einheitskreises und einer Strecke $A \subset [0, 1]$ berandet werden ([12]). Letztere ist dabei der Dirichlet-Rand, während $B = \partial\mathbb{D}$ der Neumann-Rand ist.

Von nun an sei Ω wieder unbeschränkt. Schließlich kann die Existenz der Robinschen Funktion aus der Lösung des Variationsproblems, das P. Duren und M. Schiffer in Zusammenhang mit der Robinschen Kapazität untersuchen, gefolgert werden ([15]). Auch dieser Beweis liefert kein konstruktives Verfahren für die Berechnung von R , da er auf der Schifferschen Variationsformel und der Existenz einer minimierenden Funktion in der Klasse $\Sigma(\Omega)$ basiert (siehe Abschnitt 4.3).

Wir werden nun einen Existenzbeweis vorstellen, der sowohl konstruktiv ist als auch unter recht allgemeinen Voraussetzungen angewendet werden kann. Dazu verfahren wir wie folgt: Zunächst wird Ω konform auf ein Gebiet Ω_0 so abgebildet, daß die Randkomponenten von Ω , auf denen Punkte des Neumann-Randes liegen, auf Kreise abgebildet werden. Der Punkt ∞ soll bei dieser Abbildung fest bleiben. Die Möglichkeit, an Kreisen global spiegeln zu können, erlaubt es, im Bildgebiet Ω_0 die Neumann-Bedingungen mit Hilfe durch Spiegelung konstruierter harmonischer Funktionen zu realisieren:

Als Beispiel nennen wir den einfachsten Fall $\Omega = \Delta$ mit einem echten Teilbogen $A \subset \partial\mathbb{D}$ als Dirichlet-Rand. Ist G die Greensche Funktion von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A$ mit Pol in ∞ , so lautet die Robinsche Funktion in dieser Situation

$$R(z) = G(z) + G\left(\frac{1}{\bar{z}}\right),$$

wie im nachfolgenden Existenzbeweis deutlich wird. Daß die Neumann-Bedingung erfüllt ist, wird aus der einfachen geometrischen Tatsache folgen, daß Normalenvektoren an den Spiegelkreis bei Spiegelung um 180° gedreht werden (vgl. Bemerkung 2.4). P. Duren und M. Schiffer haben diese Methode bereits im Spezialfall $\Omega = \Delta$ angewendet ([16]).

Für den Transport auf ein Vollkreisgebiet muß garantiert werden, daß Normalenvektoren auf Normalenvektoren abgebildet werden. Unter den hier vorliegenden Voraussetzungen gilt sogar

Bemerkung 2.2 *Sind Ω_1 und Ω_2 Gebiete, die jeweils von einer oder zwei Dini-glatten Jordan-Kurven berandet werden, und ist f eine konforme Abbildung von Ω_1 auf Ω_2 , so ist die Ableitung f' stetig auf den Rand $\partial\Omega_1$ fortsetzbar.*

Diese Aussage beruht auf Kellogs und Warschawskis Resultaten, daß die Riemann-Abbildung vom Einheitskreis auf ein Dini-glatt berandetes Gebiet

eine Ableitung besitzt, die stetig auf den Rand fortgesetzt werden kann, und dort niemals Null wird ([38], S. 48, bzw. [24], [44], [45]). Liegt der Fall einer Randkomponente vor, so folgt die Bemerkung durch Verkettung der Riemann-Abbildung des einen Gebietes mit der Inversen der Riemann-Abbildung des anderen Gebietes. Besitzen Ω_1 und Ω_2 jeweils zwei Randkomponenten, so kann jedes dieser Gebiete durch die Verkettung jeweils zweier inverser Riemann-Abbildungen konform auf ein analytisch berandetes Ringgebiet abgebildet werden. Diese Verkettungen der Inversen zweier Riemann-Abbildungen besitzen gemäß dem oben angeführten Satz von Kellog und Warschawski stetig fortsetzbare Ableitungen, die nicht Null werden. Schließlich folgt die Behauptung, da konforme Abbildungen zwischen analytisch berandeten Gebieten über die Ränder hinaus fortgesetzt werden können.

Die benötigte Invarianzaussage für Lösungen des betrachteten Randwertproblems lautet nun:

Bemerkung 2.3 *Gegeben seien zwei Gebiete Ω_1 und Ω_2 und eine Teilmenge $A_2 \subset \partial\Omega_2$ derart, daß die zu Beginn dieses Abschnittes genannten Voraussetzungen jeweils erfüllt sind. Weiter sei $f(z) = az + a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots$ mit $a \neq 0$ eine konforme Abbildung des Gebietes Ω_1 auf Ω_2 . Ist R_2 eine Lösung des Randwertproblems (i)-(iv) in Ω_2 , so ist $R = R_2 \circ f$ eine Lösung in Ω_1 mit Dirichlet-Rand $A = f^{-1}(A_2)$.*

Diese Invarianzaussage gilt auch unter allgemeineren Voraussetzungen und wird im Verlaufe des Textes durchaus in anderen Situationen benötigt werden. An entsprechender Stelle werden wir auf den jeweiligen Fall eingehen. Es ist leicht zu sehen, daß die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) erfüllt sind. Die vierte Eigenschaft (iv) folgt, da eine konforme Abbildung, deren Ableitung stetig auf den Rand fortgesetzt werden kann und dort nicht verschwindet, „Normalenvektoren in Normalenvektoren überführt“. Genauer gilt in $z_0 \in \partial\Omega_1 \setminus A$

$$\frac{\partial R}{\partial n}(z_0) = |f'(z_0)| \cdot \frac{\partial R_2}{\partial n}(f(z_0)).$$

Als nächstes soll die anschaulich einleuchtende Tatsache nachgerechnet werden, daß das Einsetzen einer Kreisspiegelung φ in eine differenzierbare Abbildung g , die in einer Umgebung U eines Punktes ζ der Kreislinie C , an der gespiegelt wird, definiert ist, bewirkt, daß die Normalableitung in ζ auf ihr -1 -faches „gespiegelt“ wird.

Bemerkung 2.4 Gegeben sei die Kreislinie $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ und $\zeta \in C$. Die Spiegelung an C werde mit φ bezeichnet. Weiter sei U eine Umgebung von ζ . Die Abbildung $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(z) = g(x + iy)$ besitze in U stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$. Dann gilt

$$\frac{\partial(g \circ \varphi)}{\partial n}(\zeta) = -\frac{\partial g}{\partial n}(\zeta).$$

Beweis: Die Spiegelung φ besitzt die Gestalt

$$\varphi(z) = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} + z_0.$$

Mit $n = \frac{1}{r}(\zeta - z_0)$ gilt

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(g \circ \varphi)}{\partial n}(\zeta) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(\varphi(\zeta + t \cdot n)) - g(\varphi(\zeta))}{t} \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(\zeta)) \cdot \operatorname{Re} \frac{d}{dt} \left(\frac{r^2}{\bar{\zeta} + t \cdot \bar{n} - \bar{z}_0} + z_0 \right) \Big|_{t=0} \\ & \quad + \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(\zeta)) \cdot \operatorname{Im} \frac{d}{dt} \left(\frac{r^2}{\bar{\zeta} + t \cdot \bar{n} - \bar{z}_0} + z_0 \right) \Big|_{t=0} \\ &= -\frac{\partial g}{\partial x}(\zeta) \cdot r^2 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{n}}{(\bar{\zeta} - \bar{z}_0)^2} \right) - \frac{\partial g}{\partial y}(\zeta) \cdot r^2 \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{\bar{n}}{(\bar{\zeta} - \bar{z}_0)^2} \right) \\ &= -\frac{\partial g}{\partial x}(\zeta) \cdot r \cdot \operatorname{Re} \frac{1}{\bar{\zeta} - \bar{z}_0} - \frac{\partial g}{\partial y}(\zeta) \cdot r \cdot \operatorname{Im} \frac{1}{\bar{\zeta} - \bar{z}_0} \\ &= -\frac{\partial g}{\partial x}(\zeta) \cdot \operatorname{Re} \frac{1}{r}(\zeta - z_0) - \frac{\partial g}{\partial y}(\zeta) \cdot \operatorname{Im} \frac{1}{r}(\zeta - z_0) \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(\zeta + t \cdot n) - g(\zeta)}{t} \\ &= -\frac{\partial g}{\partial n}(\zeta). \end{aligned}$$

□

2.2.2 Existenz im 1. Fall (Neumann-Rand auf einer Randkomponente)

In diesem Fall ist der Neumann-Rand B nicht leere Teilmenge einer Jordan-Kurve, die wir Γ nennen. Die konforme Abbildung von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \text{Int } \Gamma$ auf das Außengebiet Δ des Einheitskreises heiße f , und es sei $\Omega_0 = f(\Omega)$, $B_0 = f(B)$ und $A_0 = f(A)$.

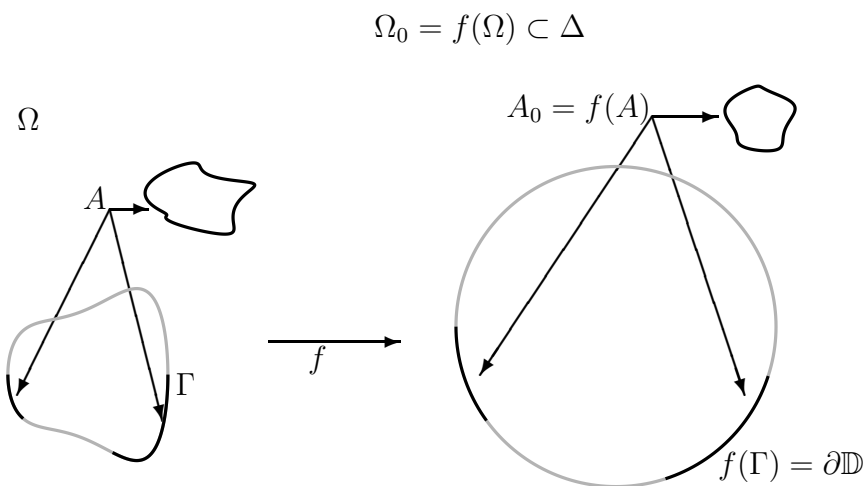


Abbildung 4

Die vorausgehende Abbildung zeigt ein Gebiet Ω , das von zwei Jordan-Kurven berandet ist. Wie gefordert, besitzt nur eine Randkurve Γ von Ω gemeinsame Punkte mit dem Neumann-Rand B (im Bild hellgrau skizziert). Das Außengebiet dieser Randkurve Γ wird durch die konforme Abbildung f auf das Äußere des Einheitskreises Δ konform abgebildet. Den Jordan-Bögen, deren Vereinigung den Neumann-Rand ergibt, werden dabei Teilbögen des Einheitskreisrandes zugeordnet (ebenfalls hellgrau in der Skizze).

Weiter sei

$$\varphi(z) = \frac{1}{\bar{z}}$$

die Spiegelung am Einheitskreis und

$$E = A_0 \cup \varphi(A_0)$$

die Vereinigung des Bildes des Dirichlet-Randes von Ω_0 mit dessen Spiegelbild am Einheitskreis.

Die anschließende Abbildung 5 zeigt das Bildgebiet Ω_0 unter der konformen Abbildung f . Das Gebiet Ω_0 ist Teilmenge des Äußeren des Einheitskreises Δ . Das Bild des Neumann-Randes B_0 ist Vereinigung offener Teilbögen des Einheitskreisrandes. Zusammenhangskomponenten des Bildes des Dirichlet-Randes A_0 können sowohl auf dem Rand des Einheitskreises, als auch in Δ liegen. Die Komponenten von A_0 , die auf $\partial\mathbb{D}$ liegen, werden durch die Spiegelung φ jeweils auf sich selbst abgebildet, während die Komponenten von $A_0 \cap \Delta$ in den Einheitskreis hinein gespiegelt werden.

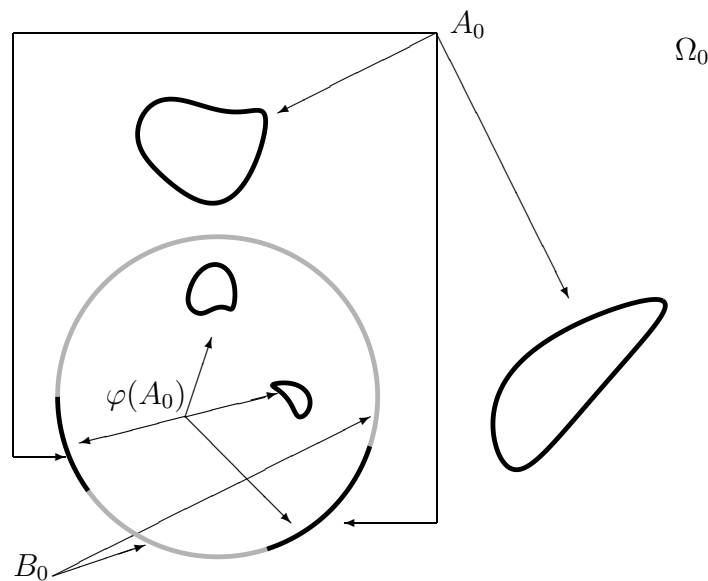


Abbildung 5

Das Außengebiet von E , das ist die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$, werde Ω_E genannt. Wir werden beweisen, daß Ω_E regulär ist:

Dazu zeigen wir zunächst $\partial\Omega_E = E$: Es gilt stets $\partial\Omega_E \subset E$. Mit elementaren Mitteln sieht man, daß auch

$$A_0 \subset A_0 \cap \partial\Omega_0 \subset \partial\Omega_E$$

gilt. Da Ω_E symmetrisch zum Einheitskreis ist, und topologische Eigenschaften bei Spiegelung erhalten bleiben, folgt auch $\varphi(A_0) \subset \partial\Omega_E$ und somit $\partial\Omega_E = E$.

Laut Voraussetzung ist A die Vereinigung von abgeschlossenen, nichtausgearteten Kontinua. Diese Eigenschaft wird auf die Menge

$$E = A_0 \cup \varphi(A_0) = f(A) \cup \varphi(f(A))$$

übertragen, da f auf $\bar{\Omega}$ eine topologische Abbildung ist. Daher ist Ω_E in der Tat regulär.

Somit existiert eine Greensche Funktion in Ω_E mit Pol in ∞ , die G bezeichnet werde. Wir zeigen, daß

$$R_0(z) = G(z) + G\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$$

die Robinsche Funktion im Gebiet Ω_0 mit Dirichlet-Rand A_0 ist: Zunächst besitzt R_0 die Eigenschaft (i), da R_0 in $\Omega_0 \setminus \{\infty\}$ harmonisch ist. Weiter gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (R_0(z) - \log |z|) = \lim_{z \rightarrow \infty} (G(z) - \log |z|) + G(0).$$

Forderung (ii) ist somit ebenfalls erfüllt. Die Gültigkeit von (iii) ist offensichtlich, da alle Punkte von A_0 bei Spiegelung auf Punkte von E abgebildet werden, und G dort verschwindet. Daß (iv) gilt, folgt direkt aus der Bemerkung 2.4, da die partiellen Ableitungen der Greenschen Funktion in einer Umgebung jedes Punktes des Neumann-Randes B_0 existieren.

Schließlich folgt die Behauptung, da $R = R_0 \circ f$ laut Bemerkung 2.3 die gewünschten Eigenschaften in Ω mit Dirichlet-Rand A besitzt. \square

Bemerkung 2.5 *Der expliziten Darstellung der Robinschen Funktion aus dem vorhergehenden Beweis kann direkt entnommen werden, daß*

$$\rho(A_0) = e^{-\lim_{z \rightarrow \infty} (G(z) - \log |z|)} \cdot e^{-G(0)} = e^{-G(0)} \cdot \text{cap } E$$

für $A_0 = f(A)$ gilt.

Im folgenden Beispiel sind die am Anfang dieses Kapitels geforderten Voraussetzungen nicht erfüllt, da $\partial\Omega$ nicht Vereinigung von Jordan-Kurven ist. Dennoch existiert in der vorliegenden Situation eine (eindeutig bestimmte) Robinsche Funktion, die wir mit Hilfe der im vorausgehenden Satz verwendeten Methode explizit angeben können.

Beispiel 2.6. Es sei

$$\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus (\overline{\mathbb{D}} \cup [1, a])$$

und $A = [1, a]$ mit $a > 1$. Die Menge E aus dem Beweis des vorhergehenden Satzes besitzt die Gestalt

$$E = A \cup \left\{ \zeta \in \widehat{\mathbb{C}} : \frac{1}{\bar{\zeta}} \in A \right\} = \left[\frac{1}{a}, a \right].$$

Das nächste Bild zeigt das Gebiet Ω sowie die Randkomponenten A und B . Außerdem ist das Spiegelbild des Dirichlet-Randes $\varphi(A)$ eingezeichnet.

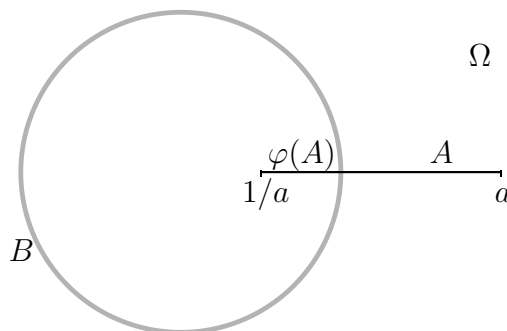


Abbildung 6

In der gegebenen Situation gilt $\Omega_E = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$, da $\widehat{\mathbb{C}} \setminus [\frac{1}{a}, a]$ einfach zusammenhängend ist. Es sei

$$J : \Delta \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1], \quad J(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

die Joukowski-Abbildung. Sie bildet das Äußere des Einheitskreises konform auf $\widehat{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$ ab. Da die Möbius-Transformation T mit

$$T(z) = \frac{2a}{a^2 - 1} (z - a) + 1$$

das Gebiet Ω_E konform auf $\widehat{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$ abbildet, lautet die Greensche Funktion von Ω_E mit Pol in ∞

$$G(z) = \log \left| J^{-1} \left(\frac{2a}{a^2 - 1} (z - a) + 1 \right) \right|.$$

Mit der gleichen Argumentation wie im vorausgehenden Satz folgt, daß

$$\begin{aligned} R(z) &= G(z) + G\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \\ &= \log \left| J^{-1} \left(\frac{2a}{a^2 - 1} (z - a) + 1 \right) \right| + \log \left| J^{-1} \left(\frac{2a}{a^2 - 1} \left(\frac{1}{\bar{z}} - a \right) + 1 \right) \right| \end{aligned}$$

die Robinsche Funktion in Ω mit Pol in ∞ und Dirichlet-Rand A ist. Gemäß der Bemerkung 2.5 erhalten wir für die Robinsche Kapazität

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \text{cap} E \cdot e^{-G(0)} \\ &= \text{cap} E \cdot \left| J^{-1} \left(\frac{1 + a^2}{1 - a^2} \right) \right|^{-1} \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \left| J^{-1} \left(\frac{1 + a^2}{1 - a^2} \right) \right| &= \left| \frac{1 + a^2}{1 - a^2} - \sqrt{\left(\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \right)^2 - 1} \right| \\ &= \frac{(a + 1)^2}{a^2 - 1} \end{aligned}$$

und, da die logarithmische Kapazität eines Intervalls

$$\text{cap} E = \frac{1}{4} \cdot \left(a - \frac{1}{a} \right)$$

ein Viertel der Länge beträgt ([25], S. 172), resultiert die Gleichung

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \frac{(a^2 - 1)^2}{4a \cdot (a + 1)^2} \\ &= \frac{(a - 1)^2}{4a}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit $\text{cap} A = \frac{a-1}{4}$ führt auf die Beziehung

$$\rho(A) = \left(1 - \frac{1}{a}\right) \cdot \text{cap} A.$$

Offensichtlich gilt $\rho(A) \leq \text{cap} A$ für alle Gebietsparameter. Diese Ungleichung zwischen Robinscher- und logarithmischer Kapazität besteht im allgemeinen und wird im Abschnitt 4.3 untersucht werden.

2.2.3 Vorbereitung für den Fall zweier Randkomponenten

Jetzt erfolgt der Beweis für den Fall, daß Punkte von B auf zwei Randkomponenten von Ω liegen. In diesem Fall benötigen wir, daß die Spiegelung an einem Kreis für alle Punkte, die einen festen Abstand zu diesem Kreis nicht unterschreiten, kontrahierend wirkt:

Hilfssatz 2.7 *Gegeben sei die Kreislinie C mit Radius r . Sind ζ_1 und ζ_2 Punkte im Außengebiet von C , deren Abstand zu C mindestens d beträgt, so gilt für die Spiegelung φ an C*

$$|\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_2)| \leq \frac{1}{\kappa^2} |\zeta_1 - \zeta_2|.$$

Dabei ist $\kappa = 1 + \frac{d}{r}$.

Beweis: Die Spiegelung an C ist durch

$$\varphi(z) = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} + z_0$$

gegeben, wobei z_0 der Mittelpunkt von C ist. Die Behauptung folgt mit

$$\begin{aligned} |\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_2)| &= r^2 \cdot \left| \frac{1}{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_0} - \frac{1}{\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_0} \right| \\ &= \frac{r^2}{|\zeta_1 - z_0| |\zeta_2 - z_0|} \cdot |\zeta_1 - \zeta_2| \\ &\leq \frac{r^2}{(d+r)^2} \cdot |\zeta_1 - \zeta_2| \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \cdot |\zeta_1 - \zeta_2|. \end{aligned}$$

□

Im Existenzbeweis wird es notwendig sein, die Greensche Funktion spezieller, durch Iteration von Möbius-Transformationen erzeugter Gebiete bezüglich ihres Randverhaltens zu untersuchen: Es sei K_0 eine offene Kreisscheibe in \mathbb{C} und $T : \overline{K_0} \rightarrow K_0$ eine kontrahierende Möbius-Transformation. Nach dem Banachschem Fixpunktsatz gibt es genau einen Fixpunkt $z_0 \in \overline{K_0}$, der wegen der Voraussetzung $T(K_0) \subset K_0$ in K_0 liegt. Weiter sei $K_1 = T(K_0)$ und $A \subset K_0 \setminus \overline{K_1}$ eine abgeschlossene Menge mit der Eigenschaft, daß das Außengebiet von A ein Gebiet mit regulärem Rand ist, das den Rand des inneren Kreises ∂K_1 enthalte. Mit $T^{(n)} = T \circ \dots \circ T$ werde die n -te Iterierte der Möbius-Transformation T bezeichnet, und es sei $K_n = T^{(n)}(K_0)$. Schließlich definieren wir

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{(n)}(A) \cup \{z_0\}.$$

Es gilt $E \subset K_0$, und damit ist E beschränkt. Außerdem ist E abgeschlossen: Es sei (z_n) eine konvergente Folge aus E mit Grenzwert ζ . Im Falle $\zeta = z_0$ ist nichts zu zeigen, da $z_0 \in E$ ist. Andernfalls ist z_0 kein Häufungswert dieser Folge. Aus der Kontraktionseigenschaft von T folgt, daß bei vorgegebener Umgebung um z_0 fast alle $K_m = T^{(m)}(K_0)$ in dieser Umgebung liegen. Somit gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß $z_n \notin K_m$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Nun ist

$$E \setminus K_m = A \cup \bigcup_{k=1}^{m-1} T^{(k)}(A)$$

die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener, beschränkter Mengen und daher kompakt. Aus letzterem folgt $\zeta \in E$. Damit haben wir gezeigt, daß E abgeschlossen und somit ein Kompaktum ist.

Das Außengebiet von E werde Ω_E genannt.

Die nachfolgende Abbildung 7 zeigt die Menge A , die gesamte Menge E und die Ränder der ersten vier Kreise K_0 bis K_3 .

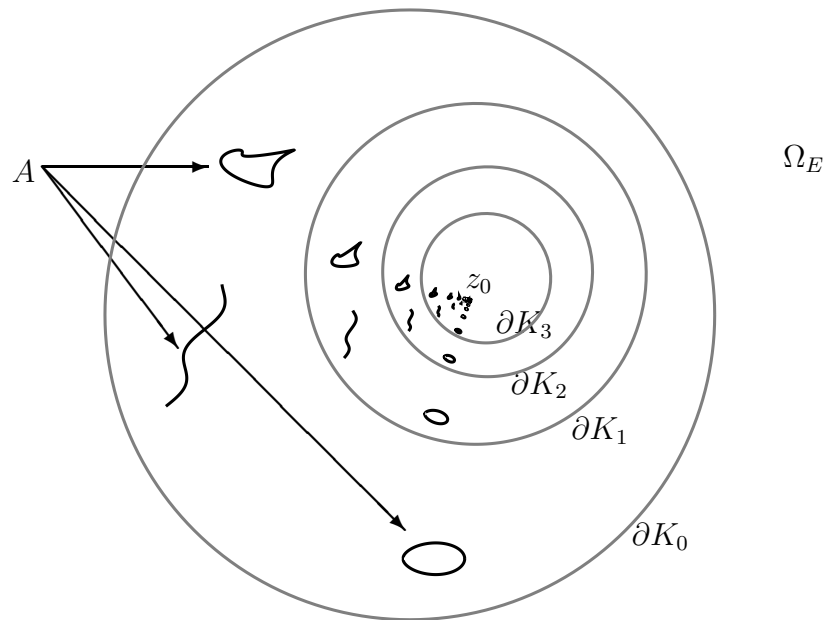


Abbildung 7

Hilfssatz 2.8 *Es gelten folgende Aussagen:*

- (i) *Der Punkt z_0 liegt auf dem Rand von Ω_E .*
- (ii) *Das Gebiet Ω_E ist regulär.*
- (iii) *Die Greensche Funktion G in Ω_E mit Pol in ∞ besitzt eine Hölderstetige Fortsetzung nach z_0 , d.h., es gibt ein $\alpha > 0$ und ein $C > 0$ derart, daß für hinreichend kleines δ und $z \in \Omega_E$ mit $|z - z_0| < \delta$*

$$G(z) < C\delta^\alpha$$

gilt.

Beweis: Der Kreis ∂K_0 liegt ganz im Außengebiet Ω_A von A , da aus der Voraussetzung $A \subset K_0 \setminus \overline{K_1}$ unmittelbar $A \cap \partial K_0 = \emptyset$ folgt. Laut Voraussetzung befindet sich die gesamte Kreislinie ∂K_1 ebenfalls in Ω_A . Es sei $w \in \partial K_0$ und Γ_0 ein stetig differenzierbarer Jordan-Bogen mit Anfangspunkt w und Endpunkt $T(w) \in \partial K_1$, der die Menge A nicht trifft und bis auf den Anfangspunkt in $K_0 \setminus K_1$ verläuft. Dies impliziert, daß $|\Gamma_0| \subset \Omega_E$ gilt. Mit dem

Additionszeichen werde die Verkettung von Wegen bezeichnet ([3], S. 137). Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist durch

$$\Gamma_N = \Gamma_0 + \sum_{n=1}^N T^{(n)}(\Gamma_0)$$

ein stückweise stetig differenzierbarer Jordan-Bogen definiert mit Anfangspunkt w und Endpunkt $w_N = T^{(N)}(w) \in \partial K_N$, der ganz in Ω_E verläuft. Somit liegen alle Glieder der Folge $(w_N)_{N \in \mathbb{N}}$ in Ω_E . Mit dem Banachschen Fixpunktsatz folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} w_N = z_0,$$

d.h., es existiert eine Folge aus Ω_E , die gegen z_0 konvergiert. Wegen $z_0 \notin \Omega_E$ ist der Beweis von Punkt (i) somit erbracht.

Als nächstes zeigen wir die Regularität des Randes $\partial\Omega_E$. Jeder Punkt $\zeta \neq z_0$ von $\partial\Omega_E$ ist das Bild eines Punktes ω des regulären Randes des Außengebietes von A unter einer Iterierten $T^{(n)}$ der Möbius-Transformation T mit $n \in \mathbb{N}_0$. Die Abbildung $T^{(n)}$ bildet den Schnitt jeder hinreichend kleinen Umgebung U von ω mit dem Außengebiet von A konform auf den Schnitt einer Umgebung von ζ mit Ω_E ab. Eine elementare Rechnung zeigt, daß eine Barriere β an ω , die im Schnitt von U mit dem Außengebiet von A definiert ist, auf eine Barriere $\beta \circ (T^{(n)})^{-1}$ für ζ transportiert wird. Die Regularität des Punktes z_0 zeigen wir nun durch eine Anwendung des Wiener-Kriteriums ([11], S. 376 ff., [39], S.449 ff., [42], S.104): Der folgende Beweis präzisiert die anschaulich einsichtige Tatsache, daß sich die Kreise $T^{(n)}(K_0)$ für $n \rightarrow \infty$ in der gleichen Geschwindigkeit in z_0 zusammenziehen, mit der die Kapazität der Mengen $T^{(n)}(A)$ schrumpft. Somit ist ausgeschlossen, daß die Menge E in z_0 zu „dünn“ wird.

Da T kontrahierend ist, gilt im Fixpunkt $|T'(z_0)| < 1$. Dies hat zur Folge, daß ein zweiter Fixpunkt von T existiert. Es sei S eine Möbius-Transformation, die den anziehenden Fixpunkt z_0 auf 0 und den zweiten Fixpunkt auf ∞ abbildet. Da 0 und ∞ die Fixpunkte von $S \circ T \circ S^{-1}$ sind, besitzt diese Möbius-Transformation die Gestalt

$$S \circ T \circ S^{-1}(\zeta) = \lambda\zeta$$

mit $\lambda = T'(z_0) \in \mathbb{C}$ und $|\lambda| < 1$.

Genau dann ist z_0 regulärer Randpunkt von Ω_E , wenn 0 regulärer Randpunkt des Außengebietes der Menge $\tilde{E} = S(E)$ ist, da eine Barriere β in 0 in eine Barriere $\beta \circ S$ um z_0 überführt wird (und umgekehrt). Zum Nachweis der Regularität des Punktes 0 konstruieren wir zunächst ein Kreisringgebiet der Form

$$\mathcal{R}_0 = \{z \in \mathbb{C} : |\lambda|^d < |\zeta| < 1\},$$

wobei wir $d \in \mathbb{N}$ so wählen werden, daß $\text{cap}(\mathcal{R}_0 \cap \tilde{E}) > 0$ gilt. Dies erreichen wir dadurch, daß wir im folgenden d so bestimmen werden, daß \mathcal{R}_0 ein Ringgebiet der Form $S(K_m \setminus \overline{K_{m+1}})$ enthält:

Die natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ werde so groß gewählt, daß

$$\overline{S(K_m)} \subset \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$$

gilt (siehe Abbildung 8). Ein solches m existiert, da in einer vorgegebenen Umgebung von 0 fast alle Kreise $S(K_m)$ liegen. Wir wählen nun $d \in \mathbb{N}$ so, daß

$$|\lambda|^d < \min\{|S(z)| : z \in \partial K_{m+1}\}$$

gilt. Für

$$C_1 = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < |\lambda|^d\}$$

besteht dann die Inklusion

$$\overline{C_1} \subset S(K_{m+1}).$$

Der Kreisring

$$\mathcal{R}_0 = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\lambda|^d < |\zeta| < 1\} = \mathbb{D} \setminus \overline{C_1}$$

enthält somit in der Tat das Ringgebiet

$$S(K_m \setminus \overline{K_{m+1}}).$$

Die anschließende Abbildung 8 zeigt das Ringgebiet \mathcal{R}_0 für das in Abbildung 6 illustrierte Beispiel. In diesem Fall ist $d = 4$ und $m = 3$.

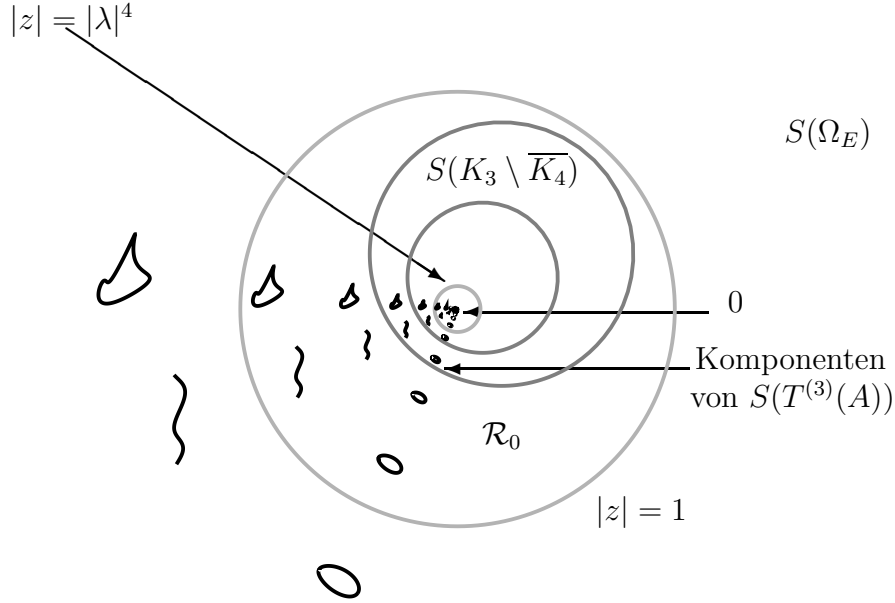


Abbildung 8

Wegen $S(T^{(m)}(A)) \subset \mathcal{R}_0 \cap \tilde{E}$ folgt

$$c_0 = \text{cap}(\mathcal{R}_0 \cap \tilde{E}) \geq \text{cap} S(T^{(m)}(A)) > 0.$$

Die rechte Ungleichung gilt, da das Außengebiet von A nach Voraussetzung regulär ist, und somit auch die Greensche Funktion im Außengebiet von $S(T^{(m)}(A))$ existiert. Wir betrachten die Mengen

$$\mathcal{R}_n = \{\zeta : |\lambda|^{d(n+1)} < |\zeta| < |\lambda|^{dn}\}$$

und setzen

$$c_n = \text{cap}(\mathcal{R}_n \cap \tilde{E})$$

für $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\mathcal{R}_{n+1} = \lambda^d \mathcal{R}_n$ und $T^{(d)}(E) \subset E$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{n+1} \cap \tilde{E} &\supset \mathcal{R}_{n+1} \cap S \circ T^{(d)} \circ S^{-1}(\tilde{E}) \\ &= \lambda^d \cdot \mathcal{R}_n \cap \lambda^d \cdot \tilde{E} \\ &= \lambda^d \cdot (\mathcal{R}_n \cap \tilde{E}). \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$c_{n+1} \geq |\lambda|^d \cdot c_n.$$

Induktiv folgt

$$c_{n+1} \geq |\lambda|^{d(n+1)} \cdot c_0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit divergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{|\lambda|^{dn}},$$

und gemäß Wiener-Kriterium folgt die Regularität des Außengebietes von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \tilde{E}$ im Punkt 0 ([11], S. 378). Die Behauptung (ii) ist daher ebenfalls erfüllt. Insbesondere folgt die Existenz der Greenschen Funktion mit Pol in ∞ im Gebiet Ω_E .

Zum Beweis von (iii) definieren wir

$$M = \max_{z \in \partial K_0} G(z).$$

Aus der Voraussetzung $A \subset K_0 \setminus \overline{K_1}$ folgt $\partial K_n \cap E = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ laut Definition von E .

Es sei u_0 die in $K_0 \cap \Omega_E$ harmonische Funktion, für die

$$u_0(z) = \begin{cases} M & \text{für } z \in \partial K_0 \\ 0 & \text{für } z \in \partial \Omega_E \end{cases}$$

gilt. Die Existenz von u_0 ist wegen der Regularität von Ω_E gesichert. Offensichtlich gilt

$$u_0(z) = M \cdot \omega(z, \partial K_0, K_0 \cap \Omega_E),$$

wobei mit ω das harmonische Maß bezeichnet wird. Laut Maximumprinzip ist $u_0(z) < M$ für $z \in \partial K_1$. Da ∂K_1 kompakt ist, existiert ein $0 < c < 1$ mit

$$u_0(z) \leq cM$$

für alle $z \in \partial K_1$.

Wir definieren nun die in $K_n \cap \Omega_E$ harmonischen Funktionen $u_n(z)$ durch

$$u_n(z) = c^n u_0 \left((T^{(n)})^{-1}(z) \right).$$

Offensichtlich gilt $u_n(z) = Mc^n$ für $z \in \partial K_n$ und $u_n(z) = 0$ für $z \in \partial\Omega_E \cap K_n$. Diese Aussage trifft auch für $n = 0$ zu. Wir weisen nun $G(z) \leq u_n(z)$ in $K_n \cap \Omega_E$ für $n \in \mathbb{N}_0$ durch vollständige Induktion nach. Die Induktionsverankerung

$$G(z) \leq u_0(z)$$

folgt durch Anwendung des Maximumprinzips auf die Funktion $G(z) - u_0(z)$ im Gebiet $K_0 \cap \Omega_E$. Als Induktionsannahme setzen wir $G(z) \leq u_n(z)$ für $z \in K_n \cap \Omega_E$ voraus, und folgern auf ∂K_{n+1}

$$G(z) \leq u_n(z) \leq Mc^{n+1} = u_{n+1}(z).$$

Mit dem Maximumprinzip folgt $G(z) \leq u_{n+1}(z)$ für alle $z \in K_{n+1} \cap \Omega_E$. Somit ist

$$G(z) \leq u_n(z)$$

in $K_n \cap \Omega_E$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nachgewiesen. Hieraus folgt sofort

$$G(z) \leq Mc^n$$

auf ∂K_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie schnell sich die K_m in 0 zusammenziehen. Zunächst besitzt T die Entwicklung

$$T(z) = z_0 + (z - z_0) \cdot T'(z_0) + O(|z - z_0|^2) \quad (z \rightarrow z_0)$$

mit $0 < |T'(z_0)| < 1$. Es gibt deshalb einen Kreis $K_{\delta_0}(z_0)$ um z_0 mit Radius δ_0 , in dem die Ungleichung

$$|T(z) - z_0| \geq q|z - z_0|$$

mit einem $0 < q < |T'(z_0)|$ erfüllt ist.

Weil $T : \overline{K_0} \rightarrow K_0$ kontrahierend ist, gilt $\overline{T(K_{\delta_0}(z_0))} \subset K_{\delta_0}(z_0)$, und die oben angeführte Ungleichung impliziert

$$|T^{(n)}(z) - z_0| \geq q^n |z - z_0|$$

für alle $z \in K_{\delta_0}(z_0)$.

Nun existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß $K_{n_0} \subset K_{\delta_0}(z_0)$ gilt. Für $n \geq n_0$ gibt es zu $z \in K_n \setminus \overline{K_{n+1}}$ (genau) ein $\zeta \in K_{n_0} \setminus \overline{K_{n_0+1}}$ mit

$$z = T^{(n-n_0)}(\zeta).$$

Somit erhalten wir für $z \in K_n \setminus \overline{K_{n+1}}$ die Ungleichung

$$(*) \quad |z - z_0| = |T^{(n-n_0)}(\zeta) - z_0| \geq q^{n-n_0} \cdot \text{dist}(\partial K_{n_0+1}, z_0) = C_1 \cdot q^n$$

mit der Konstanten $C_1 = \frac{1}{q^{n_0}} \cdot \text{dist}(\partial K_{n_0+1}, z_0)$.

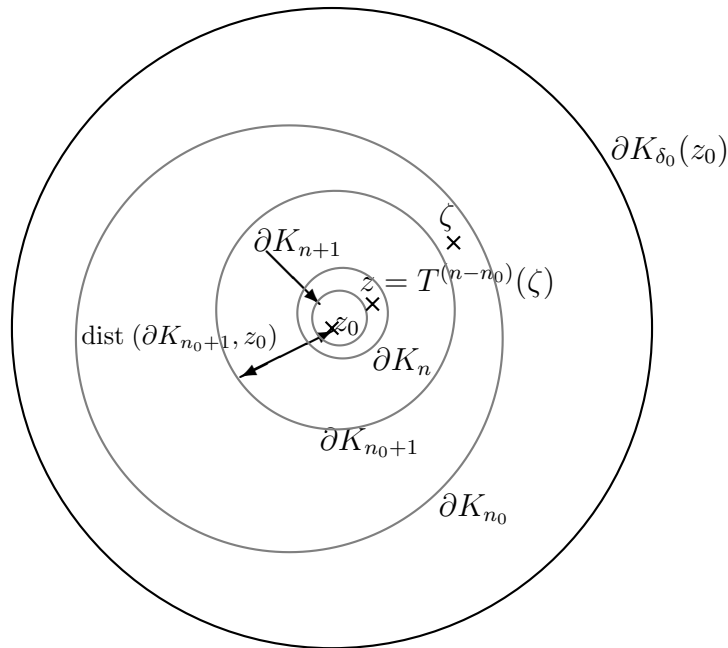


Abbildung 9

Abbildung 9 verdeutlicht die Konstruktion im Beweis der Hölder-Stetigkeit von G im Punkt z_0 : In K_{δ_0} reduziert die Abbildung T den Abstand eines Punktes vom Fixpunkt höchstens auf dessen q -aches. Zu jedem Punkt $z \in K_{n_0} \setminus \{z_0\}$ gibt es ein ζ im Ring $K_{n_0} \setminus \overline{K_{n_0+1}}$, das von einer Iterierten $T^{(n-n_0)}$ mit $n \geq n_0$ auf z abgebildet wird. Daher beträgt der Abstand von z zu z_0 mindestens $q^{n-n_0} \cdot \text{dist}(\partial K_{n_0+1}, z_0)$.

Es sei $n \geq n_0$. Wir wählen $\alpha > 0$ mit

$$1 > q^\alpha > c > 0.$$

Für $z \in K_n \setminus \overline{K_{n+1}}$ folgt

$$\begin{aligned} G(z) &\leq Mc^n \\ &= \frac{M}{C_1^\alpha} \left(\frac{c}{q^\alpha} \right)^n \cdot (C_1 q^n)^\alpha \\ &\leq \frac{M}{C_1^\alpha} \left(\frac{c}{q^\alpha} \right)^n |z - z_0|^\alpha \\ &\leq \frac{M}{C_1^\alpha} |z - z_0|^\alpha, \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Ungleichung wegen der Abschätzung (*) besteht. Die Stetigkeit beider Seiten der letzten Ungleichung impliziert deren Gültigkeit auch im Abschluß von $K_n \setminus \overline{K_{n+1}}$. Da die Ungleichung für alle $n \geq n_0$ besteht, gilt

$$G(z) \leq \frac{M}{C_1^\alpha} |z - z_0|^\alpha$$

für alle $z \in K_{n_0} \cap \Omega_E$, und Aussage (iii) ist ebenfalls bewiesen. \square

Nun sind alle Vorbereitungen für den Existenzbeweis getroffen. Bevor er vollzogen wird, soll noch erwähnt werden, daß der verwendeten Beweismethode eine physikalische Motivation zugrunde liegt: Wird in ein elektrisches Feld, das von einer Ladungsverteilung auf A_0 erzeugt wird, ein Metallstück eingeführt, so steigt die Feldstärke an. Dies kommt daher, daß die freibeweglichen Ladungsträger im Metallstück derart in Richtung der Feldlinien verschoben werden, daß eine Ladung entsteht, die spiegelbildlich zu der Ladungsverteilung auf A_0 ist. Das resultierende Feld kann aufgrund dieser Spiegelladung nicht in das Metallstück eindringen, das heißt, die Normalenableitung des Feldes entlang des Metallstücks ist Null. Eine mathematische Umsetzung dieser Idee führt auf Vollkreisgebiete, da nur an deren Rändern globales Spiegeln möglich ist. Sind mehrere Randkomponenten vorhanden, deren Schnitt mit dem Neumann-Rand nicht leer ist, so werden die Punkte des Dirichlet-Randes immer wieder hin und her gespiegelt, als ob mehrere Spiegel einander zugewandt aufgestellt würden. Bei jeder Reflektion steigt die Feldstärke im Gebiet Ω_0 . Stellen wir die Feldstärke am Ort z nach n Spiegelungen durch

eine Funktion R_n dar, so konvergiert die Funktionenfolge (R_n) für $n \rightarrow \infty$ in Ω monoton gegen die Robinsche Funktion R .

2.2.4 Existenz im 2. Fall (Neumann-Rand auf zwei Randkomponenten)

In diesem Fall gibt es genau zwei Randkurven Γ_1 und Γ_2 von Ω , die Punkte des Neumann-Randes enthalten. Laut Voraussetzung sind Γ_1 und Γ_2 Dini-glatte Jordan-Kurven. Weiter sei

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \setminus (\overline{\text{Int } \Gamma_1} \cup \overline{\text{Int } \Gamma_2}) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus (\overline{\text{Int } C_1} \cup \overline{\text{Int } C_2})$$

eine Koebesche Vollkreisabbildung von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus (\overline{\text{Int } \Gamma_1} \cup \overline{\text{Int } \Gamma_2})$, d.h. eine konforme Abbildung auf ein Ringgebiet, das von zwei Kreisen C_1 und C_2 berandet wird mit $f(\infty) = \infty$.

Wir lösen zunächst das Randwertproblem in $\Omega_0 = f(\Omega)$ mit Dirichlet-Rand $A_0 = f(A)$ und Neumann-Rand $B_0 = f(B)$. Die Abbildungen

$$\varphi_\ell : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad \ell = 1, 2$$

bilden $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ jeweils auf seinen Spiegelpunkt bezüglich C_ℓ ab, d.h., es gilt

$$\varphi_\ell(z) = \frac{r_\ell^2}{\bar{z} - \bar{z}_\ell} + z_\ell,$$

falls C_ℓ der Kreis um z_ℓ mit Radius r_ℓ ist ($\ell = 1, 2$). Weiter sei

$$\varphi_m^{(1)} = \underbrace{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_\ell}_{m \text{ Spiegelungen}}, \quad \text{mit } \ell = \begin{cases} 1, & m \text{ ungerade} \\ 2, & m \text{ gerade} \end{cases}$$

die Hintereinanderausführung von m abwechselnden Spiegelungen an C_1 und C_2 mit letzter Spiegelung an C_1 und

$$\varphi_m^{(2)} = \underbrace{\varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_\ell}_{m \text{ Spiegelungen}}, \quad \text{mit } \ell = \begin{cases} 1, & m \text{ gerade} \\ 2, & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

die Hintereinanderausführung von m abwechselnden Spiegelungen an C_1 und C_2 mit letzter Spiegelung an C_2 . Die Verkettungen $T_1 = \varphi_1 \circ \varphi_2$ bzw.

$T_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$ je zweier Spiegelungen sind gemäß Hilfssatz 2.7 kontrahierende Möbius-Transformationen mit $T(\overline{\text{Int}C_1}) \subset \text{Int}C_1$ und $T(\overline{\text{Int}C_2}) \subset \text{Int}C_2$. Unmittelbar ergibt sich, daß T_1 genau einen Fixpunkt in $\text{Int}C_1$ besitzt, den wir $z_0^{(1)}$ bezeichnen. Ebenso besitzt T_2 genau einen Fixpunkt in $\text{Int}C_2$, der $z_0^{(2)}$ heiße.

Wir setzen

$$\tilde{A}_1 = (\varphi_1(A_0) \cup T_1(A_0)) \setminus A_0 \subset \text{Int}C_1$$

und

$$\tilde{A}_2 = (\varphi_2(A_0) \cup T_2(A_0)) \setminus A_0 \subset \text{Int}C_2.$$

Weiter sei

$$E = A_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} T_1^{(k)}(\tilde{A}_1) \cup \{z_0^{(1)}\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} T_2^{(k)}(\tilde{A}_2) \cup \{z_0^{(2)}\}.$$

Daß E ein Kompaktum ist, folgt wie in den Überlegungen vor Hilfssatz 2.8. Das Außengebiet von E werde wieder mit Ω_E bezeichnet.

Die folgende Abbildung zeigt das Bildgebiet Ω_0 , das von den beiden Kreisen C_1 und C_2 sowie von derjenigen Randkomponente von A_0 berandet wird, die weder auf C_1 noch auf C_2 liegt. Die untere, größere Kreislinie sei C_1 , die andere C_2 . Der Neumann-Rand ist ganz hell eingezeichnet. Der Teil des Dirichlet-Randes A_0 , der auf C_1 liegt, ist schwarz gekennzeichnet. Ebenso sind alle seine Bilder unter $T_1^{(k)}$ oder $T_2^{(k)}$ mit $k \in \mathbb{N}$ schwarz markiert. Der Teil des Dirichlet-Randes A_0 , der auf C_2 liegt, sowie alle seine Bilder unter $T_1^{(k)}$ oder $T_2^{(k)}$ sind ein wenig heller dargestellt. Schließlich ist der Teil des Dirichlet-Randes, der weder auf C_1 noch auf C_2 liegt, noch heller dargestellt. Im gleichen Helligkeitswert sind dessen Bilder unter den Abbildungen $T_1^{(k)}$ oder $T_2^{(k)}$ gekennzeichnet.

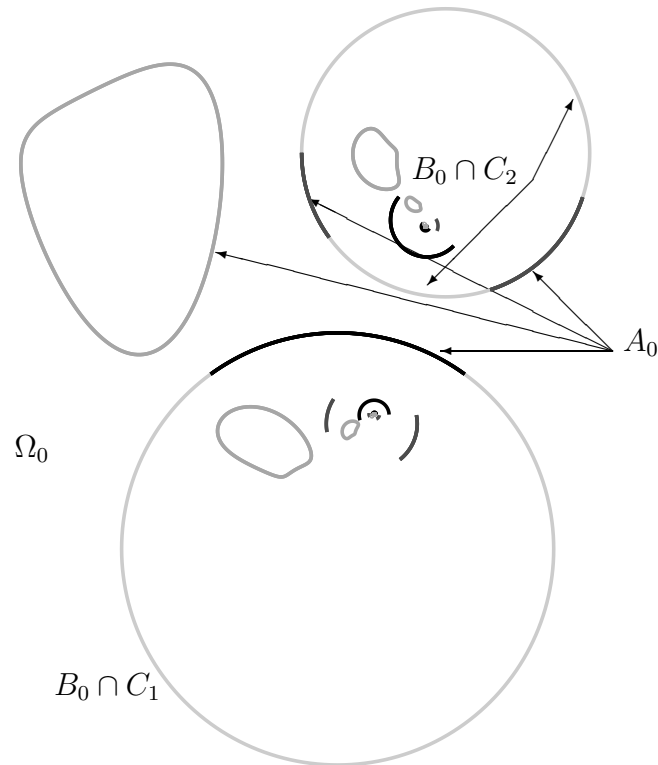


Abbildung 10

Wir zeigen jetzt die Regularität des Randes von Ω_E . Dazu betrachten wir die Mengen

$$E_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_1^{(k)}(\tilde{A}_1) \cup \{z_0^{(1)}\} \subset \text{Int} C_1$$

und

$$E_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_2^{(k)}(\tilde{A}_2) \cup \{z_0^{(2)}\} \subset \text{Int} C_2.$$

Es gilt also $E = A_0 \cup E_1 \cup E_2$, wobei die Mengen A_0 , E_1 , und E_2 disjunkte Kompakta sind. Das Außengebiet des Kompaktums E_1 heiße Ω_1 und das Außengebiet des Kompaktums E_2 heiße Ω_2 . Gelingt der Nachweis, daß die Ränder von Ω_1 und Ω_2 regulär sind, so folgt die Regularität von $\partial\Omega_E$.

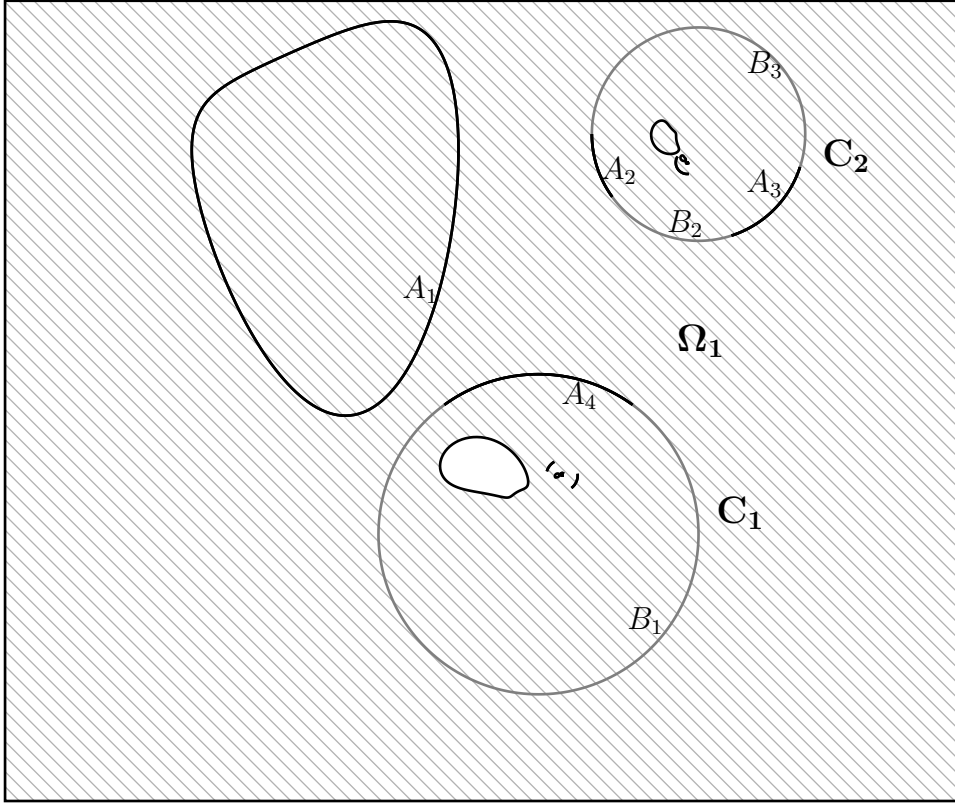


Abbildung 11

Die vorausgehende Abbildung zeigt das Gebiet Ω_1 , das von links oben nach rechts unten schraffiert dargestellt wird. Das Gebiet Ω_2 , das im Bild nicht gekennzeichnet ist, sieht entsprechend aus. Schließlich ist das Gebiet Ω_E eine Teilmenge des Schnittes $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Es ist in der übernächsten Abbildung 12 dargestellt. Der Dirichlet-Rand $A_0 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ von Ω_0 sowie alle seine Spiegelbilder sind schwarz gekennzeichnet. Der Neumann-Rand $B_0 = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ ist grau dargestellt.

Zum Nachweis der Regularität von $\partial\Omega_1$ soll der Hilfssatz 2.8 angewendet werden. Wir können dabei nicht $K_0 = \text{Int}C_1$ wählen, da für $K_1 = T(K_0)$ nicht notwendig $\tilde{A}_1 \cap \partial K_1 = \emptyset$ gilt. Statt dessen definieren wir eine zu C_1 konzentrische Kreisscheibe K_0 so, daß die Inklusionen

$$\tilde{A}_1 \subset K_0 \subset \overline{K_0} \subset \text{Int}C_1$$

und

$$\varphi_1(\overline{\text{Int}C_2}) \subset K_0$$

bestehen (siehe Abbildung 12). Dies ist möglich, da $\tilde{A}_1 \cup \varphi_1(\overline{\text{Int} C_2})$ eine kompakte Menge in $\text{Int} C_1$ ist. Anschließend ist zu überprüfen, ob mit dieser Wahl die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2.8 erfüllt sind:

Die Voraussetzung $T_1(\overline{K_0}) \subset K_0$ ergibt sich unmittelbar aus $\varphi_1(\overline{\text{Int} C_2}) \subset K_0$.

Gemäß der Definition von K_0 ist $\tilde{A}_1 \subset K_0$. Aus

$$A_0 \subset \overline{\text{Ext} C_1} \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus K_0$$

folgt

$$T_1(A_0) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus T_1(K_0) = \hat{\mathbb{C}} \setminus K_1.$$

Entsprechend impliziert die Inklusion

$$A_0 \subset \overline{\text{Ext} C_2}$$

die Beziehung

$$\varphi_1(A_0) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus K_1,$$

wie man mit elementaren Mitteln verifizieren kann. Hieraus folgt

$$\tilde{A}_1 \subset T_1(A_0) \cup \varphi_1(K_0) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus K_1,$$

und somit liegt \tilde{A}_1 vollständig im Ringgebiet $K_0 \setminus \overline{K_1}$.

Als nächstes ist zu zeigen, daß ∂K_1 im Außengebiet von \tilde{A}_1 liegt:

Wir konstruieren dazu eine Kurve Γ , deren Anfangspunkt ein Punkt aus dem Außengebiet von \tilde{A}_1 ist, die vollständig im Außengebiet von \tilde{A}_1 verläuft und deren Endpunkt auf ∂K_1 liegt. Dann ist $|\Gamma| \cup \partial K_1$ als zusammenhängende Menge ganz im Außengebiet von \tilde{A} enthalten. Diese Kurve Γ kann man durch Spiegelung mit φ_1 gewinnen:

Dazu betrachten wir einen Jordan-Bogen Γ_1 , der einen Punkt ζ_1 von ∂K_0 mit einem Punkt ω des Neumann-Randes $B_0 \cap C_2$ auf der Randkomponente C_2 verbindet und keinen Punkt mit dem Dirichlet-Rand A_0 gemeinsam hat. Wird er mit seinem Spiegelbild $\Gamma_2 = \varphi_2(\Gamma_1)$ an C_2 verknüpft, so entsteht ein Bogen $\Gamma_1 + \Gamma_2$, der $\zeta_1 \in \partial K_0$ mit $\varphi_2(\zeta_1) \in \varphi_2(\partial K_0)$ verbindet, und dessen Träger keinen Punkt der Menge $A_0 \cup \varphi_2(A_0)$ enthält. Wir setzen

$$\Gamma = \varphi_1(\Gamma_1 + \Gamma_2).$$

Der Bogen Γ verbindet den Punkt $\varphi_1(\zeta_1) \in \text{Ext}C_1$ mit dem Punkt $\varphi_1 \circ \varphi_2(\zeta_1) = T(\zeta_1) \in \partial K_1$. Sein Träger $|\varphi_1(\Gamma_1 + \Gamma_2)|$ besitzt keinen gemeinsamen Punkt mit

$$\tilde{A}_1 = (\varphi_1(A_0) \cup T_1(A_0)) \setminus A_0 = \varphi_1(A_0 \cup \varphi_2(A_0)) \setminus A_0.$$

Daher verläuft er vollständig im Außengebiet von \tilde{A}_1 . Somit besitzt Γ die gewünschten Eigenschaften, und wir haben gezeigt, daß ∂K_1 Teilmenge des Außengebietes von \tilde{A}_1 ist.

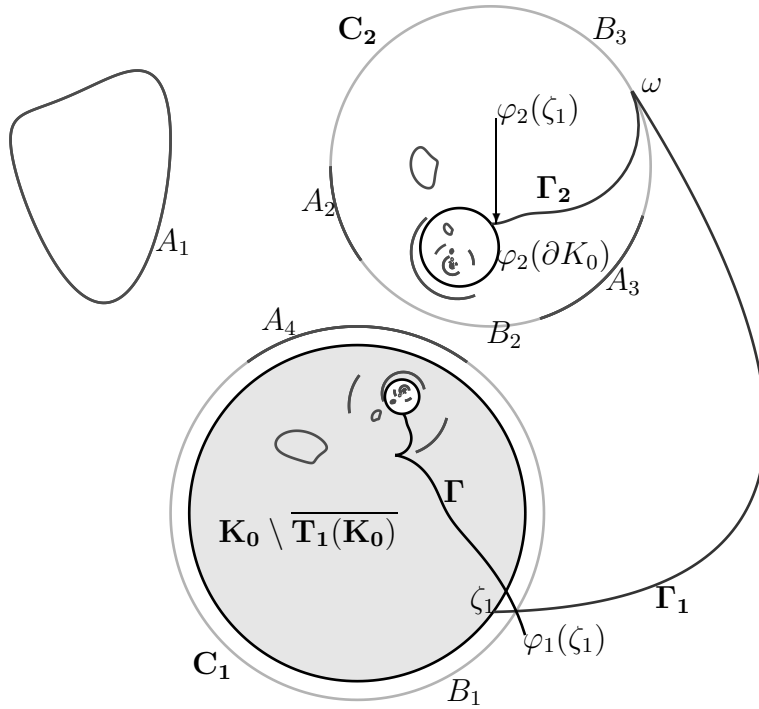


Abbildung 12

Die vorausgehende Abbildung illustriert den Beweis der Aussage, daß $T(\partial K_0)$ im Außengebiet von \tilde{A}_1 liegt: Der Dirichlet-Rand $A_0 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ des Gebietes Ω_0 ist dunkelgrau eingezeichnet, während der Neumann-Rand $B_0 = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ hellgrau markiert ist. Wie im Text gezeigt wird, ist \tilde{A}_1 eine Teilmenge des Ringgebietes $K_0 \setminus \overline{T_1(K_0)}$, das im Bild grau unterlegt ist. Die Kurve Γ entsteht

durch Spiegelung von $\Gamma_1 + \Gamma_2$ am Kreis C_1 und verbindet den Punkt $\varphi_1(\zeta_1)$ im Außengebiet von \tilde{A}_1 mit dem Punkt $T_1(\zeta_1) \in T_1(\partial K_1)$, ohne Punkte der Menge \tilde{A}_1 zu enthalten. Sie ist im Bild schwarz dargestellt. Die Kurve Γ_2 - im Bild dunkelgrau - ist ihrerseits das Spiegelbild der Kurve Γ_1 am Kreis C_2 . Dadurch ist sichergestellt, daß $|\Gamma_1 + \Gamma_2|$ keinen gemeinsamen Punkt mit der Menge $A_0 \cup \varphi_2(A_0)$ besitzt. Daß $T_1 = \varphi_1 \circ \varphi_2$ in $\overline{\text{Int}C_1}$ kontrahierend ist, folgt, da die innere Abbildung φ_2 für $z \in \overline{\text{Int}C_1}$ kontrahierend ist und gleiches für die äußere Abbildung φ_1 im Bild $\varphi_2(\overline{\text{Int}C_1})$ gilt.

Schließlich ist das Außengebiet von \tilde{A}_1 regulär, da jede Zusammenhangskomponente von \tilde{A}_1 ein nichtausgeartetes Kontinuum ist: Dies wurde für A vorausgesetzt und überträgt sich bei Abbildung mit f auf das Bildgebiet A_0 , da f eine stetige Fortsetzung nach $|\Gamma_1| \cup |\Gamma_2|$ besitzt. Nun zerfallen die Zusammenhangskomponenten der Menge A_0 in Zusammenhangskomponenten in $A_0 \cap C_1$ und weiteren Zusammenhangskomponenten, die alle in der kompakten Teilmenge

$$L = C_2 \cup A_0 \setminus C_1 \subset \text{Ext}C_1 \setminus \text{Int}C_2$$

von $\text{Ext}C_1$ liegen. Da die Einschränkung von φ_1 auf C_1 die Identität ist, bleiben die Zusammenhangskomponenten $A_0 \cap C_1$ bei Abbildung mit φ_1 erhalten. Das Bild der übrigen Komponenten ist Teilmenge des Kompaktums

$$\varphi_1(L) \subset \text{Int}C_1.$$

Andererseits liegt auch die kompakte Menge

$$T_1(L) \subset \varphi_1(\overline{\text{Int}C_2})$$

vollständig in $\text{Int}C_1$, wie mit elementaren Mitteln verifiziert werden kann. Die Menge

$$\tilde{A}_1 = \varphi_1(A_0) \cup T_1(A_0) \setminus A_0$$

ist daher genau die Vereinigung aller Zusammenhangskomponenten von $\varphi_1(A_0) \cup T_1(A_0)$, die in der kompakten Menge

$$\varphi_1(L) \cup T_1(L) \subset \text{Int}C_1$$

liegen. Da φ_1 und T_1 stetig sind, handelt es sich bei jeder dieser Zusammenhangskomponenten um ein nichtausgeartetes Kontinuum. Somit besitzt \tilde{A}_1

nur Zusammenhangskomponenten, die nichtausgeartete Kontinua sind, und das Außengebiet von \tilde{A}_1 ist regulär.

Alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 2.8 erfüllt, und somit ist $\partial\Omega_1$ regulär. Genauso folgt die Regularität des Randes von Ω_2 , und damit auch die von

$$\partial\Omega_E = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup A_0.$$

Insbesondere existiert in Ω_E die Greensche Funktion G mit Pol in ∞ . Sie ist in den Fixpunkten $z_0^{(1)}$ von T_1 und $z_0^{(2)}$ von T_2 Hölder-stetig, wie wir jetzt zeigen werden: Es sei G_1 die Greensche Funktion in Ω_1 mit Pol in ∞ und G_2 die Greensche Funktion in Ω_2 mit gleichem Pol. Durch Anwendung des Hilfssatzes 2.8 erhalten wir die Existenz eines Exponenten $1 > \alpha > 0$ sowie eines $\delta > 0$ und einer Konstanten $C_0 > 0$ mit

$$G_1(z) \leq C_0 \delta^\alpha$$

für alle $z \in \Omega_1$ mit $|z - z_0^{(1)}| < \delta$ und

$$G_2(z) \leq C_0 \delta^\alpha$$

für alle $z \in \Omega_2$ mit $|z - z_0^{(2)}| < \delta$. Das Maximumprinzip, angewendet auf die harmonischen Funktionen $G_1 - G$ bzw. $G_2 - G$ in Ω_E ergibt, daß sowohl G_1 als auch G_2 die Greensche Funktion G in Ω_E majorisieren. Dies impliziert die Hölder-Stetigkeit von G zum Exponenten α in $z_0^{(1)}$ und in $z_0^{(2)}$.

Die Abbildung 13 illustriert einige der Mengen, die im Existenzbeweis eine Rolle spielen: Das Gebiet Ω_0 , in dem wir das „transportierte“ Randwertproblem lösen werden, ist mit von links unten nach rechts oben verlaufenden Linien schraffiert. Sein Dirichlet-Rand ist $A_0 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, und sein Neumann-Rand lautet $B_0 = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Das Bildgebiet $f\left(\widehat{\mathbb{C}} \setminus (\overline{\text{Int}\Gamma_1} \cup \overline{\text{Int}\Gamma_2})\right) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus (\overline{\text{Int}C_1} \cup \overline{\text{Int}C_2})$ der konformen Abbildung f ist das Äußere der beiden Kreise C_1 und C_2 . Dies Gebiet ist stets eine Obermenge von Ω_0 . Das Gebiet Ω_E schließlich ist ebenfalls eine Obermenge des Gebietes Ω_0 . Im Bild ist es mit von links oben nach rechts unten verlaufenden Linien schraffiert.

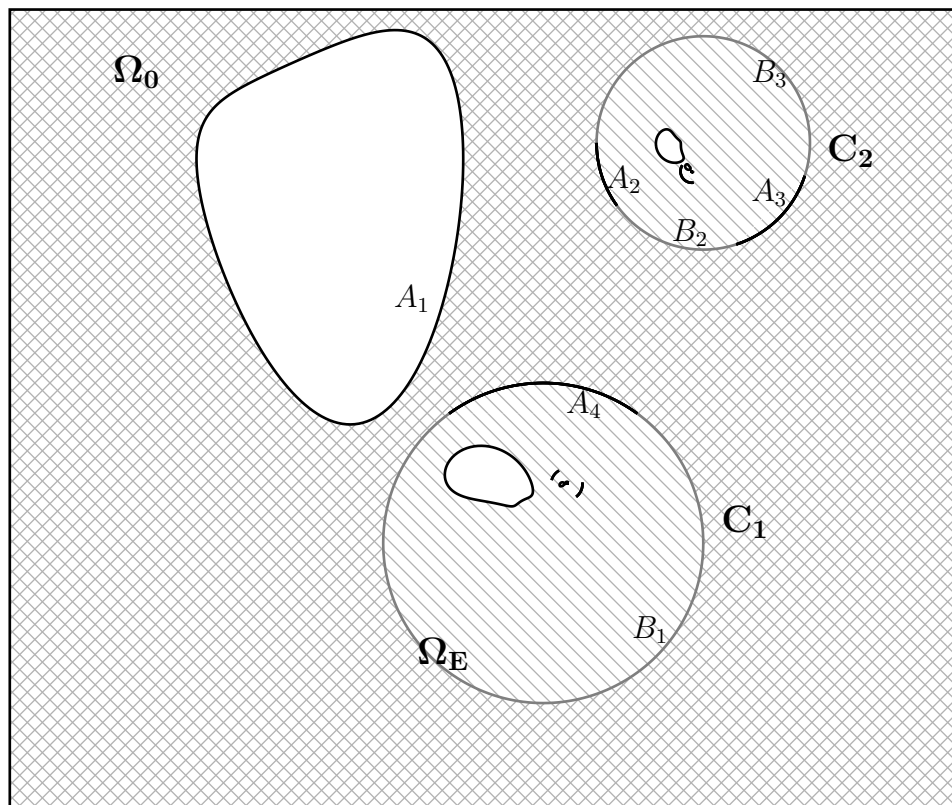


Abbildung 13

Mit Hilfe der Greenschen Funktion G definieren wir induktiv für $z \in \Omega_0$ die Funktionenfolge $(R_m)_{m \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} R_1(z) &= G(z) + G(\varphi_1(z)) \\ R_2(z) &= R_1(z) + G(\varphi_2(z)) + G(\varphi_2 \circ \varphi_1(z)) \\ R_3(z) &= R_2(z) + G(\varphi_1 \circ \varphi_2(z)) + G(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z)) \\ &\dots = \dots \end{aligned}$$

$$R_{m+1}(z) = R_m(z) + G(\varphi_m^{(\ell)}(z)) + G(\varphi_{m+1}^{(\ell)}(z)),$$

wobei in beiden Summanden $\ell = 2$ gilt, wenn $m + 1$ gerade und $\ell = 1$, wenn $m + 1$ ungerade ist. Wie im Beweis deutlich wird, bewirkt die Addition

von $G(\varphi_1(z))$ zu $G(z)$, daß die Normalenableitung von R_1 auf dem Schnitt des Neumann-Randes mit dem ersten Kreis $B_0 \cap C_1$ verschwindet, wie es im Hilfssatz 2.4 beschrieben wird. Dies trifft allerdings nicht für die Normalenableitung von R_1 auf $B_0 \cap C_2$ zu. Daher werden die Auswertungen von G an den Spiegelbildern am Kreis C_2 der beiden Punkte, an denen G zur Berechnung von R_1 ausgewertet wurde, zu $R_1(z)$ addiert. Für die so erhaltene Abbildung R_2 verschwindet die Normalenableitung auf C_2 , während $\frac{\partial R_2}{\partial n}$ auf C_1 wieder von Null verschiedene Werte annimmt. Im nächsten Schritt werden zu $R_2(z)$ Auswertungen der Greenschen Funktion G in den Spiegelbildern an C_1 der beiden Punkte addiert, die zuvor an C_2 gespiegelt wurden. Für die so erhaltene Abbildung R_3 sind die Neumann-Randbedingungen auf C_1 wieder hergestellt, während sie auf C_2 zerstört wurden. Beim Schritt von R_m zu R_{m+1} werden abwechselnd Auswertungen der Greenschen Funktion an den zwei Spiegelbildern der Punkte addiert, die beim vorhergehenden Schritt am jeweils anderen Kreis gespiegelt wurden. Dadurch werden abwechselnd die richtigen Randbedingungen auf dem Neumann-Rand der einen Randkomponente hergestellt und auf der anderen gleichzeitig zerstört. Das Verfahren liefert deshalb ein sinnvolles Ergebnis, weil die jeweils hinzukommenden Summanden ausreichend schnell klein werden: Es handelt sich nämlich um Verkettungen von abwechselnden Spiegelungen an C_1 und C_2 , die als Kontraktionen den Abstand des Punktes z zu einem der Fixpunkte $z_0^{(1)}$ bzw. $z_0^{(2)}$ mit geometrischer Geschwindigkeit verkleinern, wie wir beweisen werden. Diese Verkettungen werden schließlich in die Hölder-stetige Funktion G mit $G(z_0^{(1)}) = G(z_0^{(2)}) = 0$ eingesetzt.

Wir zeigen nun die Konvergenz von $(R_m(z))$ und setzen

$$R(z) = R_1(z) + \sum_{m=1}^{\infty} R_{m+1}(z) - R_m(z).$$

Außerdem beweisen wir, daß R die Eigenschaften (i)-(iv) in Ω_0 mit Dirichlet-Rand A_0 erfüllt. Da

$$R_{m+1}(z) - R_m(z) = G(\varphi_m^{(\ell)}(z)) + G(\varphi_{m+1}^{(\ell)}(z))$$

gilt, sind alle Summanden in $\Omega_0 \setminus \{\infty\}$ positive, harmonische Funktionen. Wegen der Monotonie der Partialsummenfolge impliziert das Harnacksche Prinzip, daß R in $\Omega_0 \setminus \{\infty\}$ entweder harmonisch ist oder konstant ∞ . Letzteres wird durch die folgende Abschätzung ausgeschlossen: Es genügt, den

Konvergenzbeweis für festes $z \in \Omega_0$ zu führen. Ohne zusätzlichen Aufwand werden wir dennoch sofort gleichmäßige Konvergenz der oben angeführten Reihe für alle $z \in \Omega_0$ beweisen. Wie zuvor sei $z_0^{(1)}$ der Fixpunkt von T_1 in $\overline{\text{Int}C_1}$ und $z_0^{(2)}$ derjenige von T_2 in $\overline{\text{Int}C_2}$. Gemäß Hilfssatz 2.7 ist

$$0 < q = \left(1 + \frac{d}{r_1}\right)^{-2} \cdot \left(1 + \frac{d}{r_2}\right)^{-2} < 1$$

eine gemeinsame Kontraktionskonstante von T_1 in $\overline{\text{Int}C_1}$ und von T_2 in $\overline{\text{Int}C_2}$. Hierbei bezeichnet d den Abstand von C_1 und C_2 sowie r_ℓ den Radius von C_ℓ ($\ell = 1, 2$). Wir schätzen zunächst den Summanden

$$G(\varphi_m^{(1)}(z)) + G(\varphi_{m+1}^{(1)}(z))$$

ab, d.h., wir betrachten den Fall, daß m gerade ist. Die Fehlerabschätzung im Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes ([7], S. 147) besagt für alle $z_1 \in \text{Int}C_1$

$$\begin{aligned} \left|T_1^{(k)}(z_1) - z_0^{(1)}\right| &\leq \frac{q^k}{1-q} \left|T_1(z_1) - z_0^{(1)}\right| \\ &\leq \frac{q^k}{1-q} \cdot 2r_1 \\ &\leq \frac{q^k}{1-q} \cdot 2r, \end{aligned}$$

wobei

$$r = \max\{r_1, r_2\}$$

gesetzt wurde. Da m in diesem Fall gerade ist, gilt für beliebiges $z \in \Omega_0$

$$\varphi_m^{(1)}(z) = T_1^{\left(\frac{m}{2}-1\right)}(T_1(z)),$$

wobei wir als „Startpunkt“ der Iteration den Punkt $T_1(z) \in \text{Int}C_1$ wählen. Letzteres ist notwendig, damit die Fehlerabschätzung des Banachschen Fixpunktsatzes anwendbar ist. Für den zweiten Summanden schreiben wir

$$\varphi_{m+1}^{(1)}(z) = T_1^{\left(\frac{m}{2}\right)}(\varphi_1(z)),$$

wobei in diesem Fall bereits $\varphi_1(z) \in \text{Int}C_1$ erfüllt ist. Wir erhalten für gerade $m \geq 4$

$$\begin{aligned} \left| \varphi_m^{(1)}(z) - z_0^{(1)} \right| &\leq \frac{q^{\frac{m}{2}-1}}{1-q} \cdot 2r \\ &= \frac{2r}{q(1-q)} \cdot (\sqrt{q})^m \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \left| \varphi_{m+1}^{(1)}(z) - z_0^{(1)} \right| &\leq \frac{q^{\frac{m}{2}}}{1-q} \cdot 2r \\ &\leq \frac{2r}{q(1-q)} \cdot (\sqrt{q})^m . \end{aligned}$$

Wir setzen $\kappa = \sqrt{q} < 1$. Mit der Hölder-Stetigkeit der Greenschen Funktion von Ω_E zum Exponenten α in den beiden Fixpunkten $z_0^{(1)}$ und $z_0^{(2)}$ der Möbius-Transformationen T_1 und T_2 resultiert

$$\begin{aligned} G(\varphi_m^{(1)}(z)) + G(\varphi_{m+1}^{(1)}(z)) &\leq 2C_0 \cdot \left(\frac{2r}{q(1-q)} \cdot \kappa^m \right)^\alpha \\ &= C\kappa^{\alpha m} \end{aligned}$$

mit einer Konstanten

$$C = 2C_0 \cdot \left(\frac{2r}{q(1-q)} \right)^\alpha .$$

Die Summanden der oben angeführten Teleskopreihe genügen somit im Falle, daß $m+1$ ungerade ist, der Abschätzung

$$(*) \quad R_{m+1}(z) - R_m(z) = G(\varphi_m^{(1)}(z)) + G(\varphi_{m+1}^{(1)}(z)) \leq C\kappa^{\alpha m}$$

mit $0 < \kappa < 1$.

Im Falle $\ell = 2$ ist m ungerade. Wir können der gleichen Argumentation wie zuvor folgen und erhalten die Ungleichung $(*)$ auch in diesem Fall mit gleichem κ und gleichem C . Somit ist die Folge (R_m) in z konvergent. Gemäß

dem Harnackschen Prinzip folgt, daß (R_m) in $\Omega_0 \setminus \{\infty\}$ gegen eine harmonische Funktion R konvergiert. Die Eigenschaft (i) ist daher erfüllt.

An späterer Stelle werden wir wiederholt benötigen, daß die Robinsche Funktion über den Neumann-Rand hinaus harmonisch fortgesetzt werden kann. Daher sei an dieser Stelle erwähnt, daß der soeben geführte Konvergenzbeweis auch in einem größeren Gebiet $\Omega^* \supset \Omega$ gelingt, sofern $\Omega^* \cap E = \emptyset$ gilt. Die Funktion, gegen die die Funktionenfolge (R_m) in $\Omega^* \setminus \{\infty\}$ konvergiert, ist eine harmonische Fortsetzung der Robinschen Funktion in Ω .

Weiter gilt für $z \in \Omega_0$

$$R(z) = G(z) + u(z)$$

mit

$$\begin{aligned} u(z) &= G(\varphi_1(z)) + \sum_{m=1}^{\infty} R_{m+1}(z) - R_m(z) \\ &= G(\varphi_1(z)) + \sum_{m=1}^{\infty} G(\varphi_m^{(\ell)}(z)) + G(\varphi_{m+1}^{(\ell)}(z)), \end{aligned}$$

wobei ℓ in beiden Auswertungen von G jeweils den gleichen Wert besitzt, und zwar $\ell = 1$, falls $m + 1$ ungerade ist und $\ell = 2$, wenn $m + 1$ gerade ist. Die Werte, die durch Spiegelung von $z \in \Omega_0$ gewonnen werden und in G eingesetzt werden, liegen alle in $\Omega_E \cap (\text{Int } C_1 \cup \text{Int } C_2)$. Daher sind alle Summanden in Ω_0 einschließlich des Punktes ∞ positive, harmonische Funktionen. Mit dem Harnackschen Prinzip und den Überlegungen im zuuvor geführten Konvergenzbeweis folgt, daß u eine in ganz Ω_0 definierte, harmonische Funktion ist. Daher existiert

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} R(z) - \log |z| &= \lim_{z \rightarrow \infty} (G(z) - \log |z| + u(z)) \\ &= -\log \text{cap } E + u(\infty) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Die Bedingung (ii) gilt somit ebenfalls.

Die Gültigkeit von (iii) folgt, da alle Summanden in der Darstellung von R auf A_0 verschwinden.

Um die Forderung (iv), die das Verschwinden der Normalenableitung von R auf dem Neumann-Rand besagt, zu zeigen, wählen wir $\zeta \in B_0$. Wie bereits erwähnt wurde, kann R in eine volle Umgebung von ζ hinein harmonisch fortgesetzt werden. Daher existieren die partiellen Ableitungen von R in ζ und somit auch $\frac{\partial R}{\partial n}(\zeta)$. Ist nun $\zeta \in B_0 \cap C_1$, so betrachten wir die Teilfolge $(R_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ aller ungerade nummerierten R_m und zeigen induktiv, daß für alle Teilfolglieder $\frac{\partial R_{2k+1}}{\partial n}(\zeta) = 0$ gilt: Dies ist sicherlich für R_1 laut Hilfssatz 2.4 der Fall, da G in ζ reell differenzierbar ist. Angenommen, es gelte $\frac{\partial R_{2k-1}}{\partial n}(\zeta) = 0$. Nun ist

$$\begin{aligned} R_{2k+1}(z) &= \\ &= R_{2k} + G\left(\varphi_{2k}^{(1)}(z)\right) + G\left(\varphi_{2k+1}^{(1)}(z)\right) \\ &= R_{2k-1} + G\left(\varphi_{2k-1}^{(2)}(z)\right) + G\left(\varphi_{2k}^{(2)}(z)\right) + G\left(\varphi_{2k}^{(1)}(z)\right) + G\left(\varphi_{2k+1}^{(1)}(z)\right). \end{aligned}$$

Da

$$G\left(\varphi_{2k}^{(1)}(z)\right) = G\left(\varphi_1 \circ \varphi_{2k-1}^{(2)}(z)\right)$$

und

$$G\left(\varphi_{2k+1}^{(1)}(z)\right) = G\left(\varphi_1 \circ \varphi_{2k}^{(2)}(z)\right)$$

gelten, ist in beiden Fällen wieder der Hilfssatz 2.4 anwendbar, und mit der Induktionsannahme folgt, daß

$$\frac{\partial R_{2k+1}}{\partial n}(\zeta) = 0$$

gilt. Somit ist der Induktionsschluß erbracht, und die Normalenableitung verschwindet für alle Teilfolglieder. Die partiellen Ableitungen der Grenzfunktion R stimmen mit dem Grenzwert der partiellen Ableitungen jeder Teilfolge überein, wie die folgende Überlegung verdeutlicht: In einer Umgebung um ζ existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine zu R_{2k+1} konjugiert harmonische Funktion S_{2k+1} mit der Normierung $S_{2k+1}(\zeta) = 0$. Da $g_{2k+1} = R_{2k+1} + iS_{2k+1}$ nur Werte in der rechten Halbebene annimmt, ist die Familie (g_{2k+1}) normal. Wir können somit eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen.

Da die Realteile dieser Teilfolge gegen R konvergieren, und da für alle Teilfolglieder der Imaginärteil in ζ Null ist, strebt die Teilfolge nicht gegen ∞ und besitzt eine holomorphe Grenzfunktion g mit $\operatorname{Re} g = R$. Da auch die Ableitungen dieser Teilfolge lokal gleichmäßig gegen g' konvergieren, folgt die Konvergenz der partiellen Ableitungen sowie deren Stetigkeit. Daraus resultiert

$$\frac{\partial R}{\partial n}(\zeta) = 0.$$

Ist $\zeta \in B_0 \cap C_2$, so betrachten wir die Teilfolge $(R_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ aller gerade nummerierten R_m und verfahren genauso wie zuvor. Insgesamt folgt, daß auch die Eigenschaft (iv) erfüllt ist.

Mit Satz 2.3 erhalten wir, daß die Behauptung auch für das Gebiet Ω mit Dirichlet-Rand A gültig ist. \square

Beispiel 2.9. Es sei

$$\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus (D_1 \cup D_2 \cup [-1, 1]),$$

wobei

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2| \leq 1\} \quad \text{und} \quad D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 1\}$$

ist (siehe Abbildung 14). Gesucht ist eine Darstellung für die Robinsche Funktion in Ω mit Dirichlet-Rand $A = [-1, 1]$.

Zwar sind die Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes nicht erfüllt ($\partial\Omega$ ist nicht Vereinigung endlich vieler, disjunkter Jordan-Kurven), jedoch ist die dort verwendete Methode auch in dieser Situation anwendbar, wie anschließend gezeigt wird.

Die folgende Abbildung 14 stellt das Gebiet Ω sowie seinen Dirichlet-Rand A und seinen Neumann-Rand B dar.

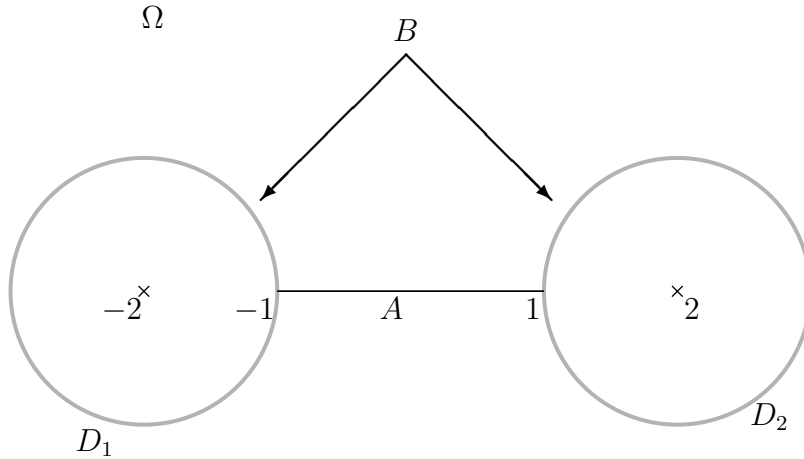


Abbildung 14

Die durch sukzessive Spiegelung an den beiden Kreislinien $|z + 2| = 1$ und $|z - 2| = 1$ konstruierte Menge E ist im vorliegenden Fall ein abgeschlossenes, zur imaginären Achse symmetrisches Intervall $[-d, d] \subset \mathbb{R}$. Die Spiegelung am Rand des Kreises D_1 werde φ_1 und die am Kreis D_2 werde φ_2 bezeichnet. Gemäß Konstruktion von E gilt

$$\varphi_1(d) = \frac{1}{d+2} - 2 = -d.$$

Die positive Lösung dieser Gleichung lautet $\sqrt{3}$, das heißt, es gilt

$$E = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}].$$

Im vorliegenden Fall ist $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ zusammenhängend, und daher ist das Außengebiet von E einfach $\Omega_E = \widehat{\mathbb{C}} \setminus [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Mit J werde die Joukowski-Funktion

$$J(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

in Δ bezeichnet. Die Greensche Funktion in Ω_E lautet

$$G(z) = \log \left| J^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{3}} \right) \right|.$$

Anhand dieser expliziten Darstellung kann die Hölder-Stetigkeit (mit Hölder-Exponenten $\frac{1}{2}$) direkt nachgerechnet werden. Wie im vorausgehenden Satz konvergiert die unten angeführte Reihe, und unter Verwendung der Bezeichnungen aus dem vorhergehenden Beweis lautet die Robinsche Funktion

$$R(z) = G(z) + \sum_{m=1}^{\infty} G(\varphi_m^{(1)}(z)) + G(\varphi_m^{(2)}(z)) .$$

Diese Darstellung verwenden wir nun zur Bestimmung der Robinschen Kapazität $\rho([-1, 1])$: Dazu ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} G(\varphi_m^{(1)}(\infty)) + \sum_{m=1}^{\infty} G(\varphi_m^{(2)}(\infty))$$

zu bestimmen. Die Symmetrie von Ω_E impliziert $\varphi_m^{(1)}(\infty) = -\varphi_m^{(2)}(\infty)$ sowie $G(z) = G(-z)$ für $z \in \Omega_E$. Daher genügt es, G an den Stellen

$$s_m = \varphi_m^{(1)}(\infty) \in D_1$$

auszuwerten: Der Punkt ∞ wird von φ_1 auf $s_1 = -2$ abgebildet. Weiter beträgt

$$s_2 = \varphi_1 \circ \varphi_2(\infty) = \frac{1}{2 - (-2)} - 2 = -\frac{7}{4} .$$

Mit der Rekursionsformel

$$s_{m+2} = \varphi_1 \circ \varphi_2(s_m) = \frac{12 - 7s_m}{4s_m - 7}$$

können alle Punkte s_m , an denen G auszuwerten ist, aus diesen Startwerten berechnet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow \infty} R(z) - \log |z| \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} (G(z) - \log |z|) + \sum_{m=1}^{\infty} G(\varphi_m^{(1)}(\infty)) + G(\varphi_m^{(2)}(\infty)) \\ &= -\log \operatorname{cap} E + 2 \sum_{m=1}^{\infty} G(s_m) . \end{aligned}$$

Da alle $s_m^{(1)}$ kleiner als $-\sqrt{3}$ sind, ist J^{-1} in den interessanten Punkten durch

$$J^{-1}(w) = w - \sqrt{w^2 - 1}$$

gegeben. Mit $\text{cap } E = \frac{\sqrt{3}}{2}$ folgt schließlich

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-2 \sum_{m=1}^{\infty} \log\left(\frac{s_m}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{s_m^2}{3} - 1}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{3}{\left(s_m - \sqrt{s_m^2 - 3}\right)^2} \approx 0.779605. \end{aligned}$$

2.2.5 Neumann-Rand auf mehr als zwei Randkomponenten

Abschließend soll kurz skizziert werden, wie vorzugehen ist, wenn der Neumann-Rand gemeinsame Punkte mit mehr als zwei Randkomponenten von $\partial\Omega$ besitzt:

Angenommen, Ω sei von n Dini-glatten Jordan-Kurven berandet, und $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ mit $2 < k \leq n$ seien die Randkomponenten von $\partial\Omega$, die Punkte des Neumann-Randes enthalten. Dann sei Ψ mit $\Psi(\infty) = \infty$ eine Koebe-Abbildung vom Außengebiet der Kurven $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ auf ein Vollkreisgebiet. Die Randkomponenten des Vollkreisgebietes seien $C_1 = \Psi(\Gamma_1), C_2 = \Psi(\Gamma_2), \dots, C_k = \Psi(\Gamma_k)$. Die Spiegelung am Kreis C_ℓ mit $1 \leq \ell \leq k$ werde φ_ℓ genannt. Wieder bezeichnen wir $\Psi(\Omega)$ mit Ω_0 , das Bild des Dirichlet-Randes $\Psi(A)$ mit A_0 und das Bild des Neumann-Randes $\Psi(B)$ mit B_0 . Wir betrachten nun die Gruppe \mathcal{S} , die von den Spiegelungen an den Kreisen C_1, \dots, C_k erzeugt wird. Die Menge E ist in diesem Fall durch

$$E = \overline{\bigcup_{\varphi \in \mathcal{S}} \varphi(A_0)}$$

definiert. Es gilt

$$E = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{S}} \varphi(A_0) \cup L,$$

wobei L die sogenannte Limesmenge der Gruppe \mathcal{S} darstellt. Wiederum wird das Außengebiet von E mit Ω_E bezeichnet.

Analog zum Fall, daß zwei Randkomponenten von Ω gemeinsame Punkte mit dem Neumann-Rand besitzen, weist man als nächstes nach, daß die Greensche Funktion G von Ω_E in allen Punkten von $L \subset \partial\Omega_E$ Hölder-stetig ist. Schließlich wird die Robinsche Funktion R in Ω_0 durch

$$R(z) = \sum_{\varphi \in \mathcal{S}} G(\varphi(z))$$

definiert. Nun besteht das kombinatorische Problem, die Reihe so anzuordnen, daß die absolute Konvergenz gezeigt werden kann, und daß die Reihe in Teilreihen zerlegt werden kann, die abwechselnd auf den k berandenden Kreisen verschwindende Normalenableitung besitzen. Zum Nachweis der Konvergenz ist insbesondere zu belegen, daß die alternierenden Spiegelungen in jedem Fall ausreichend stark kontrahieren. In der vorliegenden Arbeit wird dies nicht weiter untersucht werden.

3 Konforme Abbildung mittels Robinscher Funktion

Wie die Greensche Funktion erlaubt auch die Robinsche Funktion die Konstruktion der konformen Abbildung eines gegebenen Gebietes auf gewisse Normalgebiete. Wir beschränken uns hier auf den Fall, daß Ω einfach zusammenhängend ist. Wie zuvor sei $\partial\Omega$ eine Dini-glatte Jordan-Kurve, und es gelte $\infty \in \Omega$. Wir setzen zur Vermeidung von Fallunterscheidungen voraus, daß der Neumann-Rand $B \neq \emptyset$ ist. Sollte er leer sein, so ist die Robinsche Funktion nichts anderes als die Greensche Funktion in Ω mit Pol in ∞ . Das Analogon des folgenden Satzes für die Greensche Funktion ist die bekannte Konstruktion der Riemann-Abbildung eines einfach zusammenhängenden Gebietes mit Hilfe der Greenschen Funktion.

Der Dirichlet-Rand $A \subset \partial\Omega$ sei eine abgeschlossene Menge, die die Vereinigung von Jordan-Bögen ist. Es ist zugelassen, daß A abzählbar viele Zusammenhangskomponenten besitzt. Die Voraussetzungen des Existenzsatzes aus dem vorhergehenden Abschnitt sind also erfüllt. Außerdem gelte $0 \notin \overline{\Omega}$, was gegebenenfalls durch Verschieben von Ω leicht erreicht werden kann. Im vorliegenden Fall, daß Ω einfach zusammenhängend ist, und daß der Neumann-

Rand B nicht leer ist, ist $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A$ zusammenhängend, und das Gebiet $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A$ ist das Außengebiet von A .

Satz 3.1 *Es sei R die Robinsche Funktion in Ω mit Dirichlet-Rand A und Pol in ∞ , und S sei eine in Ω zu $R(z) - \log|z|$ konjugiert harmonische Funktion. Dann ist*

$$f(z) = ze^{(R(z) - \log|z|) + iS(z)}$$

eine konforme Abbildung von Ω auf das „Sonnengebiet“ $\Delta \setminus K$, wobei

$$K = \bigcup_{j \in I}]e^{i\alpha_j}, r_j e^{i\alpha_j}]$$

mit paarweise verschiedenen $\alpha_j \in [0, 2\pi[$, einer höchstens abzählbaren Indexmenge I und $r_j > 1$ ist. Jeder Teilbogen des Neumann-Randes wird auf genau eine Strecke $]e^{i\alpha_j}, r_j e^{i\alpha_j}]$ abgebildet, während der Dirichlet-Rand auf $\partial\mathbb{D}$ abgebildet wird.

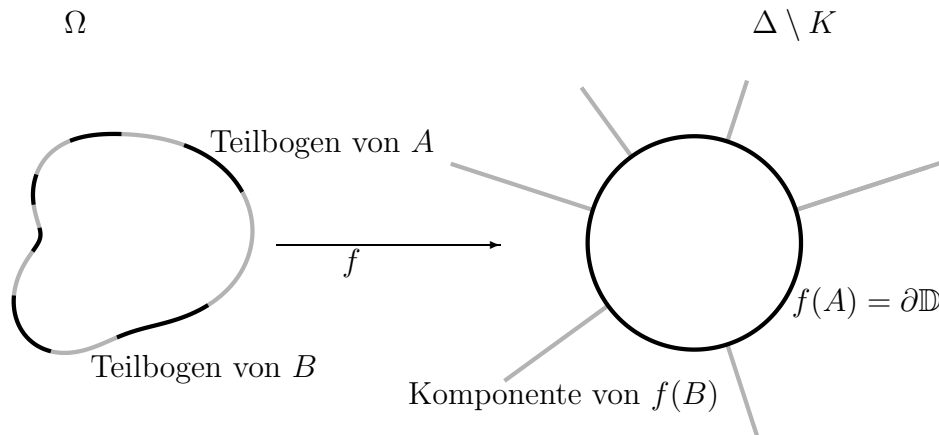


Abbildung 15

Die vorhergehende Abbildung zeigt auf der linken Seite ein Gebiet Ω , dessen Dirichlet- und Neumann-Rand aus jeweils sechs Teilbögen einer Dini-glaten Jordan-Kurve bestehen. Auf der rechten Seite ist das Bildgebiet unter der konformen Abbildung f dargestellt, die Gegenstand des vorhergehenden Satzes ist. Die Zusammenhangskomponenten des Dirichlet-Randes werden auf Teilmengen von $\partial\mathbb{D}$

abgebildet, während die Teilbögen des Neumann-Randes auf die „Sonnenstrahlen“ abgebildet werden.

Ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten des Dirichlet-Randes (und damit auch des Neumann-Randes) endlich, so kann die gesuchte konforme Abbildung auch als Schwarz-Christoffel-Abbildung realisiert werden.

Beweis: Die im einfach zusammenhängenden Gebiet Ω harmonische Funktion $R(z) - \log |z|$ besitzt dort eine konjugiert harmonische Funktion S . Wegen

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = \lim_{z \rightarrow \infty} e^{R(z) - \log |z|} = \frac{1}{\rho(A)}$$

ist $\frac{f(z)}{z}$ holomorph in Ω . Wir werden zunächst zeigen, daß f eine schlichte Abbildung von Ω ist. Dazu studieren wir die Feldlinien und die Niveaumengen von R .

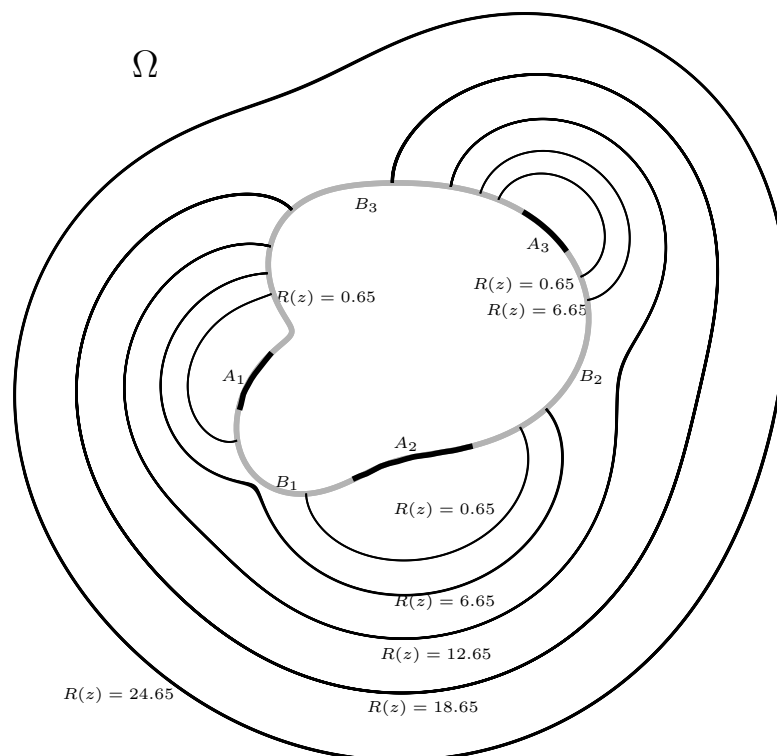


Abbildung 16

Die Abbildung 16 zeigt verschiedene Niveaumengen der Robinschen Funktion in einem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω . Ein vollständiges Bild der Feld- und der Niveaulinien von R ist in der Abbildung 2 zu sehen. Der Dirichlet-Rand A ist hier die Vereinigung dreier Teilbögen A_1, A_2, A_3 des Randes von Ω . Für große Werte von R sind die Niveaumengen Jordan-Kurven in Ω (vgl. auch die Untersuchungen zur extremalen Distanz im nächsten Kapitel). Für kleinere Werte sind die Niveaumengen die Vereinigung endlich vieler Jordan-Bögen, deren Endpunkte auf jeweils zwei verschiedenen Teilbögen des Neumann-Randes liegen. Entweder führen genau zwei Teilbögen einer gegebenen Niveaumenge zu einem bestimmten Teilbogen B_1, B_2 oder B_3 des Neumann-Randes oder keiner.

Die Gestalt der Niveaumengen und Feldlinien einer harmonischen Funktion hängt vom Vorhandensein von Nullstellen ihres Gradienten ab. Es wird sich herausstellen, daß der Gradient ∇R von R in Ω nicht Null wird. Bevor wir dies nachgewiesen haben, müssen eventuell auftretende Nullstellen von ∇R in der Argumentation berücksichtigt werden: Die Nullstellen von ∇R werden wir im folgenden **kritische Punkte** von R nennen. Analog heißen die Nullstellen von f' kritische Punkte von f . Wegen

$$\begin{aligned} f'(z) = 0 &\iff \left(z \left(\frac{\partial R}{\partial x}(z) - i \frac{\partial R}{\partial y}(z) - \frac{1}{z} \right) + 1 \right) \cdot \frac{f(z)}{z} = 0 \\ &\iff f(z) \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial x}(z) - i \frac{\partial R}{\partial y}(z) \right) = 0 \\ &\iff \nabla R(z) = \vec{0} \end{aligned}$$

sind die kritischen Punkte von f genau die kritischen Punkte von R . Es sei L eine Teilmenge von Ω . Gibt es zu $c \in \mathbb{R}$ ein $z \in L$ mit $\nabla R(z) = \vec{0}$ und $R(z) = c$, so heißt c **kritischer Wert** von $R|_L$.

Es sei K eine beschränkte und abgeschlossene Menge in $\Omega \cup B$. Wir zeigen, daß R höchstens endlich viele kritische Punkte in K besitzt: Ist $\zeta \in B$, so kann R in eine volle Kreisscheibe mit Mittelpunkt ζ hinein harmonisch fortgesetzt werden, wie aus dem Existenzbeweis im vorausgehenden Kapitel deutlich wird. Daher gibt es ein einfach zusammenhängendes Gebiet D mit $K \subset D$, in dem R (bzw. die Fortsetzung von R) harmonisch ist. Wegen der Voraussetzung $0 \notin \bar{\Omega}$ kann D so gewählt werden, daß $0 \notin D$ gilt. Diese Wahl garantiert, daß die Funktion S , die in Ω zu $R(z) - \log |z|$ konjugiert ist, ebenfalls nach D fortgesetzt werden kann und in

ganz D zu R konjugiert ist. Somit besitzt f eine analytische Fortsetzung nach D . Aus dem Identitätssatz folgt, daß f' höchstens endlich viele Nullstellen auf K besitzt. Da dies genau die kritischen Punkte von R sind, gibt es derer höchstens endlich viele. Wir setzen nun R über jeden Punkt von B hinaus geringfügig fort, so wie es zuvor beschrieben wurde. Die Fortsetzung nennen wir ebenfalls R . Ist Z eine beschränkte Menge positiver reeller Zahlen mit $\inf Z > 0$, so enthält Z höchstens endlich viele kritische Werte von $R|_{\Omega \cup B}$: Dies folgt aus den vorhergehenden Überlegungen, da die Menge

$$K = R^{-1}([\inf Z, \sup Z]) \subset \Omega \cup B$$

abgeschlossen und wegen

$$R(z) = \log |z| + O(1), \quad z \rightarrow \infty$$

auch beschränkt ist.

Als nächstes wird der Begriff *Feldlinie* definiert:

Es sei $\zeta \in \Omega$ und $K_\epsilon(\zeta)$ eine Kreisscheibe um ζ mit Radius $\epsilon > 0$, für die $K_\epsilon(\zeta) \subset \Omega$ gilt. Da $K_\epsilon(\zeta)$ einfach zusammenhängend ist, existiert dort eine zu R konjugiert harmonische Funktion v . Gemäß den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gilt

$$\nabla v = \left(-\frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} \right).$$

Insbesondere besitzt v die gleichen kritischen Punkte wie R und wie f . Wir nehmen nun an, daß ζ kein kritischer Punkt ist. Dann ist $g = R + iv$ in einem Kreis $K_\delta(\zeta)$ mit hinreichend kleinem Radius $0 < \delta \leq \epsilon$ um ζ konform, da

$$g'(\zeta) = \frac{\partial R}{\partial x}(\zeta) - i \frac{\partial R}{\partial y}(\zeta) \neq 0$$

gilt. Die Lösungsmenge der Gleichung $v(z) = v(\zeta)$ mit $z \in K_\delta(\zeta)$ ist das Bild einer Strecke, die parallel zur reellen Geraden verläuft, unter der konformen Abbildung g^{-1} und somit ein analytischer Jordan-Bogen Γ . Es sei darauf hingewiesen, daß jede in $K_\epsilon(\zeta)$ zu R konjugiert harmonische Funktion um eine additive Konstante von v abweicht und daher die gleichen Niveaumengen besitzt. Wir setzen nun Γ sukzessive fort, indem wir um die Endpunkte von Γ Kreisscheiben legen, in die v fortgesetzt werden kann und anschließend Γ

selbst so weit wie möglich fortsetzen. Dieser Prozeß wird nun wiederholt, das heißt, Γ wird so weit wie möglich mit dem Kreiskettenverfahren fortgesetzt. Wenn wir bei dieser Art der Fortsetzung einen kritischen Punkt, ∞ oder $\partial\Omega$ erreichen, wird der Vorgang abgebrochen. Ein so gewonnenes, maximales Γ heißt die **Feldlinie** von R durch ζ (für einen nicht kritischen Punkt ζ). Sie ist eindeutig bestimmt:

Der Verlauf der Feldlinie ist lokal um ζ eindeutig festgelegt, da es sich (lokal) um das Urbild einer Strecke unter einer konformen Abbildung handelt. Da ∇v höchstens an den Endpunkten von Γ verschwindet, ist die Fortsetzung mit dem gleichen Argument in jedem Schritt eindeutig.

In jedem seiner Punkte ist Γ lokal ein analytischer Jordan-Bogen. Da Γ keine mehrfachen Punkte besitzt, ist Γ entweder eine analytische Jordan-Kurve in Ω oder ein analytischer Jordan-Bogen, der (höchstens mit Ausnahme seiner Endpunkte) ganz in Ω verläuft, und der die Eigenschaft besitzt, daß für jeden seiner Endpunkte z_e eine der folgenden Aussagen zutrifft:

- Der Punkt z_e ist ein kritischer Punkt von R ,
- der Punkt z_e ist ein Randpunkte von Ω , oder
- es gilt $z_e = \infty$.

Die erstgenannte Möglichkeit, daß Γ eine Jordan-Kurve ist, scheidet allerdings sofort aus: Wir nehmen an, Γ sei eine Jordan-Kurve und γ eine Parameterdarstellung von Γ über dem Intervall $[0, 1]$, deren Ableitung niemals verschwindet. Da die lokal existierende, zu R konjugiert harmonische Funktion v in jedem Punkt $\gamma(\tau) \in |\Gamma|$ konstant ist, verschwindet die Richtungsableitung $\frac{\partial v}{\partial t}(\gamma(\tau))$ in tangentialer Richtung von Γ für alle $\tau \in [0, 1]$. Mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial v}{\partial t}(\gamma(\tau)) \\ &= \frac{1}{|\gamma'(\tau)|} \cdot \left\langle \left(\frac{\partial v}{\partial x}(\gamma(\tau)), \frac{\partial v}{\partial y}(\gamma(\tau)) \right)^\top, \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \gamma'(\tau) \\ \operatorname{Im} \gamma'(\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{|\gamma'(\tau)|} \cdot \left\langle \left(-\frac{\partial R}{\partial y}(\gamma(\tau)), \frac{\partial R}{\partial x}(\gamma(\tau)) \right)^\top, \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \gamma'(\tau) \\ \operatorname{Im} \gamma'(\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|\gamma'(\tau)|} \cdot \left\langle \left(\frac{\partial R}{\partial x}(\gamma(\tau)), \frac{\partial R}{\partial y}(\gamma(\tau)) \right)^\top, \begin{pmatrix} \operatorname{Im} \gamma'(\tau) \\ -\operatorname{Re} \gamma'(\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \frac{\partial R}{\partial n}(\gamma(\tau)).
\end{aligned}$$

An dieser Stelle sei der im weiteren Verlaufe der Argumentation wichtige Zusammenhang

$$\frac{\partial R}{\partial n}(z) = \frac{\partial v}{\partial t}(z)$$

für $z \in |\Gamma|$ zwischen der Normalenableitung von R und der Ableitung in tangentialer Richtung jeder lokal um z existierenden, zu R konjugiert harmonischen Funktion v hervorgehoben. Dabei geht der Einheitsnormalenvektor n , in dessen Richtung die Ableitung $\frac{\partial R}{\partial n}$ zu berechnen ist, durch eine Rechtsdrehung um 90° aus dem Tangentenvektor an Γ in z hervor. Der oben genannte Zusammenhang gilt für jeden lokal um z definierten, differenzierbaren Jordan-Bogen. Ist Γ darüber hinaus eine Jordan-Kurve, wie es in der vorliegenden Situation angenommen wird, und ist D_Γ diejenige Zusammenhangskomponente von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus |\Gamma|$, die vom Tangentenvektor aus betrachtet stets links liegt, so ist $\frac{\partial R}{\partial n}$ genau die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen von R im Randpunkt z von D_Γ .

Nach dieser Bemerkung fahren wir mit dem Nachweis fort, daß die Annahme, Γ sei eine Jordan-Kurve, widersprüchlich ist. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Im ersten Fall nehmen wir an, daß das Innengebiet $\operatorname{Int} \Gamma$ Teilmenge von Ω ist. Dann ist die Funktion R harmonisch in $\operatorname{Int} \Gamma$ und nimmt somit ihr Maximum und ihr Minimum auf $|\Gamma|$ an. Da R auf $\operatorname{Int} \Gamma$ nicht konstant ist, fordert das Hopfsche Maximumprinzip nichtverschwindende Normalenableitung von R in den Extremstellen. Dies ist ein Widerspruch zur oben durchgeführten Berechnung.

Trifft die Annahme des ersten Falles nicht zu, so gilt $\partial\Omega \subset \operatorname{Int} \Gamma$, da die Jordan-Kurve Γ vollständig in Ω verläuft. Da $|\Gamma|$ eine kompakte Menge ist, existiert

$$M = \min_{z \in |\Gamma|} R(z).$$

Aus

$$R(z) = \log |z| + O(1), \quad z \rightarrow \infty$$

folgt die Existenz eines $r > 0$ derart, daß die Menge

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$$

im Außengebiet von Γ liegt, und, daß $R(z) > M$ für alle $z \in C_r$ gilt. Da die Funktion R auf dem Ringgebiet

$$D = \{z \in \mathbb{C} : R(z) < r\} \cap \text{Ext}\Gamma$$

harmonisch ist, nimmt sie ihr Maximum und ihr Minimum auf $\partial D = |\Gamma| \cup C_r$ an. Wegen $R(z) > M$ auf C_r liegt das Minimum von R auf Γ . Wieder erhalten wir mit dem Hopfschen Maximumprinzip einen Widerspruch zur zuvor durchgeführten Rechnung.

Wir haben gezeigt, daß Γ ein Jordan-Bogen ist. Nun kann Γ nicht in einem inneren Punkt von Ω enden, der nicht kritisch ist, da es laut der vorhergehenden Überlegungen stets eine Fortsetzung von Γ über nicht kritische Punkte von Ω hinaus gibt.

Somit gilt für jeden Endpunkt z_e von Γ eine der drei zuvor aufgezählten Alternativen.

Als Jordan-Bogen besitzt Γ eine Orientierung. Eine der beiden möglichen Orientierungen für Γ soll nun ausgezeichnet werden:

Es sei γ eine Parameterdarstellung von Γ über dem Intervall $[0, 1]$ mit $\gamma'(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in [0, 1]$ (an den Intervallgrenzen ist die einseitige Ableitung zu verwenden). Aus der Beziehung

$$\left\langle \left(\frac{\partial R}{\partial x}(\gamma(\tau)), \frac{\partial R}{\partial y}(\gamma(\tau)) \right)^\top, \begin{pmatrix} \text{Im} \gamma'(\tau) \\ -\text{Re} \gamma'(\tau) \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

die bereits verifiziert wurde, folgt, daß $\nabla R(\gamma(\tau))$ stets ein (reelles) Vielfaches des Vektors $(\text{Re} \gamma'(\tau), \text{Im} \gamma'(\tau))^\top$ ist. Da $\gamma'(\tau)$ nie den Wert Null annimmt, und da $\nabla R(\gamma(\tau))$ für $\tau \in]0, 1[$ ebenfalls ungleich Null ist, wird auch

$$\mu(\tau) = \left\langle \nabla R(\gamma(\tau)), \begin{pmatrix} \text{Re} \gamma'(\tau) \\ \text{Im} \gamma'(\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$

niemals Null für $\tau \in]0, 1[$. Als stetige Funktion in τ ist $\mu(\tau)$ stets positiv oder negativ. Trifft das letztere zu, so kann durch den Übergang vom Bogen Γ zum Bogen $-\Gamma$ erreicht werden, daß dieser Ausdruck immer positiv ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gehen wir davon aus, daß Γ so orientiert ist, daß

$$\mu(\tau) > 0$$

für alle $\tau \in]0, 1[$ gilt. Ein solches Γ nennen wir **positiv orientiert**. Wenn wir im folgenden von der **positiven Richtung der Feldlinie** durch den nicht kritischen Punkt $\zeta \in \Omega$ sprechen, meinen wir den Teilbogen von Γ , der in ζ beginnt, wobei Γ positiv orientiert ist.

Wir zeigen nun, daß jede positiv orientierte Feldlinie, die nicht in einem kritischen Punkt endet, den Punkt ∞ erreicht:

Dazu sei $\zeta \in \Omega$ kein kritischer Punkt und $\gamma : [0, 1[\rightarrow \mathbb{C}$ eine Parametrisierung der positiven Richtung $\tilde{\Gamma}$ der Feldlinie Γ durch ζ so, daß $\gamma(0) = \zeta$ und $\gamma'(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in [0, 1[$ gilt. Jetzt zeigen wir, daß aus $\nabla R(\gamma(\tau)) \neq \vec{0}$ für alle $\tau \in [0, 1[$ die Beziehung

$$\lim_{\tau \rightarrow 1} \gamma(\tau) = \infty$$

folgt. Die Orientierung von Γ ist so gewählt, daß stets

$$\left\langle \nabla R(\gamma(\tau)), \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \gamma'(\tau) \\ \operatorname{Im} \gamma'(\tau) \end{pmatrix} \right\rangle > 0$$

gilt. Dies impliziert

$$R(\gamma(\tau)) = R(\zeta) + \int_0^\tau \left\langle \nabla R(\gamma(\sigma)), \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \gamma'(\sigma) \\ \operatorname{Im} \gamma'(\sigma) \end{pmatrix} \right\rangle d\sigma > R(\zeta)$$

für alle $\tau \in [0, 1[$. Nun ist leicht zu sehen, daß $R(\zeta) > 0$ gilt:

Aus der Annahme $R(\zeta) \leq 0$ folgt nämlich mit dem Maximumprinzip, daß dann

$$m = \min_{z \in \partial\Omega} R(z) < 0$$

gälte. Da auf dem Dirichlet-Rand $R(z) = 0$ gilt, lägen alle Minimalstellen auf dem Neumann-Rand. Die Neumann-Bedingungen stünden aber im Widerspruch zum Hopfschen Maximumprinzip, das eine negative Ableitung in Richtung der äußeren Normalen in der Minimalstelle fordert. Somit gilt

$$R(\gamma(\tau)) > R(\zeta) > 0$$

für alle $\tau \in [0, 1[$, und $\tilde{\Gamma}$ kann nicht in einem Punkt z des Dirichlet-Randes enden, da dort $R(z) = 0$ gilt.

Endet $\tilde{\Gamma}$ auf dem Neumann-Rand, so ist der Endpunkt $w \in |\tilde{\Gamma}| \cap B$ ein kritischer Punkt von R , wie wir jetzt zeigen werden:

Es sei $\epsilon > 0$ hinreichend klein gewählt, und $K_\epsilon(w)$ sei der Kreis um w mit Radius ϵ . Aus dem Existenzsatz für die Robinsche Funktion im vorhergehenden Kapitel wird deutlich, daß R eine harmonische Fortsetzung über jeden Punkt des Neumann-Randes hinaus besitzt. Ist ϵ hinreichend klein, so kann R in die volle Kreisscheibe $K_\epsilon(w)$ hinein fortgesetzt werden. Weiter sei v eine harmonische Funktion, die in $K_\epsilon(w)$ zu R konjugiert harmonisch ist. Laut Definition der Feldlinie gilt für alle $z \in |\tilde{\Gamma}|$ die Beziehung $v(z) = v(w)$. Andererseits besteht für alle $z \in B \cap K_\epsilon(w)$ der Zusammenhang

$$\frac{\partial v}{\partial t}(z) = \frac{\partial R}{\partial n}(z) = 0,$$

wie bereits nachgerechnet wurde. Ist β eine Parameterdarstellung des Teilbogens von $B \cap K_\epsilon(w)$, der w enthält, über dem Intervall $] - 1, 1[$ mit $\beta(0) = w$ und $\beta'(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in] - 1, 1[$, so folgt für $z = \beta(\tau_0)$ mit beliebigem $\tau_0 \in] - 1, 1[$ ebenfalls

$$v(z) = v(w) + \int_0^{\tau_0} \frac{\partial v}{\partial t}(\beta(\tau)) \cdot |\beta'(\tau)| d\tau = v(w).$$

Da die Feldlinie $\tilde{\Gamma}$ keinen gemeinsamen Punkt mit dem Neumann-Rand B mit Ausnahme des Endpunktes besitzt, hat die Lösungsmenge der Gleichung $v(z) = v(w)$ lokal um w die Gestalt eines „Dreibeins“ und ist daher nicht das konforme Bild einer Strecke. Somit ist w ein kritischer Punkt von R .

Wir haben ausgeschlossen, daß eine in ihrer positiven Richtung maximal fortgesetzte Feldlinie $\tilde{\Gamma}$ auf $\partial\Omega$ endet, es sei denn, sie endet in einem kritischen Punkt von R auf dem Neumann-Rand. Als nächstes wird gezeigt, daß $\tilde{\Gamma}$ jede beschränkte Menge verläßt, das heißt, daß für jede beschränkte Menge $S \subset \Omega$ ein τ_0 existiert mit $\gamma(\tau) \notin S$ für alle $\tau_0 < \tau < 1$:

Angenommen, letzteres wäre falsch. Dann gäbe es eine beschränkte Teilmenge S von Ω und eine Folge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 1$, derart, daß $w = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(\tau_n)$ existiert und in \bar{S} liegt. Nach Definition von $\tilde{\Gamma}$ läge w auf dem Bogen $\tilde{\Gamma}$. Wie leicht zu zeigen ist, wäre w Endpunkt oder mehrfacher Punkt des Bogens $\tilde{\Gamma}$

und somit ein kritischer Punkt. Da wir vorausgesetzt haben, daß auf $\tilde{\Gamma}$ keine kritischen Punkte liegen, wurde ein Widerspruch abgeleitet. Für ein maximal fortgesetztes $\tilde{\Gamma}$ bleibt nur die Möglichkeit, daß

$$\lim_{\tau \rightarrow 1} \gamma(\tau) = \infty$$

gilt, sofern $\tilde{\Gamma}$ nicht in einem kritischen Punkt endet, was zu zeigen war.

Analog den Feldlinien von R sind die Niveaulinien definiert, wobei lediglich die Rollen von R und ihrer konjugiert harmonischen Funktion v zu vertauschen sind:

Es sei $\zeta \in \Omega$ ein nicht kritischer Punkt. Wie im Falle der Feldlinien beschreibt die Lösungsgesamtheit der Gleichung $R(z) = R(\zeta)$ lokal um ζ einen analytischen Jordan-Bogen. Wiederum setzen wir eine lokale Lösung solange mit dem Kreiskettenverfahren fort, bis wir einen kritischen Punkt oder den Rand von Ω erreichen. Da $R(z)$ unbeschränkt ist, wenn z gegen Unendlich strebt, scheidet ∞ als möglicher Endpunkt aus. Wie im Falle der Feldlinien führt dieser Fortsetzungsprozeß auch hier zu einer eindeutigen Fortsetzung. Eine maximale Fortsetzung der lokalen Lösung der Gleichung $R(z) = R(\zeta)$ heißt Niveaulinie von R . Sie ist von der Niveaumenge

$$\{z \in \Omega : R(z) = \eta\}$$

mit $\eta = R(\zeta)$ zu unterscheiden. Letztere ist nicht notwendig zusammenhängend, wie beispielsweise auf der Abbildung 16 zu erkennen ist.

Für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung genügt die folgende Feststellung:

Es sei

$$\alpha > \max_{z \in \partial\Omega} R(z) = \max_{z \in B} R(z) > 0.$$

Außerdem sei α kein kritischer Wert von R , das heißt, für alle $z \in \Omega$ mit $R(z) = \alpha$ gilt $\nabla R(z) \neq 0$. Dann ist die Niveaumenge

$$\Lambda_\alpha = \{z \in \Omega : R(z) = \alpha\}$$

Träger einer analytischen Jordan-Kurve.

Zum Beweis dieser Aussage wählen wir $\zeta \in \Omega$ mit $R(\zeta) = \alpha$. Die Existenz eines solchen ζ zu vorgegebenem α ist klar, da nach dem Zwischenwertsatz die stetige Funktion $R(\gamma(\tau))$ jeden Wert zwischen $R(\gamma(0)) = 0$ und $\lim_{\tau \rightarrow 1} R(\gamma(\tau)) = \infty$ annimmt, wenn γ einen Jordan-Bogen über dem Intervall $[0, 1[$ parametrisiert, der den Dirichlet-Rand von Ω mit ∞ verbindet. Die Niveaulinie von R , die durch ζ verläuft, heiße Γ . Da auf Γ stets

$$R(z) = \alpha > \max_{z \in \partial\Omega} R(z)$$

gilt, und da R stetig ist, besitzt Γ einen positiven Abstand zu $\partial\Omega$. Andererseits existiert ein Kreis

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$$

mit Radius $\rho > 0$, den Γ nicht verläßt, da

$$R(z) = \log |z| + O(1), \quad z \rightarrow \infty$$

gilt. Somit kann Γ weder Endpunkte auf $\partial\Omega$ noch in ∞ besitzen. Da vorausgesetzt wurde, daß α kein kritischer Wert von R ist, besitzt Γ weder End- noch Mehrfachpunkte in Ω , und somit ist Γ eine analytische Jordan-Kurve.

Schließlich gilt $|\Gamma| = \Lambda_\alpha$: Um dies zu zeigen, argumentieren wir indirekt und nehmen an, es gäbe eine weitere Zusammenhangskomponente $\tilde{\Lambda}_2$ von Λ_α . Mit der gleichen Argumentation wie für Γ folgt, daß $\tilde{\Lambda}_2$ Träger einer analytischen Jordan-Kurve Λ_2 ist. Da Γ und Λ_2 keinen gemeinsamen Punkt besitzen, liegt eine der Kurven vollständig im Außengebiet der anderen. Das Ringgebiet, das von Γ und Λ_2 berandet wird, heiße \mathcal{R} . Nun ist die Robinsche Funktion harmonisch in \mathcal{R} und nimmt auf $\partial\mathcal{R}$ den konstanten Wert α an. Laut Maximumprinzip ist R auf \mathcal{R} konstant und somit laut Identitätssatz auf ganz Ω . Dies steht im Widerspruch zur Existenz des logarithmischen Pols von R in ∞ , und wir haben gezeigt, daß in der Tat $|\Gamma| = \Lambda_\alpha$ gilt. Darüber hinaus kann mit dem Maximumprinzip leicht verifiziert werden, daß für $z \in \Omega \cap \text{Int}\Gamma$ stets $R(z) < \alpha$ und für $z \in \text{Ext}\Gamma$ stets $R(z) > \alpha$ gilt.

Nun sind alle Vorbereitungen getroffen, und der Nachweis der Injektivität von f kann beginnen:

Es seien ζ_1 und ζ_2 verschiedene Punkte in Ω , von denen wir

$$f(\zeta_1) = f(\zeta_2)$$

annehmen. Wir führen diese Annahme im folgenden zu einem Widerspruch. Da $|f(z)| = e^{R(z)}$ gilt, folgt aus der Annahme sofort

$$R(\zeta_1) = R(\zeta_2).$$

Die geometrische Idee hinter der folgenden Argumentation ist, nachzurechnen, daß die Verschiedenheit von ζ_1 und ζ_2 bei $R(\zeta_1) = R(\zeta_2)$ erzwingt, daß der Zuwachs des Arguments von $f(z)$ längs eines geeigneten Jordan-Bogens, der ζ_1 mit ζ_2 verbindet, stets größer als 0 und kleiner als 2π ist. Dies impliziert, daß $f(\zeta_1)$ nicht gleich $f(\zeta_2)$ sein kann, entgegen unserer Annahme. Die Durchführung dieser Idee wird in zwei Schritten vollzogen: Zunächst wird ein geeigneter Jordan-Bogen Γ von ζ_1 nach ζ_2 konstruiert und anschließend das Integral

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

untersucht, dessen Imaginärteil den Zuwachs des Arguments von $f(z)$ längs des Weges Γ mißt.

Unser erstes Teilziel ist es, ζ_1 mit ζ_2 durch einen Jordan-Bogen Γ zu verbinden, der sich aus drei Teilbögen Γ_1, Γ_α und Γ_2 zusammensetzt. Dabei sind Γ_1 und Γ_2 jeweils Teilbögen von Feldlinien, und Γ_α ist der Teilbogen einer Niveaulinie von R . Bei der Konstruktion des Bogens Γ ist eine gewisse Vorsicht geboten, da kritische Punkte von R vermieden werden müssen. Daher gehen wir folgendermaßen vor:

Es sei

$$\alpha > \max \left\{ \max_{z \in \partial\Omega} R(z), R(\zeta_1) \right\},$$

kein kritischer Wert von R , und Λ_α bezeichne im Gegensatz zum vorhergehenden die Niveaulinie, das heißt die analytische Kurve, auf der $R(z) = \alpha$ gilt. Da Ω einfach zusammenhängend ist, besitzt $\overline{\Omega}$ ein zusammenhängendes Komplement. Daher ist das Gebiet

$$D_1 = \text{Int} \Lambda_\alpha \cap \Omega = \text{Int} \Lambda_\alpha \setminus (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega})$$

zweifach zusammenhängend. Laut Konstruktion gilt $\zeta_1 \in D_1$ sowie $\zeta_2 \in D_1$. Wie im Existenzbeweis der Robinschen Funktion deutlich wurde, existiert R in einem größeren Ringgebiet D_2 , das wir dadurch erhalten, daß wir D_1 über jeden Punkt des Neumann-Randes $B \subset \partial D_1$ hinaus fortsetzen. Da $0 \notin \overline{\Omega}$

gilt, können wir D_2 so wählen, daß auch $0 \notin D_2$ gilt. Außerdem vergrößern wir D_1 über den Rand Λ_α hinaus, so daß schließlich jeder Punkt von B und von Λ_α innerer Punkt des zweifach zusammenhängenden Gebietes D_2 ist, in das R hinein harmonisch fortgesetzt werden kann.

Es sei

$$\eta = R(\zeta_1) = R(\zeta_2) > 0.$$

Für $0 < \tilde{\eta} < \eta$ ist die Menge

$$K = \{z \in \overline{\Omega} : \tilde{\eta} \leq R(z) \leq \alpha\} = R^{-1}([\tilde{\eta}, \alpha])$$

eine kompakte Teilmenge von \mathbb{C} . Da K keinen Punkt des Dirichlet-Randes A enthält, auf dem laut Voraussetzung $R(z) = 0$ gilt, besteht die Inklusion

$$K \subset (\overline{\text{Int}\Lambda_\alpha} \cap \Omega) \cup B.$$

Somit ist K eine kompakte Teilmenge von D_2 . Mit der bereits zu Beginn dieses Beweises erörterten Methode folgt, daß R höchstens endlich viele kritische Punkte in K besitzt. Wir nehmen zunächst an, daß ζ_1 kein kritischer Punkt ist. Es sei Γ_1 der Teilbogen der positive Richtung der Feldlinie durch ζ_1 , der in $\overline{\text{Int}\Lambda_\alpha}$ verläuft. Das heißt, es gilt $\gamma_1(0) = \zeta_1$ und

$$\left\langle \nabla R(\gamma_1(\tau)), (\text{Re}\gamma_1'(\tau), \text{Im}\gamma_1'(\tau))^T \right\rangle > 0$$

für $\tau \geq 0$, falls γ_1 eine Parameterdarstellung von Γ_1 über dem Intervall $[0, 1]$ mit $\gamma_1'(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in [0, 1]$ ist. Da $R(\gamma_1(\tau))$ auf $[0, 1]$ streng monoton steigend ist, kann die positive Richtung der Feldlinie durch ζ_1 nicht wieder nach $\text{Int}\Lambda_\alpha$ hineinlaufen, wenn sie einmal die Niveaulinie Λ_α erreicht hat. Somit ist Γ_1 eindeutig bestimmt. Wenn Γ_1 nicht in einem kritischen Punkt von R endet, so ist $\gamma_1(1)$ ein Punkt der Kurve Λ_α , wie aus den Überlegungen folgt, die uns zu dem Ergebnis führten, daß jede Feldlinie, die wir in positiver Richtung durchlaufen, in einem kritischen Punkt endet oder gegen Unendlich strebt.

Genauso verfahren wir mit ζ_2 , wenn ζ_2 nicht kritisch ist. Der Jordan-Bogen Γ_2 sei der Teilbogen der positiven Richtung der Feldlinie durch ζ_2 , der in $\text{Int}\Lambda_\alpha$ liegt. Er werde durch γ_2 über dem Intervall $[0, 1]$ mit $\gamma_2(0) = \zeta_2$, $\gamma_2'(\tau) \neq 0$ für $\tau \in [0, 1]$ sowie

$$\left\langle \nabla R(\gamma_2(\tau)), (\text{Re}\gamma_2'(\tau), \text{Im}\gamma_2'(\tau))^T \right\rangle > 0$$

für alle $\tau \in [0, 1]$ parametrisiert. Wenn Γ_2 nicht auf einen kritischen Punkt von R trifft, so liegt der Punkt $\gamma_2(1)$ ebenfalls auf der Kurve Λ_α .

Da aus der Annahme $f(\zeta_1) = f(\zeta_2)$ folgt, daß $R(\zeta_1) = R(\zeta_2)$ gilt, liegt der Punkt ζ_2 nicht auf der positiven Richtung der Feldlinie durch ζ_1 , da dort stets $R(z) > R(\zeta_1) = R(\zeta_2)$ gilt. Entsprechend liegt der Punkt ζ_1 nicht auf der positiven Richtung der Feldlinie durch ζ_2 . Somit ist sichergestellt, daß Γ_2 kein Teilbogen von Γ_1 ist und umgekehrt.

Wenn nun ζ_1 oder ζ_2 kritisch sind oder einer der Jordan-Bögen Γ_1 oder Γ_2 in einem kritischen Punkt endet, ersetzen wir ζ_1 und ζ_2 durch Punkte ζ'_1 und ζ'_2 , die in der Nähe von ζ_1 bzw. ζ_2 liegen, derart, daß immer noch $f(\zeta'_1) = f(\zeta'_2)$ und $\zeta'_1 \neq \zeta'_2$ gilt, daß ζ'_1 und ζ'_2 nicht kritisch sind, und daß weder Γ_1 noch Γ_2 auf einen kritischen Punkt treffen, und somit beide Bögen in Punkten der Kurve Λ_α enden. Da Γ_1 und Γ_2 positive Richtungen von Feldlinien sind, nimmt R in allen Punkten dieser Bögen einen größeren Wert an als in den Startpunkten, die als nicht kritisch angenommen wurden. Daher genügt es, lediglich kritische Punkte w zu berücksichtigen, für die $R(w)$ größer als der Wert von R im Startpunkt von Γ_1 ist.

Um sicherzustellen, daß die Feldlinien, die gegen einen kritischen Punkt laufen, bei geringfügiger Störung des Startwertes vom kritischen Punkt „gelöst“ werden, zeigen wir, daß zwei verschiedene Fortsetzungen der lokal um einen nicht kritischen Punkt $z_0 \in D_2$ existierenden, zu R konjugiert harmonischen Funktion v längs disjunkter Jordan-Bögen in den gleichen Punkt $z_1 \in D_2$ sich entweder gar nicht oder um exakt eine Periode von R unterscheiden. Außerdem zeigen wir, daß R die Periode 2π besitzt:

Es sei Ξ ein beliebiger Jordan-Bogen in D_2 , der die Punkte $z_0 \in D_2$ und $z_1 \in D_2$ miteinander verbinde. Die Richtungsableitung von v in Richtung der Tangente an Ξ im Kurvenpunkt z werde $\frac{\partial v}{\partial t}(z)$ bezeichnet. Die in einer Umgebung von z_0 definierte, zu R konjugiert harmonische Funktion v kann mittels Kreisketten längs Ξ nach z_1 fortgesetzt werden. Für diese Fortsetzung gilt

$$v(z_1) = v(z_0) + \int_{\Xi} \frac{\partial v}{\partial t}(z) |dz|.$$

Mit der bereits verifizierten Beziehung

$$\frac{\partial v}{\partial t}(z) = \frac{\partial R}{\partial n}(z)$$

für alle Punkte z der Kurve Ξ folgt

$$v(z_1) = v(z_0) + \int_{\Xi} \frac{\partial R}{\partial n}(z) |dz|.$$

Nun seien Ξ_1 und Ξ_2 zwei verschiedene, disjunkte Jordan-Bögen, längs derer v vom gemeinsamen Startpunkt z_0 aus nach z_1 fortgesetzt wird. Den Wert der Fortsetzung von v im Punkt z_1 längs Ξ_1 nennen wir w_1 und den Wert der Fortsetzung längs Ξ_2 nennen wir w_2 . Es gilt

$$w_2 - w_1 = \int_{\Xi_2} \frac{\partial R}{\partial n}(z) |dz| - \int_{\Xi_1} \frac{\partial R}{\partial n}(z) |dz|.$$

Da die disjunkten Jordan-Bögen Ξ_1 und Ξ_2 beide die Punkte z_0 und z_1 verbinden, ist

$$\Xi_3 = \Xi_2 - \Xi_1$$

eine Jordan-Kurve. Ist Ξ_3 punkthomotop in D_2 , so existiert in einem einfach zusammenhängenden Gebiet D_3 , das $\overline{\text{Int}}\Xi_2$ enthält, eine holomorphe Funktion g mit $\text{Re}g = R$. Mit einer Parameterdarstellung σ von Ξ_3 über dem Intervall $[0, 1]$, die $\sigma'(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in [0, 1]$ erfüllt, und mit $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Xi_3} \frac{\partial R}{\partial n}(z) |dz| &= \int_{\Xi_3} \frac{\partial R}{\partial x}(x + iy) dy - \frac{\partial R}{\partial y}(x + iy) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial R}{\partial x}(\sigma(\tau)) \cdot \text{Im}\sigma'(\tau) - \frac{\partial R}{\partial y}(\sigma(\tau)) \cdot \text{Re}\sigma'(\tau) \right) d\tau \\ &= \int_0^1 \text{Im}(g(\sigma(\tau)) \cdot \sigma'(\tau)) d\tau \\ &= \text{Im} \int_{\Xi_3} g'(z) dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ist Ξ_3 nicht punkthomotop, so ist Ξ_3 eine Jordan-Kurve, die die Randkomponenten von D_2 trennt. Da R in Ω harmonisch ist, erfüllt das Feld

$$\vec{q}(x, y) = \left(-\frac{\partial R}{\partial y}(x + iy), \frac{\partial R}{\partial x}(x + iy) \right)^\top$$

die Integrabilitätsbedingungen. Somit dürfen wir über eine beliebige, zu Ξ_3 homotope Kurve in Ω integrieren und erhalten das gleiche Ergebnis für das

zu untersuchende Integral. Bei der Wahl einer geeigneten Kurve verwenden wir, daß es ein derartiges $\eta_0 > 0$ gibt, daß die Funktion

$$u(z) = R(z) - \log |z|$$

in

$$C_{\eta_0} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \eta_0\}$$

harmonisch ist. Wir wählen nun $\eta > \eta_0$ und integrieren über die Kreislinie $|z| = \eta$. Diese ist im Gebiet Ω homotop zur Jordan-Kurve Ξ_3 . Daher gilt mit $z = x + iy$

$$\begin{aligned} \int_{\Xi_3} \frac{\partial R}{\partial n}(z) |dz| &= \int_{\Xi_3} \frac{\partial R}{\partial x}(x + iy) dy - \frac{\partial R}{\partial y}(x + iy) dx \\ &= \int_{|z|=\eta} \frac{\partial R}{\partial x}(x + iy) dy - \frac{\partial R}{\partial y}(x + iy) dx. \end{aligned}$$

Aus der Darstellung

$$u(z) = R(z) - \log |z|$$

für $z > \eta_0$ folgen mit $z = x + iy$ die Formeln

$$\frac{\partial R}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + \frac{x}{|z|^2}$$

und

$$\frac{\partial R}{\partial y}(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z) + \frac{y}{|z|^2}.$$

Diese gelten insbesondere auf dem Integrationsweg $|z| = \eta$. Weiter ist u im einfach zusammenhängenden Außengebiet von C_{η_0} harmonisch und somit Realteil einer holomorphen Funktion h . Es folgt

$$\begin{aligned} &\int_{|z|=\eta} \frac{\partial R}{\partial x}(x + iy) dy - \frac{\partial R}{\partial y}(x + iy) dx \\ &= \int_{|z|=\eta} \frac{\partial u}{\partial x}(x + iy) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x + iy) dx + \int_{|z|=\eta} \frac{x}{|z|^2} dy - \frac{y}{|z|^2} dx \\ &= \operatorname{Im} \int_{|z|=\eta} h'(z) dz + \operatorname{Im} \int_{|z|=\eta} \frac{dz}{z} \\ &= 0 + 2\pi \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Diese Rechnung impliziert

$$w_2 - w_1 = 2\pi,$$

wie zu Beginn dieser Überlegung behauptet wurde.

Jetzt können wir uns wieder dem Problem zuwenden, die gegebenen Punkte ζ_1 und ζ_2 so durch Punkte ζ'_1 und ζ'_2 zu ersetzen, daß die positiven Richtungen der durch sie laufenden Feldlinien nicht in kritischen Punkten von R enden: Dazu konstruieren wir ein einfach zusammenhängendes Gebiet $D_4 \subset D_2$, das ζ_1 , ζ_2 und alle kritischen Punkte in der Menge

$$K = \{z \in \bar{\Omega} : \tilde{\eta} \leq R(z) \leq \alpha\}$$

mit $0 < \tilde{\eta} < \eta = R(\zeta_1) = R(\zeta_2)$ enthält. Wie zuvor gezeigt wurde, handelt es sich hierbei um höchstens endlich viele Punkte, deren Gesamtheit

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\} \quad m \in \mathbb{N}$$

bezeichnet werde. In D_4 besitzt R eine konjugiert harmonische Funktion v_0 . Ebenfalls wurde bereits gezeigt, daß v_0 genau die gleichen kritischen Punkte wie R besitzt, nämlich c_1, \dots, c_m .

Auf den Feldlinien von R ist v_0 laut Definition der Feldlinie jeweils konstant. Gleiches gilt für die Fortsetzungen von v_0 längs der Feldlinien von R über D_4 hinaus. Nun kann eine Feldlinie von R das Gebiet D_4 verlassen und später wieder in D_4 hineintreten. Der Wert, den eine solche Fortsetzung \tilde{v}_0 in einen Punkt $z \in D_4$ annimmt, kann um $\pm 2\pi$ von $v_0(z)$ abweichen, wie bereits gezeigt wurde. Andere Differenzen zwischen $v_0(z)$ und $\tilde{v}_0(z)$ treten nicht auf. Daher ist für $1 \leq k \leq m$ die Menge S_k aller $z \in D_4$ mit der Eigenschaft, daß die positive Richtung der Feldlinie durch z in c_k endet, eine Teilmenge der „Niveaumenge“

$$N_k = \{z \in D_4 : v_0(z) = v_0(c_k) \quad \text{oder} \quad v_0(z) = v_0(c_k) + 2\pi \\ \text{oder} \quad v_0(z) = v_0(c_k) - 2\pi\}.$$

Als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{v_0(c_k) - 2\pi, v_0(c_k), v_0(c_k) + 2\pi\}$ unter der stetigen Funktion v_0 ist die Menge N_k abgeschlossen. Darüber hinaus enthält sie keinen inneren Punkt: Die Annahme, sie enthielte eine volle Kreisscheibe $K_\delta(z_0)$ vom Radius δ um einen ihrer Punkte $z_0 \in N_k$, in dem

$v_0(z) = v_0(c_k)$ oder $v_0(z) = v_0(c_k) \pm 2\pi$ gilt, impliziert, daß v_0 konstant wäre, was für eine zu R konjugiert harmonische Funktion nicht möglich ist. Somit ist für jedes $1 \leq k \leq m$ die Menge N_k abgeschlossen und enthält keinen inneren Punkt. Gleiches gilt dann für die Vereinigung

$$N = \bigcup_{k=1}^m N_k.$$

Als nächstes zeigen wir, daß die Menge $W = f(N \cap K)$ abgeschlossen ist und keinen inneren Punkt enthält. Die Abgeschlossenheit von W folgt unmittelbar, da f eine offene Abbildung ist. Um zu zeigen, daß W keinen inneren Punkt besitzt, schließen wir indirekt und nehmen also an, daß es einen Punkt w_0 gäbe, der Mittelpunkt eines Kreises $K_\eta(w_0)$ mit geeignetem $\eta > 0$ ist, welcher vollständig in W liegt. Wie bereits bewiesen wurde, besitzt f in W höchstens endlich viele kritische Werte. Somit gibt es ein $w \in W$, das kein kritischer Wert ist. Da $N \cap K$ kompakt ist, besitzt w höchstens endlich viele Urbilder in dieser Menge: Die Annahme unendlich vieler Urbilder impliziert nämlich die Existenz eines Häufungspunktes $z_0 \in \Omega$ von Punkten, in denen f den Wert w annimmt. Laut Identitätssatz wäre f auf Ω konstant, was wegen $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ nicht möglich ist.

Die Menge der Urbilder von w in $N \cap K$ unter f laute z_1, z_2, \dots, z_n . Da w kein kritischer Wert ist, handelt es sich bei z_1, z_2, \dots, z_n ausschließlich um Punkte, die nicht kritisch sind. Daher existieren disjunkte Kreise

$$K_{\epsilon_1}(z_1), K_{\epsilon_2}(z_2), \dots, K_{\epsilon_n}(z_n)$$

um die n Urbilder von w mit geeigneten reellen Zahlen $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ derart, daß $K_{\epsilon_k}(z_k) \subset D_4$ für alle $1 \leq k \leq n$ gilt, und daß f eine konforme Abbildung jedes dieser Kreise auf Umgebungen $U_k = f(K_{\epsilon_k})$ mit $1 \leq k \leq n$ ist. Der Durchschnitt $U = \bigcap_{k=1}^n U_k$ dieser Umgebungen ist offen und nicht leer, da er den Punkt w enthält. Weiter sei U_0 die Zusammenhangskomponente von U , die w enthält. Die Mengen

$$V_k = K_{\epsilon_k}(z_k) \cap f^{-1}(U_0)$$

enthalten für $1 \leq k \leq n$ jeweils den Punkt z_k und werden jeweils konform auf U_0 abgebildet. Jeder Punkt in $D_4 \cap K$, der von f nach U_0 abgebildet

wird, liegt in $\bigcup_{k=1}^n V_k \cap K$. Somit gilt

$$W \cap U_0 \subset \bigcup_{k=1}^n f(V_k \cap N).$$

Keine der Mengen $f(V_k \cap N)$ enthält einen inneren Punkt, wie wir als nächstes nachweisen werden: Jeder Punkt in $f(V_k \cap N)$ mit $1 \leq k \leq n$ besitzt genau ein Urbild v in $V_k \cap N$. Da N keine inneren Punkte enthält, existiert eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $V_k \setminus N$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$. Die Stetigkeit von f impliziert $\lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) = f(v)$. Wegen der Konformität von f liegt die Bildfolge vollständig in $U_0 \setminus f(V_k \cap N)$. Die Mengen $f(V_k \cap N)$ enthalten somit in der Tat keinen inneren Punkt. Das gleiche gilt für die Vereinigung endlich vieler solcher Mengen, bzw. für jede Untermenge einer solchen Vereinigung. Somit enthält die Menge W keinen inneren Punkt. Insbesondere ist $w \in W \cap U_0$ kein innerer Punkt der Menge W , was im Widerspruch zu der Annahme steht, daß $w \in K_\eta(w_0) \subset W$ gilt.

Wir betrachten nun wieder die beiden ursprünglich gegebenen Punkte $\zeta_1, \zeta_2 \in \text{Int}K \subset D_4 \subset \Omega$ mit $f(\zeta_1) = f(\zeta_2)$. Es sei $\delta > 0$ so gewählt, daß die Abschlüsse der Kreise $K_\delta(\zeta_1)$ und $K_\delta(\zeta_2)$ mit Radius δ um ζ_1 bzw. um ζ_2 ganz in $D_4 \cap K$ liegen. Außerdem gelte

$$K_\delta(\zeta_1) \cap K_\delta(\zeta_2) = \emptyset.$$

Da f eine offene Abbildung ist, sind die Mengen $f(K_\delta(\zeta_1))$ und $f(K_\delta(\zeta_2))$ beide offen. Ihr Schnitt ist ebenfalls offen und nicht leer, da er den Punkt $f(\zeta_1) = f(\zeta_2)$ enthält. Wie nachgewiesen wurde, ist die Menge $W = f(N \cap K)$ abgeschlossen und enthält keinen inneren Punkt. Somit ist die Menge

$$S = f(K_\delta(\zeta_1)) \cap f(K_\delta(\zeta_2)) \setminus W$$

offen und liegt dicht in $f(K_\delta(\zeta_1)) \cap f(K_\delta(\zeta_2))$.

Schließlich sei

$$M_1 = f^{-1}(S) \cap K_\delta(\zeta_1)$$

und

$$M_2 = f^{-1}(S) \cap K_\delta(\zeta_2).$$

Als Urbilder offener Mengen unter f sind M_1 und M_2 offen. Da

$$S \subset f(K_\delta(\zeta_1)) \cap f(K_\delta(\zeta_2))$$

gilt und nicht leer ist, sind auch M_1 und M_2 nicht leer. Weiter sind M_1 und M_2 disjunkt, da sie jeweils Teilmenge der disjunkten Kreise $K_\delta(\zeta_1)$ bzw. $K_\delta(\zeta_2)$ sind. Zu jedem $z \in M_1$ existiert ein $z^* \in M_2$ mit $f(z) = f(z^*)$ und umgekehrt. Da kein $z \in M_1 \cup M_2$ ein kritischer Punkt ist, ist die Feldlinie durch z für alle $z \in M_1 \cup M_2$ wohldefiniert. Außerdem endet die positive Richtung Γ_z einer in $z \in M_1 \cup M_2$ beginnenden Feldlinie niemals in einem kritischen Punkt in K :

Dies wäre nur möglich, wenn $v_0(z)$ ein kritischer Wert von v_0 wäre oder die Summe eines solchen mit 2π oder mit -2π . Das heißt, für das Enden in einem kritischen Punkt ist es notwendig, daß $z \in N$ gilt. Wegen

$$(M_1 \cup M_2) \cap N = \emptyset$$

ist dies aber ausgeschlossen.

Mit vorhergehenden Überlegungen folgt, daß der Bogen Γ_z den Rand der Menge K erreicht. Da Γ_z die positive Richtung der Feldlinie durch z ist, folgt, daß $R(\zeta) > \tilde{\eta}$ für alle Punkte ζ des Bogens Γ_z gilt. Wie schon vorher gezeigt wurde, kann Γ_z nicht auf dem Neumann-Rand von Ω enden. Dies impliziert, daß Γ_z die Niveaulinie Γ_α erreicht.

Ist nun $\zeta_1 \in N$ oder $\zeta_2 \in N$, so ersetzen wir diese beiden Punkte durch ζ'_1 und ζ'_2 so, daß $f(\zeta'_1) = f(\zeta'_2)$ gilt. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir statt ζ'_1 und ζ'_2 wieder ζ_1 und ζ_2 . Der Jordan-Bogen, der in ζ_1 beginnt, auf Λ_α endet und durch die positive Richtung der Feldlinie durch ζ_1 definiert ist, heiße Γ_1 und der Jordan-Bogen, der in ζ_2 beginnt, auf Λ_α endet und durch die positive Richtung der Feldlinie durch ζ_2 gegeben ist, heiße Γ_2 .

Die Feldlinien Γ_1 und Γ_2 besitzen in $K = \{z \in \Omega : \tilde{\eta} \leq R(z) \leq \alpha\}$ keinen gemeinsamen Punkt, da sie keinen kritischen Punkt aus K enthalten, wie aus den vorhergehenden Erörterungen folgt. Insbesondere enden Γ_1 und Γ_2 in verschiedenen Punkten von Λ_α .

Die Niveaulinie Λ_α sei so orientiert, daß $\text{Int} \Gamma_\alpha$ stets links vom Tangentenvektor liegt und $\frac{\partial R}{\partial n}(z)$ somit, unseren Konventionen entsprechend, stets nach au-

ßen weist. Es sei Γ_α derjenige Teilbogen der Niveaulinie Λ_α , der den Schnittpunkt von Γ_1 und Λ_α mit dem Schnittpunkt von Γ_2 und Λ_α verbindet und die gleiche Orientierung wie Λ_α besitze. Der Jordan-Bogen

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_\alpha - \Gamma_2$$

ist stückweise analytisch und verbindet die Punkte ζ_1 und ζ_2 . Weiter sei Ξ ein Jordan-Bogen, der den Punkt ∞ mit $\partial\Omega$ verbindet und vollständig in Ω verläuft. Ferner besitze Ξ keinen gemeinsamen Punkt mit dem Jordan-Bogen Γ . Der Bogen Ξ ist also so gewählt, daß die Kurve Γ vollständig im einfach zusammenhängenden Gebiet

$$D_5 = \Omega \setminus |\Xi|$$

verläuft.

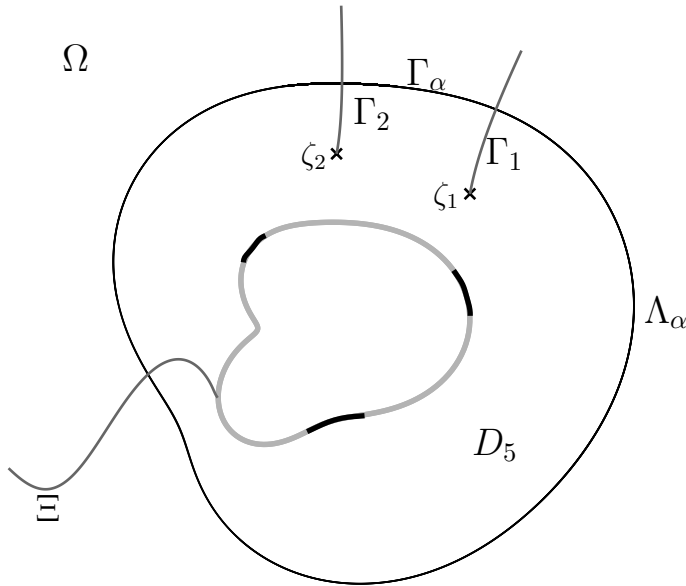


Abbildung 17

Die vorausgehende Abbildung 17 stellt den Integrationsweg $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_\alpha - \Gamma_2$ dar, der die Punkte ζ_1 und ζ_2 miteinander verbindet. Die Bögen Γ_1 und Γ_2 sind jeweils

Teilbögen der positiven Richtungen der Feldlinien durch ζ_1 und ζ_2 . Der Bogen Γ_α ist ein Teilbogen der Niveaulinie Λ_α . Außerdem sind der Bogen Ξ sowie das einfach zusammenhängende Gebiet D_5 im Bild zu erkennen. Der schwarz markierte Teil des Randes von Ω ist wieder der Dirichlet-Rand und der grau gezeichnete Teil ist der Neumann-Rand.

Der Teilbogen Γ_1 besitze die Parameterdarstellung γ_1 , der Teilbogen Γ_α besitze die Parameterdarstellung γ_α und der Teilbogen Γ_2 besitze die Parameterdarstellung γ_2 jeweils über dem Intervall $[0, 1]$ und mit $\gamma'_\ell(\tau) \neq 0$ für $\tau \in [0, 1]$ und $\ell \in \{1, \alpha, 2\}$. Da D_5 einfach zusammenhängend ist, und die Funktion f in D_5 holomorph ist und niemals den Wert 0 annimmt, existiert in D_5 eine holomorphe Stammfunktion $\log f$ von $\frac{f'}{f}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
& f'(\gamma_\ell(\tau)) \cdot \gamma'_\ell(\tau) \\
&= f(\gamma_\ell(\tau)) \cdot \frac{d}{d\tau}(R(\gamma_\ell(\tau)) - \log |\gamma_\ell(\tau)| + iS(\gamma_\ell(\tau))) + \frac{f(\gamma_\ell(\tau))}{\gamma_\ell(\tau)} \cdot \gamma'_\ell(\tau) \\
&= f(\gamma_\ell(\tau)) \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial x}(\gamma_\ell(\tau)) - i \frac{\partial R}{\partial y}(\gamma_\ell(\tau)) \right) \cdot \gamma'_\ell(\tau) \\
&= f(\gamma_\ell(\tau)) \cdot \left(\left\langle \nabla R(\gamma_\ell(\tau)), \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \gamma'_\ell(\tau) \\ \operatorname{Im} \gamma'_\ell(\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \right. \\
&\quad \left. + i \left\langle \nabla R(\gamma_\ell(\tau)), \begin{pmatrix} \operatorname{Im} \gamma'_\ell(\tau) \\ -\operatorname{Re} \gamma'_\ell(\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \right) \\
&= f(\gamma_\ell(\tau)) \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial t}(\gamma_\ell(\tau)) + i \frac{\partial R}{\partial n}(\gamma_\ell(\tau)) \right) \cdot |\gamma'_\ell(\tau)|,
\end{aligned}$$

wobei der Normaleneinheitsvektor an die Kurve Γ_ℓ , $\ell \in \{1, \alpha, 2\}$, in dessen Richtung die Richtungsableitung $\frac{\partial R}{\partial n}$ gebildet wird, wiederum durch eine Rechtsdrehung aus dem Einheitsvektor in tangentialer Richtung hervorgeht. Weiter folgt

$$\begin{aligned}
& \log f(\zeta_2) - \log f(\zeta_1) \\
&= \int_{\Gamma_1 + \Gamma_\alpha - \Gamma_3} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\
&= \sum_{\ell \in \{1, \alpha, 2\}} \int_0^1 \frac{f'(\gamma_\ell(\tau))}{f(\gamma_\ell(\tau))} \cdot \gamma'_\ell(\tau) d\tau \\
&= \sum_{\ell \in \{1, \alpha, 2\}} \int_0^1 \left(\frac{\partial R}{\partial t}(\gamma_\ell(\tau)) + i \frac{\partial R}{\partial n}(\gamma_\ell(\tau)) \right) \cdot |\gamma'_\ell(\tau)| d\tau.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung impliziert

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\log f(\zeta_2) - \log f(\zeta_1)) &= \sum_{\ell \in \{1, \alpha, 2\}} \int_0^1 \frac{\partial R}{\partial n}(\gamma_\ell(\tau)) \cdot |\gamma'_\ell(\tau)| d\tau \\ &= \int_0^1 \frac{\partial R}{\partial n}(\gamma_\alpha(\tau)) \cdot |\gamma'_\alpha(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Die letzte Umformung ist zulässig, da die Feldlinien Γ_1 und Γ_2 von R lokal jeweils Niveaulinien einer zu R konjugiert harmonischen Funktion v sind. Somit gilt

$$\frac{\partial R}{\partial n}(z) = \frac{\partial v}{\partial t}(z) = 0$$

für alle Punkte $z \in |\Gamma_1| \cup |\Gamma_2|$, wie bereits erörtert wurde. Für das verbleibende Integral weisen wir als nächstes die strikte Abschätzung

$$0 < \int_0^1 \frac{\partial R}{\partial n}(\gamma_\alpha(\tau)) \cdot |\gamma'_\alpha(\tau)| d\tau < 2\pi$$

nach. Dazu zeigen wir, daß $\frac{\partial R}{\partial n}(z)$ für alle Punkt z der Niveaulinie Λ_α positiv ist, und daß

$$\int_{\Lambda_\alpha} \frac{\partial R}{\partial n}(z) |dz| = 2\pi$$

gilt:

Es sei λ eine Parameterdarstellung der Kurve Λ_α über dem Intervall $[0, 1]$ mit $\lambda'(\tau) \neq 0$ für all $\tau \in [0, 1]$. Die erste der beiden nachzuweisenden Aussagen leuchtet geometrisch unmittelbar ein, da bei der gewählten Orientierung von Λ_α der Normaleneinheitsvektor $\vec{n}(\lambda(\tau)) = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$, in dessen Richtung $\frac{\partial R}{\partial n}$ bestimmt wird, in jedem Punkt $\lambda(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$ von Λ_α durch eine Rechtsdrehung um 90° aus dem Tangentialvektor $\frac{\lambda'(\tau)}{|\lambda'(\tau)|}$ hervorgeht und somit nach außen weist. Für alle Punkte $z \in \operatorname{Ext} \Lambda_\alpha$ gilt nun $R(z) > \alpha$, und es folgt

$$\frac{\partial R}{\partial n}(\lambda(\tau)) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{R(\lambda(\tau) + s \cdot (n_1 + in_2)) - R(\lambda(\tau))}{s} \geq 0,$$

da

$$R(\lambda(\tau) + s \cdot (n_1 + in_2)) > \alpha = R(\lambda(\tau))$$

für alle hinreichend kleinen $s > 0$ gilt. Schließlich ist $\frac{\partial R}{\partial n}(\lambda(\tau)) = 0$ für ein $\tau \in [0, 1]$ ausgeschlossen, da auf der Niveaulinie Λ_α stets

$$\frac{\partial R}{\partial t}(\lambda(\tau)) = 0$$

gilt. Wäre auch noch $\frac{\partial R}{\partial n}(\lambda(\tau_0)) = 0$ für ein $\tau_0 \in [0, 1]$, so verschwänden die Richtungsableitungen von R im Punkt $\lambda(\tau_0)$ in zwei linear unabhängigen Richtungen, und $\nabla R(\lambda(\tau_0))$ wäre ebenfalls Null. Entsprechend der Wahl von α , besitzt R jedoch keinen kritischen Punkt auf Λ_α , und wir haben $\frac{\partial R}{\partial n}(\lambda(\tau)) > 0$ für alle $\tau \in [0, 1]$ nachgewiesen.

Daß

$$\int_{\Lambda_\alpha} \frac{\partial R}{\partial n}(z) |dz| = 2\pi$$

gilt, folgt aus einer bereits erbrachten Rechnung:

Wir können nämlich Λ_α durch eine Homotopie in einen Kreis mit beliebig großem Radius η deformieren, ohne den Integralwert zu ändern. Dieses und die anschließende Rechnung wurde bereits auf den Seiten 55 und 56 durchgeführt. Da Γ_α und Λ_α die gleiche Orientierung besitzen, gilt

$$0 < \int_{\Gamma_\alpha} \frac{\partial R}{\partial n}(z) |dz| < \int_{\Lambda_\alpha} \frac{\partial R}{\partial n}(z) |dz| = 2\pi.$$

Wir haben somit

$$0 < \log f(\zeta_2) - \log f(\zeta_1) < 2\pi$$

nachgewiesen. Dies widerspricht allerdings unserer anfänglichen Annahme $f(\zeta_1) = f(\zeta_2)$, wie wir jetzt zeigen werden:

Aus der Gültigkeit der Funktionalgleichung

$$e^{\log f(z)} = f(z)$$

in Ω folgt

$$e^{\log f(\zeta_1)} = e^{\log f(\zeta_2)}.$$

Dies impliziert aber

$$\log f(\zeta_1) - \log f(\zeta_1) = k \cdot 2\pi$$

mit einem $k \in \mathbb{Z}$, und der Widerspruch ist offensichtlich.

Wir haben durch die vorausgehende Argumentation die Annahme $f(\zeta_1) = f(\zeta_2)$ zu einem Widerspruch geführt und somit bewiesen, daß f eine schlichte Abbildung des Gebietes Ω ist. Abschließend ist die behauptete Ränderzuordnung zu verifizieren: Wegen $R(z) > 0$ gilt

$$|f(z)| = e^{R(z)} > 1$$

für $z \in \Omega$, das heißt, $f(\Omega)$ ist eine Untermenge des Äußeren des Einheitskreises. Mit $f(A)$ sei die Menge aller Häufungspunkte von Bildfolgen $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet, und zwar für alle konvergenten Folgen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Ω mit Grenzwert in A . Aus $\lim_{z \rightarrow A} R(z) = 0$ folgt $\lim_{z \rightarrow A} |f(z)| = 1$ und somit

$$f(A) \subset \partial \mathbb{D}.$$

Der Neumann-Rand B ist Vereinigung höchstens abzählbar vieler Jordan-Bögen. Wenn im folgenden von Teilbögen des Neumann-Randes die Rede ist, handelt es sich stets um maximale Teilbögen, das heißt um solche Teilbögen von B , deren Randpunkte im Dirichlet-Rand liegen. Es sei $\Gamma \subset B$ ein solcher Jordan-Bogen und γ eine Parameterdarstellung über dem Intervall $]0, 1[$ von Γ mit $\gamma'(\tau) \neq 0$. Wie im vorhergehenden Abschnitt dieses Beweises können wir ein einfach zusammenhängendes Gebiet D_6 konstruieren, das den Bogen Γ enthält, und in das R eine harmonische Fortsetzung hinein besitzt, die nicht den Wert Null annimmt. Mit R kann auch die Abbildung f in das gesamte Gebiet D_6 hinein analytisch fortgesetzt werden. In D_6 besitzt $\frac{f'}{f}$ eine Stammfunktion $\log f$. Wie bereits nachgerechnet wurde, gilt

$$\frac{f'(\gamma(\tau))}{f(\gamma(\tau))} \cdot \gamma'(\tau) = \left\langle \nabla R(\gamma(\tau)), \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \gamma'(\tau) \\ \operatorname{Im} \gamma'(\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + i \left\langle \nabla R(\gamma(\tau)), \begin{pmatrix} \operatorname{Im} \gamma'(\tau) \\ -\operatorname{Re} \gamma'(\tau) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Aus der Neumann-Bedingung in $\gamma(\tau) \in B$ folgt

$$\left\langle \nabla R(\gamma(\tau)), \begin{pmatrix} \operatorname{Im} \gamma'(\tau) \\ -\operatorname{Re} \gamma'(\tau) \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\partial R}{\partial n}(\gamma(\tau)) \cdot |\gamma'(\tau)| = 0,$$

und somit ist

$$\frac{f'(\gamma(\tau))}{f(\gamma(\tau))} \cdot \gamma'(\tau) = \left\langle \nabla R(\gamma(\tau)), \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \gamma'(\tau) \\ \operatorname{Im} \gamma'(\tau) \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\partial R}{\partial t}(\gamma(\tau)) \cdot |\gamma'(\tau)|$$

stets reel. Dies gilt ebenfalls für

$$\log f(\gamma(\xi)) - \log f(\gamma(0)) = \int_0^\xi \frac{f'(\gamma(\tau))}{f(\gamma(\tau))} \cdot \gamma'(\tau) d\tau$$

für jedes ξ in $]0, 1[$. Mit der in D_6 gültigen Funktionalgleichung

$$e^{\log f(z)} = f(z)$$

folgt

$$f(\gamma(\xi)) = C \cdot e^{\int_0^\xi r(\tau) d\tau}$$

für $\xi \in]0, 1[$, wobei

$$r(\tau) = \frac{\partial R}{\partial t}(\gamma(\tau)) \cdot |\gamma'(\tau)|$$

mit $\tau \in]0, 1[$ reellwertig ist, und

$$C = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f(\gamma(\xi)) \in \mathbb{C}$$

gilt. Da R auf $\overline{\Omega}$ stetig ist, gilt dies auch für $|f|$, und wegen $\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \gamma(\xi) \in f(A)$ ist $|C| = 1$. Aus $\lim_{\xi \rightarrow 1^-} \gamma(\xi) \in f(A)$ folgt

$$e^{\int_0^1 r(\tau) d\tau} = 1,$$

also

$$\int_0^1 r(\tau) d\tau = 0.$$

Der Träger des durch $f(\gamma(\xi))$, $\xi \in]0, 1[$ parametrisierten Bogens ist somit eine radial verlaufende Strecke. Weiter gilt $|f(z)| \geq 1$ für alle $z \in \overline{\Omega}$, wie bereits zu Beginn dieses Beweisschrittes deutlich wurde. Daher verläuft $f(\gamma(\xi))$, $\xi \in]0, 1[$ vollständig im Abschluß des Äußeren des Einheitskreises. Durch $f(\gamma(\xi))$, $\xi \in]0, 1[$ wird somit eine Strecke der Form $]e^{i\alpha}, re^{i\alpha}]$ mit

$$e^{i\alpha} = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f(\gamma(\xi)) = \lim_{\xi \rightarrow 1^-} f(\gamma(\xi))$$

und $r > 1$ parametrisiert.

Wir haben bewiesen, daß das Bild jedes maximalen Teilbogens des Neumann-Randes die behauptete Gestalt besitzt. Da maximale Bögen in B disjunkte offene Mengen sind, kann es höchstens abzählbar viele geben. Somit ist $f(B)$ Vereinigung höchstens abzählbar vieler „Strahlen“ .

Der Nachweis, daß zwei verschiedene maximale Teilbögen B_1 und B_2 des Neumann-Randes auf verschiedene Strahlen abgebildet werden, kann indirekt erfolgen:

Wir gehen wieder davon aus, daß f über B_1 und über B_2 hinaus analytisch fortgesetzt wurde, und nennen die Fortsetzung ebenfalls f . Weiter nehmen wir an, es gäbe ein $w \in f(B_1) \cap f(B_2)$, und für $\zeta_1 \in B_1$ bzw. $\zeta_2 \in B_2$ gelte $f(\zeta_1) = f(\zeta_2) = w$. Wir verbinden ζ_1 und ζ_2 durch einen Jordan-Bogen Q , der bis auf seine beiden Endpunkte in Ω verläuft. Dieser Jordan-Bogen Q ist ein Querschnitt in Ω . Er zerlegt Ω in zwei Gebiete Ω_1 und Ω_2 . Jedes dieser beiden Gebiete besitzt Randpunkte, die im Dirichlet-Rand von Ω liegen. Letzteres kann leicht aus der Annahme gefolgert werden, daß B_1 und B_2 zwei verschiedene maximale Teilbögen des Neumann-Randes sind. Da die stetige Fortsetzung von f auf $\bar{\Omega}$ Anfangs- und Endpunkt von Q auf den Punkt w abbildet, ist $\Gamma = f(Q)$ eine Jordan-Kurve. Das Bild des Dirichlet-Randes $f(A)$ liegt entweder vollständig im Innen- oder im Außengebiet von Γ , weil $|\Gamma|$ keinen Punkt des Einheitskreisrandes enthält, der eine zusammenhängende Obermenge von $f(A)$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei Ω_1 das Gebiet, welches durch f auf dasjenige Komplementärgebiet von Γ abgebildet wird, das keine Randpunkte in $f(A)$ besitzt. Weiter sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Ω_1 , deren Grenzwert im Dirichlet-Rand A liegt. Da $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt in $f(A)$ besitzt, ist ein Widerspruch zutage getreten. Jeder maximale Teilbogen in B wird also von f auf einen anderen Strahl abgebildet.

Als letztes bleibt zu zeigen, daß $f(A) = \partial\mathbb{D}$ gilt (bisher wurde lediglich $f(A) \subset \partial\mathbb{D}$ nachgewiesen). Dies geschieht indirekt: Angenommen, es gäbe ein $z \in \partial\mathbb{D}$, das nicht in $\partial\Omega$ liegt. Da $f(A)$ abgeschlossen ist, gäbe es dann einen Teilbogen

$$\{z = e^{it} : \eta_1 < t < \eta_2\} \quad \text{mit } 0 < \eta_1 < \eta_2 < 2\pi$$

von $\partial\mathbb{D}$, der keinen Punkt von $\partial f(\Omega)$ trifft. In Punkten dieses Bogens können sich auch keine Punkte von $f(B)$ häufen, da die Häufungspunkte wieder in $f(A)$ lägen. Da $f(B)$ die Vereinigung von Radialschlitzern ist, die auf $\partial\mathbb{D}$ enden, und $f(A)$ Teilmenge von $\partial\mathbb{D}$, trifft der Sektor

$$\{z = e^{it} : \eta_1 < t < \eta_2\}$$

keinen Punkt von $\partial f(\Omega)$. Da kein Punkt des Einheitskreises in $f(\Omega)$ liegt, ist der Schnitt des gesamten Sektor mit $f(\Omega)$ leer. Dies steht aber im Wider-

spruch zu $\infty \in f(\Omega)$, und der Satz ist vollständig bewiesen. \square

4 Invarianzeigenschaften

Dieses Kapitel dient der Untersuchung des Verhaltens der Robinschen Kapazität bei konformer Abbildung des zugrunde liegenden Gebietes. Außerdem wird ihr Zusammenhang zu verschiedenen Größen der konformen Geometrie erörtert. Bevor dies geschieht, erweitern wir an dieser Stelle die Definition der Robinschen Funktion und der Robinschen Kapazität auf Situationen, in denen das gemischte Randwertproblem, über dessen Lösung wir sie bisher definiert haben, nicht sinnvoll gestellt werden kann, da die notwendigen Glättebedingungen nicht gegeben sind:

Es sei Ω' ein endlich oft zusammenhängendes Gebiet, das ∞ enthält, und an dessen Ränder keine weiteren Glättebedingungen gestellt werden. Weiter sei $A' \subset \Omega'$ eine abgeschlossene Menge, deren Zusammenhangskomponenten nichtausgeartete Kontinua sind. Bekanntlich kann durch wiederholte Anwendung des Riemannschen Abbildungssatzes eine konforme Abbildung Ψ konstruiert werden, die ∞ festhält und Ω' auf ein Gebiet Ω abbildet, das von einer endlichen Zahl analytischer Jordan-Kurven berandet wird. Der Menge A' entspreche die Menge $A \subset \Omega$ in dem Sinne, daß A die Menge aller Häufungspunkte aller Folgen $(\Psi(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist, wobei die $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folge in Ω' sind, deren Grenzwerte in der Menge A' liegen. Es ist leicht zu zeigen, daß jede Zusammenhangskomponente der Menge A ein Jordan-Bogen oder eine Jordan-Kurve ist. Wir definieren nun die Robinsche Funktion R' in Ω' durch

$$R' = R \circ \Psi,$$

wobei R die Robinsche Funktion in Ω mit Pol in ∞ und Dirichlet-Rand A ist. Es ist leicht zu sehen, daß $\lim_{z \rightarrow \infty} R'(z) - \log |z|$ existiert (vgl. Hilfssatz 4.4). Daher kann die Robinsche Kapazität von A' bezüglich Ω' wie zuvor durch

$$\rho(A') = e^{\lim_{z \rightarrow \infty} R'(z) - \log |z|}$$

definiert werden.

Die verallgemeinerte Robinsche Funktion ist nach wie vor eindeutig bestimmt: Es seien Ψ_1 und Ψ_2 zwei verschiedene konforme Abbildungen von Ω' auf Dini-glatt berandete Gebiete Ω_1 und Ω_2 . Die Robinsche Funktion in Ω_1 heiße R_1

und die Robinsche Funktion in Ω_2 heiße R_2 . Wie im ersten Kapitel gezeigt wurde, sind sowohl R_1 als auch R_2 eindeutig bestimmt. Für Ω_1 und Ω_2 gelten die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2.3, und somit ist

$$R_2 = R_1 \circ \Psi_1 \circ \Psi_2^{-1}.$$

Hieraus folgt

$$R_2 \circ \Psi_2 = R_1 \circ \Psi_1 \circ \Psi_2^{-1} \circ \Psi_2 = R_1 \circ \Psi_1,$$

das heißt, die vorausgehende Definition der Robinschen Funktion ist unabhängig von der gewählten konformen Abbildung auf ein Dini-glatt berandetes Gebiet Ω . Insbesondere ist die verallgemeinerte Robinsche Kapazität wohldefiniert.

Folgende Themen werden in diesem Kapitel behandelt:

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden „Konfigurationen“, deren Robinsche Funktionen bei konformer Abbildung ineinander übergehen, zu Klassen zusammengefaßt. Wir zeigen, daß $\frac{\rho(A)}{\text{cap}(A)}$ eine Invariante dieser Klassen ist. Außerdem wird erörtert, inwieweit die Äquivalenzklassen durch konforme Invarianten charakterisiert werden können. Der zweite Abschnitt dient der Erörterung des Zusammenhangs zwischen der Robinschen Kapazität des Dirichlet-Randes A und der konformen Geometrie des zugrunde liegenden Gebietes Ω . Im dritten Abschnitt werden wir den von P. Duren und M. Schiffer gefundenen Zusammenhang von Robinschen Kapazität und dem Problem der Minimierung der logarithmischen Kapazität des Bildes $f(A)$ des Dirichlet-Randes A unter geeignet normierten konformen Abbildungen f des Gebietes Ω erläutern. Den Abschluß dieses Kapitels bilden Beispiele sogenannter Minimalgebiete, in denen die Robinsche Funktion mit Pol in ∞ und die Greensche Funktion im Außengebiet des Dirichlet-Randes, ebenfalls mit Pol ∞ , übereinstimmen.

4.1 Invarianz bei konformer Abbildung

4.1.1 Robin-Äquivalenz

Wir fassen Gebiete, deren Robinsche Funktionen durch „konformen Transport“ ineinander übergehen, zu Klassen zusammen. Genauer definieren wir:

Definition 4.1 Gegeben seien zwei endlich oft zusammenhängende Gebiete Ω_1 und Ω_2 , die beide den Punkt ∞ enthalten. Weiter seien $A_1 \subset \partial\Omega_1$ und $A_2 \subset \partial\Omega_2$ abgeschlossen, und jede Zusammenhangskomponente von A_k , $k = 1, 2$ sei ein nichtausgeartetes Kontinuum. Schließlich seien $B_1 = \partial\Omega_1 \setminus A_1$ und $B_2 = \partial\Omega_2 \setminus A_2$. Die Paare (Ω_1, A_1) und (Ω_2, A_2) heißen genau dann **Robin-äquivalent**, wenn es eine konforme Abbildung f von Ω_1 auf Ω_2 gibt, die ∞ festhält, und die jede Folge in Ω_1 , die nur Häufungspunkte in A_1 besitzt, auf eine Folge in Ω_2 abbildet, die nur Häufungspunkte in A_2 besitzt, und jede Folge, die nur Häufungspunkte in B_1 besitzt, auf eine Folge abbildet, die nur Häufungspunkte in B_2 besitzt.

Zur Vereinfachung der Sprache werden wir sagen, daß die Gebiete Ω_1 und Ω_2 Robin-äquivalent sind, wenn es kein Mißverständnis bezüglich der Teilmengen A_1 bzw. A_2 geben kann. Außerdem werden wir diese Mengen Dirichlet-Ränder und deren Komplemente Neumann-Ränder nennen, auch wenn das gemischte Randwertproblem nicht sinnvoll gestellt werden kann. Ein geordnetes Paar der Form (Ω_1, A_1) werden wir gelegentlich auch als eine **Konfiguration** bezeichnen.

Wie im Abschnitt 2.2 (Existenz und Eindeutigkeit) erläutert wurde, ist im Falle der Robin-Äquivalenz von Ω_1 und Ω_2 die Abbildung $R \circ f^{-1}$ die Robinsche Funktion in Ω_2 mit Dirichlet-Rand $f(A)$ und Pol in ∞ , falls R die Robinsche Funktion in Ω_1 mit Dirichlet-Rand A ist, und falls $\partial\Omega_1$ und $\partial\Omega_2$ entsprechende Glätteeigenschaften besitzen. Besitzen $\partial\Omega_1$ oder $\partial\Omega_2$ nicht die in Abschnitt 2.2 geforderten Gätteeigenschaften, so ist $R \circ f^{-1}$ aufgrund der „invarianten“ Definition der Robinschen Funktion im allgemeinen Fall ebenfalls die Robinsche Funktion in Ω_2 .

Beispiel 4.2. Jedes einfach zusammenhängende Jordan-Gebiet Ω , dessen Dirichlet-Rand ein Teilbogen von $\partial\Omega$ ist, ist Robin-äquivalent zum Äußeren des Einheitskreises mit einem Kreisbogen als Dirichlet-Rand. Insbesondere kann durch Einschalten einer Drehung erreicht werden, daß der Kreisbogen $f(A)$ symmetrisch zur reellen Achse liegt und den Punkt 1 enthält.

Beispiel 4.3. Als weiteres Beispiel betrachten wir zwei Jordan-Gebiete Ω_1 und Ω_2 , deren Dirichlet-Ränder A_1 bzw. A_2 jeweils die Vereinigung zweier abgeschlossener, disjunkter Teilbögen sind.

Die Abbildung 18 zeigt ein Beispiel der betrachteten Konfiguration:

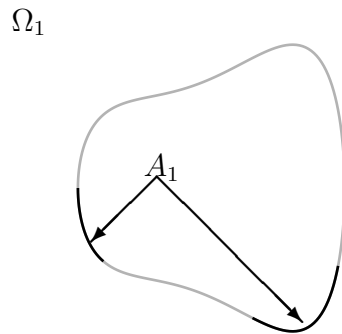


Abbildung 18

Notwendig für Robin-Äquivalenz der beiden Gebiete ist, daß die beiden Vierecke, die jeweils durch die Endpunkte der maximalen Bögen in den Dirichlet- und Neumann-Rändern gebildet werden, den gleichen Modul besitzen. Andererseits ist dieses Kriterium nicht hinreichend:

Sei beispielsweise $\Delta = \{|z| > 1\}$ das Äußere des Einheitskreises und

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = e^{i\alpha} \text{ mit } -\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4} \text{ oder } \frac{3}{4}\pi < \alpha < \frac{5}{4}\pi \right\}$$

der Dirichlet-Rand (siehe Abbildung 19).

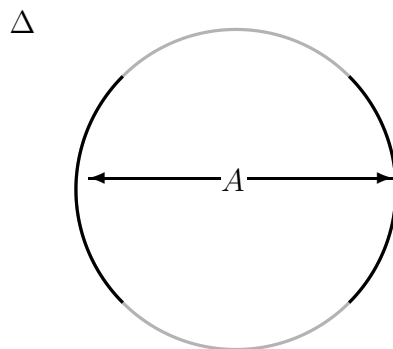


Abbildung 19

Außerdem sei

$$T(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

mit $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Dann sind Δ mit Dirichlet-Rand A und $T(\Delta) = \Delta$ mit Dirichlet-Rand $T(A)$ nicht Robin-äquivalent:

Es gibt zwei konforme Selbstabbildungen von Δ , die A auf $T(A)$ abbilden, nämlich $T(z)$ und $T(-z)$. Beide Abbildungen halten jedoch den Punkt ∞ nicht fest. Offensichtlich sind weitere konforme Invarianten zur Charakterisierung der Äquivalenzklasse von (Δ, A) notwendig. Die Anzahl der benötigten Invarianten zur Charakterisierung einer gegebenen Konfiguration (Ω, A) wird uns im Verlauf dieses Abschnittes unter anderem beschäftigen.

Der nächste Hilfssatz beschreibt das Transformationsverhalten der Robin-schen Kapazität beim Transport in eine Robin-äquivalente Situation. An Ω_1 und Ω_2 stellen wir die Voraussetzungen, die auch der Definition 4.1 zugrunde liegen.

Hilfssatz 4.4 *Die Gebiete Ω_1 und Ω_2 mit jeweiligem Dirichlet-Rand A_1 bzw. A_2 seien Robin-äquivalent. Ist $f(z) = az + a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots$ die konforme Abbildung, die die Äquivalenz herstellt, so gilt*

$$\rho(A_2) = |a| \cdot \rho(A_1) = \frac{\text{cap } \partial\Omega_2}{\text{cap } \partial\Omega_1} \cdot \rho(A_1).$$

Beweis: Gemäß Satz 2.3 in Zusammenhang mit der invarianten Definition der Robinschen Funktion in der allgemeinen Situation nicht glatter Ränder ist $R_2 = R_1 \circ f^{-1}$ die Robinsche Funktion in Ω_2 mit Pol in ∞ , wenn R_1 diejenige in Ω_1 ist. Analog ist $G_2 = G_1 \circ f^{-1}$ die Greensche Funktion in Ω_2 , wenn G_1 die in Ω_1 ist. Aus

$$\begin{aligned} -\log \rho(A_2) &= \lim_{w \rightarrow \infty} R_2(w) - \log |w| \\ &= \lim_{w \rightarrow \infty} R_1 \circ f^{-1}(w) - \log |w| \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} R_1(z) - \log |f(z)| \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(R_1(z) - \log |z| - \log |a| - \log \left| 1 + \frac{a_0}{az} + \frac{a_1}{az^2} + \dots \right| \right) \\ &= -\log(|a| \cdot \rho(A_1)) \end{aligned}$$

folgt

$$\frac{\rho(A_2)}{\rho(A_1)} = |a|.$$

Die analoge Rechnung für die Greenschen Funktionen ergibt

$$\frac{\operatorname{cap} \partial \Omega_2}{\operatorname{cap} \partial \Omega_1} = |a|,$$

und die Behauptung folgt aus beiden Gleichungen. \square

Das in diesem Hilfssatz formulierte Resultat kann auch in der Form

$$\frac{\rho(A_1)}{\operatorname{cap} \partial \Omega_1} = \frac{\rho(A_2)}{\operatorname{cap} \partial \Omega_2}$$

notiert werden. Dies bedeutet:

Die Zahl $\frac{\rho(A)}{\operatorname{cap} \partial \Omega}$ ist eine konforme Invariante.

4.1.2 Robin-Äquivalenz und konformer Typ

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage, wieviele verschiedene konforme Invarianten bekannt sein müssen, damit $\frac{\rho(A)}{\operatorname{cap} \partial \Omega}$ in speziellen Situationen aus ihnen berechnet werden kann. Dazu verwenden wir ein Ergebnis von L.V. Ahlfors, der die Anzahl N der konformen Invarianten angibt, die den von ihm eingeführten *konformen Typ* eines Gebietes charakterisieren, das von m Jordan-Kurven berandet ist und in dem n_1 innere und n_2 äußere Punkte ausgezeichnet sind ([5], S. 70). Zwei Gebiete Ω_1 und Ω_2 gehören dem selben **konformen Typ** an, wenn es eine konforme Abbildung von Ω_1 auf Ω_2 gibt, die jeden der ausgezeichneten Punkte von Ω_1 auf exakt den entsprechenden ausgezeichneten Punkt von Ω_2 abbildet. Es gilt

$$N = 3m - 6 + 2n_1 + n_2 + s,$$

wobei s die Anzahl der freien (reellen) Parameter in der Familie der konformen Selbstabbildungen von Ω_1 angibt, die die ausgezeichneten Punkte festhalten. Außer in den fünf Fällen, die in der anschließenden Tabelle aufgeführt sind, gilt $s = 0$:

m	n_1	n_2	resultierendes s
1	0	0	3
1	0	1	2
2	0	0	1
1	1	0	1
1	0	2	1

Im Falle der Robinäquivalenz ist der innere Punkt ∞ ausgezeichnet. Daher gilt stets $n_1 = 1$. Die Zahl der ausgezeichneten Randpunkte n_2 hängt von der Anzahl der Zusammenhangskomponenten des Dirichlet-Randes ab:

Die Gebiete Ω_1 und Ω_2 seien von jeweils $m \geq 1$ Jordan-Kurven berandet. Die Dirichlet-Ränder A_1 bzw. A_2 seien die Vereinigung endlich vieler Jordan-Bögen, insbesondere sind zunächst keine Jordan-Kurven als Zusammenhangskomponenten des Dirichlet-Randes zugelassen. Die Anzahl dieser Jordan-Bögen sei k , und wir definieren $n_2 = 2k$. Weiter seien $P(\Omega_1)$ bzw. $P(\Omega_2)$ zweiseitige Matrizen, die k Zeilen besitzen, deren Einträge folgendermaßen zu bilden sind:

Jede der $2 \cdot m$ Jordan-Kurven, die Ω_1 oder Ω_2 beranden, sei so orientiert, daß Ω_1 bzw. Ω_2 jeweils rechts vom Einheitsvektor in tangentialer Richtung liegt. Dann besitzt jede Zusammenhangskomponente von A_1 bzw. A_2 einen eindeutig bestimmten Anfangspunkt und einen eindeutig bestimmten Endpunkt. Wir schreiben nun alle Anfangspunkte der k Zusammenhangskomponenten von A_1 in die erste Spalte der Matrix $P(\Omega_1)$ und den entsprechenden Endpunkt daneben in die zweite Spalte der jeweils gleichen Zeile. Die Reihenfolge, in der wir die k Jordan-Bögen auf $\partial\Omega_1$ berücksichtigen, soll zunächst keine Rolle spielen. Die $k \times 2$ Matrix $P(\Omega_2)$ wird völlig analog aufgebaut. Das Gebiet Ω_1 ist lediglich in der vorausgehenden Beschreibung durch Ω_2 zu ersetzen sowie A_1 durch A_2 . Der konforme Typ des Tripels $(\Omega_1, \infty, P(\Omega_1))$ sei nun der konforme Typ des Gebietes Ω_1 mit dem ausgezeichneten innerem Punkt ∞ und den ausgezeichneten Punkten

$$p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}, p_{31}, p_{32}, p_{41}, \dots, p_{(k-1)1}, p_{(k-1)2}, p_{k1}, p_{k2}$$

in genau dieser Reihenfolge, wobei $(p_{j\ell})_{j=1\dots k, \ell=1,2}$ die Matrix $P(\Omega_1)$ beschreibt. Entsprechend erklären wir den konformen Typ des Tripels $(\Omega_2, \infty, P(\Omega_2))$. Mit σ bezeichnen wir ferner eine Permutation, die die k Zeilen der Matrix $P(\Omega_1)$ vertauscht, und die so entstandene Matrix mit vertauschten Zeilen heiße $P_\sigma(\Omega_1)$. Die folgende Bemerkung kann leicht überprüft werden:

Bemerkung 4.5 *Zwei gegebene Konfigurationen (Ω_1, A_1) und (Ω_2, A_2) sind genau dann Robin-äquivalent, wenn es eine Permutation σ gibt, so daß $(\Omega_1, \infty, P_\sigma(\Omega_1))$ und $(\Omega_2, \infty, P(\Omega_2))$ vom gleichen konformen Typ sind.*

Der Beweis dieser Bemerkung soll hier nicht formal durchgeführt werden. Zur Erläuterung sei nur erwähnt, daß die Eigenschaft zweier Gebiete, vom selben konformen Typ zu sein, in der vorliegenden Situation stärker ist als Robin-Äquivalenz, da letztere nicht für jeden ausgezeichneten Randpunkt (das ist jeweils ein Endpunkt einer Zusammenhangskomponente von A) ein festes Bild vorschreibt, sondern es jeweils eine endliche Menge von möglichen Bildern gibt. Diesem Phänomen wird durch Verwendung der Permutation σ Rechnung getragen. Die Struktur der Matrix P stellt sicher, daß immer nur vollständige Zusammenhangskomponenten des Dirichlet-Randes permutiert werden und so nicht auseinandergerissen werden können.

Enthält der Dirichlet-Rand von Ω_1 bzw. Ω_2 auch Jordan-Kurven, so beachten wir diese zunächst nicht und konstruieren die Matrizen $P(\Omega_1)$ sowie $P(\Omega_2)$ wie zuvor. Die Bemerkung 4.5 gilt nun in dem Sinne, daß aus der Robin-Äquivalenz von (Ω_1, A_1) und (Ω_2, A_2) die Existenz einer solchen Permutation σ folgt, daß $(\Omega_1, \infty, P_\sigma(\Omega_1))$ und $(\Omega_2, \infty, P(\Omega_2))$ vom gleichen konformen Typ sind. Andererseits ist bei Schlüssen aus der Existenz einer Permutation σ mit diesen Eigenschaften auf Robin-Äquivalenz eine gewisse Vorsicht geboten: Solange es keine Randkomponenten von Ω_1 bzw. Ω_2 gibt, die ausschließlich Punkte des Neumann-Randes enthalten, gibt es kein Problem: Die Konfigurationen (Ω_1, A_1) und (Ω_2, A_2) sind dann Robin-äquivalent, da den Jordan-Kurven im Dirichlet-Rand von Ω_1 automatisch wieder Jordan-Kurven im Dirichlet-Rand zugeordnet werden. Probleme gibt es lediglich, wenn sowohl Randkurven von Ω_1 bzw. Ω_2 auftreten, die Teilmenge des Dirichlet-Randes sind und solche, die Teilmenge des Neumann-Randes sind. Dann kann es vorkommen, daß zwei Konfigurationen, die den selben konformen Typ repräsentieren, nicht Robin-äquivalent sind. Durch Vertauschung der Zugehörigkeit zu Dirichlet- bzw. Neumann-Rand der Randkomponenten von Ω_2 , die keine ausgezeichneten Randpunkte enthalten, kann in dieser Situation dennoch ein zu Ω_1 Robin-äquivalentes Gebiet konstruiert werden.

Anschließend sollen kurz zwei spezielle Situationen untersucht werden:

- Ein Jordan-Gebiet Ω mit einem Teilbogen $A \subset \partial\Omega$ als Dirichlet-Rand und

- ein Ringgebiet \mathcal{R} mit einer ausgezeichneten Randkomponente A als Dirichlet-Rand.

Im ersten Fall gilt $m = 1$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, weil der Teilbogen A von $\partial\Omega$ durch seinen Anfangs- und durch seinen Endpunkt charakterisiert ist. Da in dieser Situation $s = 0$ gilt, erhalten wir $N = 1$. Im Falle des Ringgebietes ist $m = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = 0$, und wir erhalten $N = 2$, da auch hier $s = 0$ gilt.

4.1.3 Robinsche Kapazität des Teilbogens einer Jordan-Kurve

Ist im ersten Fall eine beliebige konforme Invariante des gegebenen Gebietes Ω bekannt, so kann $\frac{\rho(A)}{\text{cap } \partial\Omega}$ als Funktion dieser Invariante dargestellt werden. Dazu ist der gesuchte Zusammenhang lediglich in einer einfachen Situation nachzurechnen. Infolge konformer Invarianz gilt er auch in jeder Robin-äquivalenten Situation. Bevor wir nun den Zusammenhang zwischen dem Gleichgewichtsmaß $\mu(A)$ des Dirichlet-Randes und $\frac{\rho(A)}{\text{cap } \partial\Omega}$ bestimmen, wird die konforme Invarianz des harmonischen Maßes erörtert:

Im Falle eines glatt berandeten Gebietes Ω gilt

$$\mu(A) = \frac{1}{2\pi} \int_A \frac{\partial G}{\partial n}(z) |dz|,$$

wobei G die Greensche Funktion in Ω mit Pol in ∞ bezeichnet. Wenn $\frac{\partial G}{\partial n}$ auf $\partial\Omega$ nicht existiert, kann μ als schwacher Grenzwert einer Folge (μ_n) von Maßen erklärt werden, wobei die μ_n Gleichgewichtsmaßen der Ränder einer Ausschöpfung von Ω mit glatten Jordan-Gebieten sind ([5], S. 26 f.).

Hilfssatz 4.6 *Gegeben seien zwei Jordan-Gebiete Ω_1 und Ω_2 sowie zwei Teilbögen $A_1 \subset \partial\Omega_1$ und $A_2 \subset \partial\Omega_2$ derart, daß (Ω_1, A_1) und (Ω_2, A_2) Robin-äquivalent sind. Dann gilt*

$$\mu(A_2) = \mu(A_1).$$

Beweis: Zunächst betrachten wir den Spezialfall, daß die Ränder von Ω_1 und Ω_2 Dini-glatte Jordan-Kurven sind. Der Teilbogen A_1 von $\partial\Omega_1$ werde durch $\gamma(t)$ über $[0, 1]$ parametrisiert, und G_2 sei die Greensche Funktion in Ω_2 . Weiter sei $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ die konforme Abbildung, die die Robin-Äquivalenz von (Ω_1, A_1) und (Ω_2, A_2) herstellt. Da $G_2 \circ f$ die Greensche Funktion in Ω_1 ist, gilt

$$\mu(A_1) = \int_0^1 \frac{\partial(G_2 \circ f)}{\partial n}(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt.$$

Andererseits parametrisiert $f \circ \gamma$ die Menge A_2 , was

$$\mu(A_2) = \int_0^1 \frac{\partial G_2}{\partial n}(f(\gamma(t))) \cdot |f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| dt$$

zur Folge hat. Schließlich ist

$$\frac{\partial(G_2 \circ f)}{\partial n}(z) = |f'(z)| \cdot \frac{\partial G_2}{\partial n}(f(z)).$$

Einsetzen dieser Darstellung in den Ausdruck für $\mu(A_1)$ ergibt genau $\mu(A_2)$ und somit die Behauptung.

Im Fall nicht glatter Ränder arbeitet man mit Ausschöpfungen $\Omega_1^{(n)}$ von Ω_1 und $\Omega_2^{(n)} = f(\Omega_1^{(n)})$ von Ω_2 durch Gebiete, die von Dini-glatten Jordan-Kurven berandet werden. Die technischen Details sollen an dieser Stelle ausgelassen werden. \square

In Abbildung 20 ist Ω das Außengebiet einer Jordan-Kurve, die durch

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \cdot \cos t + \frac{1}{10} \cdot \cos(3t + \frac{\pi}{4}) + \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} \cdot \sin t + \frac{3}{10} \cdot \cos 2t - \frac{4}{10} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

parametrisiert wird. Dem schwarz dargestellten Dirichlet-Rand A wird durch die Robin-Äquivalenz f von Ω auf Δ der Teilbogen $A_0 = \{e^{it} : -\frac{\alpha}{2} \leq t \leq \frac{\alpha}{2}\}$ zugeordnet. Im dargestellten Beispiel ist $\alpha = 2$. Der Neumann-Rand B von Ω ist grau dargestellt sowie der ihm entsprechende Teilbogen von $\partial\Delta$.

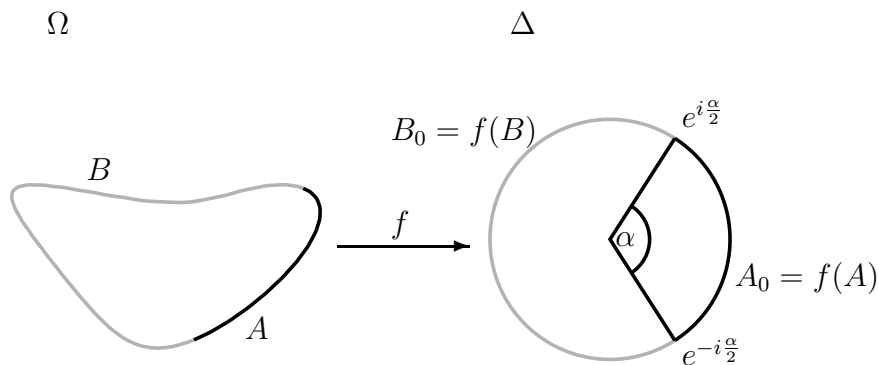


Abbildung 20

Satz 4.7 Die Robinsche Kapazität des Teilbogens $A \subset \partial\Omega$ bezüglich des Jordan-Gebietes Ω beträgt

$$\rho(A) = \text{cap}\partial\Omega \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \mu(A) \right) .$$

Beweis: P. Duren und J. Pfaltzgraff haben bewiesen, daß die Robinsche Kapazität eines Teilbogens A_0 des Einheitskreises der Länge α bezüglich des Äußeren Δ des Einheitskreises stets

$$\rho(A_0) = \sin^2 \frac{\alpha}{4}$$

beträgt ([13]). Andererseits gilt in dieser Situation

$$\mu(A_0) = \frac{\alpha}{2\pi}$$

sowie

$$\text{cap}\partial\Delta = 1 .$$

Aus der konformen Invarianz des Gleichgewichtsmaßes und des Quotienten $\frac{\rho(A)}{\text{cap}\partial\Omega}$ folgt

$$\frac{\rho(A)}{\text{cap}\partial\Omega} = \frac{\rho(A_0)}{\text{cap}\partial\Delta} = \sin^2 \frac{\pi}{2} \mu(A_0) = \sin^2 \frac{\pi}{2} \mu(A) ,$$

womit der Satz bewiesen ist. □

Als Beispiel wird die Robinsche Kapazität des oberen Halbbogens einer Ellipse mit Brennpunkten in $-1,1$ und Halbachsen $2a > 2b > 0$ bestimmt:

Beispiel 4.8. Es sei $0 < \eta < 1$ und

$$a_\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta} + \eta \right) \quad \text{und} \quad b_\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta} - \eta \right) .$$

Durch

$$a_\eta \cos t + ib_\eta \sin t$$

ist eine Familie Γ_η von Ellipsen mit großer Halbachse $2a_\eta$ und kleiner Halbachse $2b_\eta$ parametrisiert. Ihr Außengebiet heiße jeweils Ω_η . Da für alle $0 < \eta < 1$

$$a_\eta^2 - b_\eta^2 = 4$$

gilt, beträgt der Abstand der Brennpunkte immer 2. Aus der Symmetrie der Ellipsen folgt, daß -1 und 1 die gemeinsamen Brennpunkte aller Γ_η sind.

Abbildung 21 zeigt die Ellipse Γ_η mit $\eta = \frac{1}{2}$. Der obere Halbbogen A_η dient als Dirichlet-Rand. Entsprechend ist der untere Halbbogen B_η der Neumann-Rand. Im Bild beträgt die Länge der großen Halbachse $2a_{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$ und die der kleinen Halbachse $2b_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$.

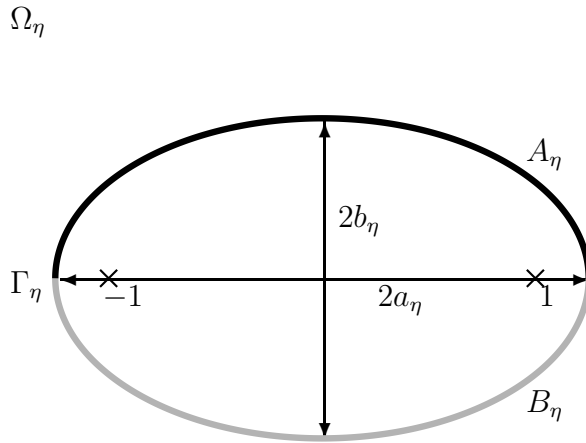


Abbildung 21

Eine konforme Abbildung von Δ auf Ω_η , die ∞ fixiert, ist durch

$$\Phi_\eta(w) = \frac{1}{2} \left(\frac{w}{\eta} + \frac{\eta}{w} \right)$$

gegeben ([33], S. 301). Der Dirichlet-Rand A_η sei nun der obere Halbbogen von Γ_η , also

$$A_\eta = \{z \in |\Gamma_\eta| : \text{Im} z \geq 0\} .$$

Für alle $0 < \eta < 1$ ist der Menge A_η durch Φ_η^{-1} der obere Halbkreisbogen

$$A_0 = \{e^{it} : 0 \leq t \leq \pi\}$$

zugeordnet. Daher gilt

$$\mu(A_\eta) = \frac{1}{2}$$

(natürlich ist dieses Ergebnis aufgrund der Symmetrie der Ellipse auch ohne Randzuordnung ersichtlich). Weiter gilt

$$\operatorname{cap}\Gamma = \lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{\Phi(z)}{z} \right| = \frac{1}{2\eta},$$

und insgesamt folgt

$$\rho(A_\eta) = \frac{1}{2\eta} \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4\eta}.$$

Der Satz 4.7 erlaubt die Berechnung der Robinschen Kapazität des Teilbogens A einer Jordan-Kurve, sobald es gelungen ist, das Gleichgewichtsmaß $\mu(A)$ zu bestimmen. Eine ausgesprochen gute Diskretisierung von μ kann mit einem Extremalpunkt-System erzielt werden, das 1970 von K. Menke eingeführt und untersucht worden ist ([27],[28],[29],[30]). Dies wird im Anhang dieser Arbeit kurz erörtert.

4.1.4 Die Robinsche Kapazität einer Jordan-Kurve

Im Fall eines Ringgebietes mit einer ausgezeichneten Randkomponente als Dirichlet-Rand sind zwei konforme Invarianten notwendig, um den konformen Typ von \mathcal{R} zu charakterisieren. Sind beispielsweise der konforme Modul⁶ des Ringgebietes \mathcal{R} und das harmonische Maß von ∞ bezüglich einer der Randkomponenten von \mathcal{R} gegeben, so kann $\frac{\rho(A)}{\operatorname{cap}\partial\Omega}$ aus diesen Invarianten berechnet werden. Wie zuvor erwähnt, gibt es zwei Arten von Gebieten des selben konformen Typs: Solche, die zu (\mathcal{R}, A) Robin-äquivalent sind und solche, bei denen Dirichlet-Rand und Neumann-Rand vertauscht werden. Dieses Problem kann vermieden werden, wenn anstelle des harmonischen Maßes von ∞ bezüglich einer der Randkomponenten von \mathcal{R} das harmonische Maßes von ∞ bezüglich des Neumann-Randes (oder Dirichlet-Randes) von \mathcal{R} verwendet wird. Wir fordern so von vornherein, daß die in ihrer „Funktion“ einander entsprechenden Randkurven aufeinander abgebildet werden, wenn beide Invarianten übereinstimmen.

Die Robinsche Kapazität der Randkomponente A des Ringgebietes \mathcal{R} kann mit Hilfe der Jacobischen Thetafunktionen berechnet werden:

⁶Der konforme Modul eines Ringgebietes ist die Zahl $-\log r$, wobei r der innere Radius des zu \mathcal{R} konform äquivalenten Kreisringgebietes um 0 mit äußerem Radius 1 ist

Satz 4.9 *Es sei M der konforme Modul des Ringgebietes \mathcal{R} mit $\infty \in \mathcal{R}$ und $\omega = \omega(\infty, B, \mathcal{R})$ das harmonische Maß im Punkt ∞ in Ω bezüglich des Neumann-Randes B . Dann gilt*

$$\rho(A) = \left(\frac{\vartheta_2\left(\frac{\omega}{2}\right) \vartheta_3\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\vartheta_2(0) \vartheta_3(0)} \right)^2 \cdot \text{cap} \partial \mathcal{R} .$$

Dabei beträgt der Gitterparameter der auftretenden Thetareihen

$$\tau = i \frac{\pi}{M} .$$

Die in der Formel auftretenden Thetafunktionen können effektiv über ihre Fourier-Reihendarstellung berechnet werden: Die Fourier-Reihe der Funktion $\vartheta_2(v) = \vartheta_2(v, \tau)$ zum Gitterparameter τ mit $q = e^{i\pi\tau} = e^{-\pi^2/M}$ lautet⁷

$$\vartheta_2(v, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1) \cdot i\pi v}$$

([41], S. 155). Die Fourier-Reihe der Funktion $\vartheta_3(v) = \vartheta_3(v, \tau)$ zum Gitterparameter τ mit $q = e^{i\pi\tau} = e^{-\pi^2/M}$ lautet

$$\vartheta_3(v, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2k \cdot i\pi v}$$

([41], S. 154). Beide Reihen konvergieren für alle $v \in \mathbb{C}$.

Beweis: Zunächst wird das Ringgebiet \mathcal{R} durch eine konforme Abbildung Ψ_1 auf das konzentrische Kreisringgebiet

$$\mathcal{A}_0 = \{z \in \mathbb{C} : e^{-M} < |z| < 1\}$$

so abgebildet, daß der Dirichlet-Rand dem Einheitskreisrand zugeordnet wird und $\Psi_1(\infty) > 0$ gilt. Wegen

$$\omega(z, \{|z| = e^{-M}\}, \mathcal{A}_0) = -\frac{1}{M} \log |z|$$

⁷Wir orientieren uns an F. Tricomi's Notation ([41]).

und der konformen Invarianz des harmonischen Maßes folgt

$$\Psi_1(\infty) = e^{-\omega M}.$$

Man kann nun \mathcal{A}_0 durch eine konforme Abbildung Ψ_2 auf das Außengebiet zweier Intervalle $\mathcal{R}_0 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_0$ mit $E_0 = [-1, \beta] \cup [\alpha, 1]$ und $-1 < \beta < \alpha < 1$ so abbilden, daß $\Psi_1(\infty) = e^{-\omega M}$ wieder auf Unendlich abgebildet wird, und daß das Bild des Einheitskreisrandes genau das Intervall $[\alpha, 1]$ ist. Dabei ist

$$\alpha = 2 \operatorname{sn}^2(\omega M) - 1.$$

Wir verzichten an dieser Stelle auf die Konstruktion dieser Abbildung und verweisen auf N.I. Achieser, der bereits 1932 die notwendigen Rechnungen durchgeführt hat⁸ ([1]). Die Verkettung $\Psi = \Psi_2 \circ \Psi_1$ ist eine konforme Abbildung von \mathcal{R} auf \mathcal{R}_0 mit $\Psi(\infty) = \infty$, die den Dirichlet-Rand von \mathcal{R} auf das Intervall $[\alpha, 1]$ abbildet (siehe Abbildung 22 auf der nächsten Seite).

Aus dem Satz 4.23, der am Ende dieses Kapitels bewiesen wird, und den wir an dieser Stelle im Vorgriff anwenden, folgt, daß bezüglich des Gebietes \mathcal{R}_0 die Robinsche Kapazität des Intervalls $[\alpha, 1]$

$$\rho([\alpha, 1]) = \operatorname{cap}[\alpha, 1]$$

beträgt. Weiter beträgt die logarithmische Kapazität des Intervalls ([25], S. 172)

$$\operatorname{cap}[\alpha, 1] = \frac{1 - \alpha}{4}.$$

Im nächsten Bild sind das gegebene Gebiet \mathcal{R} und das Robin-äquivalente Gebiet $\mathcal{R}_0 = \Psi(\mathcal{R})$ skizziert.

⁸N.I. Achieser betrachtet das Außengebiet der beiden reellen Intervalle $[-1, \tilde{\alpha}]$ und $[\tilde{\beta}, 1]$ mit $-1 < \tilde{\alpha} < \tilde{\beta} < 1$. Die Situation, die wir hier betrachten, geht aus der von N.I. Achieser gewählten Konfiguration nach Anwendung der Transformation $z \mapsto -z$ hervor. Das heißt, es gilt $\alpha = -\tilde{\alpha}$ und $\beta = -\tilde{\beta}$. Der Wert $-\omega M$ wird bei N.I. Achieser mit ρ bezeichnet.

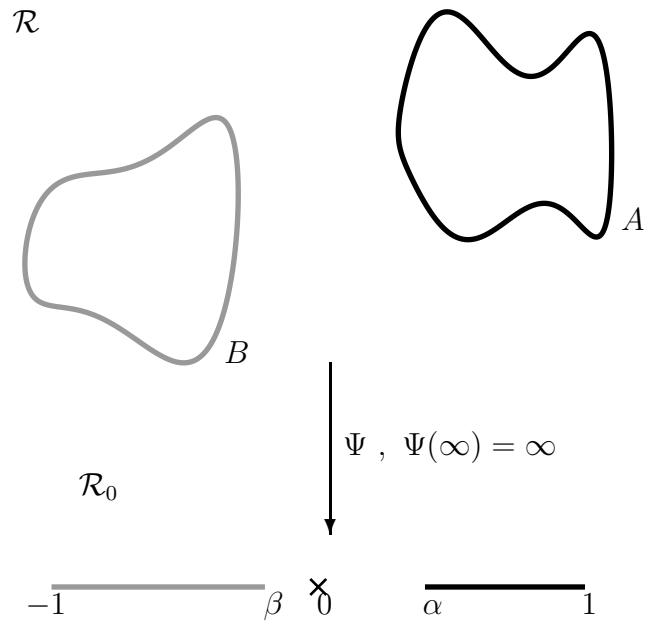


Abbildung 22

Die konforme Invarianz von $\frac{\rho(A)}{\text{cap } \partial \mathcal{R}}$ impliziert

$$\frac{\rho(A)}{\text{cap } \partial \mathcal{R}} = \frac{\rho([\alpha, 1])}{\text{cap } E_0} = \frac{1 - \alpha}{4} \cdot \frac{1}{\text{cap } E_0}.$$

Unter Verwendung von $\alpha = 2\text{sn}^2(\omega M) - 1$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{1 - \alpha}{4} &= \frac{1 - \text{sn}^2(\omega M)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \text{cn}^2 \omega M. \end{aligned}$$

N.I. Achieser zeigt, daß die logarithmische Kapazität der Vereinigung $E_0 = [-1, \beta] \cup [\alpha, 1]$ beider Intervalle

$$\text{cap}(E_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\vartheta_4(0)\vartheta_3(0)}{\vartheta_4\left(\frac{\omega}{2}\right)\vartheta_3\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right)^2$$

beträgt ([2], S. 317)⁹.

Nach Einsetzen dieser Daten erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\rho(A)}{\operatorname{cap} \partial \mathcal{R}} &= 2 \left(\frac{\vartheta_3\left(\frac{\omega}{2}\right) \vartheta_4\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\vartheta_3(0) \vartheta_4(0)} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{cn}^2(\omega M) \\ &= \left(\frac{\vartheta_3\left(\frac{\omega}{2}\right) \vartheta_4\left(\frac{\omega}{2}\right) \vartheta_2\left(\frac{\omega}{2}\right) \vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0) \vartheta_4(0) \vartheta_4\left(\frac{\omega}{2}\right) \vartheta_2(0)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\vartheta_2\left(\frac{\omega}{2}\right) \vartheta_3\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\vartheta_2(0) \vartheta_3(0)} \right)^2, \end{aligned}$$

und die Behauptung ist bewiesen. \square

Der gerade bewiesene Satz erlaubt es, die Robinsche Kapazität zu berechnen, sobald der konforme Modul des Ringgebietes \mathcal{R} , das harmonische Maß $\omega(\infty, B, \mathcal{R})$ und die logarithmische Kapazität des gesamten Randes von \mathcal{R} bekannt sind. Die ersten beiden Daten können in hervorragender Genauigkeit mit Hilfe eines von K. Menke gefundenen und untersuchten Extrempunkt-Systems bestimmt werden ([31], [32]). Die Bestimmung von $\operatorname{cap} \partial \mathcal{R}$ kann (mit geringerer Genauigkeit bei gleichem Rechenaufwand) mit Fekete-Punkten oder mit Leja-Punkten geschehen (siehe Anhang A). Das interessante Problem der numerischen Berechnung der erforderlichen Größen soll an dieser Stelle jedoch nicht weiter verfolgt werden.

4.2 Extremale Distanz

Zwischen der Lösung potentialtheoretischer Randwertprobleme und der konformen Geometrie des zugrundeliegenden Gebietes besteht ein fundamentaler Zusammenhang, der zuerst von L.V. Ahlfors und A. Beurling systematisch untersucht wurde ([5], S. 65 ff., S. 78 ff.). Zum Beispiel sind die logarithmische Kapazität $\operatorname{cap} A$ eines Kompaktums $A \subset \mathbb{C}$ und die noch zu definierende extremale Länge $d_{\tilde{\Omega}}(A, C_r)$ der Familie aller rektifizierbaren Bögen, die A mit „großen Kreislinien“ C_r verbinden, und im Außengebiet $\tilde{\Omega}$ von A verlaufen,

⁹N.I. Achieser verwendet Jacobis originale Notation. Dabei ist $\Theta_1(\omega M) = \vartheta_3\left(\frac{\omega}{2}\right)$ und $\Theta(\omega M) = \vartheta_4\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ([41], S. 305). Außerdem gilt $\rho = -\omega M$.

durch die Gleichung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi \cdot d_{\tilde{\Omega}}(A, C_r) - \log r = -\log \operatorname{cap}(A)$$

miteinander verknüpft. Analog dazu besteht zwischen der Robinschen Kapazität $\rho(A)$ und der extremalen Länge $d_{\Omega}(A, C_r)$ der Familie aller rektifizierbaren Bögen, die den Dirichlet-Rand A eines Gebietes Ω , das Unendlich enthält, mit „großen Kreislinien“ verbinden und dabei ganz in Ω liegen, der Zusammenhang

$$\lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi \cdot d_{\Omega}(A, C_r) - \log r = -\log \rho(A).$$

Beiden Formeln beweist M. Ohtsuka ([34], S. 238 ff.). Bereits früher verwendet L.V. Ahlfors die Robinsche Funktion zum Nachweis der konformen Invarianz der von ihm eingeführten *reduzierten extremalen Distanz* ([5], S. 78 ff.), zumindest für den Fall, daß Ω glatt berandet ist, und A die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Bögen ist. Freilich verwendet L.V. Ahlfors nicht die Bezeichnung *Robinsche Funktion*. Er definiert die reduzierten extremale Distanz als die Differenz

$$\delta(\infty, A) = \left(\lim_{r \rightarrow \infty} d_{\Omega}(A, C_r) - \frac{1}{2\pi} \cdot \log r \right) - \left(\lim_{r \rightarrow \infty} d_{\Omega}(\partial\Omega, C_r) - \frac{1}{2\pi} \cdot \log r \right).$$

Mit den beiden oben zitierten Formeln folgt sofort

$$\delta(\infty, A) = \frac{1}{2\pi} \cdot (-\log \rho(A) + \log \operatorname{cap} \partial\Omega),$$

da Ω natürlich das Außengebiet von $\partial\Omega$ ist. Nach einer einfachen Umformung erhalten wir

$$e^{-2\pi \cdot \delta(\infty, A)} = \frac{\rho(A)}{\operatorname{cap} \partial\Omega}.$$

Es überrascht nicht, daß auch die konforme Invariante $\frac{\rho(A)}{\operatorname{cap} \partial\Omega}$, die uns hier interessiert, bereits in den *Conformal Invariants* untersucht wurde.

Da die Argumentation sowohl bei L.V. Ahlfors als auch bei M. Ohtsuka sehr knapp gehalten ist, wird im folgenden ein expliziter Beweis der beiden oben zitierten Formeln geführt. Zunächst setzen wir voraus, daß $\partial\Omega$ von Dini-glatten Jordan-Kurven berandet wird. Anschließend weisen wir nach, daß die Gleichung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi \cdot d_{\Omega}(A, C_r) - \log r = -\log \rho(A)$$

auch in einem nicht glatt berandeten Gebiet Bestand hat. Dies ist nicht offensichtlich, zumal L.V. Ahlfors Beweis der konformen Invarianz der reduzierten extremalen Länge auf dem Transportverhalten der Robinschen Funktion bei konformer Abbildung basiert und somit Gatte der Ränder erfordert.

P. Duren und J. Pfaltzgraff verwenden die oben angefuhrten Formeln zur Untersuchung der Robinschen Kapazität in [13]. Insbesondere nutzen sie das Längen-Flächen-Prinzip ([5], S. 50 ff.) zum Nachweis, daß die logarithmische Kapazität des Dirichlet-Randes stets größer oder gleich seiner Robinschen Kapazität ist.

Im folgenden orientieren wir uns an L.V. Ahlfors' Untersuchungen der extremalen Distanz ([5], S. 65 ff. und S. 78 ff.): Es sei $(C_r)_{r>r_0}$ die Familie aller Kreislinien mit Radius $r > r_0$ mit einem solchen r_0 , daß alle C_r vollständig in Ω liegen. Weiter bezeichne \mathcal{G} die Familie aller rektifizierbaren Bögen, die vollständig (höchstens mit Ausnahme ihrer Randpunkte) in Ω verlaufen und A mit C_r verbinden. Es sei

$$d_{\Omega}(A, C_r) = \sup_{\rho} \frac{(L_{\rho}(\mathcal{G}))^2}{A_{\rho}(\Omega)}$$

die extremale Länge von \mathcal{G} , wobei das Supremum über alle positiven, Borel-meßbaren Funktionen in Ω mit $0 < A_{\rho}(\Omega) < \infty$ zu bilden ist, und

$$L_{\rho}(\mathcal{G}) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{G}} \int_{\Gamma} \rho(z) |dz|$$

sowie

$$A_{\rho}(\Omega) = \iint_{\Omega} \rho^2(x + iy) d(x, y)$$

gelten. Schließlich bezeichne $\tilde{\mathcal{G}}$ die größere Familie aller rektifizierbaren Bögen, die höchstens mit Ausnahme ihrer Randpunkte im Außengebiet $\tilde{\Omega}$ von A verlaufen, und

$$d_{\tilde{\Omega}}(A, C_r) = \sup_{\rho} \frac{(L_{\rho}(\tilde{\mathcal{G}}))^2}{A_{\rho}(\tilde{\Omega})}$$

sei die extremale Länge von $\tilde{\mathcal{G}}$, wobei das Supremum über alle positiven, Borel-meßbaren Funktionen in $\tilde{\Omega}$ mit $0 < A_{\rho}(\tilde{\Omega}) < \infty$ zu bilden ist, und

$$L_{\rho}(\tilde{\mathcal{G}}) = \inf_{\Gamma \in \tilde{\mathcal{G}}} \int_{\Gamma} \rho(z) |dz|$$

sowie

$$A_\rho(\tilde{\Omega}) = \iint_{\tilde{\Omega}} \rho^2(x + iy) d(x, y)$$

gelten. Wir werden jede der hier auftretenden, positiven, Borel-meßbaren Funktion $\rho(x + iy)$ als **Metrik** bezeichnen.

Hilfssatz 4.10 *Für jedes $r > r_0$ gilt*

$$d_\Omega(A, C_r) \geq d_{\tilde{\Omega}}(A, C_r).$$

Beweis: Die Aussage des Hilfssatzes ist eine direkte Anwendung des sogenannten Vergleichsprinzips ([5] S. 53 f.): Es sei $\tilde{\rho}$ eine beliebige Metrik auf $\tilde{\Omega}$. Sie induziert durch $\rho(z) = \tilde{\rho}(z)$ für $z \in \Omega$ eine Metrik ρ in Ω . Da die Familie aller Kurven $\tilde{\mathcal{G}}$, die A und C_r in $\tilde{\Omega}$ verbinden, jede Kurve enthält, die in der Familie \mathcal{G} aller Kurven liegt, die A und C_r in Ω verbinden, gilt

$$L_\rho(\mathcal{G}) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{G}} \int_\Gamma \rho(z) |dz| \geq \inf_{\Gamma \in \tilde{\mathcal{G}}} \int_\Gamma \tilde{\rho}(z) |dz| = L_{\tilde{\rho}}(\tilde{\mathcal{G}}).$$

Da $\tilde{\rho}$ keine negativen Werte annimmt, und da $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ ist, gilt weiter

$$A_\rho(\Omega) = A_{\tilde{\rho}}(\Omega) \leq A_{\tilde{\rho}}(\tilde{\Omega}),$$

und es folgt

$$\frac{(L_{\tilde{\rho}}(\tilde{\mathcal{G}}))^2}{A_{\tilde{\rho}}(\tilde{\Omega})} \leq \frac{(L_\rho(\mathcal{G}))^2}{A_\rho(\Omega)} \leq d_\Omega(A, C_r).$$

Da diese Ungleichung bei Bildung des Supremums der linken Seite über alle Metriken in $\tilde{\Omega}$ bestehen bleibt, folgt die Behauptung. \square

Die entscheidende Idee beim Nachweis des zu Beginn dieses Abschnittes genannten Zusammenhangs von Robinscher Kapazität und der extremalen Länge geeignet gewählter Kurvenklassen ist ein Vergleich von $d_\Omega(A, C_r)$ mit den Werten von $R(z)$ auf dem Kreis C_r . Ebenso kann das analoge Resultat für die logarithmische Kapazität durch Vergleich von $d_{\tilde{\Omega}}(A, C_r)$ mit den Werten von $G(z)$ auf C_r abgeleitet werden. Der Schlüssel zu diesem Vorgehen ist die explizite Formel für die extremale Distanz ([5], S. 65 ff.). Sie gilt unter den Glättevoraussetzungen an $\partial\Omega$, die zu Beginn des Abschnitts 2.2 formuliert wurden. Wir werden sie auf beschränkte Teilgebiete von Ω anwenden. In

der expliziten Formel für die extremale Distanz wird vorausgesetzt, daß ein beschränktes Gebiet D gegeben ist, das von endlich vielen Jordan-Kurven berandet wird. Weiter seien E_1 und E_2 disjunkte Teilmengen von ∂D . Sowohl E_1 als E_2 sei jeweils die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Teilbögen oder Teilkurven von ∂D . Mit E_1° bzw. E_2° wird das Innere von E_1 bzw. E_2 bezüglich ∂D bezeichnet, das heißt, E_1° und E_2° sind jeweils die Vereinigung endlich vieler offener Teilbögen von ∂D oder Jordan-Kurven in ∂D .

Satz 4.11 *Im Gebiet D gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion u , die das folgende Randwertproblem löst:*

1. u ist beschränkt und harmonisch in D ,
2. u ist stetig nach $\Omega \cup E_1^\circ \cup E_2^\circ$ fortsetzbar, wobei $u(z) = 0$ auf E_1° und $u(z) = 1$ auf E_2° gilt.
3. Die Normalenableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ existiert und verschwindet auf $\partial D \setminus (E_1 \cup E_2)$.

Es gilt

$$\frac{1}{d_\Omega(E_1, E_2)} = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + iy) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x + iy) \right)^2 \right] d(x, y).$$

Beweis: Siehe L.V. Ahlfors' Beweis ([5], S. 65 ff.). □

Beispiel 4.12. Für Ringgebiete mit Randkomponenten E_1 und E_2 ist die explizite Formel für die extremale Länge leicht einzusehen: In einem Kreisring der Form $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < r\}$ ist $\rho(z) = \frac{1}{|z|}$ eine extremale Metrik für die Familie aller Kurven, die die Randkomponenten verbinden ([4], S. 13). Andererseits löst $\frac{\log |z|}{\log r}$ das oben angeführte Randwertproblem. Die extremale Distanz der Randkomponenten beträgt

$$\frac{(\log r)^2}{2\pi \log r} = \frac{1}{2\pi} \log r.$$

Unter Verwendung von $\nabla \log |z| = \left(\frac{x}{|z|^2}, \frac{y}{|z|^2} \right)^\top$ und mit $z = x + iy$ lautet das Dirichlet-Integral

$$\iint_{1 < |z| < r} \frac{1}{(\log r)^2} \cdot \frac{d(x, y)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{(\log r)^2} \cdot 2\pi \log r = \frac{2\pi}{\log r}.$$

Offensichtlich gilt die Aussage des vorausgehenden Satzes in einem (normierten) Kreisring. Da jedes Ringgebiet aber einem solchen Kreisring konform äquivalent ist, folgt die Behauptung für jedes Ringgebiet aus der konformen Invarianz der extremalen Distanz und der Tatsache, daß $\frac{\log |f(z)|}{\log r}$ das Randwertproblem im vorliegenden Ringgebiet löst, wenn f die konforme Abbildung auf den äquivalenten, normierten Kreisring bezeichnet.

Von nun an gehen wir davon aus, daß der Dirichlet-Rand A die Vereinigung endlich vieler Jordan-Bögen oder Jordan-Kurven ist. Diese Voraussetzung stellt sicher, daß die explizite Formel für die extremale Distanz verwendet werden kann.

Satz 4.13 *Es gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi \cdot d_{\Omega}(A, C_r) - \log r = -\log \rho(A).$$

Beweis: Bevor die eigentliche Argumentation beginnt, sei erwähnt, daß es ein solches τ_0 gibt, daß alle Niveaulinien L_{τ} von R mit $\tau > \tau_0$ analytische Jordan-Kurven sind: Wir wählen $\eta_1 > 0$ so, daß R für $|z| > \eta_1$ die Entwicklung

$$R(z) = \log |z| - \log \rho(A) + \epsilon(z)$$

mit einer harmonischen Funktion ϵ , die in ∞ den Wert Null annimmt, besitzt. Die Funktion ϵ ist Realteil einer in $|z| > \eta_1$ holomorphen Funktion h , die in ∞ die Entwicklung

$$h(z) = it + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

mit $t \in \mathbb{R}$ besitzt. Es folgt

$$\nabla R(z) = \frac{1}{|z|^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x}(z), \frac{\partial \epsilon}{\partial y}(z) \right)^{\top},$$

also

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x}(z) \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}(z) \right)^2} &\geq \frac{1}{|z|} - \sqrt{\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x}(z) \right)^2 + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial y}(z) \right)^2} \\ &= \frac{1}{|z|} - |h'(z)|. \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{1}{|z|} - |h'(z)| = \frac{1}{|z|} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad z \rightarrow \infty$$

existiert ein $\eta_2 \geq \eta_1$ mit

$$\nabla R(z) \neq 0$$

für alle $|z| > \eta_2$. Wir vergrößern nun η_2 gegebenenfalls derart, daß

$$R(z) > \max_{\zeta \in \partial\Omega} R(\zeta)$$

für alle $|z| = \eta_2$ erfüllt ist, und wählen

$$\tau_0 = \max_{|\zeta|=\eta_2} R(\zeta).$$

Die Niveaumenge L_τ liegt für alle $\tau > \tau_0$ im Gebiet $|z| > \eta_2$, da auf dem Rand des Gebietes $\Omega \cap \{|z| < \eta_2\}$ stets $R(z) \leq \tau_0$ gilt, und ein größerer Wert $\tau > \tau_0$ von R in diesem Gebiet das Maximumprinzip verletzen würde. Somit verschwindet der Gradient von R in keinem Punkt der Niveaumenge L_τ . Um jeden Punkt z der Niveaumenge L_τ existiert somit eine Kreisscheibe $K_\delta(z)$ mit Radius δ , in der R der Realteil einer holomorphen Abbildung g ist. Wegen

$$g'(z) = \frac{\partial R}{\partial x}(z) - i \frac{\partial R}{\partial y}(z) \neq 0$$

ist g in einem Kreis $K_{\delta'}(z)$ um z mit $0 < \delta' \leq \delta$ konform. Somit ist die Niveaumenge L_τ lokal um jeden Punkt z das Bild einer Strecke mit konstantem Realteil

$$S_{\epsilon,z} =]R(z) - i\epsilon, R(z) + i\epsilon[, \quad \epsilon > 0$$

unter der konformen Abbildung g^{-1} und somit ein Jordan-Bogen. Für jedes $z \in L_\tau$ sei γ_z eine Parameterdarstellung des analytischen Jordan-Bogens $g^{-1}(S_{\epsilon,z})$ über einem reellen Intervall. Da L_τ eine kompakte Menge ist, gibt es endlich viele Punkte z_1, \dots, z_n derart, daß die Bilder der lokalen Parameterdarstellungen $\gamma_{z_1}, \dots, \gamma_{z_n}$ die Niveaumenge überdecken. Daher ist L_τ Träger einer analytischen Kurve oder eines analytischen Bogens. Die Menge L_τ ist beschränkt und besitzt einen positiven Abstand zu $\partial\Omega$. Daher kann die von ihr getragene Kurve bzw. der von ihr getragene Bogen weder den Punkt ∞ noch den Rand des Gebietes Ω erreichen. Da diese Kurve bzw. dieser Bogen wegen $\nabla R(z) \neq 0$ für alle $z \in L_\tau$ weder Endpunkte noch Doppelpunkte in Ω

besitzt, handelt es sich um eine analytische Jordan-Kurve.

Wir modifizieren nun L.V. Ahlfors Beweis ([5], S. 79) geringfügig:

Es sei r so groß gewählt, daß das Minimum von R auf der Kreislinie $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ größer als τ_0 ist. Dieses Minimum laute α , und β sei das Maximum von R auf C_r .

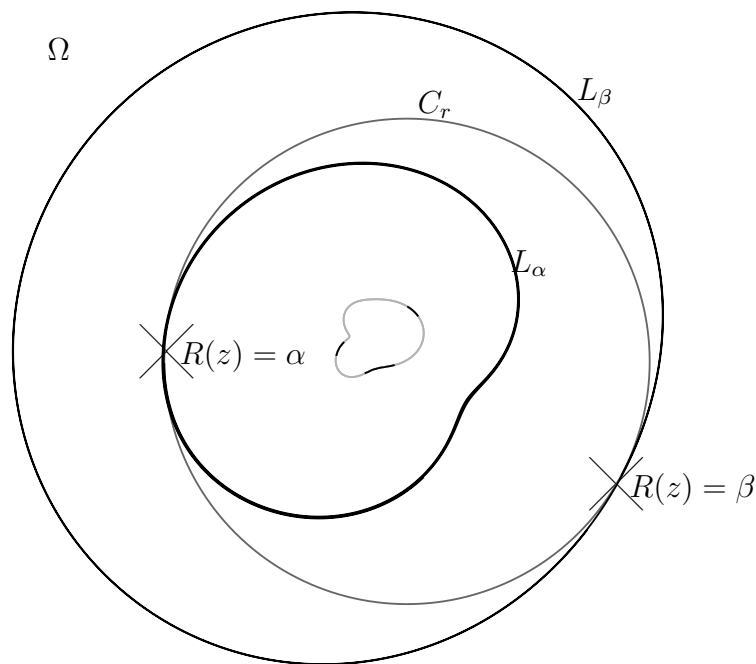


Abbildung 23

Das Bild 23 zeigt den Kreis C_r (hier mit $r = 5.2$) sowie die Niveaulinien L_α und L_β . Im vorliegenden Beispiel beträgt $\alpha \approx 36.9$ und $\beta \approx 55.6$.

Das Vergleichsprinzip ([5], S. 53 f.) ergibt für die extremalen Distanzen von A zu L_α und von A zu C_r sowie von A zu L_β im Gebiet Ω die Abschätzung

$$d_\Omega(L_\alpha, A) \leq d_\Omega(C_r, A) \leq d_\Omega(L_\beta, A).$$

Es sei $D_\alpha = \Omega \cap \text{Int } L_\alpha$ und $D_\beta = \Omega \cap \text{Int } L_\beta$. Wir beweisen nun

$$d_{D_\alpha}(L_\alpha, A) = d_\Omega(L_\alpha, A)$$

und

$$d_{D_\beta}(L_\beta, A) = d_\Omega(L_\beta, A) :$$

Zunächst folgt aus $D_\alpha \subset \Omega$ mit dem Vergleichsprinzip

$$d_{D_\alpha}(L_\alpha, A) \geq d_\Omega(L_\alpha, A)$$

(vergleiche Hilfssatz 4.10). Der Nachweis der entgegengesetzten Ungleichung basiert darauf, daß bei der Bildung des Supremums $d_\Omega(L_\alpha, A)$ nur Metriken berücksichtigt werden müssen, die in $\Omega \setminus D_\alpha$ den Wert 0 annehmen:

Dazu betrachten wir die Menge \mathcal{G} aller rektifizierbaren Bögen, die höchstens mit Ausnahme ihrer Endpunkte ganz in Ω verlaufen, und A mit L_α verbinden. Außerdem sei \mathcal{G}_0 die Menge aller rektifizierbaren Bögen, die bis auf ihre Endpunkte ganz in D_α verlaufen, und A mit L_α verbinden. Es sei $\Gamma \in \mathcal{G}$. Ist γ eine Parameterdarstellung von Γ über dem Intervall $[0, 1]$, so gibt es ein

$$t_0 = \min\{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in |L_\alpha|\}.$$

Der durch die Restriktion $\gamma|_{[0, t_0]}$ parametrisierte Bogen Γ_0 liegt ebenfalls in der Familie \mathcal{G} . Wie leicht zu sehen ist, verläuft er bis auf seine Endpunkte vollständig im Gebiet D_α und gehört deshalb auch der Familie \mathcal{G}_0 an.

Für jede Metrik ρ in Ω gilt nun

$$\int_\Gamma \rho(z) |dz| \geq \int_{\Gamma_0} \rho(z) |dz| \geq \inf_{\Lambda \in \mathcal{G}_0} \int_\Lambda \rho(z) |dz| = L_\rho(\mathcal{G}_0).$$

Nach Bildung des Infimums über alle $\Gamma \in \mathcal{G}$ auf der linken Seite folgt

$$L_\rho(\mathcal{G}) \geq L_\rho(\mathcal{G}_0).$$

Da andererseits $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ gilt, besteht ebenfalls die Ungleichung

$$L_\rho(\mathcal{G}) \leq L_\rho(\mathcal{G}_0).$$

Dies impliziert

$$\frac{(L_\rho(\mathcal{G}))^2}{A_\rho(\Omega)} = \frac{(L_\rho(\mathcal{G}_0))^2}{A_\rho(\Omega)}$$

für jede Metrik ρ in Ω .

Nun sei $\epsilon > 0$ vorgegeben, und ρ_0 sei eine Metrik in D_α , für die

$$\frac{(L_{\rho_0}(\mathcal{G}_0))^2}{A_{\rho_0}(\Omega)} > d_{D_\alpha}(L_\alpha, A) - \epsilon$$

gilt. Da ρ_0 durch $\rho_0(z) = 0$ für $z \in \Omega \setminus D_\alpha$ zu einer Metrik auf Ω fortgesetzt werden kann¹⁰, gilt

$$\begin{aligned} d_\Omega(L_\alpha, A) &\geq \frac{(L_{\rho_0}(\mathcal{G}))^2}{A_{\rho_0}(\Omega)} \\ &= \frac{(L_{\rho_0}(\mathcal{G}_0))^2}{A_{\rho_0}(\Omega)} \\ &= \frac{(L_{\rho_0}(\mathcal{G}_0))^2}{A_{\rho_0}(D_\alpha)} \\ &> d_{D_\alpha}(L_\alpha, A) - \epsilon. \end{aligned}$$

Da ϵ beliebig vorgegeben werden kann, folgt

$$d_\Omega(L_\alpha, A) \geq d_{D_\alpha}(L_\alpha, A),$$

und wir haben die Gleichheit beider Ausdrücke bewiesen.

Der Beweis der Gleichung

$$d_{D_\beta}(L_\beta, A) = d_\Omega(L_\beta, A)$$

verläuft genauso und wird daher nicht explizit durchgeführt.

Im Gebiet D_α löst die Funktion $\frac{1}{\alpha}R(z)$ das Randwertproblem aus Satz 4.11. Somit gilt

$$\frac{1}{d_{D_\alpha}(L_\alpha, A)} = \frac{1}{\alpha^2} \iint_{D_\alpha} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x}(x + iy) \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}(x + iy) \right)^2 \right] d(x, y).$$

¹⁰Wir verzichten an dieser Stelle auf den rein technischen Nachweis der Borel-meßbarkeit der Fortsetzung von ρ_0 .

Es sei $z = x + iy$. Wir wenden nun den Satz von Gauß in der Ebene auf das Feld

$$\begin{pmatrix} p(x, y) \\ q(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R(z) \cdot \frac{\partial R}{\partial y}(z), R(z) \cdot \frac{\partial R}{\partial x}(z) \end{pmatrix}^\top$$

an. Dabei verwenden wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) &= \left(\frac{\partial R}{\partial x}(z) \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}(z) \right)^2 + R(z) \cdot \Delta R(z) = \left(\frac{\partial R}{\partial x}(z) \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}(z) \right)^2 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} &\int_{\partial D_\alpha} p(x, y) dx + q(x, y) dy \\ &= \int_{\partial D_\alpha} R(x + iy) \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial x}(x + iy) dy - \frac{\partial R}{\partial y}(x + iy) dx \right) \\ &= \int_{\partial D_\alpha} R(z) \cdot \frac{\partial R}{\partial n}(z) |dz|. \end{aligned}$$

Anwendung des Satzes von Gauß auf die Darstellung von $d_{D_\alpha}(L_\alpha, A)$ mittels Dirichlet-Integral ergibt

$$\frac{1}{d_{D_\alpha}(L_\alpha, A)} = \frac{1}{\alpha^2} \left(\int_{\partial \Omega} R(z) \cdot \frac{\partial R}{\partial n}(z) |dz| + \int_{L_\alpha} R(z) \cdot \frac{\partial R}{\partial n}(z) |dz| \right).$$

Aufgrund des Randverhaltens von R verschwindet das Integral

$$\int_{\partial \Omega} R(z) \cdot \frac{\partial R}{\partial n}(z) |dz|,$$

und es verbleibt lediglich das Integral über die Niveaulinie. Auf dieser nimmt $R(z)$ den konstanten Wert α an, und wir erhalten somit

$$\frac{1}{d_{D_\alpha}(L_\alpha, A)} = \frac{1}{\alpha} \int_{L_\alpha} \frac{\partial R}{\partial n}(z) |dz|.$$

Da $u(z) = R(z) - \log |z|$ für $|z| > \eta_1$ harmonisch ist, existiert eine dort holomorphe Funktion f mit $\operatorname{Re} f = u$. Nun gilt

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z) = \frac{\partial R}{\partial x}(z) - i \frac{\partial R}{\partial y}(z) - \frac{1}{z},$$

und somit, da die Niveaulinie L_α ganz in $|z| > \eta_1$ verläuft,

$$\begin{aligned}
 & \int_{L_\alpha} \frac{\partial R}{\partial n}(z) |dz| \\
 &= \int_{L_\alpha} \frac{\partial R}{\partial x}(x+iy) dy - \frac{\partial R}{\partial y}(x+iy) dx \\
 &= \int_{L_\alpha} \frac{\partial u}{\partial x}(x+iy) dy - \frac{\partial u}{\partial y}(x+iy) dx + \int_{L_\alpha} \operatorname{Re} \frac{1}{z} dy + \operatorname{Im} \frac{1}{z} dx \\
 &= \operatorname{Im} \int_{L_\alpha} f'(z) dz + \operatorname{Im} \int_{L_\alpha} \frac{1}{z} dz \\
 &= 2\pi,
 \end{aligned}$$

wobei $z = x + iy$ ist. Insgesamt folgt

$$d_\Omega(L_\alpha, A) = d_{D_\alpha}(L_\alpha, A) = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

Analog erhalten wir

$$d_\Omega(L_\beta, A) = d_{D_\beta}(L_\beta, A) = \frac{\beta}{2\pi},$$

und somit

$$\frac{\alpha}{2\pi} \leq d(C_r, A) \leq \frac{\beta}{2\pi}.$$

Mit Hilfe der Darstellung

$$R(z) = \log |z| - \log \rho(A) + \epsilon(z),$$

die in $|z| > \eta_1$ gilt, können nun $\alpha = \alpha(r)$ und $\beta = \beta(r)$ in Abhängigkeit von r entwickelt werden. Hierbei gilt $\epsilon(z) = O\left(\frac{1}{r}\right)$, da ϵ Realteil einer in ∞ holomorphen Funktion h mit $h(z) = it + O\left(\frac{1}{z}\right)$ für $z \rightarrow \infty$ ist, wie bereits erörtert wurde. Da $\alpha(r)$ und $\beta(r)$ Werte von R auf dem Kreis C_r mit Radius r sind, gilt

$$\alpha(r) = \log r - \log \rho(A) + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

und

$$\beta(r) = \log r - \log \rho(A) + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

jeweils für $r \rightarrow \infty$. Diese Entwicklungen implizieren nun

$$2\pi \cdot d_{\Omega}(C_r, A) - \log r = -\log \rho(A) + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Die Behauptung folgt nun nach Grenzübergang. \square

Satz 4.14 *Es gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi \cdot d_{\tilde{\Omega}}(C_r, A) - \log r = -\log \text{cap} A.$$

Beweis: Der Beweis erfolgt in völliger Analogie zum vorhergehenden Satz. Anstelle der Robinschen Funktion im Gebiet Ω mit Dirichlet-Rand A und Pol in ∞ ist die Greensche Funktion mit Pol in ∞ im Außengebiet $\tilde{\Omega}$ von A zu verwenden. \square

Satz 4.15 *Es sei $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet mit $\infty \in \Omega$, das von endlich vielen Dini-glatte Jordan-Kurven berandet wird, und $A \subset \Omega$ sei die Vereinigung endlich vieler Jordan-Bögen oder Jordan-Kurven in $\partial\Omega$. Dann gilt*

$$\rho(A) \leq \text{cap} A.$$

Beweis: Für alle hinreichend großen r gilt gemäß Hilfssatz 4.10

$$2\pi \cdot d_{\Omega}(C_r, A) - \log r \geq 2\pi \cdot d_{\tilde{\Omega}}(C_r, A) - \log r.$$

Grenzübergang und Anwendung der beiden vorausgehenden Sätze ergibt

$$-\log \rho(A) \geq -\log \text{cap} A,$$

und somit folgt die Behauptung. \square

Die hier nachgewiesene Ungleichung zwischen Robinscher- und logarithmischer Kapazität folgt auch mit den von P. Duren und M. Schiffer entwickelten Methoden ([15], [16]), die auf der Schifferschen Variationsformel basieren, zusammen mit der Existenz eines Minimalgebietes, wie an späterer Stelle erläutert wird. Einen weiteren Beweis dieser Ungleichung erbringen P. Duren und M. Schiffer, indem sie unter Verwendung des Hopfschen Maximumprinzips nachweisen, daß die Robinsche Funktion die Greensche Funktion in Ω

mit Pol in ∞ majorisiert ([15], S. 268). Für die hier gewählte Vorgehensweise, die von P. Duren und J. Pfaltzgraff vorgeschlagen wird ([13]), spricht, daß der klassische Zusammenhang zwischen harmonischen Funktionen, Energieminimierung¹¹ und geometrischer Funktionentheorie in eindrucksvoller Weise zur Geltung kommt.

Abschließend zeigen wir, daß der Zusammenhang

$$(*) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi \cdot d_{\Omega}(C_r, A) - \log r = -\log \rho(A)$$

auch dann besteht, wenn das Gebiet Ω nicht von Dini-glatten Jordan-Kurven berandet wird. Für den Rest dieses Abschnittes sei Ω also ein endlich oft zusammenhängendes Gebiet und A die Vereinigung endlich vieler, abgeschlossener, nicht ausgearteter Kontinua. Wenn die Gleichung (*) bewiesen ist, folgt aus der Invarianz ihrer rechten Seite sofort, daß auch ihre linke Seite invariant unter jeder normierten konformen Abbildung $\Phi \in \Sigma(\Omega)$ ist. Daß die beide Seiten der Gleichung (*) auch dann übereinstimmen, wenn das gemischte Randwertproblem nicht lösbar ist, kann andererseits nicht unmittelbar aus der konformen Invarianz der extremalen Länge geschlossen werden: Letztere ergibt zunächst nur, daß

$$d_{\Omega}(C_r, A) = d_{\Phi(\Omega)}(\Phi(C_r), \Phi(A))$$

gilt. Der Beweis des anschließenden Satzes basiert auf einem Vergleich der Zahl

$d_{\Phi(\Omega)}(\Phi(C_r), \Phi(A))$ mit der interessierenden Größe $d_{\Phi(\Omega)}(C_r, \Phi(A))$.

Satz 4.16 *Das Gebiet Ω' sei endlich oft zusammenhängend und enthalte den Punkt ∞ . Weiter sei $A' \subset \partial\Omega'$ eine abgeschlossene Menge, deren Zusammenhangskomponenten endlich viele, nichtausgeartete Kontinua sind. Dann gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi \cdot d_{\Omega'}(A', C_r) - \log r = -\log \rho(A').$$

Beweis: Es sei Ψ eine konforme Abbildung, die ∞ festhält und Ω' auf das Gebiet Ω abbildet, das von analytischen Jordan-Kurven berandet wird. Außerdem normieren wir Ψ so, daß Ψ in ∞ die Entwicklung

$$\Psi(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots$$

¹¹Physikalisch gedeutet, stellt das Dirichlet-Integral die Gesamtenergie eines Feldes dar.

besitzt. Der Menge A' sei durch Ψ die Menge A zugeordnet. Es ist leicht zu sehen, daß letztere die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Jordan-Bögen oder Jordan-Kurven in $\partial\Omega$ ist. Wegen der Normierung von Ψ gilt $\text{cap}\partial\Omega = \text{cap}\partial\Omega'$, und wegen der konformen Invarianz von $\frac{\rho(A)}{\text{cap}\partial\Omega}$ folgt $\rho(A) = \rho(A')$. Die zu beweisende Aussage ist somit äquivalent zu

$$\lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi \cdot d_{\Omega'}(A', C_r) - \log r = -\log \rho(A).$$

Es sei R die Robinsche Funktion in Ω . Analog dem Beweis von Satz 4.13 sei α das Minimum und β das Maximum der Robinschen Funktion $R' = R \circ \Psi$ in Ω' auf dem Kreis $C_r \subset \Omega'$. Ist r hinreichend groß gewählt, so sind die Niveaulinien L_α und L_β von R' analytische Jordan-Kurven. Dies folgt mit der gleichen Argumentation wie im Satz 4.13. Wieder liegt L_α ganz im Abschluß des Innengebietes und L_β ganz im Abschluß des Außengebietes von C_r , und das Vergleichsprinzip ([5], S. 53 f.) impliziert für die extremalen Distanzen von A' zu C_r , L_α und L_β die Abschätzung

$$d_{\Omega'}(L_\alpha, A') \leq d_{\Omega'}(C_r, A') \leq d_{\Omega'}(L_\beta, A').$$

Nun sind die extremalen Distanzen $d_{\Omega'}(L_\alpha, A')$ und $d_{\Omega'}(L_\beta, A')$ konforme Invarianten, d.h., es gilt

$$d_{\Omega'}(L_\alpha, A') = d_\Omega(\Psi(L_\alpha), A)$$

sowie

$$d_{\Omega'}(L_\beta, A') = d_\Omega(\Psi(L_\beta), A).$$

Die glatten Jordan-Kurven $\Psi(L_\alpha)$ und $\Psi(L_\beta)$ sind Niveaulinien der Robinschen Funktion R in Ω , auf denen R die Werte α bzw. β annimmt. Die Berechnungen im Satz 4.13 zeigen, daß

$$d_\Omega(\Psi(L_\alpha), A) = \frac{\alpha}{2\pi} \quad \text{für } z \in \Psi(L_\alpha)$$

und

$$d_\Omega(\Psi(L_\beta), A) = \frac{\beta}{2\pi} \quad \text{für } z \in \Psi(L_\beta)$$

gelten, d.h., wir erhalten die Abschätzung

$$\frac{\alpha}{2\pi} \leq d_{\Omega'}(C_r, A') \leq \frac{\beta}{2\pi}.$$

Um $z = \infty$ besteht die Entwicklung

$$R'(z) = \log |z| - \log \rho(A) + \epsilon(z)$$

mit einer Funktion ϵ , die in einer Umgebung von ∞ harmonisch ist und in ∞ den Wert 0 annimmt. Schließlich folgen für $\alpha = \alpha(r)$ und $\beta = \beta(r)$ die Entwicklungen

$$\alpha(r) = \log r - \log \rho(A) + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

und

$$\beta(r) = \log r - \log \rho(A) + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

jeweils für $r \rightarrow \infty$, da $\alpha(r)$ und $\beta(r)$ Funktionswerte der Robinschen Funktion R' auf dem Kreis C_r mit Radius r sind. Der Rest verläuft nun identisch zum Beweis von Satz 4.13 \square

Es sei noch erwähnt, daß der letzte Satz garantiert, daß in einem endlich oft zusammenhängenden Gebiet Ω' , das ∞ enthält, stets

$$\rho(A') \leq \text{cap } A'$$

gilt, wobei A' die Vereinigung endlich vieler, abgeschlossener, nichtausgearteter Kontinua in $\partial\Omega'$ ist. Dies folgt aus dem letzten Satz zusammen mit Satz 4.15.

4.3 Minimale logarithmische Kapazität

In diesem Abschnitt sei Ω wieder ein endlich oft zusammenhängendes Gebiet, das den Punkt ∞ enthält. Wir stellen keine weiteren Forderungen an die Glätte von $\partial\Omega$. Die Menge $A \subset \partial\Omega$ sei die Vereinigung endlich vieler, abgeschlossener, nichtausgearteter Kontinua. Da wir nicht davon ausgehen, daß Ω glatte Ränder besitzt, ist die erweiterte Definition der Robinschen Funktion und der Robinschen Kapazität, die zu Beginn dieses Kapitels formuliert wurde, zugrunde zu legen.

Das Hauptinteresse der aktuellen mathematischen Untersuchungen zur Robinschen Funktion beruht auf folgendem Variationsproblem: Wie zuvor, sei

$$\Sigma(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, f \text{ ist schlicht in } \Omega, f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots \right\}$$

die Familie aller in Ω schlichten Funktionen, die in ∞ die angegebene Normierung aufweisen. Zwar ist die logarithmische Kapazität des gesamten Randes $\partial\Omega$ invariant unter allen Abbildungen in der Familie $\Sigma(\Omega)$, doch trifft dies nicht für echte Teilmengen $A \subset \partial\Omega$ zu. Hingegen ist die Robinsche Kapazität $\rho(A)$ eine Invariante unter allen Abbildungen in $\Sigma(\Omega)$.

Gesucht ist nun

$$\inf_{f \in \Sigma(\Omega)} \text{cap } f(A),$$

also die größte untere Schranke der logarithmischen Kapazität von $f(A)$. Dabei bezeichnet $f(A)$ die Menge aller Häufungspunkte von Folgen $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$, wobei jede Folge $((z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in Ω mit Grenzwert in A ist.

Das wichtigste Ergebnis der aktuellen Forschung zur Robinschen Kapazität ist, daß unter den gegebenen Voraussetzungen

$$\inf_{f \in \Sigma(\Omega)} \text{cap } f(A) = \min_{f \in \Sigma(\Omega)} \text{cap } f(A) = \rho(A)$$

gilt.

Dieses Problem der minimalen Verzerrung der logarithmischen Kapazität wurde von M.M. Schiffer 1946 zum ersten Mal für einen Teilbogen A_0 des Einheitskreises untersucht ([40]). Er bewies

$$\min_{f \in \Sigma} \text{cap } f(A_0) = \sin^2 \frac{\alpha}{4},$$

wobei $\Sigma = \Sigma(\Delta)$ ist. Die Zahl α ist die Bogenlänge des Teilbogens $A_0 \subset \partial\mathbb{D}$. Die minimierende Funktion f_0 ist nicht eindeutig bestimmt. Ein Beispiel ist durch $f_0(z) = z + \frac{1}{z}$ gegeben.

Später bemerkte Ch. Pommerenke, daß das Minimum $\sin^2 \frac{\alpha}{4}$ genau das Quadrat der logarithmischen Kapazität $\text{cap } A = \sin^2 \frac{\alpha}{4}$ des Teilbogens A von $\partial\mathbb{D}$ ist, und bewies 1968 unter Verwendung der Golusinschen Ungleichungen, daß für beliebige abgeschlossene Teilmengen A des Einheitskreisrandes stets

$$\text{cap}(f(A)) \geq (\text{cap } A)^2$$

gilt ([37]). Wiederum ist f hierbei eine beliebige Abbildung der Klasse Σ .

Die neueren Arbeiten von P. Duren, M.M. Schiffer, J. Pfaltzgraff, R. Thurman und anderen sind der Fragestellung der minimalen Verzerrung der logarithmischen Kapazität in der oben angeführten, allgemeinen Situation gewidmet. Das Problem wird prinzipiell folgendermaßen behandelt:

1. Unter Verwendung der Schifferschen Variationsformel wird ein notwendiges Kriterium dafür bewiesen, daß $f(\Omega)$ ein Minimalgebiet für die Größe $\text{cap } f(A)$ ist. Genauer ist es notwendig für Minimalität, daß alle Komponenten von $f(\partial\Omega \setminus A)$ glatte Jordan-Bögen sind, auf denen die Greensche Funktion im Außengebiet von $f(A)$ verschwindende Normalenableitung besitzt. Anders ausgedrückt, ist die Greensche Funktion im Außengebiet von $f(A)$ im Minimalgebiet die Robinsche Funktion von $f(\Omega)$ mit Dirichlet-Rand $f(A)$.
2. Anschließend ist zu beweisen, daß ein Minimalgebiet existiert. Dies hat sich als unerwartet schwierig erwiesen: Zwar ist es nicht schwer, eine Minimalfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schlichter Abbildungen von Ω zu konstruieren, die lokal gleichmäßig gegen eine schlichte Abbildung f_0 konvergieren, jedoch ist von vornherein nicht klar, ob $\text{cap } f_0(A) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{cap } f_n(A)$ gilt.

Die gerade geschilderte Methode wurde von P. Schiffer und M. Duren Anfang der 90er Jahre des letzten Jahrhunderts entwickelt. R. Thurman und M.D. O'Neill haben schließlich den Beweis für den problematischen zweiten Punkt vollendet ([35]).

In vielen wichtigen Fällen ist das oben geschilderte Vorgehen gar nicht notwendig:

Gelingt es, zu einem gegebenen Gebiet aufgrund geometrischer Überlegungen ein Robin-äquivalentes Gebiet anzugeben, dessen Robinsche Funktion die Greensche Funktion im Außengebiet von $f(A)$ ist, so ist das Variationsproblem bereits gelöst. Es gilt nämlich

Hilfssatz 4.17 *Es sei Ω ein endlich oft zusammenhängendes Gebiet, das den Punkt ∞ enthält. Weiter sei A die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener, nichtausgearteter Kontinua. Dann gilt*

$$\inf_{f \in \Sigma(\Omega)} \text{cap } f(A) \geq \rho(A).$$

Beweis: Es sei $f \in \Sigma(\Omega)$. Das Außengebiet von $f(A)$ werde \tilde{D} bezeichnet. Da A die Vereinigung endlich vieler nichtausgearteter Kontinua ist, ist \tilde{D} endlich oft zusammenhängend und besitzt keine zu einem Punkt ausgeartete Randkomponente. Wegen der Normierung der Abbildungen in $\Sigma(\Omega)$ gilt

$$\rho(f(A)) = \rho(A).$$

Andererseits besteht die Ungleichung

$$\text{cap} f(A) = \text{cap} \partial \tilde{D} \geq \rho(f(A)),$$

wie im Anschluß an Satz 4.16 bemerkt wurde. Somit gilt

$$\text{cap} f(A) \geq \rho(A),$$

und da $f \in \Sigma(\Omega)$ beliebig gewählt werden darf, gilt diese Ungleichung auch nach Übergang zum Infimum auf der linken Seite. \square

Wenn nun zu einer gegebenen Konfiguration (Ω, A) ein Robin-äquivalentes Gebiet $\Omega_0 = f_0(\Omega)$ mit $A_0 = f_0(A)$ angegeben werden kann, das die Eigenschaft hat, daß die Greensche Funktion im Außengebiet von A_0 auf $B_0 = \partial\Omega_0 \setminus A_0$ verschwindende Normalenableitung besitzt, also gleich der Robinschen Funktion in Ω_0 mit Dirichlet-Rand A_0 ist, so folgt

$$\text{cap} f_0(A) = \rho(f_0(A)) = \rho(A).$$

Weiter folgt, daß $\inf_{f \in \Sigma(\Omega)} \text{cap} f(A)$ ein Minimum ist, und es gilt

$$\min_{f \in \Sigma(\Omega)} \text{cap} f(A) = \text{cap} f_0(A) = \rho(A),$$

denn in diesem Fall gibt es offensichtlich eine konform äquivalente Situation, in dem die untere Schranke $\rho(A)$ für $\text{cap} f(A)$ angenommen wird. Im anschließenden Abschnitt werden mehrere Beispiele solcher Minimalgebiete diskutiert.

4.4 Minimalgebiete

Leider erfüllen die typischen Minimalgebiete, die wir angeben werden, nicht die starken Voraussetzungen, unter denen wir den Existenzbeweis der Lösung

des gemischten Randwertproblems geführt haben. Insbesondere werden Jordan-Bögen als Randkomponenten von Ω auftreten. Die Existenz der Robin'schen Funktion im Sinne der Lösung eines gemischten Randwertproblems ist aber unproblematisch, da diese in den interessanten Situationen explizit vorliegt.

Die Forderung einer verschwindenden Normalenableitung auf dem Neumann-Rand B ist in der allgemeineren Situation wie folgt zu verstehen:

Wir gehen davon aus, daß in jedem Punkt des Neumann-Randes ζ ein Kreis $K_\delta(\zeta)$ mit Radius $\delta > 0$ existiert, so daß $K_\delta(\zeta) \cap \partial\Omega$ ein Dini-glatte Jordan-Bogen ist. Der Punkt $\zeta \in B$ besitzt eine oder zwei nach innen weisende Normalen $-\vec{n} \in \mathbb{R}^2$. Hierbei handelt es sich um Vektoren $-\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit

$$x \cdot \operatorname{Re}\gamma'(t_0) + y \cdot \operatorname{Im}\gamma'(t_0) = 0, \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \text{und} \quad \epsilon(x + iy) + \zeta \in \Omega$$

für alle hinreichend kleinen $\epsilon > 0$. Dabei ist γ eine Parameterdarstellung von $\partial\Omega \cap K_\delta(\zeta)$ über dem Intervall I . Für den Parameter $t_0 \in I$, gelte $\gamma(t_0) = \zeta$, und $\gamma'(t)$ sei für alle $t \in I$ von Null verschieden. Verschwindende Normalenableitung bedeutet in dieser Situation, daß die Richtungsableitungen von R in allen möglichen Normalenrichtungen (eine oder zwei) den Wert Null annehmen.

4.4.1 Definition und Beispiele

Definition 4.18 *Gegeben sei ein Gebiet \mathcal{M} mit $\infty \in \mathcal{M}$. Weiter sei $A_0 \subset \partial\mathcal{M}$ abgeschlossen. Das Gebiet \mathcal{M} heißt **Minimalgebiet**, wenn die Robin'sche Funktion in \mathcal{M} existiert und mit der Greenschen Funktion im Außengebiet von A_0 mit Pol in ∞ übereinstimmt.*

In einem Minimalgebiet gilt offensichtlich

$$\rho(A_0) = \operatorname{cap} A_0.$$

Aus der Existenz eines zur Konfiguration (Ω, A) Robin-äquivalenten Minimalgebietes folgt unmittelbar, daß

$$\rho(A) = \min_{f \in \Sigma(\Omega)} \operatorname{cap} f(A)$$

ist, wie im letzten Abschnitt erörtert wurde.

Durch die Bestimmung eines Minimalgebietes erhalten wir auch eine Darstellung der Robinschen Funktion:

Ist f eine konforme Abbildung von Ω auf ein Robin-äquivalentes Minimalgebiet \mathcal{M} mit $f(\infty) = \infty$, so ist $G \circ f$ die Robinsche Funktion in Ω , wobei G die Greensche Funktion im Außengebiet von $f(A)$ ist.

Es folgen nun die beiden wichtigsten Beispiele für Minimalgebiete:

Beispiel 4.19. Intervalle

Gegeben sei die Vereinigung kompakter reeller Intervalle E sowie eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset E$. Jede Zusammenhangskomponente von A sei ein Intervall. Dann ist $\mathcal{M} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ mit Dirichlet-Rand A ein Minimalgebiet (siehe Abbildung 24).

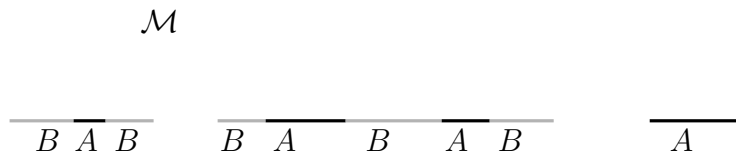


Abbildung 24

Jeder Punkt $z \in B = \partial\mathcal{M} \setminus A$ besitzt zwei nach innen weisende Normaleneinheitsvektoren und zwar $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zum Nachweis der Gleichheit von Robinscher und Greenscher Funktion genügt daher der Nachweis von

$$\nabla G(z) = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\eta \in \mathbb{R}$ in allen Punkten $z \in B = E \setminus A$, wobei G die Greensche Funktion von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A$ ist:

Außer $G(z)$ erfüllt auch die Funktion $G(\bar{z})$ alle definierenden Eigenschaften der Greenschen Funktion. Da diese eindeutig bestimmt ist, folgt $G(z) = G(\bar{z})$, d.h., G ist symmetrisch zur reellen Achse. Die Gradienten von G in den Punkten z und \bar{z} sind durch die Gleichung

$$\nabla G(z) = \nabla(G \circ j)(z) = I^\top \nabla G(j(z)) = I^\top \nabla G(\bar{z})$$

verknüpft, wobei $j(z) = \bar{z} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z \\ -\operatorname{Im} z \end{pmatrix}$ ist, und

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Matrix von j darstellt. Es folgt

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}(z), \frac{\partial G}{\partial y}(z) \right)^\top = \left(\frac{\partial G}{\partial x}(\bar{z}), -\frac{\partial G}{\partial y}(\bar{z}) \right)^\top.$$

Ist nun $z \in B \subset \mathbb{R}$, so gilt $z = \bar{z}$, und, da G in $z \in B$ differenzierbar ist, impliziert $\frac{\partial G}{\partial y}(z) = -\frac{\partial G}{\partial y}(z)$ das Verschwinden der Richtungsableitung in y -Richtung. Der Gradient von G weist also für $z \in B$ in Richtung der reellen Achse. Die beiden Normalenrichtungen an B in z stehen aber senkrecht zur reellen Achse, und somit verschwinden beide Normalenableitungen.

Es sei noch erwähnt, daß für Robin-Äquivalenz eines Gebietes, das von Dini-glatten Jordan-Kurven berandet ist, zu einem Minimalgebiet vom vorliegenden Typ, eine Symmetrie von Neumann- und Dirichlet-Rand notwendig ist: Allen Punkten, mit Ausnahme der Randpunkte der Intervalle in $\partial\mathcal{M}$, sind nämlich zwei Randpunkte des Ausgangsgebietes zugeordnet. Diese müssen entweder beide zum Dirichlet- oder beide zum Neumann-Rand gehören.

Beispiel 4.20. Sonnengebiete

Zur Konstruktion eines Sonnengebietes werden aus dem Äußeren Δ des Einheitskreises endlich viele radiale Schlitze S_l entfernt. Dabei ist zulässig, daß Schlitze den Einheitskreisrand berühren (siehe Abbildung 25 auf der nächsten Seite). Das so entstandene Gebiet Ω mit Dirichlet-Rand $\partial\mathbb{D}$ ist ein Minimalgebiet, und es gilt

$$G(z) = R(z) = \log |z|.$$

Der Gradient

$$\nabla \log |z| = \frac{1}{|z|^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

weist offensichtlich immer in radialer Richtung und besitzt in jedem Punkt von B keinen Anteil in die beiden zur Radialrichtung senkrecht stehenden Normalenrichtungen des entsprechenden Radialschlitzes.

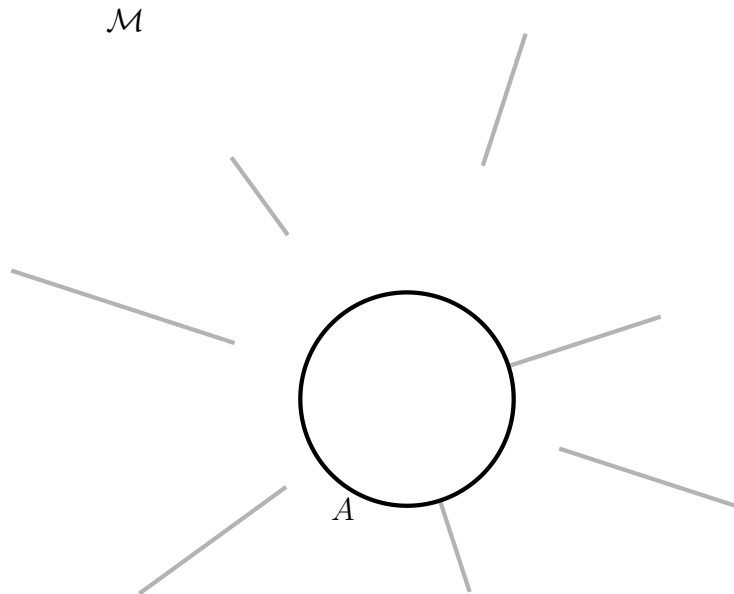


Abbildung 25

Die vorausgehende Abbildung stellt ein Minimalgebiet (Sonnengebiet) dar.

4.4.2 Einfach zusammenhängende Gebiete

Das Gebiet Ω sei von einer Dini-glaten Jordan-Kurve berandet. Die echte Teilmenge $A \subset \partial\Omega$ sei abgeschlossen, und jede ihrer Zusammenhangskomponenten sei ein Jordan-Bogen. Wie im vorhergehenden Kapitel gezeigt wurde, existiert die Robinsche Funktion R in Ω mit Dirichlet-Rand A und Pol in ∞ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $0 \notin \overline{\Omega}$. In dieser Situation existiert ein zu Ω konform äquivalentes Minimalgebiet, und zwar gilt

Satz 4.21 *Es sei S eine in Ω zu $R(z) - \log |z|$ konjugiert harmonische Funktion. Dann stellt die Abbildung*

$$f(z) = ze^{(R(z) - \log |z|) + iS(z)}$$

eine Robin-Äquivalenz zu einem Minimalgebiet her.

Beweis: Laut Satz 3.1 ist f eine konforme Abbildung auf ein Minimalgebiet entsprechend Beispiel 4.20. \square

Aus dem oben erwähnten folgt der folgende Satz, entsprechend den Überlegungen im vorhergehenden Abschnitt:

Satz 4.22 *Ist Ω einfach zusammenhängend, und ist $A \subset \partial\Omega$ die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Kontinua, so gilt*

$$\min_{f \in \Sigma(\Omega)} \operatorname{cap} f(A) = \rho(A).$$

4.4.3 Symmetrische Ringgebiete

Es sei \mathcal{R} ein Ringgebiet, das ∞ enthält und von zwei Dini-glatten Jordan-Kurven berandet werde. Der Dirichlet-Rand $A \subset \partial\mathcal{R}$ sei die Vereinigung endlich vieler, abgeschlossener Jordan-Bögen. Höchstens eine der Zusammenhangskomponenten des Dirichlet-Randes darf auch eine Jordan-Kurve sein. Wir fordern nun, daß sowohl \mathcal{R} als auch der Dirichlet-Rand A symmetrisch zur reellen Achse liegen. Es folgt, daß auch der Neumann-Rand $B = \partial\mathcal{R} \setminus A$ symmetrisch zur reellen Achse ist. Das heißt, es gilt $A = \bar{A} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in A\}$ und $B = \bar{B} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in B\}$. Ein Ringgebiet mit diesen Eigenschaften nennen wir ein **symmetrisches Ringgebiet**.

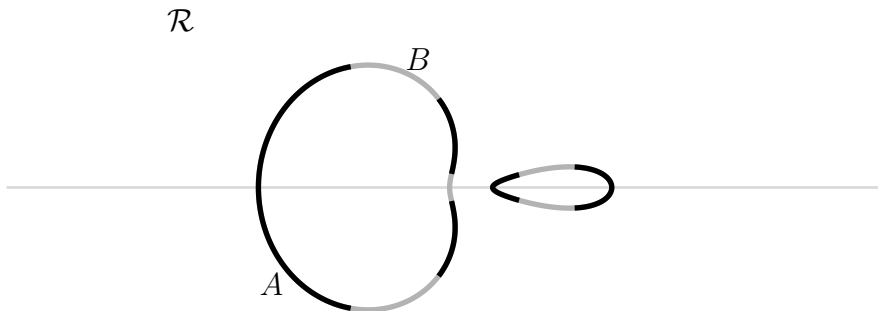


Abbildung 26

Die Abbildung 26 zeigt ein symmetrisches Ringgebiet \mathcal{R} . Der Dirichlet-Rand ist dunkel eingezeichnet, der Neumann-Rand hell. Die reelle Gerade ist durch eine noch hellere, dünne Linie gekennzeichnet.

Satz 4.23 *Ist \mathcal{R} ein symmetrisches Ringgebiet, so existiert eine konforme Abbildung Ψ auf ein Gebiet*

$$\mathcal{A}_0 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus (I_1 \cup I_2),$$

wobei I_1 und I_2 abgeschlossene Intervalle auf der reellen Achse sind. Die Abbildung Ψ kann so gewählt werden, daß Ψ in ∞ die Entwicklung

$$\Psi(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots$$

besitzt. Ist G_0 die Greensche Funktion in $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Psi(A)$, so ist $G_0 \circ \Psi$ die Robinsche Funktion in \mathcal{R} , und es gilt

$$\rho(A) = \text{cap } \Psi(A) = \min_{f \in \Sigma(\mathcal{R})} \text{cap } f(A).$$

Beweis: Es sei

$$\mathcal{R}^+ = \{z \in \mathcal{R} : \text{Im } z > 0\}$$

der Schnitt von \mathcal{R} mit der oberen Halbebene. Weiter sei f eine konforme Abbildung von \mathcal{R}^+ auf die obere Halbebene \mathbb{H}^+ , die den Randpunkt $\infty \in \partial\mathcal{R}^+$ auf

$\infty \in \partial\mathbb{H}^+$ abbildet. Das Bild von $\partial\mathcal{R}^+ \cap \mathbb{H}^+ = \partial\mathcal{R}^+ \setminus \mathbb{R}$ unter der Abbildung f ist die Vereinigung zweier disjunkter reeller Intervalle \tilde{I}_1 und \tilde{I}_2 . Die Bilder von $A \cap \partial\mathcal{R}^+$ und $B \cap \partial\mathcal{R}^+$ unter f sind jeweils die Vereinigung reeller Intervalle in $\tilde{I}_1 \cup \tilde{I}_2$. Wir schalten nun zwei Möbius-Transformationen T_v und T_w ein, um keine Sonderfälle im Punkt ∞ bei der anschließenden Fortsetzung der Abbildung $T_w \circ f \circ T_v^{-1}$ durch Spiegelung an $\partial T_v(\mathcal{R}^+) \cap \mathbb{R}$ berücksichtigen zu müssen:

Dazu wählen wir ein $w \in \tilde{I}_1 \cup \tilde{I}_2$. Die Möbius-Transformation

$$T_w(z) = -\frac{1}{z-w}$$

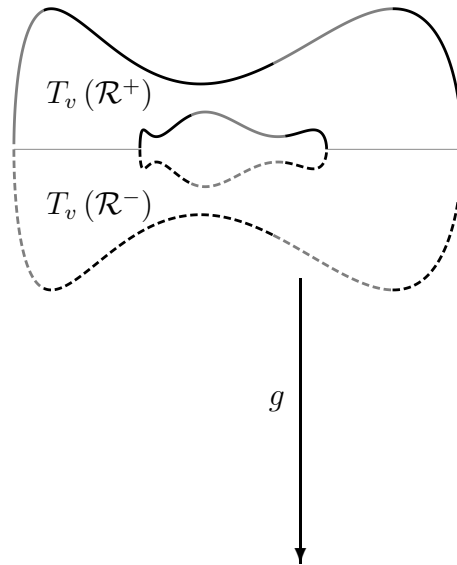
ist eine konforme Selbstabbildung der oberen Halbebene, die den gewählten Punkt $w \in \tilde{I}_1 \cup \tilde{I}_2 = f(\partial\mathcal{R}^+ \cap \mathbb{H}^+)$ auf ∞ und den Punkt $\infty = f(\infty)$ auf 0 abbildet. Weiter sei $v \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathcal{R}^+}$ und

$$T_v(z) = -\frac{1}{z-v}.$$

Auch T_v ist ein Automorphismus der oberen Halbebene. Als Abbildung von $\widehat{\mathbb{C}}$ betrachtet, bildet er \mathcal{R} konform auf ein beschränktes Ringgebiet ab, das ebenfalls symmetrisch zur reellen Gerade ist. Die Abbildung $T_w \circ f \circ T_v^{-1}$ bildet den Schnitt der oberen Halbebene mit dem beschränkten, symmetrischen Ringgebiet $T_v(\mathcal{R})$ konform auf die obere Halbebene ab. Dabei wird $T_v(\mathcal{R}) \cap \mathbb{R}$ auf die Vereinigung zweier beschränkter, reeller Intervalle abgebildet.

Als nächstes setzen wir f und somit auch $T_w \circ f \circ T_v^{-1}$ stetig nach $\partial\mathcal{R}^+ \cap \mathbb{R}$ fort, was kein Problem ist, da $\partial\mathcal{R}^+$ eine Jordan-Kurve und $\partial\mathbb{H}^+ = \mathbb{R}$ ein Kreis auf der Riemannschen Zahlenkugel ist. Mit \mathbb{H}^- werde die untere Halbebene bezeichnet. Für $z \in T_v(\mathcal{R}) \cap \mathbb{H}^-$ erklären wir die Fortsetzung g von $T_w \circ f \circ T_v^{-1}$ durch

$$g(z) = \overline{T_w \circ f \circ T_v^{-1}(\bar{z})}.$$



$$g(T_v(\mathcal{R}) \cap \mathbb{H}^+) = g(T_v(\mathcal{R}^+))$$

$$g(T_v(\mathcal{R}) \cap \mathbb{H}^-) = g(T_v(\mathcal{R}^-))$$

Abbildung 27

Abbildung 27 illustriert die Fortsetzung der Abbildung $T_w \circ f \circ T_v^{-1}$ durch Spiegelung am Schnitt des Randes von $T_v(\mathcal{R}^+)$ mit der reellen Achse. Das Bild des Dirichlet-Randes von \mathcal{R} unter der Möbius-Transformation T_v ist schwarz eingezeichnet, das Bild des Neumann-Randes hingegen grau. In der jeweils gleichen Farbe sind die Bilder der einzelnen Randkomponenten unter der Abbildung g , die die Fortsetzung von $T_w \circ f \circ T_v^{-1}$ bezeichnet, markiert. Der Schnitt des Ringgebietes $T_v(\mathcal{R})$ mit der reellen Achse ist durch eine helle, dünne Linie gekennzeichnet. In der gleichen Farbe ist auch sein Bild unter g dargestellt. Die gestrichelten Ränder in der unteren Halbebene deuten an, daß $T_w \circ f \circ T_v^{-1}$ zunächst nur in der oberen Halbebene definiert ist und dann in den ganzen Ring durch Spiegelung zur Abbildung g fortgesetzt wird. Im Bildgebiet fallen jeweils ein gestrichelter Teilbogen des Randes mit dem symmetrisch bezüglich \mathbb{R} liegenden, ungestrichelten Teilbogen zusammen.

Mit dem Spiegelungsprinzip folgt, daß g eine konforme Abbildung des gesamten Ringgebietes $T_v(\mathcal{R})$ auf $\widehat{\mathbb{C}} \setminus T_w(\tilde{I}_1 \cup \tilde{I}_2)$ ist. Dabei ist die Einschränkung $g|_{T_v(\mathcal{R}^+)}$ eine konforme Abbildung auf \mathbb{H}^+ , die aufgrund der Qualität der Ränder von $T_v(\mathcal{R}^+)$ und \mathbb{H}^+ zu einer bijektiven und stetigen Abbildung von $T_v(\mathcal{R}^+)$ auf \mathbb{H}^+ fortgesetzt werden kann. Ist $\mathcal{R}^- = \mathcal{R} \cap \mathbb{H}^-$, so stellt $g|_{T_v(\mathcal{R}^-)}$ eine konforme Abbildung auf \mathbb{H}^- her, die ebenfalls zu einem Homöomorphismus von $T_v(\mathcal{R}^-)$ auf \mathbb{H}^- fortgesetzt werden kann.

Folglich ist durch $h = T_w^{-1} \circ g \circ T_v$ eine konforme Abbildung von \mathcal{R} auf das Gebiet $\widehat{\mathbb{C}} \setminus (\tilde{I}_1 \cup \tilde{I}_2)$ erklärt, die f fortsetzt und $\infty \in \mathcal{R}$ festhält. Ihre Einschränkungen auf \mathcal{R}^+ bzw. \mathcal{R}^- sind jeweils konforme Abbildungen auf \mathbb{H}^+ bzw. \mathbb{H}^- , die stetige, bijektive Fortsetzungen auf die jeweiligen Abschlüsse besitzen. Weiter gilt

$$h(z) = bz + O(1), \quad z \rightarrow \infty$$

mit $b > 0$, da h schlicht in ∞ ist, und da h jedes $z \in \mathbb{H}^+ \cap \mathcal{R}$ wieder nach \mathbb{H}^+ abbildet. Es ist leicht, nachzurechnen, daß es ein $\zeta \in \mathbb{H}^+$ mit $h(\zeta) \notin \mathbb{H}^+$ gäbe, falls $b < 0$ oder $b \notin \mathbb{R}$ gälte. Wir definieren

$$\Psi(z) = \frac{1}{b}h(z)$$

und erhalten eine konforme Abbildung Ψ von \mathcal{R} auf $\mathcal{A}_0 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus (I_1 \cup I_2)$ mit $I_1 = \frac{1}{b}\tilde{I}_1$ und $I_2 = \frac{1}{b}\tilde{I}_2$, die in ∞ die gewünschte Normierung aufweist, und

deren Einschränkung auf \mathcal{R}^+ bzw. \mathcal{R}^- jeweils eine konforme Abbildung auf \mathbb{H}^+ bzw. \mathbb{H}^- mit bijektiver Fortsetzung auf die Abschlüsse ist. Offensichtlich gilt auch für die Abbildung Ψ

$$\overline{\Psi(\bar{z})} = \Psi(z).$$

Ist nun $\zeta \in I_1 \cup I_2$, so besitzt ζ genau ein Urbild unter $\Psi_+ = \Psi|_{\mathcal{R}^+ \cup \partial\mathcal{R}}$ und ein Urbild unter $\Psi_- = \Psi|_{\mathcal{R}^- \cup \partial\mathcal{R}}$. Wegen $\overline{\Psi(\bar{z})} = \Psi(z)$ und $\zeta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Psi_+^{-1}(\zeta) = \overline{\Psi_-^{-1}(\zeta)}.$$

Da $A = \bar{A}$ und $B = \bar{B}$ vorausgesetzt wurde, erhalten wir für alle $\zeta \in I_1 \cup I_2$

$$\zeta \in \Psi(A) \Rightarrow \Psi^{-1}(\{\zeta\}) \subset A$$

sowie

$$\zeta \in \Psi(B) \Rightarrow \Psi^{-1}(\{\zeta\}) \subset B,$$

das heißt, es gibt keinen Randpunkt von \mathcal{A}_0 , der gleichzeitig ein Urbild besitzt, das im Dirichlet-Rand von \mathcal{R} liegt und ein weiteres Urbild, das sich im Neumann-Rand von \mathcal{R} befindet.

Nun sei G_0 die Greensche Funktion im Komplement $\tilde{\Omega}$ von $\Psi(A)$. Wir zeigen, daß

$$R(z) = G_0 \circ \Psi(z)$$

die Robinsche Funktion in \mathcal{R} mit Pol in ∞ ist:

Offensichtlich ist R harmonisch in $\mathcal{R} \setminus \{\infty\}$ und besitzt den für die Robinsche Funktion geforderten logarithmischen Pol in ∞ . Für $z \in A$ gilt $\Psi(z) \in \Psi(A)$ und somit $R(z) = 0$. Ist andererseits $z \in B$, so gilt $\Psi(z) \notin \Psi(A)$, wie zuvor erläutert wurde. Zum Nachweis der Neumann-Bedingungen, betrachten wir zunächst ein $z \in B \cap \mathbb{H}^+$. Es sei $\Psi_+ = \Psi|_{\mathcal{R}^+}$ die Einschränkung von Ψ auf \mathcal{R}^+ . Aufgrund der Qualität der Ränder von \mathcal{R}^+ und $\mathbb{H}^+ = \Psi_+(\mathcal{R}^+)$ besitzt Ψ_+ eine stetige und bijektive Fortsetzung nach $\partial\mathcal{R}^+$. Das Bild von z unter Ψ_+ heiße $x = \Psi_+(z) \in \mathbb{R}$. Lokal um $z \in B \cap \mathbb{H}^+$ besitzt $\partial\mathcal{R}$ die Gestalt eines Dini-glatten Jordan-Bogens. Dieser Jordan-Bogen ist das Bild eines offenen, reellen Intervalls, das den Punkt x enthält, unter der stetigen Fortsetzung von Ψ_+^{-1} nach $\overline{\mathbb{H}^+}$. Mit einem Resultat S.E. Warschawskis ([38], S. 52, bzw. [44]) folgt nun, daß $(\Psi_+^{-1})'$ eine stetige Fortsetzung nach $\overline{\mathbb{H}^+} \cap K_\delta(x)$ mit

einem geeigneten $\delta > 0$ besitzt¹². Diese stetige Fortsetzung nimmt weder den Wert 0 noch den Wert ∞ an. Da Ψ_+ eine homöomorphe Abbildung von $\overline{\mathcal{R}}^+$ ist, folgt, daß Ψ'_+ eine stetige Fortsetzung nach $\overline{\mathcal{R}}^+ \cap K_{\tilde{\delta}}(z)$ mit einem geeigneten $\tilde{\delta} > 0$ besitzt.

Eine elementare Rechnung ergibt nun

$$\frac{\partial R}{\partial n}(z) = |\Psi'_+(z)| \cdot \frac{\partial G_0}{\partial n}(\Psi_+(z)).$$

Wie im vorausgehenden Abschnitt über Intervalle gezeigt wurde, ist

$$\frac{\partial G_0}{\partial n}(\xi) = 0$$

für alle $\xi \in \mathbb{R} \setminus \Psi(A)$, also insbesondere für $x = \Psi_+(z)$.

Somit ist die Neumann-Bedingung in jedem $z \in B \cap \partial\mathbb{H}^+$ erfüllt. Ist nun $z \in B \cap \mathbb{H}^-$, so verfahren wir analog, wobei wir mit Ψ_- anstelle von Ψ_+ arbeiten. Im Falle $z \in B \cap \mathbb{R}$ ist $x = \Psi(z)$ ein Randpunkt eines der beiden Intervalle I_1 oder I_2 . Als erstes wird der Fall $x = \min I_1 \cup I_2$ betrachtet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\max I_1 < \min I_2$. Zum Nachweis von $\frac{\partial R}{\partial n}(z) = 0$ gehen wir folgendermaßen vor: Der Punkt $z_1 \in B \cap \mathbb{H}^+$ liege im gleichen maximalen Teilbogen des Neumann-Randes von \mathcal{R} , in dem sich auch $z \in B \cap \mathbb{R}$ befindet. Da \mathcal{R} im Sinne der zu Beginn dieses Abschnitts gegebenen Definition symmetrisch ist, liegt \bar{z}_1 ebenfalls im gleichen maximalen Teilbogen des Neumann-Randes wie z und z_1 . Wegen der Symmetrie von Ψ gilt $\Psi(z_1) = \overline{\Psi(\bar{z}_1)}$. Nun ist $\Psi(z_1) \in I_1$ reell, und somit folgt $\Psi(z_1) = \Psi(\bar{z}_1)$. Es sei C_ϵ eine Kreislinie mit Mittelpunkt x und Radius $\epsilon = \Psi(z_1) - x$. Wegen $x = \min I_1 \cup I_2$ gilt $C_\epsilon \setminus \{\Psi(z_1)\} \subset \mathcal{A}_0$. Wenn wir eine analoge Konstruktion für die „inneren“ Randpunkte von I_1 bzw. I_2 durchführen, werden wir dafür Sorge tragen müssen, daß C_ϵ keinen Punkt mit dem jeweils anderen Intervall gemeinsam hat, und daß keine Punkte des anderen Intervall im Inneren von

¹²S.E. Warschawskis Resultat ist allgemeiner: Er betrachtet zwei Dini-glatte Jordan-Bögen im Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes D mit lokal zusammenhängendem Rand, die im gemeinsamen Endpunkt z den Winkel $\pi\alpha$ bilden. Jeder der beiden Bögen ist das Bild je eines Kreisbogens unter der Riemann-Abbildung von \mathbb{D} auf D , die beide in einem Urbild von z enden. Da in der hier vorliegenden Situation $\partial\mathcal{R}^+$ eine Tangente in z besitzt, gilt $\alpha = 1$. Außerdem ist hier \mathbb{D} durch \mathbb{H}^+ zu ersetzen.

C_ϵ liegen. Dies wird dadurch gewährleistet werden, daß z_1 so gewählt wird, daß ϵ kleiner als $\text{dist}(I_1, I_2)$ ist. Es sei

$$D_\epsilon = \text{Int}C_\epsilon \setminus I_1.$$

Das Gebiet D_ϵ ist einfach zusammenhängend mit lokal zusammenhängendem Rand. Es gilt $D_\epsilon \subset \mathcal{A}_0$. Weiter sei Φ_1 eine konforme Abbildung des Einheitskreises \mathbb{D} auf D_ϵ . Der Randpunkt $x \in \partial D_\epsilon$ kann als Endpunkt zweier identischer Dini-glatte Jordan-Bögen Γ_1 und Γ_2 aufgefaßt werden, die beide durch $\gamma(t) = x - t$ mit $t \in [-\epsilon, 0]$ parametrisiert werden. Sie bilden in x eine Ecke mit Öffnungswinkel 2π . Durch die konforme Abbildung Φ_1 sind Γ_1 und Γ_2 zwei Teilbögen des Einheitskreisrandes zugeordnet, die bis auf ihren gemeinsamen Endpunkt $w \in \partial \mathbb{D}$ disjunkt sind. Der gemeinsame Endpunkt w ist das (in diesem Falle eindeutig bestimmte) Urbild von x unter Φ_1 . Mit dem bereits oben verwendeten Satz von S.E. Warschawski ([38], S. 52, bzw. [44]) folgt, daß Φ_1' stetig nach $\partial \mathbb{D} \cap K_\delta(w)$ mit geeignetem $\delta > 0$ fortgesetzt werden kann¹³.

Durch Ψ^{-1} wird der Kreis C_ϵ auf den Träger eines Querschnitts Q des Gebietes \mathcal{R} abgebildet, der die Punkte z_1 und \bar{z}_1 miteinander verbindet (und symmetrisch zur reellen Achse verläuft). Wir definieren $H = \Psi^{-1}(D_\epsilon)$. Offensichtlich besteht die Inklusion $H \subset \mathcal{R}$. Für den Rand von H gilt

$$\partial H = \partial \mathcal{R} \cap \overline{H} \cup |Q|.$$

Beide Mengen in dieser Vereinigung sind Träger disjunkter Jordan-Bögen, deren Abschlüsse sich in den Punkten z_1 und \bar{z}_1 schneiden. Daher ist H ein Jordan-Gebiet. Die konforme Abbildung $\Phi_2 = \Psi^{-1} \circ \Phi_1$ von \mathbb{D} auf H kann somit zu einem Homöomorphismus von $\overline{\mathbb{D}}$ fortgesetzt werden. Insbesondere gilt $\Phi_2^{-1}(z) = w$. Lokal um den Punkt z besitzt ∂H die Gestalt eines Dini-glatten Jordan-Bogens. Wieder ergibt der Satz von S.E. Warschawski ([38], S. 52, bzw. [44]), daß Φ_2' eine stetige Fortsetzung nach $\partial \mathbb{D} \cap K_{\tilde{\delta}}(w)$ mit geeignetem $\tilde{\delta} > 0$ besitzt, die die Werte 0 und ∞ nicht annimmt. Da Φ_2^{-1} stetig auf \overline{H} ist, folgt, daß $(\Phi_2^{-1})'$ eine stetige Fortsetzung nach $\partial H \cap K_\eta(z) = \partial \mathcal{R} \cap K_\eta(z)$ mit geeignetem $\eta > 0$ besitzt. Mit der Kettenregel folgt nun, daß die Ableitung der konformen Abbildung $\Psi = \Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ stetig nach z fortgesetzt werden kann¹⁴. Die gleiche Rechnung wie in den beiden vorhergehenden Fällen ergibt

¹³Genauer kann $\frac{\Phi_1'(z)}{z-w}$ stetig fortgesetzt werden, woraus insbesondere $\Phi_1'(w) = 0$ folgt.

¹⁴Es sei erwähnt, daß $\Psi'(z) = 0$ gilt.

schließlich $\frac{\partial R}{\partial n}(z) = 0$.

In den Fällen, daß x eine der drei anderen Randpunkte von I_1 oder I_2 ist, verfahren wir analog, wobei auf eventuelle Unterschiede in der Argumentation bereits hingewiesen wurde. Somit ist der Beweis, daß R die Robinsche Funktion in \mathcal{R} ist, vollendet.

Da \mathcal{A}_0 ein Minimalgebiet ist, gilt

$$\rho(\Psi(A)) = \text{cap } \Psi(A),$$

und da Ψ so in ∞ normiert wurde, daß Ψ in der Familie $\Sigma(\mathcal{R})$ liegt, erhalten wir

$$\rho(A) = \rho(\Psi(A)) = \text{cap } \Psi(A),$$

wie behauptet. □

Die Bedeutung des letzten Satzes liegt unter anderem darin, daß er den Zusammenhang von Robinscher Funktion bzw. Robinscher Kapazität zu (hyper)elliptischen Integralen herstellt:

Laut Aussage des Satzes 4.23 ist die Robinsche Funktion R in \mathcal{R} genau $G_0 \circ \Psi$, wobei Ψ die konforme Abbildung von \mathcal{R} auf das Minimalgebiet \mathcal{A}_0 ist, die für $z \rightarrow \infty$ die Normierung $\Psi(z) = z + O(1)$ besitzt, und G_0 ist die Greensche Funktion im Komplement von $\Psi(A)$. Insbesondere ist G_0 ebenfalls die Robinsche Funktion in \mathcal{A}_0 bezüglich des Dirichlet-Randes $\Psi(A)$. Nun handelt es sich bei $\Psi(A)$ um die Vereinigung endlich vieler reeller Intervalle. H. Widom beweist eine Darstellung für die Greensche Funktion G_0 eines solchen Gebietes mit Hilfe hyperelliptischer Integrale, sofern $\Psi(A)$ mindestens drei Zusammenhangskomponenten besitzt ([46]). Ist $\Psi(A)$ ein einzelnes Intervall, so ist G_0 elementar berechenbar, während G_0 über ein elliptisches Integral dargestellt werden kann, falls $\Psi(A)$ die Vereinigung zweier Intervalle ist.

Ebenso gibt H. Widom eine Darstellung für die logarithmische Kapazität der Vereinigung endlich vieler reeller Intervalle $\text{cap } \Psi(A)$ mittels (hyper)elliptischer Integrale, sofern $\Psi(A)$ mindestens zwei Zusammenhangskomponenten besitzt. Im Falle eines einzigen Intervalls reduziert sich die Rechnung auf die Bestimmung eines Viertels der Intervalllänge. Hieraus kann in jedem Fall

$$\rho(A) = \frac{\text{cap } \Psi(A)}{\text{cap}(I_1 \cup I_2)}$$

berechnet werden, wobei I_1 und I_2 die beiden Randkomponenten von \mathcal{A}_0 sind. Der Nenner $\text{cap}(I_1 \cup I_2)$ kann dabei ebenfalls als elliptisches Integral dargestellt werden, oder, wie im Beweis zum Satz 4.9, durch Jacobische Thetafunktionen, entsprechend der Formel von N.I. Achieser ([2], S. 317).

P. Duren und J. Pfaltzgraff untersuchten bereits einen Zusammenhang zwischen der Robinschen Kapazität der zwei gegenüberliegenden Seiten eines Rechtecks und elliptischen Integralen auf anderem Wege ([13]). Ihre Ergebnisse nutzten G.D. Anderson, P. Duren und M.K. Vamanamurthy zum Nachweis einer Ungleichung für vollständige elliptische Integrale ([6]).

Zur praktischen Durchführung der oben beschriebenen Rechnungen ist es notwendig, die konforme Abbildung Ψ von \mathcal{R} auf \mathcal{A}_0 auch noch auf $\partial\mathcal{R}$ gut zu approximieren, damit die Randpunkte der Teilintervalle von $\Psi(A)$ hinreichend genau berechnet werden können. Dies kann beispielsweise mit Hilfe geeigneter Punktsysteme, wie z.B. den Menke-Punkten für Ringgebiete ([31],[32]), die hervorragende Verteilungseigenschaften besitzen, geschehen. Diese interessante Problemstellung wird im Rahmen dieser Arbeit allerdings nicht mehr erörtert werden, und soll an anderer Stelle untersucht werden.

A Anhang

A.1 Zur Berechnung der Abbildungen

An dieser Stelle soll kurz erörtert werden, mit welcher Methode die Abbildungen von Feld- oder Niveaulinien der Robinschen Funktion berechnet wurden.

A.1.1 Prinzipielles Vorgehen

In den Abbildungen 1,2,16,17 und 23 ist Ω jeweils das Außengebiet einer analytischen Jordan-Kurve Γ . Weiter ist der Dirichlet-Rand $A \subset \partial\Omega$ jeweils Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Teilbögen von Γ . Die Bilder der Feld- bzw. Niveaulinien der Robinschen Funktion R wurden in allen Fällen jeweils in zwei Schritten erstellt:

Im ersten Schritt wird eine Approximation Φ_n an die die konforme Abbildung Φ vom Äußeren Δ des Einheitskreises auf Ω mit $\Phi(\infty) = \infty$ bestimmt. Dies geschieht mit Hilfe von Menke-Punkten ([27],[28],[29],[30]). Wir werden diesen Schritt weiter unten näher erläutern. Die konforme Abbildung Φ besitzt laut Spiegelungsprinzip eine schlichte Fortsetzung über $\partial\Delta = \partial\mathbb{D}$ hinaus. Die Menge $A_0 = \Phi^{-1}(A)$ ist die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Kreisbögen. Sie kann durch numerisches Auflösen der Gleichungen $\Phi_n(z_j) = w_j$ näherungsweise bestimmt werden, wobei Φ_n die Approximation an Φ ist, und die w_j die Menge aller Endpunkte der Zusammenhangskomponenten des Dirichlet-Randes A durchlaufen.

Im zweiten Schritt werden nun die Feld- und Niveaulinien der Robinschen Funktion R_0 in Δ mit Dirichlet-Rand A_0 und Pol in ∞ bestimmt. Ist A und somit A_0 ein einzelner Bogen, so kann dies exakt geschehen, da R_0 in diesem Fall mit elementaren Mitteln dargestellt werden kann. Dieses Vorgehen konnte für das Bild 1 angewendet werden. In der allgemeinen Situation wird zunächst die Greensche Funktion G_0 in $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A_0$ mit Pol in ∞ numerisch approximiert. Dazu ist das Gleichgewichtsmaß μ von A_0 zu diskretisieren, mit dessen Hilfe

$$G_0(z) = -\log(\text{cap}|\Gamma|) + \int_{\Gamma} \log|\zeta - z| d\mu(\zeta)$$

bestimmt werden kann ([39], S. 53, [42], S. 53 ff.). Hier wurden die leicht zu berechnenden Leja-Punkte zur Diskretisierung von μ verwendet ([26],[39], S.

257 ff.). Wie im zweiten Kapitel gezeigt wurde, ist die Robinsche Funktion R_0 durch

$$R_0(z) = G_0(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right)$$

gegeben. Es sei $\phi(t)$ die Parameterdarstellung einer Feldlinie über dem reellen Intervall I . Für die Berechnung der Feldlinien in den Bildern 2,16,17,23 wurde die Differentialgleichung

$$\frac{\partial R_0}{\partial y}(\phi(t)) \cdot \operatorname{Re} \phi'(t) - \frac{\partial R_0}{\partial x}(\phi(t)) \cdot \operatorname{Im} \phi'(t) = 0$$

mit dem Polygonzugverfahren numerisch gelöst. Analog wurden Approximationen an die Niveaulinien von R_0 , die orthogonal zu den Feldlinien verlaufen, durch Diskretisierung von

$$\frac{\partial R_0}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot \operatorname{Re} \gamma'(t) + \frac{\partial R_0}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot \operatorname{Im} \gamma'(t) = 0$$

mit $\gamma : I \rightarrow \Omega$ bestimmt. Sobald die Feld- und Niveaulinien von R_0 numerisch bestimmt worden sind, können sie mit Φ_n in das Ausgangsgebiet Ω transportiert werden.

A.1.2 Menke-Punkte

Wie zuvor sei Φ eine konforme Abbildung des Äußeren des Einheitskreises Δ auf das Außengebiet Ω der analytischen Jordan-Kurve Γ mit $\Phi(\infty) = \infty$. Menke-Punkte $\left(z_k^{(n)}\right)_{1 \leq k \leq 2n, n \in \mathbb{N}}$ sind ein Extremal-Punktsystem, das die Bilder gedrehter Einheitswurzeln unter Φ in guter Näherung approximiert. Der Fehlerterm konvergiert mit steigender Punktezahl $2n$ geometrisch gegen Null ([27]). Mit Fekete-Punkten läßt sich lediglich eine Approximation der Ordnung $O\left(\frac{1}{n}\right)$ erzielen, wobei n die Anzahl der verwendeten Fekete-Punkte ist ([36]). Dabei ist der numerische Aufwand zur Berechnung der n -ten Menke-Punkte nicht höher als der numerische Aufwand zur Bestimmung der n -ten Fekete-Punkte, obwohl im Menke-Fall doppelt so viele Punkte zu bestimmen sind:

Es werden geordnete Mengen $\left(w_k^{(n)}\right)_{1 \leq k \leq 2n}$ von je $2n$ verschiedenen Punkten $w_k^{(n)}$ auf Γ betrachtet, die in genau der Reihenfolge indiziert sind, in der man

sie antrifft, wenn man die Kurve Γ von einem beliebig festlegbaren Startpunkt aus in positiver Richtung durchläuft. Nun wird die sogenannte Resultante

$$R_n \left(w_1^{(n)}, w_2^{(n)}, \dots, w_{2n}^{(n)} \right) = \prod_{\mu=1}^n \prod_{\nu=1}^n \left| w_{2\mu}^{(n)} - w_{2\nu-1}^{(n)} \right|$$

betrachtet. Ein System von $2n$ Punkten, das die Resultante maximiert, heißt Menke-Punkte der Ordnung n . Im Unterschied zur Berechnung der Vandermondschen Determinante für die Fekete-Punkte werden lediglich Abstände zwischen gerade und ungerade indizierten Punkten miteinander multipliziert. Es geht also darum, zwei Punktmenge, die gerade indizierten Punkte und die ungerade indizierten Punkte, gegeneinander so zu justieren, daß das Produkt aller Abstände zwischen Punkten, die in verschiedenen Mengen liegen, maximal wird. Die beiden Punktmenge sind dabei so angeordnet, daß jeder Punkt der einen Menge zwei „Nachbarn“ aus der anderen Menge besitzt und umgekehrt.

Die gute Verteilung der Menke-Punkte und die daraus resultierenden numerischen Eigenschaften sind ausführlich untersucht worden ([27],[28],[29],[30]). Für die Approximation der konformen Abbildung Φ wurde eine von K. Menke bewiesener Interpolationssatz ([27]) verwendet. Dabei werden um einen bestimmten Winkel gedrehte Einheitswurzeln als Knoten verwendet, und der Quotient aus dem entsprechenden Menke-Punkt und der gedrehten Einheitswurzel jeweils als Werte vorgeschrieben. Aus dem Polynom vom Grad $2n - 1$, das diesen Interpolationsbedingungen genügt, kann die Approximation Φ_n an Φ bestimmt werden. Auf kompakten Teilmengen von $\bar{\Omega}$ konvergiert Φ_n geometrisch gegen Φ ([27]).

Zur praktischen Berechnung der Menke-Punkte hat sich die Kombination eines globalen und eines lokalen Verfahrens bewährt: Im ersten Schritt werden Approximationen an das globale Maximum der Resultante R_n durch ein Simulated Annealing bestimmt. Diese werden im zweiten Schritt als Startwerte für ein Gradientenverfahren mit exakter Liniensuche verwendet. Letzteres konvergiert schneller als die globale Methode gegen ein nahegelegenes lokales Maximum der Resultante, das bei ausreichend genauen Startwerten das globale ist. Eine Beschreibung der verwendeten numerischen Verfahren findet sich in neueren Lehrbüchern der Optimierung (z.B. [10], S. 524 ff. und S. 256 ff.)

A.1.3 Leja-Punkte

Das zweite Punktsystem, das bei der Berechnung der Bilder 2,16,17 und 23 Verwendung fand, wurde bereits 1950 von F. Leja eingeführt ([26]). Die Bestimmung der n -ten Leja-Punkte $(z_k)_{1 \leq k \leq n}$ auf dem Kompaktum A_0 kann, anders als die Berechnung der Fekete- und der Menke-Punkte, in polynomialer Zeit geschehen :

Man startet mit einem beliebigem Punkt $z_1 \in A_0$. Sind z_1, \dots, z_n bereits bestimmt, so ist $z_{n+1} \in A_0$ derjenige Punkt, der das Produkt der Abstände zu allen anderen Punkten

$$\prod_{k=1}^n |z - z_k|$$

maximiert. Die Maße

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{z_k},$$

die durch eine gleichmäßige Massenverteilung auf die n -ten Leja-Punkte definiert sind (δ_{z_k} ist das Dirac-Maß mit Einheitsmasse in z_k), konvergieren schwach gegen das Gleichgewichtsmaß μ auf A_0 ([39], S.258 ff.). Daher kann $G_0(z) + \log \operatorname{cap} A_0$ durch

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log |z - z_k|$$

approximiert werden. Einzelheiten finden sich im Buch von E. Saff und V.Totik ([39], S. 273 f.). Für die Bestimmung der Feld- und Niveaulinien von R_0 braucht die Konstante $\log \operatorname{cap} A_0$ nicht explizit berechnet zu werden. Aus der Approximation von $G_0(z)$ mit Hilfe der Leja-Punkte kann schließlich $R_0(z)$ bestimmt werden, wie bereits beschrieben wurde.

A.2 Symbolverzeichnis

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen mit Ausnahme der Null
\mathbb{R}, \mathbb{C}	Menge der reellen, komplexen Zahlen
$\widehat{\mathbb{C}}$	$= \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, erweiterte komplexe Zahlen
\mathbb{D}	$= \{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$, Einheitskreis
Δ	$= \{z \in \mathbb{C} : z > 1\}$, Äußeres des Einheitskreises
$K_\epsilon(z)$	$= \{\zeta \in \mathbb{C} : z - \zeta < \epsilon\}$, Kreis um z mit Radius ϵ
E°	Menge der inneren Punkte der Menge E
\overline{E}	Abschluß der Menge E
∂E	Rand der Menge E
$\text{Int}\Gamma$	Innengebiet der Jordan-Kurve Γ
$\text{Ext}\Gamma$	Außengebiet der Jordan-Kurve Γ
$\text{dist}(X, z)$	$= \inf\{ z - \zeta : \zeta \in X\}$, Abstand des Punktes z zur Menge X
$\Omega, \tilde{\Omega}, \Omega'$	Gebiete in $\widehat{\mathbb{C}}$, die ∞ enthalten
$A \subset \Omega, B \subset \Omega$	Dirichlet- bzw. Neumann-Rand von Ω (S. 15)
\mathcal{M}	Minimalgebiet (S. 122)
$G(z), R(z)$	Greensche bzw. Robinsche Funktion mit Pol in ∞ (S. 15)
$G(z, \zeta), R(z, \zeta)$	Greensche bzw. Robinsche Funktion mit Pol in ζ (S. 6 f.)
$\text{cap}A$	Logarithmische Kapazität des Kompaktums $A \subset \mathbb{C}$
$\rho(A)$	Robinsche Kapazität der abgeschlossenen Teilmenge A des Randes von Ω (S. 16)
$d_\Omega(X, Y)$	Extremale Distanz der Mengen X und Y bezüglich des Gebietes Ω (S. 105)
$\omega(z, B, \Omega)$	Harmonisches Maß im Gebiet Ω bezüglich $B \subset \partial\Omega$, ausgewertet in $z \in \Omega$
$\mu(A)$	Gleichgewichtsmaß der Teilmenge A des Randes eines Gebietes Ω
M	konformer Modul eines Ringgebietes (S. 99)

$\frac{\partial u}{\partial n}$	Ableitung von u in Normalenrichtung (S. 65)
$\frac{\partial u}{\partial t}$	Ableitung von u in tangentialer Richtung (S. 65)
∇R	Gradient von R
ΔR	Laplace-Operator, angewendet auf R
$\langle (x_1, x_2)^\top, (y_1, y_2)^\top \rangle$	$= x_1 y_1 + x_2 y_2$, Skalarprodukt der Vektoren $(x_1, x_2)^\top, (y_1, y_2)^\top \in \mathbb{R}^2$
$\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$	Jacobische Theta-Funktionen
$\operatorname{sn} z$	Sinus amplitudinis
$\operatorname{cn} z$	Cosinus amplitudinis
$J(z)$	$= \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right)$, Joukowski-Funktion
$\Sigma(\Omega)$	Menge aller konformen Abbildungen f von Ω mit $f(z) = z + O(1), z \rightarrow \infty$
Σ	Menge aller konformen Abbildungen f von Δ mit $f(z) = z + O(1), z \rightarrow \infty$

Literatur

- [1] N.I. ACHESER, Über einige Funktionen, welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen, I. Teil, *Bulletin de l'Academie des Sciences de L'URSS*, S. 1163-1202, 1932.
- [2] N.I. ACHESER, Über einige Funktionen, welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen, II. Teil, *Bulletin de l'Academie des Sciences de L'URSS*, S. 309-344, 1933.
- [3] L.V. AHLFORS, Complex Analysis, Second Edition, McGraw-Hill, 1966.
- [4] L.V. AHLFORS, Lectures on Quasiconformal Mappings, Van Nostrand, 1966.
- [5] L.V. AHLFORS, Conformal Invariants, Mc Graw-Hill, 1973.
- [6] G.D. ANDERSON, P. DUREN, M.K. VAMANAMURTHY, An inequality for complete elliptic integrals, *J. Math. Anal. Appl.* 182, No. 1, S. 257-259, 1994.
- [7] M. BARNER, F. FLOHR, Analysis II, 2. Auflage, de Gruyter, 1989.
- [8] S. BERGMAN, M. SCHIFFER, Kernel Functions in the Theory of Partial Differential Equations of Elliptic Type, *Duke Math. J.* 15, S. 536-566, 1948.
- [9] S. BERGMAN, M. SCHIFFER, Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics, Academic Press, New York, 1953.
- [10] I.M. BOMZE, W. GROSSMANN, Optimierung - Theorie und Algorithmen, BI Wissenschaftsverlag, 1993.
- [11] J.B. CONWAY, Functions of One Complex Variable II, Springer-Verlag, 1995.
- [12] B. DITTMAR, R.KÜHNAU, Zur Konstruktion der Eigenfunktionen Steckloffscher Eigenwert-Aufgaben, *Zeitschrift für angewante Mathematik und Physik*, Vol. 51, S. 806-814, 2000.

-
- [13] P. DUREN, J. PFALTZGRAFF, Robin Capacity and Extremal Length *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 179, No. 1, S. 110-119, 1993.
- [14] P. DUREN, J. PFALTZGRAFF, R.E. THURMAN, Physical interpretation and further properties of Robin capacity, *St. Petersburg. Math. J.* 9, No.3, 607-614, 1997.
- [15] P. DUREN, M. SCHIFFER, Robin Functions and Energy Functionals of Multiply Connected Domains, *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 148, S. 251-273, 1991.
- [16] P. DUREN, M. SCHIFFER, Robin Functions and Distortion of Capacity Under Conformal Mapping, *Complex Variables*, Vol. 21, S. 189-196, 1993.
- [17] W. FISCHER, I. LIEB, Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie, Vieweg, 1988.
- [18] P. FRANK, R. VON MISES, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik I, Mathematischer Teil, 2. Auflage, Vieweg, 1961.
- [19] D. GAIER, Konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* 81, S. 25-44, 1978.
- [20] D. GAIER, Vorlesungen über Approximation im Komplexen, Birkhäuser, 1980.
- [21] N.M. GÜNTER, Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957.
- [22] K. GUSTAVSON, T. ABE, The third boundary condition - was it Robin's? *The Mathematical Intelligencer*, Volume 20, Number 1, S. 63-71, 1998.
- [23] P. HENRICI, Applied and Computational Complex Analysis, Volume 3, John Wiley & Sons, 1986.

-
- [24] O. D. KELLOG, Harmonic functions and Green's integral, *Trans. Amer. Math. Soc.* 13, S. 109-132, 1912.
- [25] N.S. LANKOF, Foundations of Modern Potential Theory, Springer-Verlag, 1972.
- [26] F. LEJA, Une methode elementaire de resolution du probleme de Dirichlet dans le plan, *Ann. Polon. Math.*, 23, S. 230-254, 1950.
- [27] K. MENKE, Extremalpunkte und konforme Abbildung, *Math. Ann.* 195, S. 292-308, 1972.
- [28] K. MENKE, Bestimmung von Näherungen für die konforme Abbildung mit Hilfe von stationären Punktsystemen, *Num. Math.* 22, S. 111-117, 1974.
- [29] K. MENKE, Zur Approximation des transfiniten Durchmessers bei bis auf Ecken analytischen geschlossenen Jordankurven, *Israel Journ. Math.* 17, S. 136-141, 1974.
- [30] K. MENKE, Über die Verteilung von gewissen Punktsystemen mit Extremaleigenschaften, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 283/284, S. 421-435, 1976.
- [31] K. MENKE, Point Systems with Extremal Properties and Conformal Mapping, *Numerische Mathematik* 54, S. 125-143, 1988.
- [32] K. MENKE, Conformal Mapping of Doubly Connected Regions, *Complex Variables*, Vol. 14, S. 251-260, 1990.
- [33] Z. NEHARI, Conformal Mapping, McGraw-Hill, 1952.
- [34] M. OHTSUKA, Dirichlet Problem, Extremal Length and Prime End, Van Nostrand, 1970.
- [35] M.D. O'NEILL, R.E. THURMAN, Extremal Domains for Robin Capacity, *Complex Variables*, Vol. 41, No 1, S. 91-109, 2000.
- [36] C. POMMERENKE, Über die Verteilung der Fekete-Punkte II, *Math. Ann.* 179, S. 212-218, 1969.

-
- [37] C. POMMERENKE, On the logarithmic capacity and conformal mapping, *Duke Math. J.* 35, S. 321-325, 1968.
 - [38] C. POMMERENKE, Boundary Behaviour of Conformal Maps, Springer-Verlag, 1992.
 - [39] E.B. SAFF, V. TOTIK, Logarithmic Potentials with external Fields, Springer-Verlag, 1997.
 - [40] M.M. SCHIFFER, Hadamard's Formula and Variation of Domain-Functions, *American Journal of Mathematics* 68, S. 417-448, 1946.
 - [41] F. TRICOMI, Elliptische Funktionen, Leipzig, 1948.
 - [42] M. TSUJI, Potential Theory in Modern Function Theory, Maruzen, Tokyo, 1959.
 - [43] W. WALTER, Einführung in die Potentialtheorie, BI Wissenschaftsverlag, 1971.
 - [44] S.E. WARSCHAWSKI, Über das Randverhalten der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung, *Math. Z.* 35, S. 321-456, 1932.
 - [45] S.E. WARSCHAWSKI, On differentiability at the boundary in conformal mapping, *Proc. Amer. Math. Soc.* 12, S. 614-620, 1961.
 - [46] H. WIDOM, Extremal Polynomials Associated with a System of Curves in the Complex Plane, *Advances mathematics, Vol. 3, S. 127-232*, 1969.