

Verhalten von Stahlbetonbauteilen unter einer kombinierten Beanspruchung aus Last und zentrischem Zwang

Von der Technischen Universität Dortmund
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

Vorgelegt von
Dipl. Ing. Gudrun Djouahra

Promotionsausschuss:

Vorsitzender:

1. Berichterstatter:

2. Berichterstatter:

Tag der mündlichen Prüfung:

Prof. Dr.-Ing Atilla Ötes
Prof. Dr.-Ing. Reinhard Maurer
Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Fehling

19.06.2008

Dortmund 2008

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Angestellte am Lehrstuhl für Betonbau der Universität Dortmund.

Herrn Univ. Prof. Dr. Ing. Reinhard Maurer möchte ich für die Förderung meiner Arbeit und seine zahlreichen Anregungen in den intensiv geführten Diskussionen danken.

Herrn Univ. Prof. Dr. Ekkehardt Fehling möchte ich danken für die Übernahme des Koreferats und seine wertvollen Anregungen zur vorgelegten Arbeit.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Kollegen und Kolleginnen am Lehrstuhl für Betonbau für die gute Zusammenarbeit. Mein spezieller Dank gilt meinem Kollegen Andreas Arnold, der über die Jahre an der Universität ein geschätzter Diskussionspartner war.

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie, meinem Mann Nadir und meiner Tochter Nassima, ohne deren Unterstützung diese Arbeit gar nicht möglich gewesen wäre.

Inhalt

1	Einleitung und Zielsetzung	1
2	Nachweise im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit	5
2.1	Begrenzung der Verformungen	5
2.2	Begrenzung der Rissbreiten	6
2.2.1	Berechnung der Rissbreiten	6
2.2.2	Erforderliche Mindestbewehrung für den zentrischem Zwang	7
3	Einführungsbeispiel	8
3.1	Einführungsbeispiel: Last und Zugnormalkraft ($q + N$)	8
3.2	Einfluss einer zusätzlichen Zugkraft auf die Durchbiegungen	9
3.3	Einfluss einer zusätzlichen Zugkraft auf die Rissbreiten	10
4	Stand der Wissenschaft	11
5	Einwirkungen	15
5.1	Äußere Lasten	15
5.2	Temperatur	17
5.3	Schwinden	18
5.4	Kriechen des Betons	22
6	Werkstoffverhalten	27
6.1	Beton	27
6.1.1	Spannungs-Dehnungslinie des Betons im Druckbereich	27
6.1.2	Elastizitätsmodul des Betons	30
6.1.3	Zugfestigkeit des Betons	31
6.2	Betonstahl	35
7	Rechenmodell und Modellierung des Stahlbetonverhaltens	37
7.1	Allgemeines	37
7.2	Numerischer Algorithmus	38
7.3	Berücksichtigung der nichtlinearen Materialeigenschaften	40
7.4	Mitwirkung des Betons auf Zug	42
7.4.1	Bestimmung der Risschnittgrößen	42
7.4.2	Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen	44
7.4.3	Modifizierung der Stahlkennlinie nach Heft 525 des DAfStb	48
7.4.4	Zusammenfassung: Mitwirkung des Betons auf Zug	50
7.5	Modellierung des Werkstoffverhaltens	51
7.5.1	Modifizierung der Stahlkennlinie	51

7.5.2	Vergleich der beanspruchungsabhängigen Modifizierungsweisen	57
7.5.3	Berücksichtigung des Kriechens bei der Modifizierung der Stahlkennlinie	60
7.5.4	Modifizierung der Betonkennlinie	61
7.5.5	Berücksichtigung des Kriechens bei der Modifizierung der Betonkennlinie	66
7.6	Vergleich der Modellierungsarten (Stahl – Beton)	67
7.7	Berücksichtigung des Schwindens	69
7.7.1	Schwindkrümmung im Zustand I	69
7.7.2	Schwindkrümmung im Zustand II	71
7.7.3	Schwindeinwirkung bei der nichtlinearen Berechnung	73
7.8	Zusammenfassung: Rechenmodell und Modellierungen	76
8	Verifizierung des Rechenmodells	77
8.1	Versuche von Falkner	77
8.1.1	Materialkennwerte	78
8.1.2	Ergebnisse der Versuchsnachrechnung	80
8.2	Versuche von Alavizadeh-Farhang	83
8.2.1	Materialkennwerte	83
8.2.2	Alavizadeh-Farhang: Statisch bestimmter Einfeldträger	85
8.2.3	Alavizadeh-Farhang: Einfeldträger mit Teileinspannung	87
8.3	Versuche von Jaccoud/Favre	90
8.3.1	Mechanische Materialkennwerte	91
8.3.2	Rheologische Materialkennwerte des Betons	92
8.3.3	Kurzzeitversuche der Serie C	93
8.3.4	Langzeitversuche C11 bis C15	94
8.4	Zusammenfassung: Verifizierung des Rechenmodells	95
9	Numerische Simulationen	97
9.1	Untersuchungen am Bezugssystem	97
9.1.1	Nur Lastbeanspruchung q ($t=0$) (Schritt 1)	100
9.1.2	Lastbeanspruchung und Temperatur (Schritt 2)	102
9.1.3	Lastbeanspruchung und Kriechen (Schritt 3)	104
9.1.4	Lastbeanspruchung + Kriechen + Schwinden (Schritt 4)	106
9.1.5	Lastbeanspruchung + Kriechen + Schwinden + Temperatur (Schritt 5)	109
9.1.6	Ergebnisse der Rechenschritte 1 bis 5	111
9.1.7	Steigerung der Verformungseinwirkung ε_L (Last und Zwang)	112
9.1.8	Variation der Zugfestigkeit	114
9.2	Parameterstudie Bezugsbewehrungsgrad	118
9.2.1	Definition des Bezugsbewehrungsgrades	118
9.2.2	Gerissene Bereiche infolge äußerer Belastung q	119
9.2.3	Mittlere Schwinddehnung	122
9.2.4	Ergebnisse der Parameterstudie Bezugsbewehrungsgrad	123
9.3	Parameterstudie Schlankheit	129

9.3.1	Normalkräfte unter q_{perm}	129
9.3.2	Durchbiegungen unter q_{perm}	130
9.3.3	Rissbreiten	135
9.4	Parameterstudie Tragsystem	136
9.4.1	System E und F (einseitig starr eingespannt)	136
9.4.2	System A und B (beidseitig gelenkig gelagert)	140
9.4.3	Vergleich der Tragsysteme bei gleicher Schlankheit $L/d=22$	144
9.5	Parameterstudie Bewehrungsanordnung	148
9.5.1	Anordnung von symmetrischer Bewehrung	148
9.6	Normierte Normalkraft infolge Zwang	152
9.7	Zusammenfassung der numerischen Untersuchungen	154
10	Vergleich mit den Regelungen der DIN 1045-1	157
10.1	Vereinfachter Nachweis der Durchbiegungsbegrenzung über die Begrenzung der Biegeschlankheit	157
10.1.1	Grenzwert der Biegeschlankheit $L_i/d = 35$	158
10.1.2	Grenzwert $L_i^2/d=150$	163
10.2	Getrennte Rissbreitenbegrenzung für Last und Zwang	167
10.3	Wertung	172
10.3.1	Durchbiegungen	172
10.3.2	Rissbreiten	172
11	Zusammenfassung	175
12	Literatur	179
13	Bezeichnungen	185
ANHANG		189
ANHANG A:	Bezogene Durchbiegungen	190
A1:	Ausgangdaten für die Diagramme	190
A2:	Bezogene Durchbiegungen System A und B	191
A3:	Bezogene Durchbiegungen System C und D	193
A4:	Bezogene Durchbiegungen System E und F	195
Anhang B:	Bezogene Normalkräfte	197
B1:	Ausgangdaten für die Diagramme	197
B2:	Bezogene Normalkräfte für Bewehrungsanordnung BW0	199
B3:	Bezogene Normalkräfte für symmetrische Bewehrungsanordnung	200

Sofern die horizontalen Verformungen vollständig behindert werden, ergeben sich die entstehenden Zwangnormalkräfte bei einem Zugstab mit konstanter Dehnsteifigkeit zu:

$$N_{Zwang} = \varepsilon_L \cdot E \cdot A$$

Da die Behinderung der Deckenverformung in Wechselwirkung mit den anderen vertikalen Bauteilen und deren Steifigkeiten steht, ist die Abschätzung des tatsächlich auftretenden Zwangs schwierig. Als Grenzfall für die Lagerungsbedingung der Decke kann die horizontal starre, d. h. unverschiebliche Lagerung gesehen werden. Die im Gesamtmodell entstehenden Zwangnormalkräfte sind in der Regel kleiner und von nachfolgenden Faktoren abhängig.

- Steifigkeit der aussteifenden Elemente (Biege- und Schubsteifigkeit)
- Beanspruchung im Gesamtmodell (Wechselwirkung mit anderen Decken)
- Ausbildung des horizontalen Auflagers in der Deckenebene
- Steifigkeit EA des Plattenstreifens

Einer Berechnung bzw. Abschätzung von Zwangkräften sollte daher immer eine Einschätzung des Verhaltens der Bauteile im Gesamtsystem vorangestellt werden, um die relevanten Bauteile mit Zwangbeanspruchung zu identifizieren.

Zur realitätsnahen Ermittlung von Zwangsschnittgrößen ist immer die Berücksichtigung einer etwaigen Rissbildung erforderlich. Linear elastische Berechnungen, welche auf den Steifigkeiten der ungerissenen Querschnitte basieren, können unrealistisch große Normalkräfte ergeben, und zu völlig unwirtschaftlichen Bemessungsergebnissen führen.

Kombinierte Beanspruchung eines Plattenstreifens

Die Normalkräfte infolge Verformungseinwirkung ε_L entstehen i. d. R. unter einer gleichzeitig vorhandenen äußeren Last q der Decke, welche Biegemomente erzeugt. Betrachtet man einen aus dem Gesamtmodell herausgeschnittenen Plattenstreifen, so geht die Decke in den Bereichen großer Biegemomente ($M > M_{cr}$) in den Zustand II über. Dadurch reduzieren sich die Biege- und Dehnsteifigkeiten des Deckenstreifens.

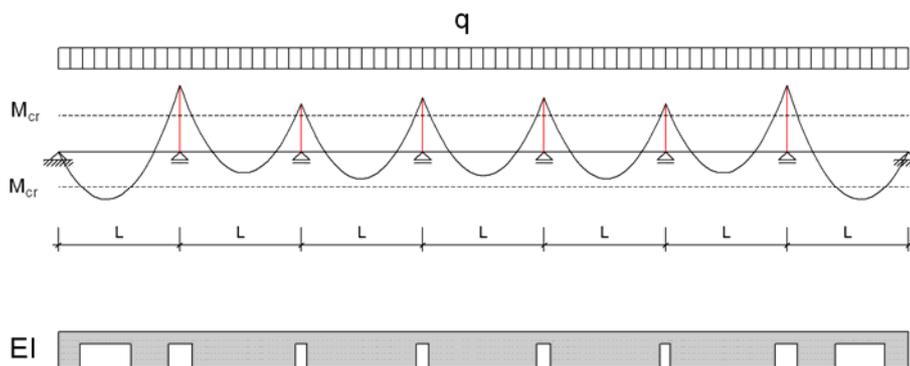
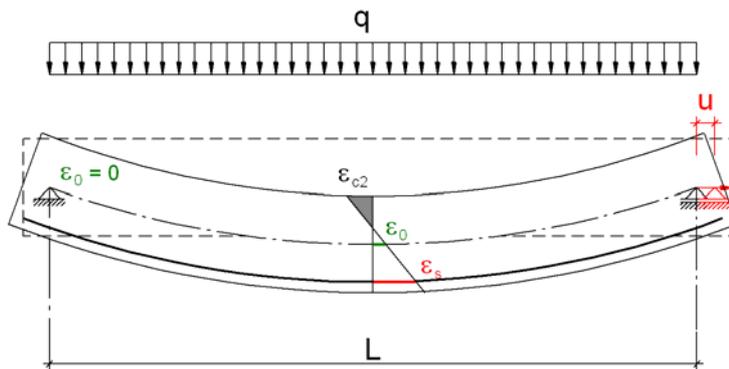


Bild 2: Steifigkeiten eines Plattenstreifens unter der äußeren Last q

Da bei einer Biegebeanspruchung im Zustand II die Betondehnungen ε_c i. A. kleiner sind als die Stahldehnungen ε_s auf der gegenüberliegenden Seite, ergibt sich eine Dehnung ε_0 in der Stabachse. Durch diese Dehnung in der Stabachse ergibt sich bei horizontal verschieblich

gelagerten Systemen eine Horizontalverschiebung (Bild 3a). Bei Behinderung dieser Verschiebung entsteht in Abhängigkeit von q eine Zwangdruckkraft, welche eine deutliche Reduzierung der Dehnungen im Querschnitt bewirkt (Bild 3b). Dadurch werden die zugehörigen Durchbiegungen w und die Rissbreiten w_k kleiner. Unter Last- und Verformungseinwirkung entstehen bei überwiegender Dehnungen (z.B. Schwinden, Abkühlung) Zwangzugkräfte, welche die Durchbiegungen und Rissbreiten vergrößern (Bild 3c).

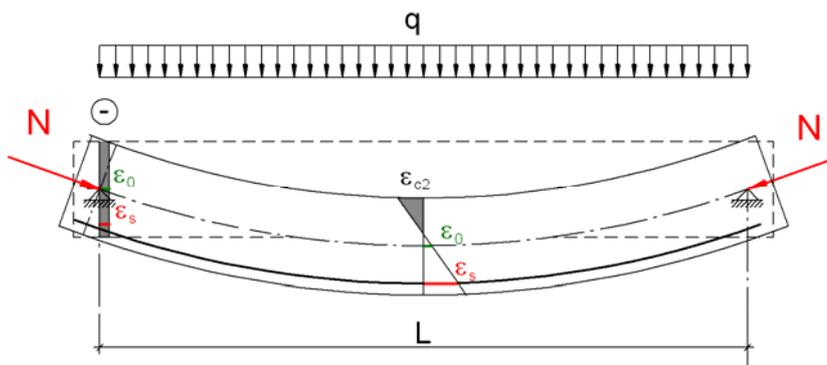
a) System_frei: (horizontal verschieblich)



Verschiebung

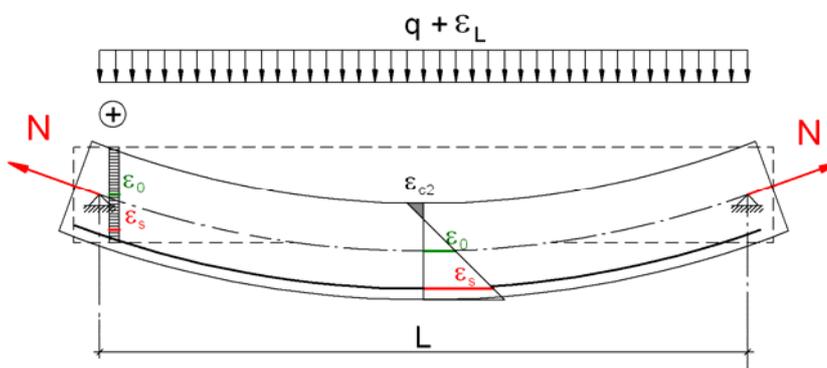
$$u = \int_0^L \varepsilon_0 \cdot dx \neq 0$$

b) System_fix: (horizontal unverschieblich)



$$u = 0$$

c) System_fix: (horizontal unverschieblich)



$$u = 0$$

Bild 3: a) System_frei: Horizontale Verschiebung u infolge äußerer Last q
 b) System_fix: Normaldruckkraft infolge äußerer Last q
 c) System_fix: Normalzugkraft bei Last- und Verformungseinwirkung

Zielsetzung

Ziel der Arbeit ist die wirklichkeitsnahe Berechnung von Zwangkräften unter kombinierter Beanspruchung aus Last und zentrischem Zwang sowie die Untersuchung ihrer Auswirkungen auf die Nachweise im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit:

- Begrenzung der Verformungen
- Begrenzung der Rissbreiten

Die Berechnungen erfolgen mittels nichtlinearer Verfahren unter Berücksichtigung des spezifischen Stahlbetonwerkstoffverhaltens. Dabei werden die Rissbildung (teilweiser Übergang des Bauteils in den Zustand II), die Einflüsse aus dem Langzeitverhalten (Kriechen und Schwinden des Betons) sowie die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen (Verbund) berücksichtigt. Durch die numerischen Untersuchungen sollen die maßgeblichen Parameter, sowie deren Einfluss auf die Durchbiegungen und Rissbreiten bestimmt werden. Da die tatsächlich auftretenden Durchbiegungen und Rissbreiten auf Grund der Vielzahl von Einflussparametern und deren Streuungen nicht exakt berechnet werden können, liegt der Schwerpunkt der Arbeit auf einer ausreichend genauen Abschätzung der zu erwartenden Durchbiegungen und Rissbreiten anhand der wesentlichen, systembedingten Parameter. Dazu werden für die Anwendung in der Praxis Diagramme entwickelt, welche eine übersichtliche Ermittlung der zu erwartenden Durchbiegungen und Zwangkräfte bei einer kombinierten Beanspruchung ermöglichen.

Auf Grund der Komplexität der Durchbiegungs- und Rissbreitenberechnung, wird häufig auf die nachfolgenden vereinfachten Regelungen der DIN 1045-1 [DIN 8] zurückgegriffen.

- Vereinfachter Nachweis der Begrenzung der Durchbiegung für Stahlbetonbauteile nach DIN 1045-1, Abschnitt 11.3.2 über die Begrenzung der Biegeschlankheit.
- DIN 1045-1, Abschnitt 11.2.4 (7):
In Fällen, in denen die resultierende Zwangdehnung 0,8‰ nicht überschreitet, ist es im Allgemeinen ausreichend, die Rissbreite für den größeren Wert der Spannung aus Zwang- oder Lastbeanspruchung zu ermitteln.

Bezüglich der Durchbiegungen ist das Hauptkriterium, auf das zurückgegriffen wird, die Biegeschlankheit. Es hat sich jedoch gezeigt, dass in bestimmten Fällen die Durchbiegungen – trotz Einhaltung der geforderten Begrenzung der Biegeschlankheit – zu groß werden können, so dass es zu Schäden an nachträglich eingebauten Bauteilen (z. B. Trennwänden) kommen kann. Des Weiteren wird überprüft, ob die entstehenden Normalkräfte infolge behinderter Horizontalverschiebungen beim Nachweis der Durchbiegungsbegrenzung zu berücksichtigen sind. I. d. R. wird bei der Durchbiegungsbegrenzung von einer horizontal frei verschieblichen Lagerung des Systems ausgegangen, so dass Zwangnormalkräfte beim Nachweis unberücksichtigt bleiben.

Bei der zweiten Regelung bezüglich der Rissbreitenberechnung geht man davon aus, dass sich die infolge einer zusätzlichen Verformungseinwirkung entstehenden Schnittgrößen nicht wesentlich auf die Rissbreiten auswirken.

Mit Hilfe der in den numerischen Simulationen gewonnen Erkenntnisse werden die vereinfachten Regelungen der DIN 1045-1 kritisch überprüft und bewertet, sowie eventuelle Anwendungsgrenzen aufgezeigt.

2 Nachweise im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit

Die Verformungen und Rissbreiten eines Tragwerks müssen zur Sicherstellung der Gebrauchstauglichkeit begrenzt werden. Dabei sollen Anforderungen an das optische Erscheinungsbild, an die Dauerhaftigkeit und Funktionsfähigkeit sichergestellt werden. Zulässige Grenzwerte, welche im Hinblick auf Durchbiegungen und Rissbreiten für ein Bauwerk unbedenklich sind, können nicht einheitlich angegeben werden, da sie von der Art des Bauwerks und den Anforderungen an das Tragwerk und den Ausbau abhängen. Daher sind Grenzwerte im Einzelfall zu spezifizieren. Als Anhaltspunkte können dennoch die in DIN 1045-1 [DIN 8] angegebenen Grenzwerte dienen. Im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit (GZG) sind gemäß DIN 1045-1 (11.2 und 11.3) folgende Nachweise unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination zu führen:

- Nachweis der Begrenzung der Verformungen
- Nachweis der Begrenzung der Rissbreite

2.1 Begrenzung der Verformungen

Gemäß DIN 1045-1 gibt es zum Nachweis der Begrenzung der Durchbiegungen grundsätzlich zwei Möglichkeiten:

- Berechnung der Durchbiegung und Begrenzung auf einen zulässigen Wert (Abschnitt 11.3.1)
- Vereinfachter Nachweis über die Begrenzung der Biegeschlankheit L_i/d (Abschnitt 11.3.2)

Die rechnerische Ermittlung der Durchbiegungen kann mit einem geeigneten Näherungsverfahren ([Gras 23], [Krü 41], [Kön 35] [Don 13]) erfolgen, welches bei einer realistischen Abschätzung der Biegesteifigkeiten im Zustand II ausreichend genaue Ergebnisse liefert. Alternativ können die Durchbiegungen mit einer nichtlinearen Berechnung unter Ansatz wirklichkeitsnaher Stoffgesetze nach DIN 1045-1, Abschnitt 8.5.1 im Gebrauchszustand berechnet werden. Die nichtlineare Berechnung ist von den hier dargestellten Verfahren am genauesten, erfordert jedoch einen größeren Aufwand insbesondere bei der Modellierung des Materialverhaltens.

Bei der Begrenzung der Biegeschlankheit handelt es sich um ein einfaches Näherungsverfahren, das in den 1960er Jahren rein empirisch auf der Grundlage einer Schadensstatistik entwickelt wurde [May 48]. Aus diesen Untersuchungen wurde insbesondere das Kriterium für die erhöhten Anforderungen abgeleitet. Seitdem wurden sowohl die Bemessungsverfahren, als auch die Baustofffestigkeiten weiterentwickelt, so dass die Voraussetzungen für das Näherungsverfahren heute nicht mehr streng gültig sind. Die Baustoffe werden heutzutage höher ausgenutzt, so dass die Krümmungen und die Durchbiegungen größer sind als früher. Daher stellt sich die Frage, unter welchen Randbedingungen das Verfahren über die Begrenzung der Biegeschlankheit noch ausreichend zuverlässige Bemessungsergebnisse liefert.

2.2 Begrenzung der Rissbreiten

Die in DIN 1045-1 angegebenen Grenzwerte für den Nachweis der Rissbreite sind für Stahlbetonbauteile in Abhängigkeit von der Anforderungsklasse definiert:

Grenzwerte des Rechenwertes der Rissbreite:

$$w_k \leq 0,3 \text{ mm} \quad (\text{Anforderungsklasse E}) \quad (2.1)$$

$$w_k \leq 0,4 \text{ mm} \quad (\text{Anforderungsklasse F}) \quad (2.2)$$

Diese Grenzwerte sind, sowohl beim Nachweis der Rissbreitenbegrenzung unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination (Lastbeanspruchung oder gegebenenfalls kombinierte Beanspruchung aus Last und Zwang), als auch beim Nachweis der Mindestbewehrung zur Abdeckung der Risschnittgrößen zu beachten.

2.2.1 Berechnung der Rissbreiten

Der Nachweis der Begrenzung der Rissbreite unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination erfolgt im Rahmen der nachfolgenden Untersuchungen auf Grundlage der DIN 1045-1, Abschnitt 11.2.2 [DIN 8] mit der direkten Berechnung der Rissbreite.

- Ermittlung der Spannung in der Bewehrung im Rissquerschnitt auf Basis der mit der nichtlinearen Berechnung ermittelten Schnittgrößen M und N

- Überprüfung, ob das Erstrissbild oder das abgeschlossene Rissbild vorliegt:

$$F_s < F_{cr,eff} \quad \Rightarrow \text{Einzelrissbildung}$$

$$F_s > F_{cr,eff} \quad \Rightarrow \text{abgeschlossenes Rissbild}$$

- Berechnung der Rissbreite:

Einzelrissbild:

$$w_k = \frac{(\sigma_s^II)^2 \cdot d_s}{6 \cdot f_{ct,eff} \cdot E_s \cdot (1 + \alpha_E \cdot \rho_{s,eff})} \quad (2.3)$$

$$w_k [mm] = \frac{d_s [mm] \cdot F_s^2 [MN]}{A_s^2 [m^2] \cdot 6 \cdot E_s [MN/m^2] \cdot f_{ct,eff} [MN/m^2]} \quad \text{mit } (1 + \alpha_E \cdot \rho_{eff}) \approx 1 \quad (2.4)$$

Abgeschlossenes Rissbild:

$$w_k = \frac{d_s}{3,6 \cdot \rho_{s,eff}} \cdot \left[\frac{\sigma_s^II}{E_s} - 0,4 \cdot \frac{f_{ctm}}{E_s \cdot \rho_{s,eff}} \cdot (1 + \alpha_E \cdot \rho_{s,eff}) \right] \quad (2.5)$$

$$w_k [mm] = \frac{d_s [mm] \cdot F_{cr,eff} [MN] \cdot (F_s - 0,4 \cdot F_{cr,eff}) [MN]}{A_s^2 [m^2] \cdot 3,6 \cdot E_s [MN/m^2] \cdot f_{ct,eff} [MN/m^2]} \quad \text{mit } (1 + \alpha_E \cdot \rho_{eff}) \approx 1 \quad (2.6)$$

2.2.2 Erforderliche Mindestbewehrung für den zentrischem Zwang

Die bei der getrennten Bemessung für Rissbreiten erforderliche Mindestbewehrung für zentrischen Zwang nach DIN 1045-1, Abschnitt 11.2.2 [DIN 8] wird im Folgenden qualitativ untersucht. Bei Abdeckung des zentrischen Zwangs mit einer Mindestzugfestigkeit $f_{ct,eff}$ ergibt sich für die im Riss von einer Bewehrungslage aufzunehmende Kraft:

$$F_s = 0,5 \cdot b \cdot h \cdot k \cdot f_{ct,eff} \tag{2.7}$$

Für diese Kraft ist die Begrenzung der Rissbreite nachzuweisen.

Für $F_s \leq F_{cr,eff}$ Erstrissbild:

$$\min. a_s = \sqrt{\frac{d_s \cdot F_s^2}{6 \cdot E_s \cdot f_{ct,eff} \cdot w_k}} \tag{2.8}$$

Für $F_s > F_{cr,eff}$ abgeschlossenes Rissbild

$$\min. a_s = \sqrt{\frac{d_s \cdot F_{cr,eff} \cdot (F_s - 0,4 \cdot F_{cr,eff})}{3,6 \cdot E_s \cdot f_{ct,eff} \cdot w_k}} \tag{2.9}$$

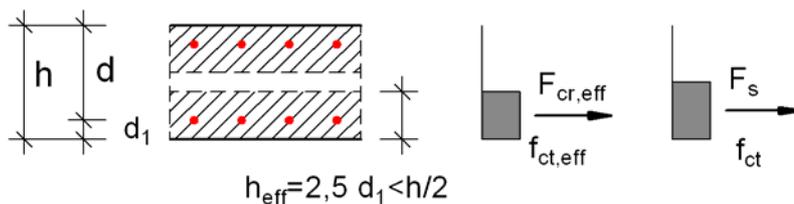
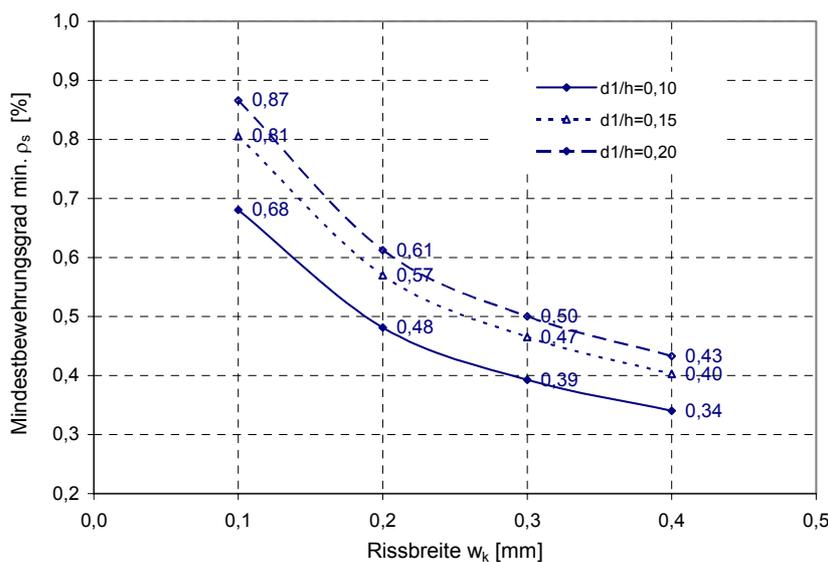


Bild 4: Kräfte in der Bewehrung und in der mitwirkenden Betonzugzone

Unter Annahme von vereinfachten Parametern, die insbesondere für dünne Bauteile zutreffen, ergibt sich der Mindestbewehrungsgrad zur Abdeckung des reinen zentrischen Zwangs für eine Bauteilseite gemäß Bild 5.



$$\min. \rho_s = \frac{\min. a_s}{b \cdot d}$$

(eine Bauteilseite)

Parameter:

$$f_{ct,eff} = 3,0 \text{ MN} / \text{m}^2$$

$$k = 0,8$$

$$h_{eff} = 2,5 \cdot d_1$$

$$d_s = 12 \text{ mm}$$

$$d = 0,9 \cdot h$$

Bild 5: Mindestbewehrung zur Begrenzung der Rissbreite bei zentrischem Zwang

3 Einführungsbeispiel

In der Regel wird die Durchbiegung eines Biegebauteils ohne die Berücksichtigung der Normalkräfte aus Zwang infolge behinderter horizontaler Verformung ermittelt. Es können bei einem gezwängten System sowohl Druckkräfte, als auch Zugkräfte auftreten, welche dann in Überlagerung mit den Biegemomenten die Durchbiegungen und Rissbreiten beeinflussen.

Üblicherweise erfolgt die Berechnung der Durchbiegung eines Bauteils am horizontal frei verschieblichen System, so dass eine Verformungseinwirkung ε_L keinen Einfluss auf die Durchbiegungen hat. Die Begrenzung der Rissbreite erfolgt in der Regel getrennt für Last und Zwang, wobei die Mindestbewehrung für den Zwang nach DIN 1045-1, Abschnitt 11.2.2 ermittelt werden kann.

3.1 Einführungsbeispiel: Last und Zugnormalkraft (q + N)

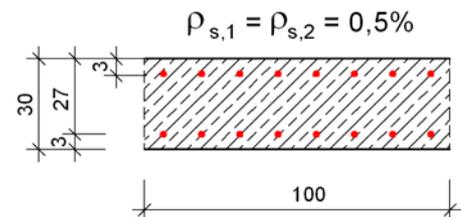
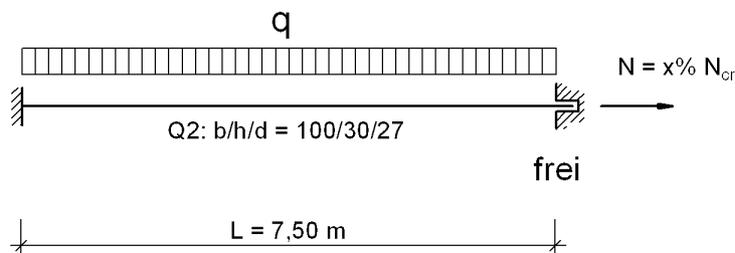
Mit dem nachfolgenden Beispiel soll grundsätzlich gezeigt werden, welchen Einfluss eine zusätzliche Zugkraft auf die Durchbiegung und Stahlspannung bzw. Rissbreite hat. Dazu wird nachfolgend dargestelltes System mit der Querbelastung q und einer zusätzlich wirkenden konstanten Normalkraft entsprechend 25%, 50%, 75% und 100% der Rissnormalkraft untersucht.

Einführungsbeispiel

b/h/d=100/30/27

BSt 500

C 30/37



Systemlänge: $L = 7,50 \text{ m}$

$L_i = 4,50 \text{ m}$

Schlankheit: $L/d = 28$

$L_i/d = 17$

Belastung:

äußere Last q

$$N = (25\%, 50\%, 75\%, 100\%) \cdot N_{cr}$$

$$N_{cr} = A_{c,ideell} \cdot f_{ct,eff} = 0,3142 \cdot 2,9 = 911 \text{ kN}$$

Querschnitt/Bewehrungsgrade:

$$a_{s1} = a_{s2} = 13,5 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

$$\rho_{s1} = \rho_{s2} = 0,5 \%$$

Materialparameter:

$$E_{cm} = 31900 \text{ MN} / \text{m}^2$$

$$f_{ctm} = 2,9 \text{ MN} / \text{m}^2$$

Bild 6: Einführungsbeispiel: System und Belastung

(Bild 7) zeigt die Schnittgrößen, Verformungen und Rissbreiten nach nichtlinearer Berechnung mit einer gleichzeitig wirkenden Zugkraft von ca. 50% der Rissnormalkraft im Vergleich zum System ohne Normalkraft. Die Durchbiegung in Feldmitte vergrößert sich um das Sechsfache, die Rissbreiten im Feld und im Einspannbereich nehmen um ca. 120% zu.

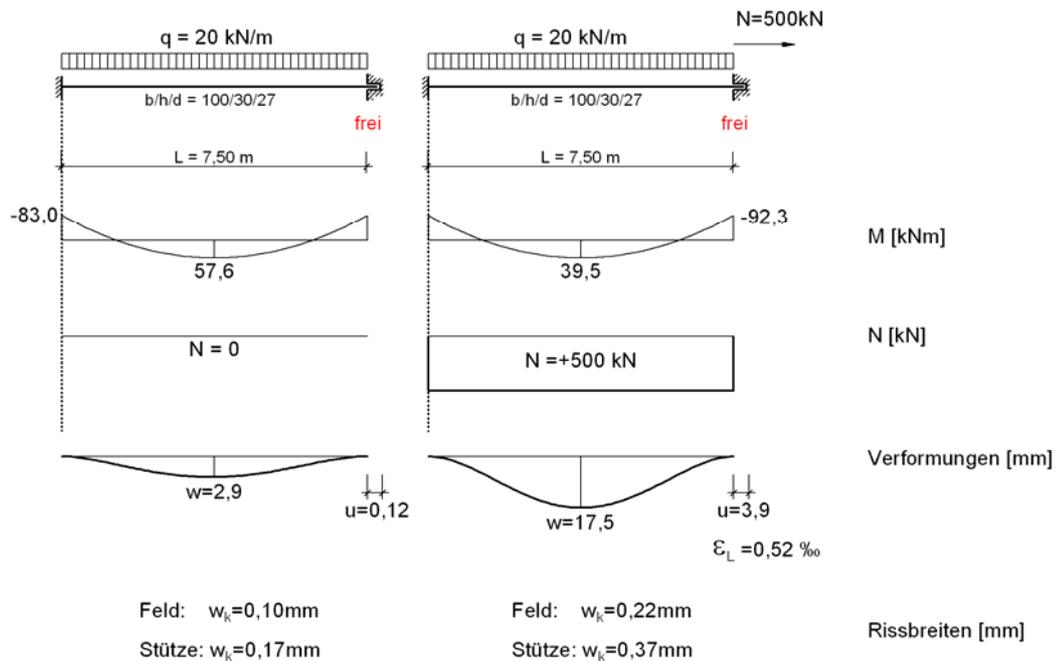


Bild 7: Ergebnisse bei einer Querbewehrung von $q=20\text{kN/m}$: für $N=0$ und $N=500 \text{ kN}$

3.2 Einfluss einer zusätzlichen Zugkraft auf die Durchbiegungen

Den signifikanten Einfluss einer zusätzlichen Zugnormalkraft auf die Durchbiegungen für alle Laststufen zeigt Bild 8.

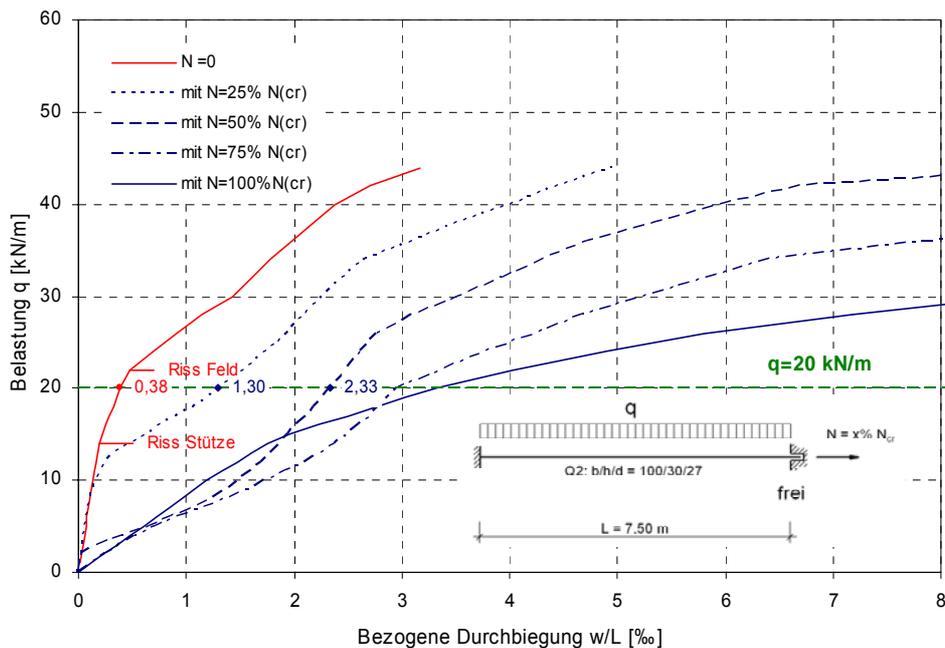


Bild 8: Einführungsbeispiel: Last-Durchbiegungsdiagramm

Bei dem hier vorliegenden Beispiel handelt es sich um ein mäßig schlankes System, welches unter $q=20\text{kN/m}$ alleine nur im Einspannbereich gerissen ist. Durch die hinzukommende Zugkraft vergrößern sich die Bauteilbereiche im Zustand II signifikant, was der Grund für die sich stark vergrößernden Durchbiegungen ist. Im Bereich höherer Laststufen ist der Unterschied der Durchbiegungen mit und ohne Zugkraft nicht so groß.

Betrachtet man die Durchbiegungen bei einer Querbelastung von 20 kN/m , was in etwa dem Gebrauchslastniveau entspricht, in Abhängigkeit von der Größe der gleichzeitig wirkenden Zugkraft, so stellt man einen nahezu linearen Anstieg der Durchbiegungen fest. Auf Grund der mäßigen Schlankheit des Systems liegen hier selbst bei großen Zugkräften die bezogenen Durchbiegungen im zulässigen Bereich ($w/L < 1/250 = 4\text{‰}$).

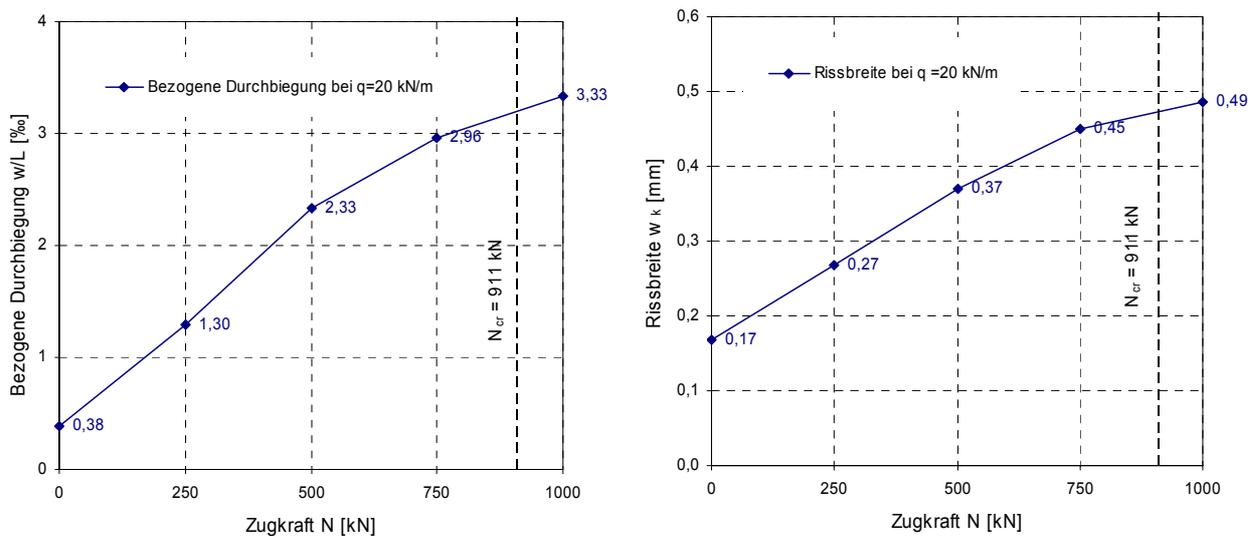


Bild 9: Einfluss einer Zugnormalkraft auf die Durchbiegung und auf die Rissbreite (Stützbereich) im GZG ($q=20\text{kN/m}$)

3.3 Einfluss einer zusätzlichen Zugkraft auf die Rissbreiten

Durch eine gleichzeitig wirkende Zugnormalkraft vergrößern sich die Spannungen in der Bewehrung und infolgedessen auch die Rissbreiten. Bild 9 zeigt die berechneten Rissbreiten über der Stütze unter Annahme eines Durchmessers von 14 mm . Infolge der Zugkraft vergrößern sich die Rissbreiten um mehr als das Doppelte. Sowohl im Feld, als auch über der Stütze liegt hier in allen Fällen das abgeschlossene Rissbild vor.

Eine zusätzliche Zugnormalkraft infolge Zwangs kann die Durchbiegungen und Rissbreiten eines Stahlbetonbauteils signifikant vergrößern. Bei gezwängten Systemen ist daher ein nicht vernachlässigbarer Einfluss aus behinderten Dehnungen ε_L (aus Schwinden oder Abkühlung) bei den Nachweisen im Gebrauchszustand zu erwarten.

4 Stand der Wissenschaft

Wirklichkeitsnahe nichtlineare Berechnung von Stahlbetonbauteilen

Nichtlineare Berechnungsmethoden zur Erfassung des Verhaltens von Stahlbetonbauteilen haben eine lange Tradition. *Grasser* untersuchte bereits 1968 in [Gras 22] Grundlagen für eine wirklichkeitsnahe Bemessung von Stahlbetonquerschnitten. Ein Grundproblem bei nichtlinearen Berechnungen besteht darin, dass Materialkennwerte benötigt werden, die im Allgemeinen nicht genau bekannt sind, und zudem großen Streuungen unterliegen. Ebenso sind die Steifigkeitsverhältnisse an den Schnittstellen zu den angrenzenden Bauteilen (Randbedingungen) häufig nicht genau bekannt. Dies macht es erforderlich, die maßgebenden Parameter zu variieren.

Bei den neueren Rechenmodellen wird bei der Ermittlung der Steifigkeiten in der Regel immer eine Mitwirkung des Betons auf Zug in Ansatz gebracht. Wie u. a. *Quast* in [Qua 53] zeigt, können sich bei der Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug deutlich geringere Verformungen ergeben. Dies betrifft sowohl die Betonzugfestigkeit als solche bis zum Erreichen der Risschnittgrößen, als auch die versteifende Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen.

In den meisten Arbeiten werden die Steifigkeiten und das Last-Verformungsverhalten über alle Laststufen betrachtet. Obwohl alle Modelle mindestens die drei Stadien ungerissener Zustand I, gerissener Zustand II sowie das Fließen der Bewehrung und die plastischen Verformungen des Betons erfassen, ist zu unterscheiden zwischen Arbeiten, die sich intensiv mit dem Grenzzustand der Tragfähigkeit befassen [Kre 39] und Arbeiten, deren Focus auf dem Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit liegt [Zil 66], [Don 13], [Boc 3]. In der Regel werden für den Beton im GZT und im GZG unterschiedliche Spannungs-Dehnungslinien verwendet.

Bei den Arbeiten, die sich auf den Gebrauchszustand beziehen, liegen die Schwerpunkte bei Durchbiegungs- und Rissbreitenuntersuchungen. Sowohl bei den Durchbiegungsbetrachtungen, als auch bei Rissbreitenuntersuchungen ist die Erfassung der zeitabhängigen Einflüsse aus dem rheologischen Verhalten des viskoelastischen Betons (Kriechen und Schwinden) unerlässlich.

Während sich bisher die meisten wissenschaftlichen Arbeiten überwiegend mit einer reinen Last- oder einer reinen Zwangbeanspruchung befassen, liegen vergleichsweise wenige Arbeiten über eine kombinierte Last-Zwangbeanspruchung vor.

Versuche zur Durchbiegung von Stahlbetonbauteilen

Im Bereich der experimentellen Untersuchungen gibt es eine Reihe von Langzeitversuchen zur Durchbiegung von Stahlbetonbauteilen [Had 25], [Jac 32], [Chr 6], [Gil 21].

Bei diesen Versuchen handelt es sich ausnahmslos um horizontal verschiebliche Einfeldträger, also Systeme bei denen keine Zwangnormalkräfte entstehen. Die längste Messdauer der Langzeitdurchbiegungen (8 Jahre) haben die Versuche von Christiansen.

Die bei den Versuchen aufgebrachten Dauerlasten sind sehr unterschiedlich und meist nicht an den Bewehrungsgrad gekoppelt. Bei den Versuchen von Jaccoud/Favre wird der

Belastungsgrad der Platten bewusst so gewählt, dass Bauteile in unterschiedlichen Rissbildungsstadien (ungerissen bis abgeschlossenes Rissbild) miteinander verglichen werden können. Die geometrischen Bewehrungsgrade der durchgeführten Plattenversuche sind mit ca. $\rho_s=0,5\%$ halb so groß wie die Bewehrungsgrade der untersuchten Balken.

Da die für die Durchbiegung des Stahlbetonbauteils bestimmenden Parameter in den Versuchen sehr unterschiedlich sind, sind die Versuche untereinander kaum vergleichbar.

Reine zentrische Zwangbeanspruchung

Zur zentrischen Zwangbeanspruchung sind nur wenige Versuche bekannt. Falkner [Fal 18] untersucht experimentell die entstehenden Zwangkräfte bei einem reinen Zugstab aus Stahlbeton unter Temperatureinwirkung (Abkühlung $\Delta T_N = -60 \text{ K}$) und vollständiger Behinderung der Verformungen. Die in den Versuchen gemessenen Zwangkräfte betragen nur etwa 11% der linear elastisch berechneten Zwangnormalkräfte nach Zustand I, ohne Berücksichtigung einer Rissbildung.

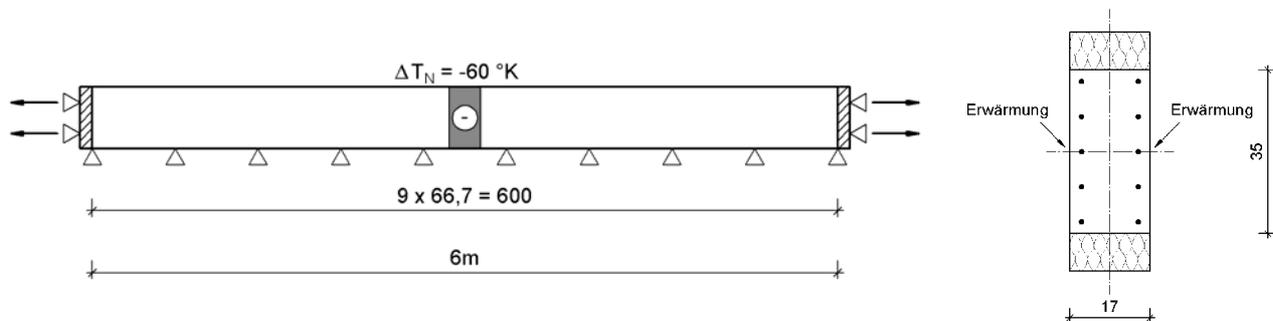


Bild 10: Untersuchtes System nach [Fal 18]

Kombinierte Beanspruchung aus Last- und zentrischem Zwang

Zur kombinierten Beanspruchung aus Last und zentrischem Zwang gibt es nur wenige theoretische Untersuchungen und keine veröffentlichten Versuche.

In [Pfe 55] findet man ein Beispiel einer 8 m spannenden Hochbaudecke unter kombinierter Beanspruchung aus Last und zentrischem Zwang. Für die als Durchlaufträger tragende einachsig gespannte Decke werden bezogene Zwangkräfte in Abhängigkeit vom Belastungsniveau (Gebrauchslast, Volllast) und von der Bewehrungsanordnung angegeben. Der Bewehrungsgrad der Platte im Stützbereich beträgt $\rho_{s,St}=0,4\%$. Im Beispiel wird gezeigt, dass bei fehlender Bewehrung für Zwang nicht nur die Rissbreiten in unzulässigem Maße überschritten werden, sondern dass die Bewehrung durch die zusätzliche Verformungseinwirkung ε_L ins Fließen kommt. Dies ist bei dem vorliegenden Beispiel schon bei Dehnung von $-0,25 \text{ ‰}$ bis $-0,35 \text{ ‰}$ der Fall. Die Zwangkräfte unter Volllast sind kleiner als unter ständiger Last, bleiben aber in beiden Fällen deutlich unter der Rissnormalkraft.

Eine weitere Untersuchung zum Verhalten von Hochbaudecken unter kombinierter Beanspruchung findet man in [Schn 60]. Ausgehend von einem Grundsystem eines Dreifeldträgers mit Randeinspannung und horizontal unverschieblicher Lagerung an den

Rändern, werden systematisch einzelne, für die Durchbiegung und Rissbreite relevante Parameter variiert und die Ergebnisse anhand einer Auswertung über dem Stützbereich verglichen. Die Bewehrung der zu untersuchenden Decken wird so gewählt, dass sie die konventionellen Nachweise im Grenzzustand der Tragfähigkeit und der Gebrauchstauglichkeit erfüllt. Untersucht und verglichen wird die Auswirkung einer zentrischen Temperatureinwirkung von $\Delta T_N = 0 \text{ K}$, -5 K , -10 K , -15 K und -20 K . In der Studie konnte eine Vergrößerung der Rissbreite infolge Abkühlung der Decke festgestellt werden, sowie eine starke Vergrößerung der Durchbiegung infolge der durch die Zugkräfte ausgelöste Verringerung der Biegesteifigkeit.

Näherungsverfahren zur Ermittlung der Zwangkräfte (Fehling/Leutbecher)

Fehling/Leutbecher [Feh 19] leiten auf der Grundlage der Risstheorie nach DIN 1045-1 für den beidseitig eingespannten Einfeldträger mit horizontal unverschieblicher Lagerung ein Näherungsverfahren mit zugehörigen Bemessungshilfen zur direkten Ermittlung der Zwangnormalkraft infolge ε_L bei gleichzeitig vorhandener äußerer Belastung her.

Mit den in [Feh 19] dargestellten Diagrammen lässt sich die Zwangnormalkraft direkt ermitteln. Eingangswerte für die Diagramme sind für die Lasteinwirkung ein bezogenes Moment und für die Verformungseinwirkung eine bezogene Dehnung. Das bezogene Moment erhält man aus dem Momentenverlauf mit dem Feldmoment nach linear-elastischer Berechnung der zu untersuchenden Belastung. Dabei bleibt die Reduzierung des Feldmomentes infolge der Zugnormalkraft nach Theorie II. Ordnung unberücksichtigt, was auf der sicheren Seite liegt. In den Diagrammen sind die Anforderungen aus der Begrenzung der Rissbreite schon enthalten. Die mit den Diagrammen ermittelte Bewehrung steht in direktem Zusammenhang mit der Normalkraft. Wird eine andere Bewehrung gewählt, so ändert sich auch die zugehörige Normalkraft. Für unterschiedliche Beiwerte k nach DIN 1045-1 Abschnitt 11.2.2 (5) mit dem nichtlinear verteilte Eigenspannungen berücksichtigt werden, werden jeweils eigene Diagramme erstellt. Gleiches gilt für unterschiedliche d_1/h .

Der anschließende Nachweis der Begrenzung der Rissbreite, der mit den Formeln zur direkten Rissbreitenberechnung nach DIN 1045-1 geführt werden kann, ergibt dann die erforderliche Bewehrung zur Rissbreitenbeschränkung für die kombinierte Beanspruchung.

Die statisch erforderliche Bewehrung im Grenzzustand der Tragfähigkeit (GZT) ist unabhängig von der Rissbreitenbeschränkung zu ermitteln.

An dem in [Feh 19] dargestellten Anwendungsbeispiel einer Lagerhalle zeigen *Fehling/Leutbecher*, dass die vereinfachte getrennte Bemessung für Last und Zwang nach DIN 1045-1, Abschnitt 11.2.4 (7) im Feld 13% und im Stützbereich ca. 23% weniger Bewehrung ergibt, als der genaue Nachweis für die kombinierte Beanspruchung. D. h. die Regelung der getrennten Bemessung liegt hier auf der unsicheren Seite. Im Feldbereich oben ergibt hingegen die Bemessung für die kombinierte Beanspruchung 40% weniger Bewehrung als der vereinfachte getrennte Nachweis für Last und Zwang, welcher an der Stelle somit unwirtschaftlicher ist.

5 Einwirkungen

5.1 Äußere Lasten

Als äußere Last wird nachfolgend eine über die Bauteillänge konstante vertikale Linienlast angesetzt. Im Hochbau häufig vorkommende Lasteinwirkungen resultieren meist aus:

- ständigen Einwirkungen
- veränderlichen Einwirkungen

Je nach Nachweis ergeben sich unterschiedliche Beanspruchungsniveaus. In DIN 1055-100 [DIN 10] wird im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit zwischen drei Bemessungssituationen (selten, häufig, quasi-ständig) unterschieden. So ergibt sich z. B. bei einer veränderlichen Einwirkung:

$$\text{GZT: } q_{Ed} = 1,35 \cdot g_k + 1,5 \cdot q_k$$

$$\text{GZG: } q_{rare} = 1,0 \cdot g_k + 1,0 \cdot q_k$$

$$q_{frequ} = 1,0 \cdot g_k + \psi_1 \cdot q_k$$

$$q_{perm} = 1,0 \cdot g_k + \psi_2 \cdot q_k$$

Um die Ergebnisse verschiedener Systeme im Gebrauchslastzustand vergleichen zu können, ist es zweckmäßig, sich auf vorab definierte, einheitliche Belastungsniveaus zu beziehen.

Bestimmung der charakteristischen Belastungsniveaus

Bei der linear elastischen Berechnung muss im GZT die Beanspruchung M_{Ed} gleich oder kleiner sein als die Biegetragfähigkeit M_{Rd} des Querschnitts:

$$M_{Ed} \leq M_{Rd} = \mu_{Rd} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} \quad (5.1)$$

$$\mu_{Rd} = \text{Funktion von } \rho_s$$

$$\rho_s = A_s / b \cdot d$$

Bei den nachfolgenden Untersuchungen wird davon ausgegangen, dass in den Querschnitten längs eines Bauteils mindestens die Bewehrung aus der Bemessung nach linear elastischer Berechnung im GZT vorhanden ist. Wird etwas mehr Bewehrung eingelegt als für die Tragsicherheit benötigt wird, wirkt sich dies günstig auf die Durchbiegungen und Rissbreiten aus.

Ausgehend vom Beanspruchungsniveau q_{Ed} wird mit Hilfe von Belastungsfaktoren auf die Lastniveaus der Gebrauchszustände geschlossen. Für die quasi-ständige und seltene Einwirkungskombination ergibt sich:

$$f_{rare} = \frac{q_{Ed}}{q_{rare}} \quad f_{perm} = \frac{q_{Ed}}{q_{perm}} \quad (5.2), (5.3)$$

Der Belastungsfaktor für die quasi-ständige Einwirkungskombination ist vom Verkehrslastanteil (q_k/g_k), sowie von der Kategorie der Belastung (Kombinationsbeiwert ψ_2) abhängig. Da sich diese Parameter in der Regel in gewissen Grenzen bewegen, ergibt sich auch für den Belastungsfaktor nur eine begrenzte Bandbreite. In Bild 11 sind die Zusammenhänge beispielhaft für $\psi_2=0,3$ und $\psi_2=0,5$ dargestellt. Der ebenfalls dargestellte Belastungsfaktor für die seltene Kombination ist unabhängig vom Kombinationsbeiwert ψ_2 und variiert demzufolge weniger. Obwohl für die Nachweise der Durchbiegungs- und Rissbreitenbegrenzung die quasi-ständige Bemessungssituation maßgebend ist, kann die seltene Einwirkungskombination eine Vorschädigung bzw. eine Reduzierung der Steifigkeiten mit sich bringen.

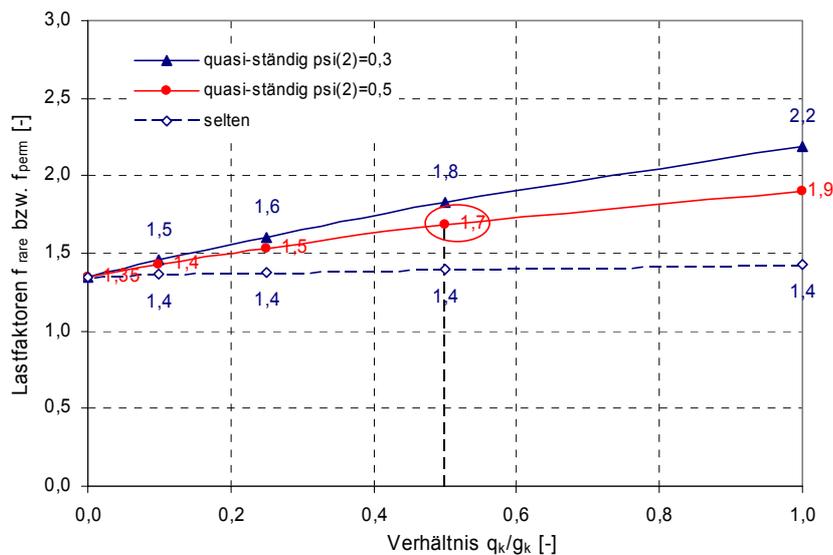


Bild 11: Belastungsfaktoren f_{perm} und f_{rare} bei einer veränderlichen Einwirkung

Im Betonbau ist der Verkehrslastanteil i. d. R. kleiner als der Anteil aus Eigenlast ($q_k/g_k < 1,0$). Ein bei Decken üblicher Wert liegt bei $q_k/g_k = 50\%$. Der Parameter ψ_2 variiert zwischen 0,3 und 0,8 und hat nur einen Einfluss auf den Faktor f_{perm} .

Für die nachfolgenden numerischen Untersuchungen unter quasi-ständiger Belastung wird vereinfacht folgender Belastungsfaktor angenommen, der die üblichen Verhältnisse im Mittel gut beschreibt:

$$f_{perm} = \frac{q_{Ed}}{q_{perm}} = 1,7 \quad (5.4)$$

$$\text{bzw. } q_{perm} = q_{Ed} / 1,7$$

Der untere Grenzwert für f_{perm} liegt bei Bauteilen vor, die nur durch ihr Eigengewicht beansprucht werden ($q_k/g_k=0$).

$$f_{perm} = 1,35$$

5.2 Temperatur

Bei den Temperatureinwirkungen ist zunächst grundsätzlich zu unterscheiden, ob es sich um ein Außenbauteil (z. B. offene Parkdecks, Tiefgaragen, Fassaden) oder um ein Innenbauteil (im Innern von gedämmten und klimatisierten Gebäuden) handelt. DIN 1055-7 [DIN 11] gibt keine konkreten Werte für die Temperatureinwirkung bei Gebäuden und Fassaden an. Der Abschnitt 6.2 behandelt Temperatureinwirkungen bei Gebäuden, wenn sich die Temperatur innerhalb des Gebäudes um weniger als 20 K während des üblichen Gebrauchs ändert. Für die Ermittlung von Temperaturprofilen darf die minimale Außenlufttemperatur zu -24°C und die maximale Außenlufttemperatur zu $+37^{\circ}\text{C}$ angenommen werden. Zusätzliche Effekte aus der Sonneneinstrahlung sind zu berücksichtigen, wenn sie wesentlich sind.

Innenlufttemperatur

Die Innenlufttemperaturen von beheizten Gebäuden hängen vom Wärmeverhalten des Gesamtgebäudes, sowie der Nutzung und Lüftung ab. Sie schwanken i. d. R. zwischen 15°C und 30°C . Je nach Aufstelltemperatur ist mit einer Erwärmung bzw. Abkühlung von ca. 15 K zu rechnen.

$$\Delta T_{N,k} = \pm 15 \text{ K} \quad (5.5)$$

$$\text{bzw. } \varepsilon_L = \alpha_T \cdot \Delta T_N = \pm 0,15\%$$

Gemäß DIN 1055-7 kann bei der Ermittlung der Temperaturprofile für Gebäude von einer konstanten Temperaturverteilung in den Bauteilen ausgegangen werden. Die zur Bemessung der Bauteile angegebenen Temperatureinwirkung ΔT_N ist nicht explizit angegeben.

Außenlufttemperatur

Die Außenlufttemperatur wird von der Sonnenstrahlung und der Lufttemperatur beeinflusst. Beide Anteile werden zur Rechenvereinfachung zu einer fiktiven Lufttemperatur – auch Sonnenlufttemperatur genannt – zusammengefasst. Die Erwärmung durch die Sonnenstrahlung ist wesentlich größer als der Anteil durch die Lufttemperatur.

Für Außenbauteile können die Temperaturschwankungen im Bauteil in Anlehnung an DIN 1055-7, Abschnitt 6.3 (Temperatureinwirkungen bei Brücken) angenommen werden.

$$\Delta T_{N,neg} = T_{e,\min} - T_0 - \Delta T_0 = (-15 - 10 - 5) \text{ K} = -30 \text{ K} \quad (5.6)$$

$$\Delta T_{N,pos} = T_{e,\max} - T_0 + \Delta T_0 = (40 - 10 + 5) \text{ K} = +35 \text{ K} \quad (5.7)$$

Und damit vereinfacht für den Ansatz in den nichtlinearen Berechnungen:

$$\Delta T_{N,k} = \pm 30 \text{ K} \quad (5.8)$$

$$\text{bzw. } \varepsilon_L = \alpha_T \cdot \Delta T_N = \pm 0,3\%$$

5.3 Schwinden

Als Schwinden bezeichnet man die zeitabhängige und lastunabhängige Verformung des Betons. Dabei spielen eine Reihe von unterschiedlichen Mechanismen (Kapillarschwinden, Schrumpfen, Trocknungsschwinden, Karbonatisierungsschwinden) eine Rolle. Die zwei maßgeblichen Komponenten des Schwindens sind das Austrocknen des Betons (Trocknungsschwinden) sowie die Volumenabnahme bei der Hydratation (Schrumpfen).

Schrumpfen

Das Schrumpfen findet im Zuge der Hydratation statt und ist im Wesentlichen von der Betonzusammensetzung abhängig. Es setzt sich aus dem chemischen Schwinden (geringeres Volumen der Reaktionsprodukte aus Zement und Wasser im Vergleich zu den Ausgangsprodukten) und dem autogenen Schwinden (innere Austrocknung der Zementsteinmatrix) zusammen. Mit zunehmender Festigkeit und der damit einhergehenden mikrostrukturellen Veränderungen im Gefüge des Betons steigt das Schrumpfen an. Bei normalfestem Beton ist das Schrumpfen um ein Vielfaches kleiner als das Trocknungsschwinden.

Trocknungsschwinden

Der Hauptanteil des Schwindens beim normalfesten Beton kommt aus dem Trocknungsschwinden. Es wird durch eine Wasserabgabe an die Umgebung hervorgerufen und ist daher stark von der relativen Luftfeuchte der Umgebung abhängig. Das Trocknungsschwinden ist bei einer Wiederbefeuchtung teilweise reversibel (Quellen).

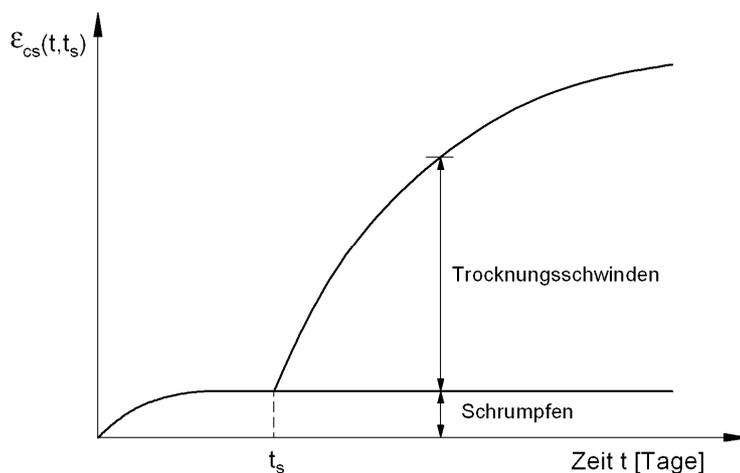


Bild 12: Zeitlicher Verlauf und Schwindanteile bei normalfestem Beton

Mittlere Schwindverformung nach DIN 1045-1 bzw. Heft 525 des DAfStb

Für die Berechnung des Schwindens werden die Ansätze nach DIN 1045-1 [DIN 8] bzw. Heft 525 DAfStb [DIN 9] verwendet. Diese basieren auf den in den 1980er Jahren entwickelten und in den CEB-FIP Modell Code [CEB 5], sowie in den Eurocode 2 [DIN 12] übernommenen, verbesserten Vorhersagemodellen des Kriechens und Schwindens. Auf Grund des erweiterten Anwendungsbereiches der DIN 1045-1, die sich auch auf Leichtbetone und hochfeste Betone bezieht, wurden die ursprünglichen Ansätze nochmals angepasst. Somit setzt sich nach Heft 525 die mittlere Schwindverformung $\varepsilon_{cs}(t, t_s)$ eines Bauteils – im Gegensatz zum Modell Code 90 – aus den beiden Verformungskomponenten des Trocknungsschwindens und des Schrumpfens zusammen.

Mittlere Schwindverformung:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \underbrace{\varepsilon_{cas}(t)}_{\text{Schrumpfen}} + \underbrace{\varepsilon_{cds}(t, t_s)}_{\text{Trocknungsschwinden}} \quad (5.9)$$

Dabei werden die Grundwerte der beiden Anteile mit einer Zeitfunktion multipliziert und addiert.

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \underbrace{\varepsilon_{cas0}(f_{cm})}_{\text{Grundwert Schrumpfen}} \cdot \underbrace{\beta_{as}(t-t_s)}_{\text{Zeitfunktion}} + \underbrace{\varepsilon_{cds0}(f_{cm})}_{\text{Grundwert Trocknungsschwinden}} \cdot \underbrace{\beta_{RH}(RH)}_{\text{Zeitfunktion}} \cdot \underbrace{\beta_{ds}(t-t_s)}_{\text{Zeitfunktion}} \quad (5.10)$$

Das Schrumpfen ergibt sich aus:

$$\varepsilon_{cas0}(f_{cm}) = -\alpha_{as} \cdot \left(\frac{f_{cm}}{60 + f_{cm}} \right)^{2,5} \cdot 10^{-6} \quad (5.11)$$

$$\beta_{as}(t) = 1 - \exp(-0,2\sqrt{t}) \quad (5.12)$$

Das Trocknungsschwinden ergibt sich aus:

$$\varepsilon_{cds0}(f_{cm}) = \left[(220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot \exp\left(-\alpha_{ds2} \cdot \frac{f_{cm}}{10}\right) \cdot 10^{-6} \right] \quad (5.13)$$

$$\beta_{RH}(RH) = \begin{cases} -1,55 \cdot [1 - (RH/100)^3] & \text{für } 40 \leq RH < 99 \cdot \beta_{s1} < 100\% \\ 0,25 & \text{für } RH > 99 \cdot \beta_{s1} \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\beta_{s1} = \left(\frac{35}{f_{cm}} \right)^{0,1} \leq 1,0 \quad (5.15)$$

$$\beta_{ds}(t-t_s) = \sqrt{\frac{(t-t_s)}{350 \cdot \left(\frac{h_0}{100} \right)^2 + (t-t_s)}} \quad (5.16)$$

Definition der Parameter:

f_{cm}	mittlere Betondruckfestigkeit im Alter von 28 Tagen
α_{as}	Beiwert zur Berücksichtigung der Zementart
t	Betonalter zum betrachteten Zeitpunkt [Tage]
$\alpha_{ds1}, \alpha_{ds2}$	Beiwerte zur Berücksichtigung der Zementart
β_{s1}	Beiwert zur Berücksichtigung der inneren Austrocknung des Betons
RH	relative Luftfeuchte der umgebenden Luft [%]
t_s	Betonalter zum Beginn der Austrocknung [Tage]
h_0	wirksame Bauteildicke [mm]

Einflussparameter des Schwindens

Die Größe und der zeitliche Verlauf der Schwindverformung sind von folgenden Parametern abhängig:

- *Luftfeuchtigkeit und Temperatur der Umgebung*
- Wasserzementwert, bzw. die enthaltene Wassermenge
- Zementart, Zuschläge
- Verhältnis der der Austrocknung ausgesetzten Oberfläche zur Querschnittsfläche
- Beginn der Austrocknung

Bild 13 zeigt die Endwerte des Trocknungsschwindens eines Betons C 30/37 mit dem Zementtyp 2 in Abhängigkeit von der relativen Luftfeuchte nach Heft 525 des DAfStb. Da der Hauptanteil des Schwindens aus dem Trocknungsschwinden kommt, ist bei normalfestem Beton somit das Schwinden insgesamt stark von der relativen Luftfeuchte abhängig. Die Bauteilgeometrie wirkt sich nur auf den zeitlichen Verlauf und nicht auf den Endwert des Trocknungsschwindens aus.

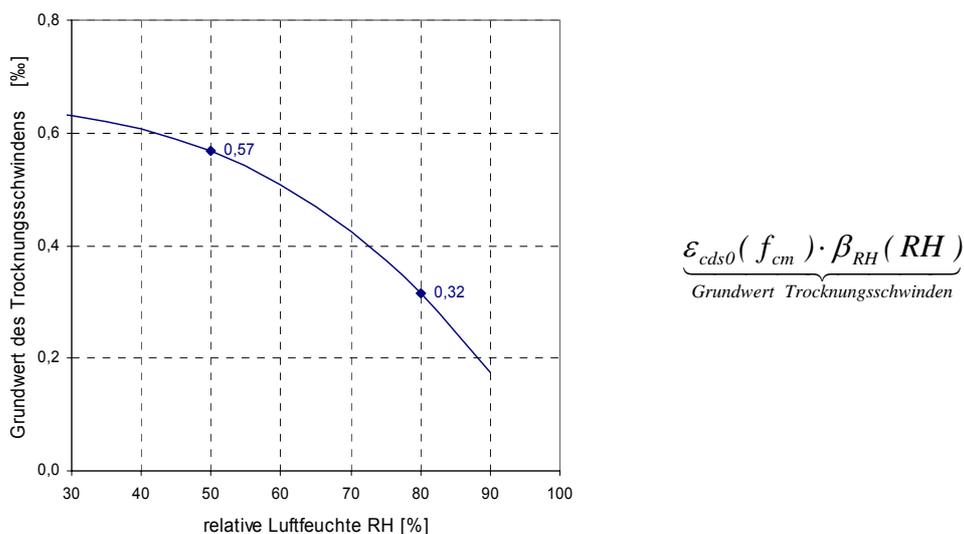


Bild 13: Einfluss der Luftfeuchte auf das Trocknungsschwinden C30/37, Zementart 2, (N,R)

Zeitlicher Verlauf des Schwindens

Das Schwinden ist ein zeitlich langsam ablaufender Prozess, bei dem das theoretische Endschwindmaß $\varepsilon_{cs}(\infty)$ erst nach Jahrzehnten erreicht wird. Bild 14 zeigt die Zeitfunktion des Trocknungsschwindens gemäß Heft 525 für unterschiedliche Bauteildicken. Bei einer Deckendicke von 300 mm sind nach einem Jahr erst 32%, nach 10 Jahren 73% des Endschwindmaßes erreicht.

Des Weiteren wird der zeitliche Verlauf des Schwindens von der wirksamen Bauteildicke bestimmt, welche bei Deckenplatten gleich der Deckendicke ist. Bei Decken mit geringer Dicke verläuft das Schwinden schneller als bei größeren Bauteildicken.

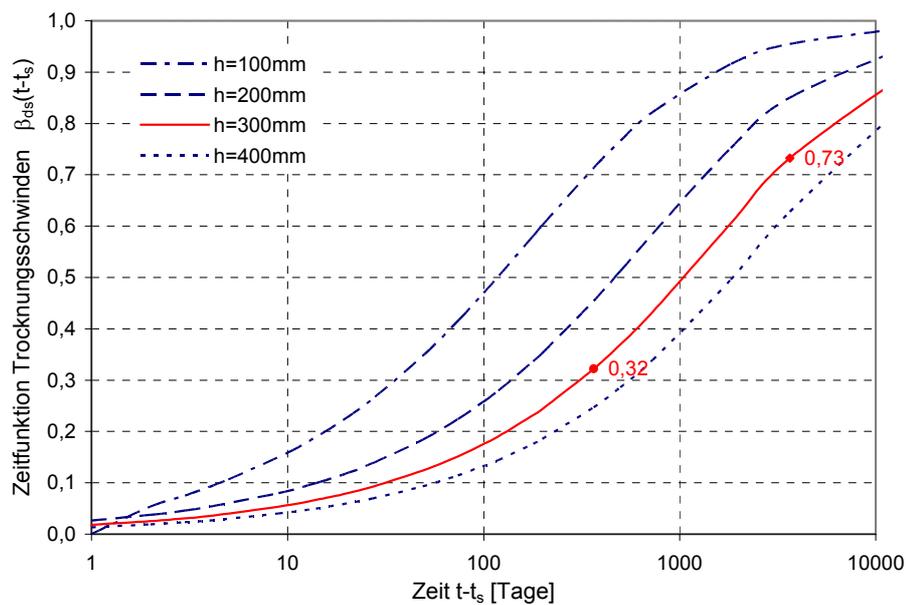


Bild 14: Zeitfunktion des Trocknungsschwindens

Ansatz für die numerische Simulation

Als Bezugswert für die Berechnung der Durchbiegungen und Rissbreiten zum Zeitpunkt $t=\infty$ wird nachfolgendes Schwindmaß angesetzt.

$$\varepsilon_{cs}(\infty) = -0,5\text{‰} \quad (5.17)$$

5.4 Kriechen des Betons

Das Kriechen bezeichnet die zeitabhängige Dehnungszunahme des Betons infolge einer ständigen Belastung. Die dem Kriechen zu Grunde liegenden Mechanismen sind komplex.

Auf Gebrauchslastniveau wird das Kriechen des Betons fast ausschließlich durch das Kriechen der Zementsteinmatrix verursacht, da die Zuschläge keine nennenswerte zeitabhängige Verformungszunahme zeigen. Bis zu einer Spannung von ca. $0,4 f_c$ sind die Kriechverformungen nahezu proportional zur angreifenden Belastung (lineares Kriechen). Oberhalb von ca. $0,4 f_c$ nimmt das Kriechen durch fortschreitende Mikrorissbildung stark zu (nichtlineares Kriechen). Die Kriechverformung ist nach einer Entlastung teilweise reversibel (Rückkriechen des verzögert elastischen Anteils).

Die einzelnen Anteile des Kriechens sind in Bild 15 dargestellt. Die lastabhängige elastische Dehnung $\varepsilon_{c,el}$ vergrößert sich im Laufe der Zeit um den Kriechanteil $\varepsilon_{cc}(t, t_0)$. Die Kriechverformung setzt sich aus einem bleibenden Anteil, dem Fließen ε_{cf} und einem elastischen Anteil ε_{cv} , der reversibel ist, zusammen.

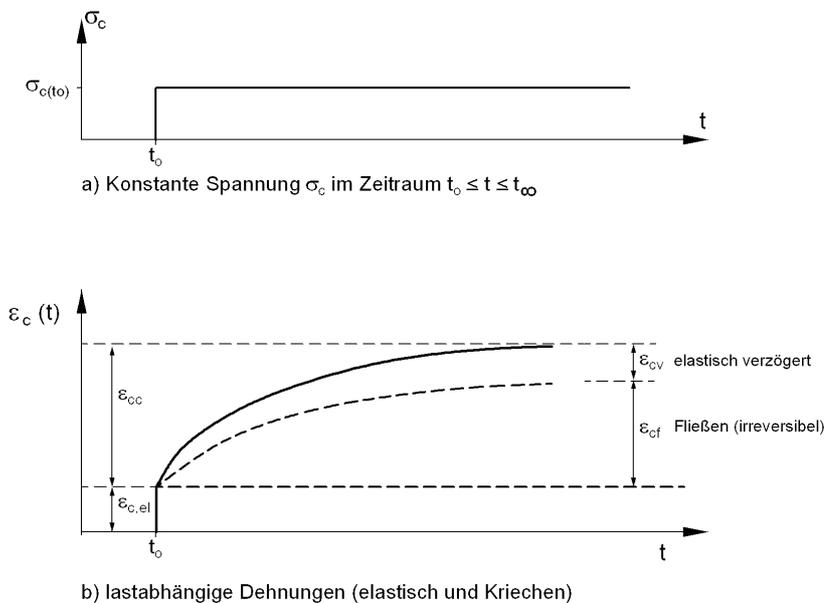


Bild 15: Spannungen und Dehnungen infolge Last und Kriechen

Im Allgemeinen wird das Verhältnis von Kriechverformung zur elastischen Verformung im Bereich des linearen Kriechens als Kriechzahl $\varphi(t, t_0)$ bezeichnet.

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cc}(t, t_0)}{\varepsilon_{c,el}(t_0)} \quad (5.18)$$

$\varphi(t, t_0)$	Kriechzahl
$\varepsilon_{c,el}(t_0)$	elastische Dehnung zum Zeitpunkt des Belastungsbeginns
$\varepsilon_{cc}(t, t_0)$	Kriechdehnung zum Zeitpunkt t

Ermittlung der Kriechzahl nach DIN 1045-1 und Heft 525 des DAfStb

Zur Erfassung des Betonkriechens sind in der Vergangenheit verschiedene Modelle für das rheologische Verhalten entwickelt worden (Summationsansatz, Produktansatz, siehe auch [Mül 50]). Der in DIN 1045-1 und Heft 525 des DAfStb [DIN 9] beschriebene Ansatz beruht auf einem Produktansatz. Das Kriechen wird über das Produkt einer Grundkriechzahl mit einer Zeitfunktion beschrieben.

$$\varphi(t, t_0) = \underbrace{\varphi_0}_{\text{Grundkriechzahl}} \cdot \underbrace{\beta_c(t, t_0)}_{\text{Zeitfunktion}} \quad (5.19)$$

Nach Heft 525 DAfStb berechnet sich die Grundkriechzahl zu:

$$\varphi_0 = \underbrace{\varphi_{RH}}_{\text{Luftfeuchte}} \cdot \underbrace{\beta(f_{cm})}_{\text{Festigkeit}} \cdot \underbrace{\beta(t_0)}_{\text{Belastungsalter}} \quad (5.20)$$

$$\text{Luftfeuchte:} \quad \varphi_{RH} = \left[1 + \frac{1 - RH / 100}{\sqrt[3]{0,1 \cdot h_0 / 100}} \cdot \alpha_1 \right] \cdot \alpha_2 \quad (5.21)$$

$$\text{Festigkeit:} \quad \beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}} \quad (5.22)$$

$$\text{Belastungsalter:} \quad \beta(t_0) = \frac{1}{0,1 + (t_{0,eff} / 1)^{0,2}} \quad (5.23)$$

$$t_{0,eff} = t_0 \cdot \left[\frac{9}{2 + (t_0)^{1,2}} + 1 \right]^\alpha \quad (5.24)$$

für Zementtyp 2, N, R: $\alpha = 0, \Rightarrow t_{0,eff} = t_0$

Die Zeitfunktion $\beta_c(t, t_0)$ ist eine Hyperbelfunktion mit dem Grenzwert 1 für $t \rightarrow \infty$.

$$\beta_c(t, t_0) = \left[\frac{(t - t_0)}{\beta_H + t - t_0} \right]^{0,3} \quad (5.25)$$

$$\beta_H = 150 \cdot [1 + (1,2 \cdot RH / 100)^{1,8}] \cdot h_0 + 250 \cdot \alpha_3 \leq 1500 \cdot \alpha_3 \quad (5.26)$$

Definition der Parameter:

t_0	Belastungsalter des Betons [Tage]
RH	relative Luftfeuchte der Umgebung [%]
h_0	$= 2 \cdot A_c / u$ wirksame Bauteildicke [mm]
f_{cm}	mittlere Betondruckfestigkeit nach 28 Tagen
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	Beiwerte zur Berücksichtigung der Betondruckfestigkeit

Einflussparameter für das Kriechen

Das Kriechen des Betons wird im Wesentlichen von folgenden Parametern beeinflusst:

- Betonalter bei Belastungsbeginn t_0
- Höhe der Belastung
- Bauteilabmessung
- Relative Luftfeuchtigkeit der Umgebung
- Zementart
- Wassorzementwert

Nach Heft 525 [DIN 8] ist der Grundwert des Kriechens von den drei Parametern Betonfestigkeitsklasse, relative Luftfeuchte der Umgebung und Belastungsalter abhängig. Bild 16 zeigt beispielhaft den Einfluss der relativen Luftfeuchte und des Belastungsalters auf die Grundkriechzahl φ_0 . Die Grundkriechzahl ist bei einer relativen Luftfeuchte von RH=50%, wie es häufig in Innenräumen der Fall ist, deutlich größer als bei einer relativen Luftfeuchte von 80% (allgemein im Freien). Sie nimmt mit zunehmendem Belastungsalter ab. Das Belastungsalter des Betons wird auf Grund der Ausschulfristen in der Regel mindestens $t_0 = 5$ Tage betragen.

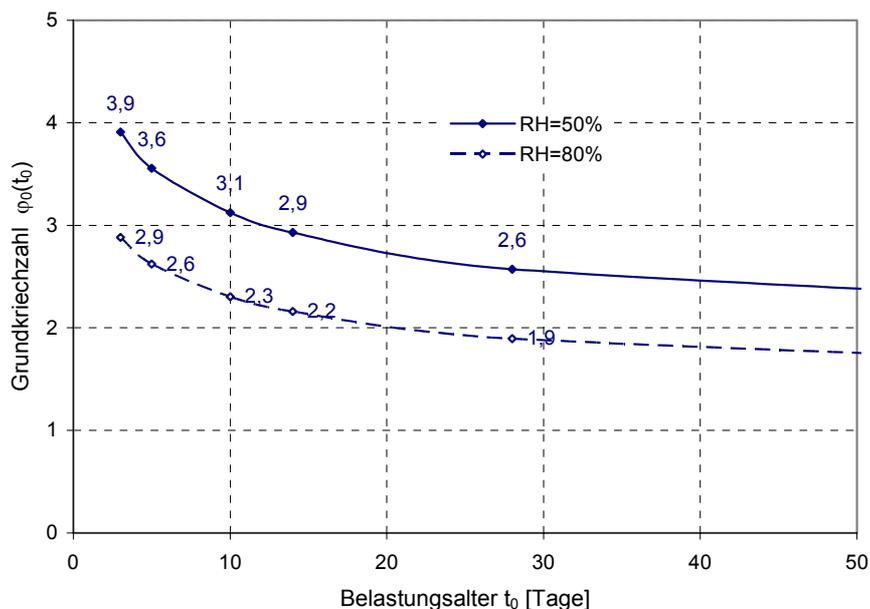


Bild 16: Einfluss des Belastungsalters und der relativen Luftfeuchte auf die Grundkriechzahl Beton C 30/37, Zementtyp 2, $h_0=300\text{mm}$

Zeitliche Entwicklung des Kriechens

Das Kriechen des Betons entwickelt sich schneller als das Schwinden, was sich in der Zeitfunktion nach [DIN 9] widerspiegelt. Schon nach einem Tag ($t-t_0=1$) wird ca. 15%, nach einem Jahr ca. 75% des Endkriechwertes erreicht (Bild 17). Die Zeitfunktion des Kriechens berücksichtigt die Einflüsse aus Belastungsalter, relativer Luftfeuchte und effektiver Bauteildicke. Wie Bild 17 zeigt, ist der Einfluss der effektiven Bauteildicke wesentlich geringer als beim Schwinden.

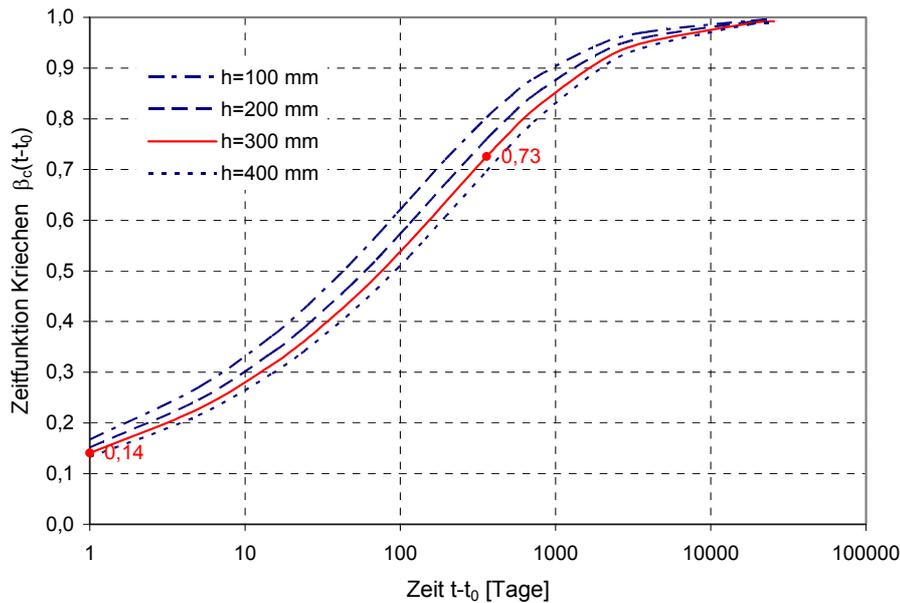


Bild 17: Zeitfunktion des Kriechens ($t_0=5$ Tage, RH=50%) nach [DIN 9]

Ansatz für die nichtlinearen Berechnungen

Wie gezeigt, variiert die Grundkriechzahl φ_0 in Abhängigkeit vom Belastungsalter und der relativen Luftfeuchte, so dass für die Berechnung der Durchbiegung und Rissbreiten kein einheitlicher Wert angenommen werden kann. Als Bezugswert für die nichtlinearen Berechnungen wird ein mittlerer Wert gewählt.

$$\varphi_0 = 2,5$$

Für die Ermittlung der Durchbiegungen und Rissbreiten zum Zeitpunkt $t=\infty$ spielt der zeitliche Verlauf des Kriechens keine Rolle, so dass bei den nichtlinearen Berechnungen der Endwert des Kriechens angesetzt wird.

$$\varphi(\infty, t_0) = 2,5$$

Als kriecherzeugende Last wird die quasi ständige Einwirkungskombination angesetzt. Obwohl die Ausbaulast und die Verkehrslast erst zu einem späteren Zeitpunkt aufgebracht werden, wird für die Berechnung vereinfacht angenommen, dass die gesamte Last zum Zeitpunkt t_0 aufgebracht wird und dann über die Zeit in konstanter Größe vorhanden ist.

Das Kriechen wirkt sich insbesondere auf die Durchbiegungen aus, welche schon in den ersten Tagen nach Belastung deutlich zunehmen können, sowie auf die Relaxation der Zwangsschnittgrößen infolge Schwindens.

Zugkriechen

Das Zugkriechen wurde in [Kor 38] eingehend untersucht. Dabei zeigte sich Spannungsproportionalität der Kriechverformungen bis 70% der zentrischen Zugfestigkeit. Die festgestellten Kriechbeiwerte lagen in der bei Druckkriechen gefundenen Größenordnung, wobei eine deutliche Abhängigkeit vom Belastungsalter auftrat. Insbesondere konnte mit der Untersuchung bestätigt werden, dass die bei ungerissenen biegebeanspruchten Bauteilen bisher übliche Annahme von gleichgroßen Kriechzahlen in der Zug- und Druckzone gerechtfertigt ist.

Relaxation

Die Relaxation stellt einen Sonderfall des Kriechens dar. Sie drückt den Spannungsabfall bei konstant gehaltener Dehnung aus.

Der Relaxationswert ρ – auch als Alterungsbeiwert bezeichnet – drückt die mit dem Alter kleiner werdende Kriechfähigkeit des Betons aus. Bei dem Verfahren nach Trost werden die Berechnungen mit einer konstanten Kriechzahl durchgeführt. Um zu berücksichtigen, dass eine Einwirkung auf einen mit der Zeit weniger kriechfähigen Beton trifft, kann die Endkriechzahl mit einem Relaxationswert multipliziert werden.

$$\rho = 0,8$$

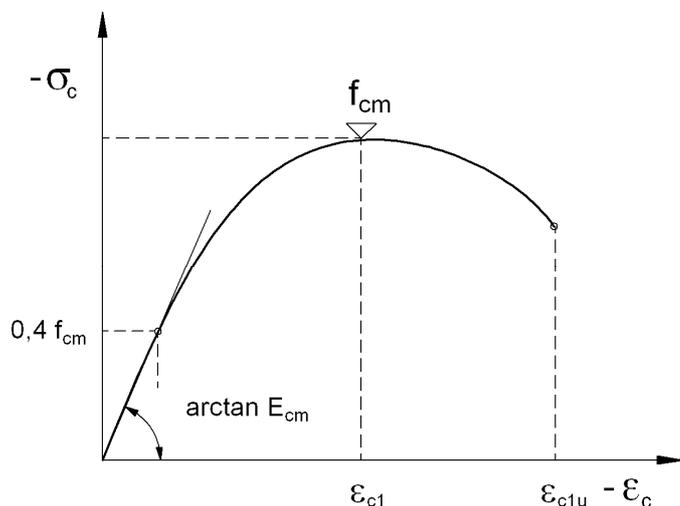
6 Werkstoffverhalten

6.1 Beton

6.1.1 Spannungs-Dehnungslinie des Betons im Druckbereich

Die analytische Beschreibung einer wirklichkeitsnahen Spannungs-Dehnungsbeziehung des Betons für nichtlineare Berechnungen basiert im Wesentlichen auf den Arbeiten von [Gras 22] und findet sich in DIN 1045-1 (Abschnitt 9.1.5) wieder. Dieser Ansatz wurde aus Kurzzeitversuchen abgeleitet und beschreibt das einachsige Verhalten des Betons unter einer Druckbeanspruchung mit Hilfe einer quadratischen Parabel. Die Anfangssteigung der Parabel entspricht dem Tangentenmodul E_{c0m} des Betons.

Für die hier durchgeführten nichtlinearen Berechnungen (Verformungsberechnungen und Schnittgrößen für die Nachweise im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit) wird mit „echten“ Mittelwerten der Betondruckfestigkeit f_{cm} gerechnet.



$$\sigma_c = - \left(\frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta} \right) \cdot f_{cm} \quad (6.1)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \quad k = -E_{c0m} \cdot \frac{\varepsilon_{c1}}{f_{cm}}$$

$$\varepsilon_{c1}, E_{c0m}, f_{cm} \quad \text{nach DIN 1045-1, Tab. 9}$$

Bild 18: Spannungs-Dehnungsbeziehung des Betons für Verformungsberechnungen nach DIN 1045-1

Kriechen

Zur Berücksichtigung des Langzeitverhaltens im Rahmen der numerischen Untersuchungen werden vereinfacht die Dehnungen in der Spannungsdehnungslinie des Betons mit dem Faktor $(1 + \varphi)$ multipliziert. Für einen Beton C 30/37 ist dies beispielhaft in Bild 19 dargestellt.

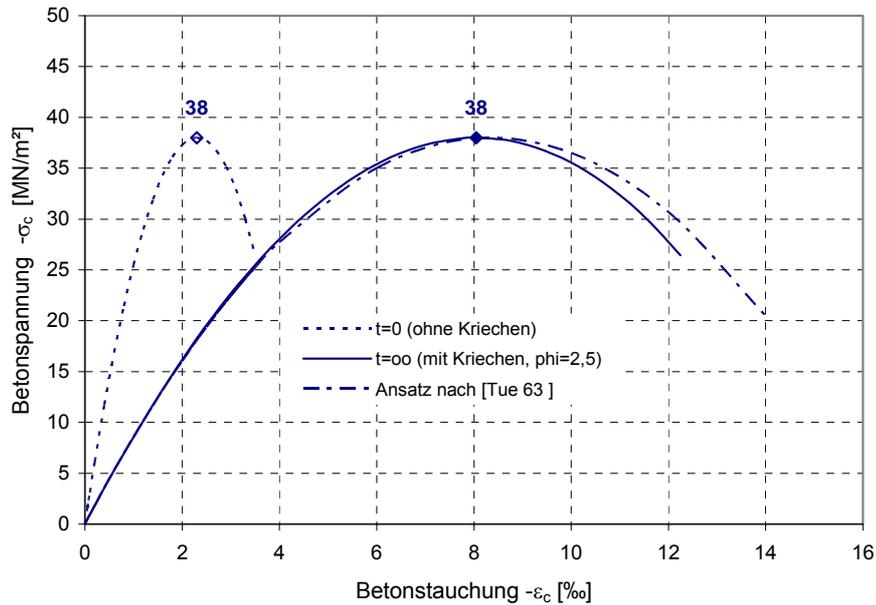


Bild 19: Spannungs-Dehnungsbeziehung für die Berechnung C 30/37 (mit und ohne Kriechen)
Kriechzahl: $\varphi = 2,5$

In Bild 19 ist zum Vergleich der in [Tue 63] vorgeschlagene vereinfachte Ansatz zur Beschreibung der Spannungs-Dehnungsbeziehung für das Langzeitverhalten dargestellt.

Ansatz gemäß [Tue 63]:

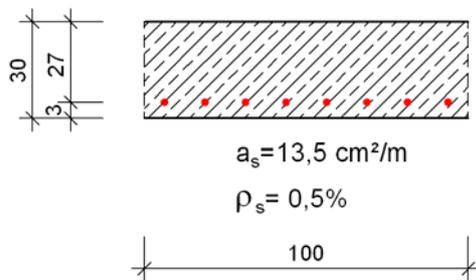
$$\sigma_c(t > 0) = \varepsilon_c \cdot \frac{E_c}{1 + \varphi} + \frac{\varepsilon_c^2 \cdot E_c^2}{4 \cdot (1 + \varphi)^2 \cdot f_{cd}} \quad (6.2)$$

Beide Ansätze stimmen weitestgehend überein.

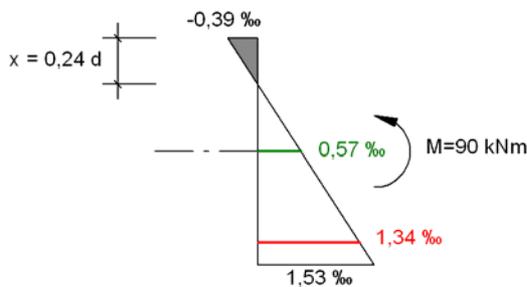
Einfluss des Kriechens auf die Dehnungsebene

Das Kriechen des Betons wirkt sich in den Bauteilbereichen, in denen die Querschnitte im Zustand I verbleiben, stark aus. Im gerissenen Zustand II dagegen, findet das Kriechen nur in der Druckzone statt. Die Randdehnung im Beton nimmt deutlich zu, die Druckzonenhöhe vergrößert sich. Bild 20 zeigt die Dehnungsebenen eines beispielhaft gewählten Plattenquerschnittes unter einem Moment, welches in etwa dem Moment im Gebrauchszustand entspricht.

Die Biegesteifigkeiten im Zustand II lassen sich aus den Krümmungen der Dehnungsebene ermitteln. Der durch das Kriechen bewirkte Steifigkeitsabfall eines Querschnitts im Zustand II ist wesentlich kleiner als bei einem Querschnitt im Zustand I. Im vorliegenden Beispiel ergibt sich zum Zeitpunkt $t = \infty$ ein Steifigkeitsabfall des gerissenen Querschnitts durch das Kriechen auf 74% des Wertes zum Zeitpunkt $t = 0$. Beim homogenen Querschnitt im Zustand I ergibt sich durch das Kriechen eine Reduzierung auf nur 28% der Anfangssteifigkeit.



a) ohne Kriechen



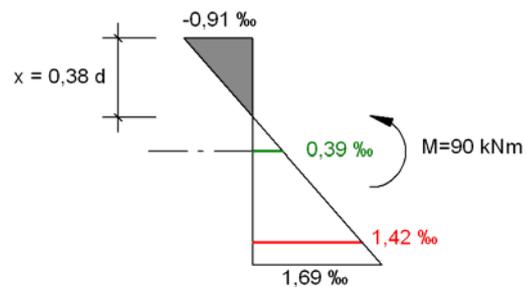
$$\kappa = 6,4 \cdot 1 / km$$

$$EI_{t=0}^{II} = (90 / 6,4) MN / m^2 = 14,1 MN / m^2$$

Zustand II: $EI_{t=\infty}^{II} / EI_{t=0}^{II} = 0,74$

Zustand I: $EI_{t=\infty}^I / EI_{t=0}^I \approx 1 / (1 + \varphi) = 0,28$

b) mit Kriechen



$$\kappa = 8,66 \cdot 1 / km$$

$$EI_{t=\infty}^{II} = (90 / 8,66) MN / m^2 = 10,4 MN / m^2$$

Bild 20: Dehnungsebene eines Querschnitts unter Biegebeanspruchung ohne und mit Kriechen ($\varphi=2,5$)

6.1.2 Elastizitätsmodul des Betons

Der Elastizitätsmodul des Betons ist ebenfalls eine stark streuende Größe und hängt von der Betonzusammensetzung ab. Die wesentlichen Parameter für den Elastizitätsmodul des Betons sind:

- Wasserzementwert
- E-Modul und Volumenanteil der Gesteinskörnung
- Betonalter
- Feuchtezustand des Betons

Der Elastizitätsmodul des Verbundwerkstoffs Beton hängt von den Elastizitätsmoduln seiner Komponenten Gesteinskörnung und Zementstein ab. Letzterer hängt von der Kapillarporosität und damit vom Wasserzementwert und Hydratationsgrad ab. Mit sinkendem Wasserzementwert steigt der Elastizitätsmodul des Zementsteins und somit auch des Betons. Mit zunehmender Festigkeit nimmt auch der Elastizitätsmodul zu.

Bezugswert in der Gleichung für die Spannungs-Dehnungslinie des Betons ist der Tangentenmodul (Bild 18). Dieser kann gemäß DIN 1045-1 in Abhängigkeit von der Druckfestigkeit wie folgt bestimmt werden:

$$E_{c0m} = 9500(f_{ck} + 8)^{1/3} \quad (6.3)$$

Der Elastizitätsmodul der Gesteinskörnung ist bei normalfestem Beton deutlich größer als der Elastizitätsmodul des Zementsteins und unterliegt großen Streuungen (z.B. 10.000 MN/m² für Sandstein, 90.000 MN/m² für Basalt). Durch Multiplikation des Elastizitätsmoduls mit einem Beiwert kann nach Heft 525 DAfStb [DIN 9] der Einfluss der verwendeten Gesteinskörnung berücksichtigt werden.

Der Elastizitätsmodul des Betons kann als Tangentenmodul oder Sekantenmodul bestimmt werden. Für Betrachtungen im Gebrauchszustand, bei denen die Arbeitslinie des Betons vereinfacht durch eine lineare Beziehung ausgedrückt wird, ist der Sekantenmodul E_{cm} (Sekante zwischen Ursprung und $0,4 f_{cm}$) maßgebend.

Der Wert des Sekantenmoduls beträgt ca. 90% des Tangentenmoduls und kann gemäß DIN 1045-1 wie folgt ermittelt werden.

$$E_{cm} = \alpha_i \cdot E_{c0m} = (0,8 + 0,2 \cdot f_{cm} / 88) \leq 1,0 \quad (6.4)$$

Im Gebrauchslastbereich sind die Elastizitätsmoduln für Druck- und Zugbeanspruchung gleich [Hil 28]. Während jedoch im Druckbereich bis zu einer Spannung von ca. 40% der Druckfestigkeit von nahezu linearem Verhalten ausgegangen werden kann, ist dies bei Zugbeanspruchung bis zu 90% der Zugfestigkeit der Fall.

Der Festigkeit entsprechend ist auch der Elastizitätsmodul vom Betonalter abhängig. Er wird zur Berechnung von Formänderungen infolge Kurzzeitbelastung verwendet.

6.1.3 Zugfestigkeit des Betons

Zur Beurteilung des Trag- und Verformungsverhaltens eines Stahlbetonbauteils spielt die Zugfestigkeit des Betons eine wesentliche Rolle. Sie wird bei der Bestimmung der Risschnittgrößen und bei der versteifenden Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen in Ansatz gebracht. Die Ermittlung der Risschnittgrößen erfolgt mit der Zugfestigkeit f_{ct} unter Berücksichtigung des Maßstabeffekts bei der Biegung und der die Festigkeit mindernden Eigenspannungen. Für die versteifende Mitwirkung zwischen den Rissen in der effektiven Randzone ist die zentrische Zugfestigkeit $f_{ct,eff}$ maßgebend.

Kurzzeitzugfestigkeit

Die Zugfestigkeit des Betons unterliegt großen Streuungen und wird im Wesentlichen von folgenden Parametern beeinflusst:

- Eigenschaften des Zementsteins
- Haftung zwischen Zementstein und Gesteinskörnung

Analog zur Druckfestigkeit nimmt die Zugfestigkeit mit sinkendem Wasserzementwert und steigendem Hydratationsgrad zu. Sie ist insbesondere von den mechanischen Eigenschaften der Zementsteinmatrix sowie von der Haftung der Gesteinskörner am Zementstein abhängig. Da die Haftung des Zementsteins an rauen Oberflächen größer ist, weisen Betone mit gebrochenen Zuschlägen eine 10 bis 20% höhere Zugfestigkeit auf, als Betone mit ungebrochenem Sand und Kies.

Infolge von Eigenspannungen aus Temperatur und Schwinden, welche bereits im jungen Alter zu Mikrorissen im Betongefüge führen können, nimmt die Zugfestigkeit ab. Die Zugfestigkeit des Betons f_{ctm} ist die im Kurzzeitversuch bestimmte einaxiale Zugfestigkeit. Sie wird an zentrisch gezogenen, prismatischen Prüfkörpern bestimmt. Da der zentrische Zugversuch versuchstechnisch aufwendig ist, wird häufig auch auf die indirekte Bestimmung über die Biegezugfestigkeit oder Spaltzugfestigkeit zurückgegriffen. Die Biegezugfestigkeit ist insbesondere von der absoluten Höhe des Biegebalkens abhängig (Maßstabeffekt). Mit steigender Balkenhöhe nimmt die Biegezugfestigkeit ab und nähert sich bei sehr hohen Balken der zentrischen Zugfestigkeit an.

Die rechnerische Bestimmung der Betonzugfestigkeit erfolgt zumeist in Abhängigkeit von der Betondruckfestigkeit und nimmt analog zur Druckfestigkeit mit der Betonfestigkeitsklasse zu. Aus der bestehenden Korrelation, kann der Mittelwert der zentrischen Zugfestigkeit gemäß DIN 1045-1 wie folgt über die Druckfestigkeit bestimmt werden:

$$f_{ctm} = 0,30 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (6.5)$$

Zur Berücksichtigung der Streuung der Zugfestigkeit können der 5% und 95%-Quantilwert herangezogen werden.

$$f_{ctk;0,05} = 0,7 \cdot f_{ctm} \quad (6.6)$$

$$f_{ctk;0,95} = 1,3 \cdot f_{ctm} \quad (6.7)$$

Verhalten unter Zugbeanspruchung

Bereits im unbelasteten Zustand weist der Beton in der Kontaktzone zwischen Zementstein und Gesteinskörnung Mikrorisse auf, die jedoch bis zu ca. 70% der Zugfestigkeit nicht nennenswert wachsen, so dass von einer linearen Spannungs-Dehnungslinie des Betons auf Zug ausgegangen werden kann. Die danach einsetzenden Nichtlinearitäten durch Mikrorisswachstum sind bis zum Erreichen von 90% der Zugfestigkeit ohne wesentliche Bedeutung. Bei höheren Zugbeanspruchungen beginnen diese Risse rechtwinklig zur äußeren Beanspruchung zu wachsen. Dieses Risswachstum lokalisiert sich an der schwächsten Stelle des Probekörpers in der so genannten Prozesszone bis sich schließlich ein einzelner Trennriss bildet. Der Prüfkörper versagt bei einer gut kontrollierten Wegsteuerung nicht schlagartig, sondern zeigt ein entfestigendes Verhalten, bei dem in der Risszone noch Zugspannungen übertragen werden.

Da die Zugfestigkeit des Betons durch das Wachstum von Mikrorissen bestimmt wird, die sich beim vollständigen Versagen zu einem durchgehenden Riss vereinigen, ist es nahe liegend, bruchmechanische Konzepte, d. h. Energiebetrachtungen, anzuwenden.

Hillerborg beschreibt in [Hill 27] ein fiktives Rissmodell, welches das Verformungsverhalten des Stabes in zwei fiktive Anteile, das Verhalten außerhalb der Risszone (Bruchprozesszone) und das Verhalten in der Risszone, aufteilt (Bild 21). Bis zum Erreichen der Zugfestigkeit verhält sich der Stab weitgehend elastisch und dissipiert nur geringe Energiemengen. Die das entfestigende Verhalten beschreibende Bruchenergie G_f kann als die zur Erzeugung eines Risses einer Einheitsfläche erforderliche Energie (Nmm/mm²) aufgefasst werden. Sie kann anhand der Entfestigungskurve durch Integration der Spannungen über die Rissöffnung w ermittelt werden:

$$D = A \int_0^{w_u} \sigma \, dw = A \cdot G_f \quad (6.8)$$

A Bruchfläche
G_f Bruchenergie

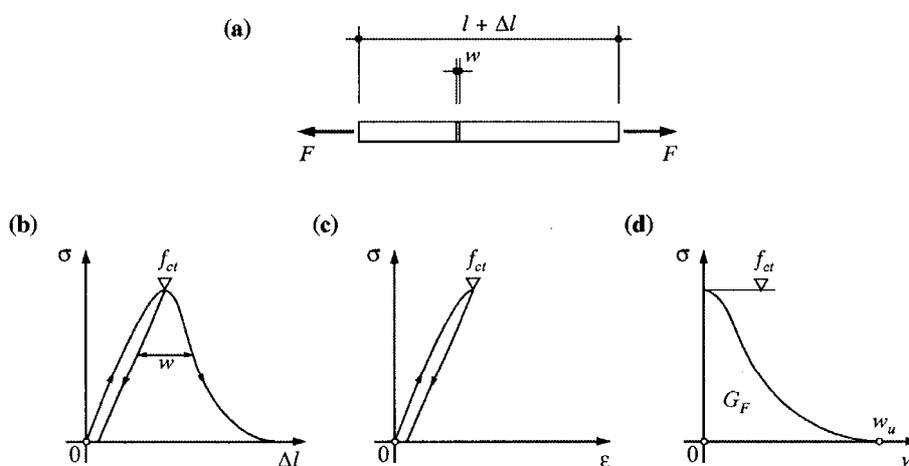


Bild 21: Verhalten eines auf Zug beanspruchten Betonstabs nach [Mar 43]

Spannungs-Dehnungsbeziehung und Spannungs-Rissöffnungsbeziehung

Auf der Grundlage der Bruchmechanik wird im Model Code 1990 [CEB 5] die in Bild 22 dargestellte Spannungs-Dehnungsbeziehung für Zugbeanspruchung angenommen. Bis zu 90% der Zugfestigkeit wird von einem linearen Verhalten ausgegangen. Die maximale Zugspannung f_{ctm} wird bei einer Bruchdehnung von 0,15‰ erreicht. Nach Erreichen des Maximums der Zugfestigkeit kann ein schlagartiges Versagen nur durch Zurücknahme der Spannung verhindert werden. Das Nachbruchverhalten wird über die Spannungs-rissöffnungsbeziehung angegeben. Diese ist bilinear und hat bei einer Rissöffnung w_1 einen Knick. Bei einer Rissöffnung w_c wird die Spannung zu Null.

$$w_c = \alpha_F \cdot \frac{G_f}{f_{ctm}} \quad w_1 = \frac{2 \cdot G_f}{f_{ctm}} - 0,15 \cdot w_c \quad (6.9), (6.10)$$

w_c Rissöffnung bei $\sigma_{ct}=0$

w_1 Rissöffnung bei $\sigma_{ct}=0,15 f_{ctm}$

α_F Beiwert zur Abschätzung von w_c (abhängig vom Stabdurchmesser d_s)

G_F Bruchenergie [Nmm/mm²]

f_{ctm} Zugfestigkeit [MN/m²]

Die Rissöffnung w_1 tritt bei einer Spannung von $0,15 f_{ctm}$ auf. Sie ergibt sich aus der Bedingung, dass die Fläche unter dem Spannungs-Rissöffnungsdiagramm gleich der Bruchenergie sein muss.

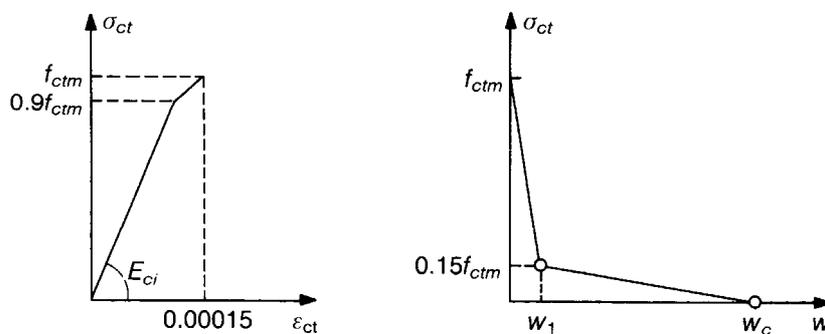


Bild 22: Spannungs-Dehnungsdiagramm und Spannungs-rissöffnungsbeziehung für Beton unter Zugbeanspruchung nach [CEB 5]

Der reale Verlauf im Nachbruchbereich ist von vielen Parametern abhängig, und kann realistisch nur im Versuch ermittelt werden. Der hier aufgezeigte Ansatz ist einer von vielen und hat sich als brauchbar erwiesen.

Für die Berücksichtigung der Spannungs-Rissöffnungsgesetzes beim verschmierten Rissmodell kann die Rissöffnung w_c mit Hilfe einer charakteristischen Länge in eine äquivalente Dehnung umgerechnet werden.

Dauerstandzugfestigkeit

Analog zur Druckfestigkeit existiert auch bei Zugbeanspruchung eine Dauerstandfestigkeit. Die im Kurzzeitversuch gemessene Zugfestigkeit sinkt schon nach einem Tag deutlich ab. Zur Erfassung der zeitabhängigen Zugfestigkeit wurden von *Reinhardt/Cornelissen* sowie von *Shkoukani/Walraven* Zeitstand-Zugversuche durchgeführt und daraus mathematische Formulierungen zur Beschreibung des Abfalls der Zugfestigkeit entwickelt (Bild 23).

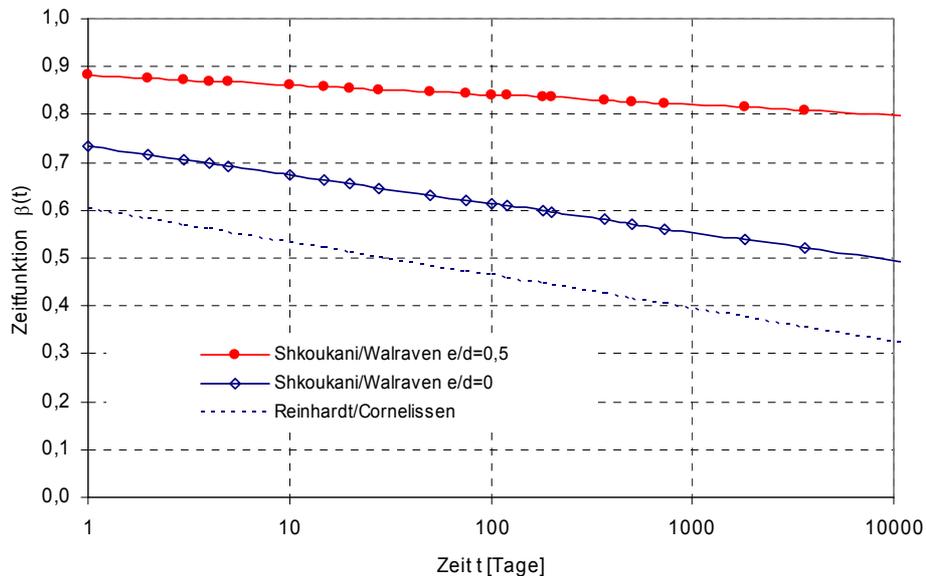


Bild 23: Zeitfunktionen für die Entwicklung der Zugfestigkeit

Die von *Reinhardt/Cornelissen* [Rei 56] angegebene mathematische Formulierung beschreibt einen unteren Grenzwert für die Zugfestigkeit.

$$\sigma(t) = (0,943 - 0,0692 \log t) \cdot f_{cm} \quad (6.11)$$

Shkoukani/Walraven [Shk 61] geben folgende mathematische Formulierung an, mit der im Mittel der Abfall der Zugfestigkeit beschrieben werden kann. Dabei unterscheidet er zwischen der zentrischen Zugfestigkeit und der Zugfestigkeit unter einer kombinierten Beanspruchung aus Zug und Biegung. Bei nahezu reiner Biegebeanspruchung (6.18) ergeben sich – sowohl als Anfangswert, als auch im zeitlichen Verlauf – die größten Zugfestigkeiten. Dies liegt an dem im Folgenden noch eingehender untersuchten Maßstabseffekt.

$$e/d = 0 \quad \sigma(t) = (1,03 - 0,06 \cdot \log t) \cdot f_{cm} \quad (\text{nur Zug}) \quad (6.12)$$

$$e/d = 0,5 \quad \sigma(t) = (-0,02 \cdot \log t + 0,98) \cdot f_{cm} \quad (6.13)$$

$$e/d \gg 0,5 \quad \sigma(t) = (-0,015 \cdot \log t + 0,98) \cdot f_{cm} \quad (\text{nur Biegung}) \quad (6.14)$$

$t = \text{Zeit in Sekunden}$

6.2 Betonstahl

Spannungs-Dehnungs-Verhalten

Betonstähle werden als naturharte, wärmebehandelte oder kaltverformte Stähle hergestellt. Je nach Herstellungsart unterscheiden sich die Spannungs-Dehnungslinien dieser Stähle im plastischen Bereich sehr deutlich. Bild 24 zeigt die Spannungs-Dehnungslinien verschiedener Stahlsorten im einachsigen Zugversuch.

Der naturharte und der wärmebehandelte Stahl verhalten sich bei Belastungsbeginn linear-elastisch und die Verformungen sind reversibel. Nach Erreichen der Fließgrenze folgt ein nahezu ideal plastisches Verhalten, welches sich in einem ausgeprägten Fließplateau widerspiegelt. In der anschließenden Verfestigungsphase kommt es zu einer nochmaligen Laststeigerung bis zur Höchstlast. Nach Erreichen der Höchstlast findet zunächst eine Einschnürung des Querschnitts statt, bis der Stab endgültig in zwei Teile getrennt wird.

Bei kaltverformten Stählen wird die Festigkeit des Ausgangsmaterials durch Walzen, Ziehen oder Recken im kalten Zustand erhöht. Durch Aufbringen einer äußeren, über der Streckgrenze liegenden Verformung wird der Stahl verfestigt. Die plastischen Verformungen des Fließens werden sozusagen vorweggenommen. Während für wärmebehandelte und naturharte Stähle die ausgeprägte Streckgrenze mit anschließendem Plateau und Verfestigungsbereich kennzeichnend ist, fehlt bei den kaltverformten Stählen das plastische Plateau (Bild 24). Die Fließgrenze wird daher über die 0,2%-Dehngrenze definiert.

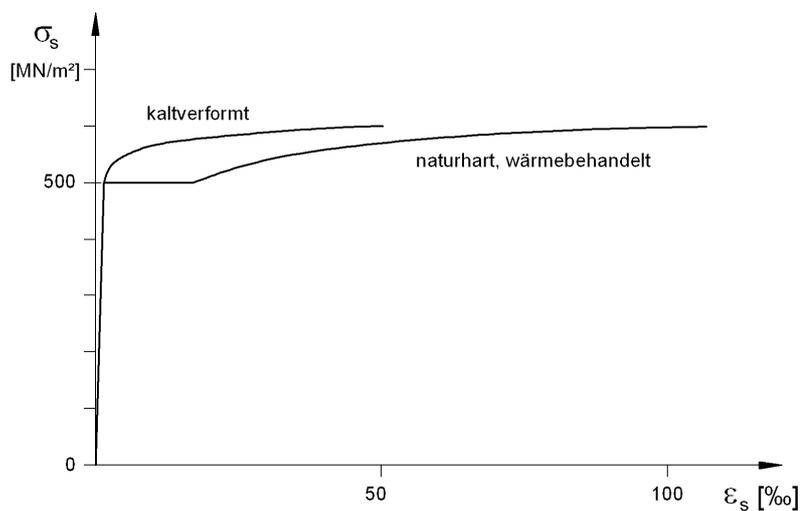


Bild 24 Spannungs-Dehnungsbeziehung unterschiedlicher Stahlsorten

Idealisiertes Stoffgesetz für den Betonstahl

Für die nichtlineare Schnittgrößenermittlung wird das Verformungsverhalten des Betonstahls vereinfacht durch idealisierte bilineare Spannungs-Dehnungslinien beschrieben. Nach DIN 1045-1 [DIN 8] können die rechnerischen Mittelwerte der Betonstahlfestigkeit aus dem 5%-Quantilwert der Fließspannung abgeleitet werden (Bild 25).

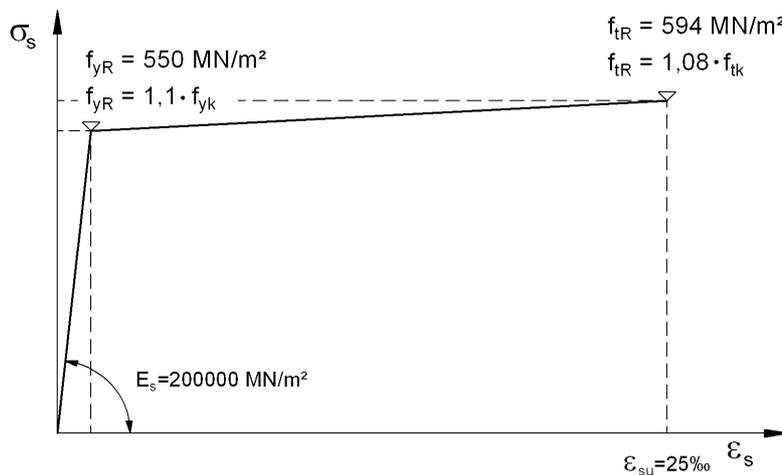


Bild 25 Idealisierte Spannungs-Dehnungslinien für den Betonstahl für die nichtlineare Schnittgrößenermittlung (BSt 500)

Bei den Nachweisen im Gebrauchszustand wird die Streckgrenze in der Regel nicht erreicht, so dass im Wesentlichen der Elastizitätsmodul des Betonstahls Eingang in die Berechnung findet. Dieser liegt bei Betonstählen zwischen 195 000 und 210 000 MN/m^2 . Nach DIN 1045-1 kann der Elastizitätsmodul angenommen werden zu:

$$E_s = 200\,000 \text{ MN} / \text{m}^2$$

Die Bruchdehnung ϵ_{su} wird einheitlich für alle Berechnungen mit 25 % angenommen. Dies hat jedoch keinen Einfluss auf die Ergebnisse, da in den nachfolgenden Untersuchungen nur Beanspruchungsniveaus unterhalb des Fließens der Bewehrung betrachtet und ausgewertet werden.

7 Rechenmodell und Modellierung des Stahlbetonverhaltens

7.1 Allgemeines

Die wirklichkeitsnahe Ermittlung der Schnittgrößen und Verformungen infolge der kombinierten Beanspruchung aus Last und Zwang erfolgt mit einem nichtlinearen Verfahren. Dieses berücksichtigt sowohl die Verformungen (geometrische Nichtlinearität) als auch die nichtlinearen Werkstoffgesetze des Betons und der Bewehrung (physikalische Nichtlinearität). Zur Berücksichtigung der Rissbildung und Verbundwirkung werden die Stoffgesetze modifiziert.

Bei nichtlinearem Verhalten besteht zwischen der Beanspruchung eines Tragwerks und seinen Verformungen kein linearer Zusammenhang mehr. Die Steifigkeiten im Tragwerk sind von der Größe der Beanspruchung abhängig. Das Superpositionsprinzip ist nicht mehr gültig.

Bei auf Biegung mit Längskraft beanspruchten Stahlbetonbauteilen wird die Nichtlinearität in erster Linie durch die einsetzende Rissbildung bei Überschreitung der Betonzugfestigkeit, sowie durch das Fließen der Bewehrung hervorgerufen (Bild 26). In Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad liegen Risslast und die Last, bei der die Bewehrung ins Fließen kommt, mehr oder weniger auseinander. Es lassen sich im Wesentlichen drei Bereiche unterscheiden:

- Bereich 1: ungerissen, linear-elastisches Verhalten
- Bereich 2: gerissen, elastische Verformungen im Stahl
- Bereich 3: gerissen, plastische Verformungen im Stahl und Beton (Traglastbereich)

Der Gebrauchlastbereich befindet sich in der Regel im ersten und zweiten Bereich.

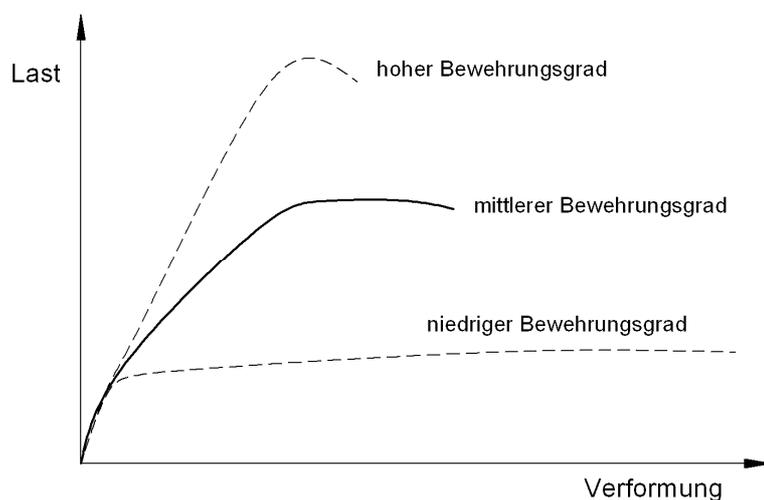


Bild 26: Nichtlineares Verhalten eines Stahlbetonbauteils

7.2 Numerischer Algorithmus

Für die nachfolgenden nichtlinearen Berechnungen wurde das Programmsystem Sofistik eingesetzt. Das zur Schnittgrößenermittlung verwendete Modul STAR2 arbeitet nach dem Übertragungsmatrizenverfahren. Der Grundgedanke dieses Verfahrens besteht darin, mit Hilfe von Übertragungsmatrizen die Zustandsgrößen vom Stabanfang bis zu einer beliebigen Stelle längs des Stabes zu übertragen. Mit der Übertragungsmatrix für einen Stab i ist es möglich, die Zustandsgrößen $\{z\}_e$ am Stabende mit den Zustandsgrößen $\{z\}_a$ am Stabanfang in Beziehung zu setzen.

$$\{z\}_e = [U]_i \cdot \{z\}_a + \{p\}_i \quad (7.1)$$

Dabei ist:

$\{z\}_e$ Zustandsvektor im Schnitt $i+1$

$\{z\}_a$ Zustandsvektor im Schnitt i

$[U]_i$ Übertragungsmatrix des Stababschnittes i

$\{p\}_i$ Lastvektor

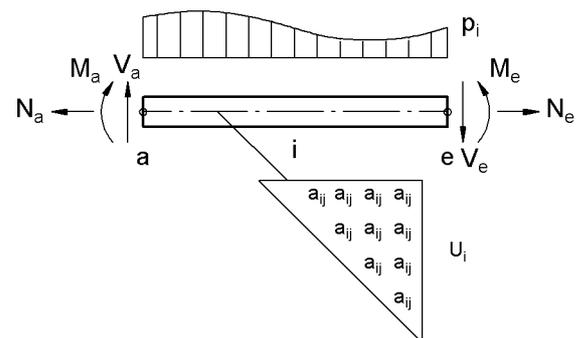
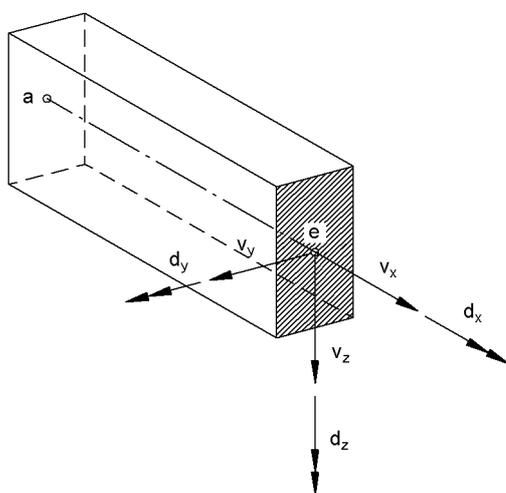


Bild 27: Übertragungsmatrizenverfahren

Räumliches Stabelement

Am Stabanfang und –ende besitzt das Stabelement jeweils 12 Freiheitsgrade, welche durch den Zustandsvektor $\{z\}_a$ bzw. $\{z\}_e$ beschrieben werden.



$$\{z\}_{a,e} = \begin{pmatrix} v_x & N \\ d_x & M_T \\ v_z & d_y & M_y & V_z \\ v_y & d_z & M_z & V_y \end{pmatrix}$$

N	Normalkraft
V_z, V_y	Querkräfte
M_y, M_z	Biegemomente
M_T	Torsionsmoment
v_x, v_y, v_z	Verschiebungen
d_x, d_y, d_z	Verdrehungen

Das Stabelement selbst wird durch seine Übertragungsmatrix [U] beschrieben. Die Übertragungsmatrix eines Stabes kann indirekt als seine Elementsteifigkeitsmatrix aufgefasst werden. In ihr werden die Steifigkeiten des Querschnitts für den betrachteten Stababschnitt verwendet. Sie lassen sich beispielhaft für die Beanspruchungen N_x in entkoppelter Form darstellen.

Normalkraft in x-Richtung

$$U_N = \begin{bmatrix} 1 & CN \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad CN = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{EA_i} + \frac{1}{EA_{i+1}} \right) \quad (7.2)$$

Für die entsprechenden Beziehungen bei Beanspruchungen aus Torsion und Biegung wird verwiesen auf [Sof 62].

Der Belastungsvektor $\{p\}$ beschreibt die möglichen Stabbelastungen. Er erhält seine Anteile aus:

	Belastung	Moment	Zwangdehnung bzw. -krümmung	Vorverformung
Normalenrichtung	p_x, dp_x	m_x, dm_x	ex, dex	
Hauptbiegerichtung	p_z, dp_z	m_y, dm_y	$k_y, dk_y, d2k_y, d3k_y$	$u_y, du_y, d2u_y, d3u_y$
Querbiegerichtung	p_y, dp_y	m_z, dm_z	$k_z, dk_z, d2k_z, d3k_z$	$u_z, du_z, d2u_z, d3u_z$

Mit den Zwangdehnungen bzw. -krümmungen lassen sich auch Verformungseinwirkungen (Temperatur- und Schwindlastfälle) berücksichtigen.

7.3 Berücksichtigung der nichtlinearen Materialeigenschaften

Die nichtlinearen Materialeigenschaften der Baustoffe können als beliebige Spannungs-Dehnungslinien über frei definierbare Polygonzüge beschrieben werden (Bild 28).

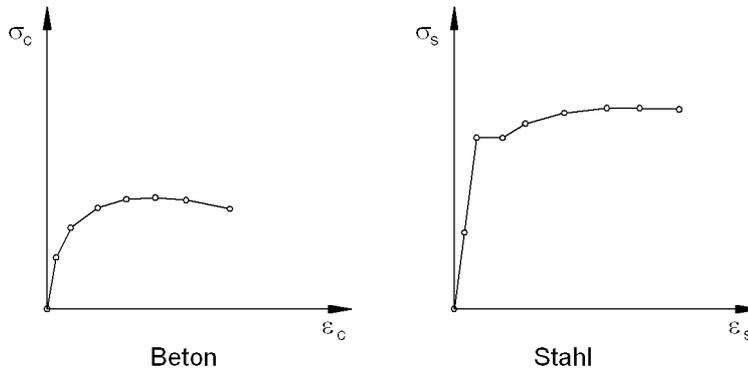


Bild 28: Beschreibung der Spannungsdehnungslinien durch Polygonzüge

Zusammenhang: Steifigkeiten – Schnittgrößen - Dehnungsebene

Die Ermittlung der nichtlinearen Steifigkeiten wird zunächst für jeden Iterationsschritt auf ein linear-elastisches Problem zurückgeführt, bei dem die Steifigkeiten eines Stababschnittes konstant sind. Nichtlineare Materialeigenschaften können z. B. durch einen äquivalenten Sekantenmodul auf ein elastisches Problem zurückgeführt werden.

In nachfolgender Gleichung ist der Zusammenhang zwischen den inneren Schnittgrößen und den Dehnungen dargestellt, wobei x , y , und z nicht notwendigerweise Hauptachsen sind. Im allgemeinen Fall sind auch die Nebendiagonalglieder besetzt. Dies ist immer der Fall, wenn das Achsensystem nicht mit dem elastischen Schwerpunkt zusammenfällt. Dann resultiert aus nachstehender Gleichung eine Normalkraft.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & EA_z & -EA_y \\ EA_z & EA_{zz} & -EA_{yz} \\ -EA_y & -EA_{yz} & EA_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u' \\ -w'' \\ v'' \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Die Anforderungen an die Anteile EA_y und EA_z müssen explizit aktiviert werden. Dies geschieht über die Steuerungseingabe „Berücksichtigung der nichtlinearen Axialdehnung“.

Im ersten Iterationsschritt werden die Schnittgrößen unter Annahme von linear-elastischen Steifigkeiten ermittelt.

Iteration der Dehnungsebene: Innere Iteration

Die zu den Schnittgrößen gehörende Dehnungsebene wird unter Verwendung der nichtlinearen Werkstoffgesetze der Baustoffe iterativ ermittelt. Dazu wird die Dehnungsebene solange variiert, bis die über Flächenintegration der Spannungen ermittelten inneren Schnittkräfte mit den äußeren Schnittgrößen im Gleichgewicht stehen.

Die Dehnungsebene ist durch die Dehnung im Schwerpunkt ε_0 und die Krümmung κ eindeutig definiert.

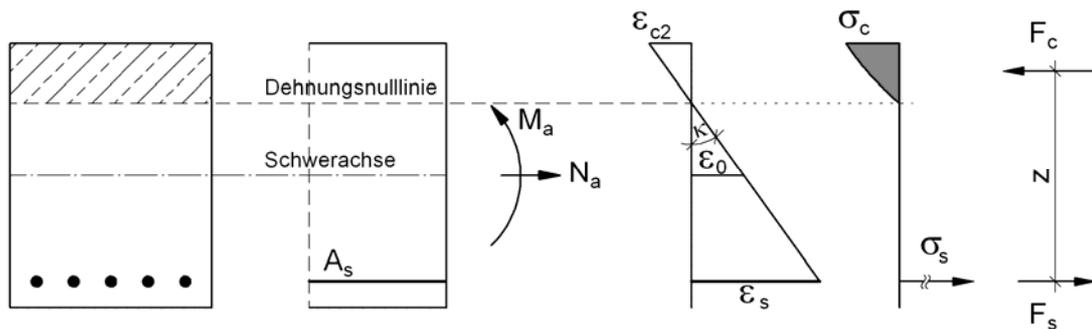


Bild 29: Dehnungsebene am Querschnitt für einachsige Biegung

Ermittlung der Steifigkeiten: Äußere Iteration

Sind die inneren Schnittgrößen und die zugehörige Dehnungsebene ermittelt, können auch die nichtlinearen Steifigkeiten unmittelbar daraus abgeleitet werden. So ergeben sich z. B. die Dehnsteifigkeit EA^II sowie die Biegesteifigkeit EI_y^II durch Integration über die Fläche:

$$EA^II = \int E(\varepsilon) \cdot dA \quad EI_y^II = \int E(\varepsilon) \cdot z^2 \cdot dA \quad (7.4) \quad (7.5)$$

Mit den neuen Steifigkeiten werden die Schnittgrößen erneut berechnet und mit den Schnittgrößen der vorherigen Iteration verglichen. Die Steifigkeiten müssen für alle Stababschnitte im Rahmen einer iterativen Berechnung so lange angepasst werden, bis die Schnittgrößen und die zuvor ermittelten Steifigkeiten zusammenpassen.

Die dazu in Sofistik implementierten Iterationsverfahren sind:

- Sekantenverfahren (Quasi-Newton-Verfahren)
- Verfahren mit plastischen Krümmungen (Modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren)

7.4 Mitwirkung des Betons auf Zug

7.4.1 Bestimmung der Rissschnittgrößen

Die Rissschnittgrößen werden auf der Grundlage der Querschnittswerte sowie der Zugspannung f_{ct} bestimmt.

$$\text{Nur Normalkraft:} \quad N_{cr} = f_{ct} \cdot A_i \quad (7.6)$$

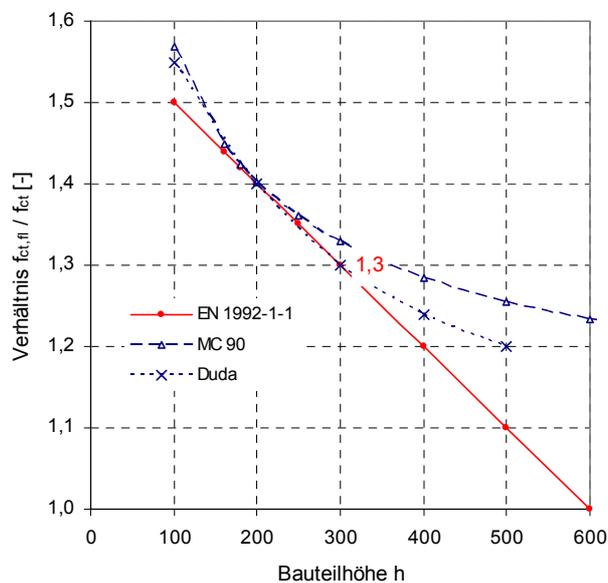
$$\text{Nur Biegung:} \quad M_{cr} = f_{ct} \cdot W_i \quad (7.7)$$

$$\text{Biegung und Normalkraft:} \quad M_{cr} = \left(f_{ct} - \frac{N_{konstant}}{A_i} \right) \cdot W_{u,i} \quad (7.8)$$

Im ungerissenen Zustand wirkt der Querschnitt als Verbundquerschnitt mit gleich großen Dehnungen im Stahl und Beton. Ein Großteil der Kraft wird vom Betonquerschnitt aufgenommen. Die Spannungen im Stahl sind klein.

Maßstabseffekt

Durch den Maßstabseffekt kann die Biegezugfestigkeit insbesondere bei geringen Bauteildicken (Platten) deutlich höher sein, als die zentrische Zugfestigkeit. Bild 30 zeigt unterschiedliche Ansätze zur Berücksichtigung des Maßstabeffekts bei der Biegezugfestigkeit im Vergleich.



Ansatz gemäß DIN EN 1992-1-1:

$$f_{ctm,fl} = (1,6 - h/1000) \cdot f_{ctm} \geq f_{ctm} \quad (7.9)$$

h Bauteilhöhe in mm

f_{ctm} Mittelwert der zentrischen Zugfestigkeit

Bild 30: Verhältnis zwischen Biegezug- und zentrischer Zugfestigkeit nach verschiedenen Ansätzen

Maßstabseffekt bei exzentrischer Beanspruchung (Biegung mit Zugkraft)

Bei Beanspruchung des Querschnitts durch Biegung mit Normalkraft kann die Biegezugfestigkeit unter Berücksichtigung des Maßstabeffektes gemäß [Dud 14] für exzentrischen Zug angesetzt werden (Bild 31). Damit ergibt sich je nach Größe der Exzentrizität eine entsprechende Zugfestigkeit am Zug beanspruchten Rand. Die Grenzfälle sind:

Nur Biegung: $N = 0$ $M_{cr} = f_{ct,fl} \cdot W_i$ $e = M / N = \infty$
 Nur Normalkraft: $N_{cr} = f_{ctm} \cdot A_i$ $M_{cr} = 0$ $e = M / N = 0$

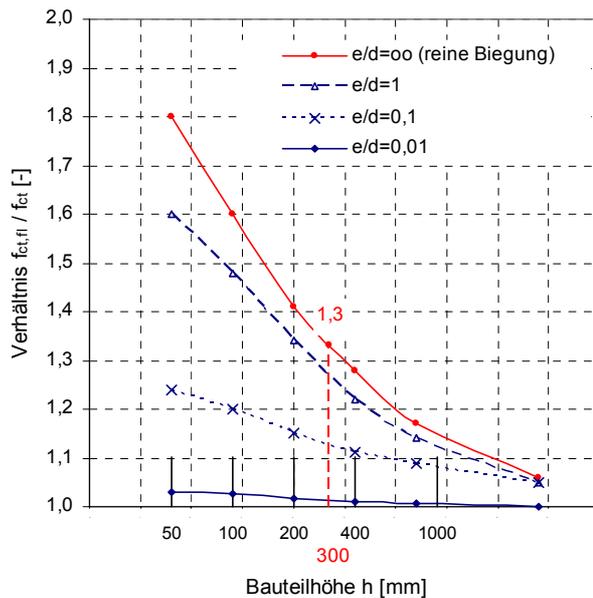


Bild 31: Bezogene Biegezugfestigkeit bei exzentrischem Zug nach [Dud 14]

Eigenspannungen

Bei der Ermittlung der Risschnittgrößen sind zusätzlich zum Maßstabseffekt nichtlinear verteilte Spannungen (z. B. infolge von Eigenspannungen) zu berücksichtigen. DIN 1045-1 gibt dazu den Beiwert k an. Damit ergibt sich für die Ermittlung der Risschnittgrößen:

Normalkraft: $f_{ct} = k \cdot f_{ctm}$ (7.10)

Biegung: $f_{ct} = k \cdot \alpha \cdot f_{ctm}$ mit $\alpha = f_{ct,fl} / f_{ctm}$ (7.11)

$k = 0,8$ für $h \leq 300mm$

$k = 0,5$ für $h > 800mm$

Da es sich bei Hochbaudecken i. d. R. um dünne Bauteile handelt, kann der Beiwert zu $k=0,8$ angenommen werden.

7.4.2 Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen

Zugversuche an eingebetteten Stäben [Har 26] unter Kurzzeitbelastung ergaben, dass nach Abschluss der Rissbildung im Gebrauchszustand (3. Ast der Arbeitslinie) vom Beton zwischen den Rissen ca. 40% der Anrisslast übertragen wird. Im Laufe der Zeit reduziert sich die Kraft infolge von Verbundkriechen auf ca. 25%.

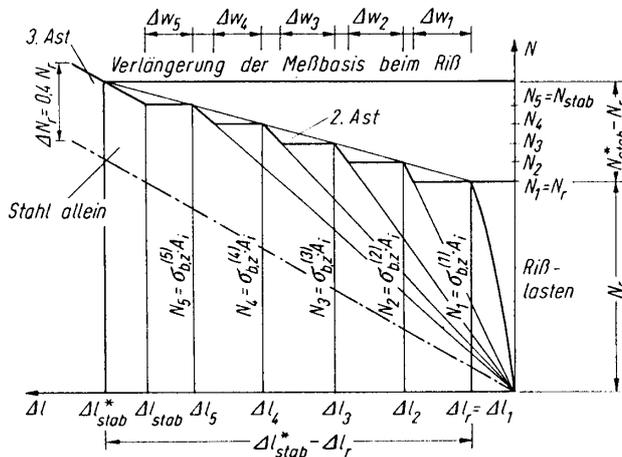
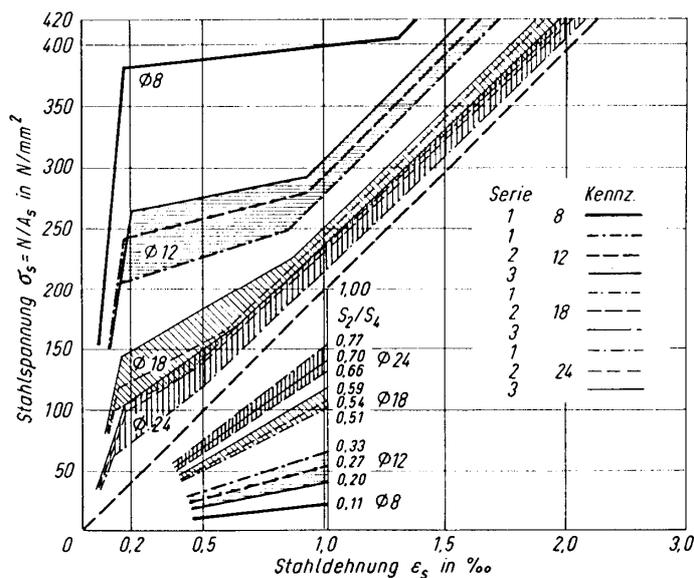


Bild 32: Kraft-Verformungslinie, idealisiert

Im Bereich zwischen den Rissen verbleibt der Querschnitt weiterhin im Zustand I und erhöht somit die Steifigkeit des Verbundquerschnitts. Bei weiterer Laststeigerung bleibt die vom Beton abgetragene Last annähernd in gleicher Höhe erhalten, während sich der Stahl in den Rissen unter der zusätzlichen Last frei dehnen kann. Das Verhältnis der Last bei Erreichen des abgeschlossenen Rissbildes zu der Anrisslast ist von der Streuung der Betonzugfestigkeit und vom Durchmesser der Bewehrung abhängig. Aus der Streuung der Betonzugfestigkeit lässt sich in etwa der Faktor 1,3 herleiten. Den Einfluss des Durchmessers auf N_B/N_A zeigt Bild 33.



Faktoren N_B/N_A :

Ø8 $N_B/N_A = 1,05$

Ø12 $N_B/N_A = 1,1$

Ø18 $N_B/N_A = 1,3$

Ø24 $N_B/N_A = 1,6$

N_A = Anrissspannung

N_B = Spannung bei abgeschlossenem Rissbild

Bild 33: Mittelwerte der Arbeitslinien in Abhängigkeit vom Durchmesser nach [Har 26]

Mittlere Stahldehnungen beim abgeschlossenen Rissbild

Für die versteifende Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen ist die zentrische Zugfestigkeit f_{ctm} maßgebend.

In der Randzone eines biegebeanspruchten Bauteils kann man gedanklich einen effektiven Zugstab mit der wirksamen Fläche $A_{c,eff}$ heraustrennen. Das in DIN 1045-1 enthaltende Rissmodell nach dem Konzept von [Kön 35], [Kön 37] basiert auf den nachfolgend dargestellten Zusammenhängen für einen Zugstab mit abgeschlossenem Rissbild.

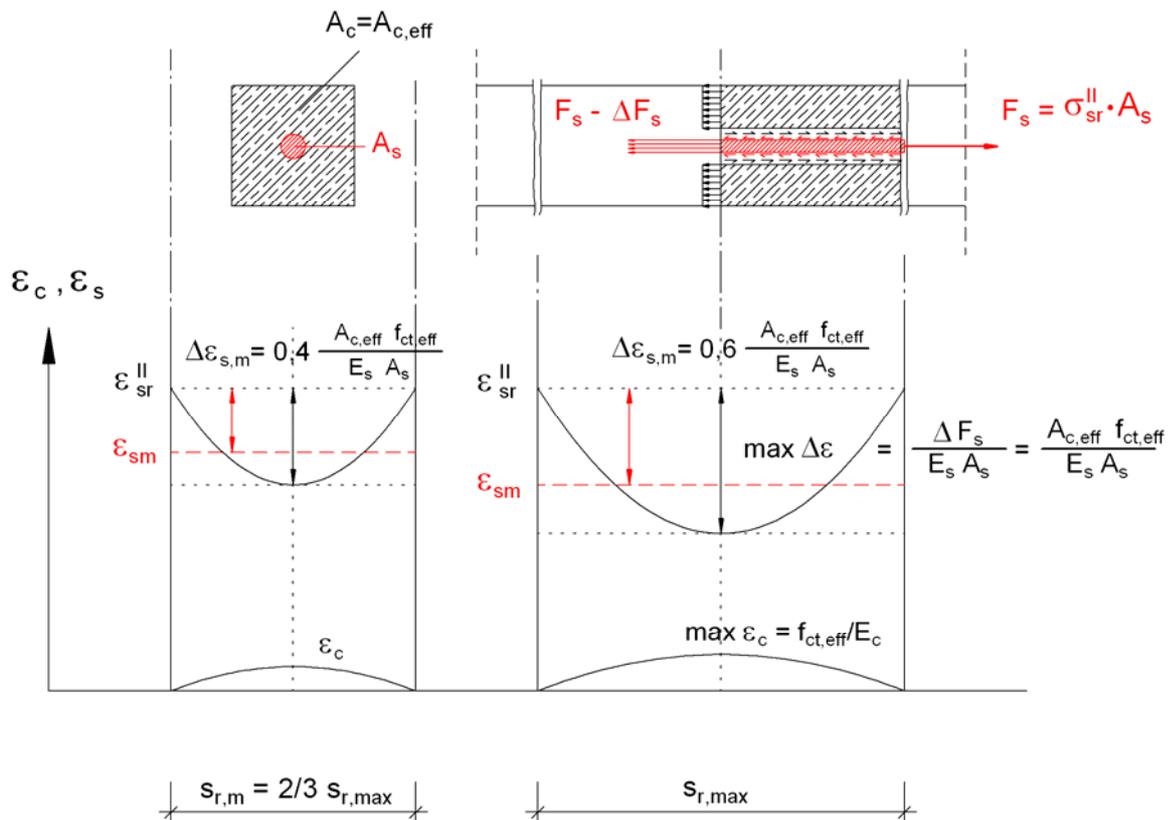


Bild 34: Verlauf der Dehnungen in einem Risselement, abgeschlossenes Rissbild (mittlerer Rissabstand $s_{r,m}$ und maximaler Rissabstand $s_{r,max}$)

Kräfte beim maximalen Rissabstand

Für das abgeschlossene Rissbild werden die Kräfte und Spannungen an einem Risselement mit dem maximalen Rissabstand $s_{r,max}$ betrachtet.

In der Mitte zwischen den Rissen befindet sich der Querschnitt im Zustand I:

$$\text{Beton: } F_{cr,eff} = A_{c,eff} \cdot f_{ct,eff} \quad \max \epsilon_c = f_{ct,eff} / E_c \tag{7.12}$$

Über die halbe Risslänge $s_{r,max}$ wird die maximale Verbundkraft $\max. F_b$ in den Stahl übertragen.

$$\text{Verbund: } \max. F_b = d_s \cdot \pi \cdot \frac{s_{r,max}}{2} \cdot \tau_{sm} \tag{7.13}$$

Im Rissquerschnitt ist die ganze Betonzugkraft auf den Stahlquerschnitt übergegangen.

$$\text{Stahl} \quad F_s = \sigma_{sr}^II \cdot A_s = \varepsilon_{sr}^II \cdot E_s \cdot A_s \quad (7.14)$$

Die Differenzkraft bzw. -spannung zwischen Rissquerschnitt und in der Mitte zwischen zwei Rissen ist ΔF_s .

$$\begin{aligned} &\text{Stahl - Verbund - Beton} \\ \Delta F_s &= \max.F_b = F_{cr,eff} \end{aligned}$$

Maximaler Dehnungsunterschied in der Bewehrung:

$$\max \Delta \varepsilon_{sm} = \frac{\Delta F_s}{E_s \cdot A_s} = \frac{\max.F_b}{E_s \cdot A_s} = \frac{A_{c,eff} \cdot f_{ct,eff}}{E_s \cdot A_s} \quad (7.15)$$

Mittlere Stahldehnung mit einem Völligkeitsbeiwert von $\beta=0,6$:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_s^II - \beta \cdot \max \Delta \varepsilon_{sm} = \varepsilon_s^II - 0,6 \cdot \frac{A_{c,eff} \cdot f_{ct,eff}}{E_s \cdot A_s} \quad (7.16)$$

Mittleres Verhalten des Zugstabes

Für das mittlere Verhalten des Zugstabes ist der mittlere Rissabstand $s_{r,m}$ maßgebend. *Krips* leitet in [Kri 40] mit der Verteilungsdichtefunktion den Mittelwert des Rissabstandes her:

$$s_{r,m} = 0,72 \cdot s_{r,max} \quad (7.17)$$

Allgemein wird angenommen:

$$s_{r,m} \approx 2/3 \cdot s_{r,max} \quad F_{b,m} \approx \frac{2}{3} \cdot \max.F_b \quad \beta \cdot 2/3 = 0,6 \cdot 2/3 = 0,4 \quad (7.18)$$

Somit ergibt sich für die Mitwirkung des Betons auf Zug:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{sr}^II - \Delta \varepsilon_{sm} \quad (7.19)$$

$$\Delta \varepsilon_{sm} = \beta_t \cdot \frac{A_{c,eff} \cdot f_{ct,eff}}{E_s \cdot A_s} = \beta_t \cdot \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{eff} \cdot E_s} \quad (7.20)$$

$$\beta_t = 0,4 \quad \text{für Kurzzeitbelastung}$$

$$\beta_t = 0,25 \quad \text{für Langzeitbelastung}$$

Unter Verwendung der Definition der effektiven Randzugkraft $F_{cr,eff} = A_{c,eff} \cdot f_{ct,eff}$

$$\Delta \varepsilon_{sm} = \beta_t \cdot \frac{F_{cr,eff}}{E_s \cdot A_s} \quad (7.21)$$

Effektive Zugzone

Die vorangehende Betrachtungsweise am zentrischen Zugstab geht davon aus, dass die gesamte Betonfläche A_c im Wirkungsbereich der Bewehrung liegt. Im Bauteil ist der Wirkungsbereich der Bewehrung auf die effektive Randzugzone $A_{c,eff}$ begrenzt. Im Allgemeinen wird h_{eff} gemäß Bild 35 angenommen zu:

$$h_{eff} = 2,5 \cdot d_1 < (h - x) / 2 \quad (\text{Biegung}) \tag{7.22}$$

$$h_{eff} = 2,5 \cdot d_1 < h / 2 \quad (\text{zentrischer Zug}) \tag{7.23}$$

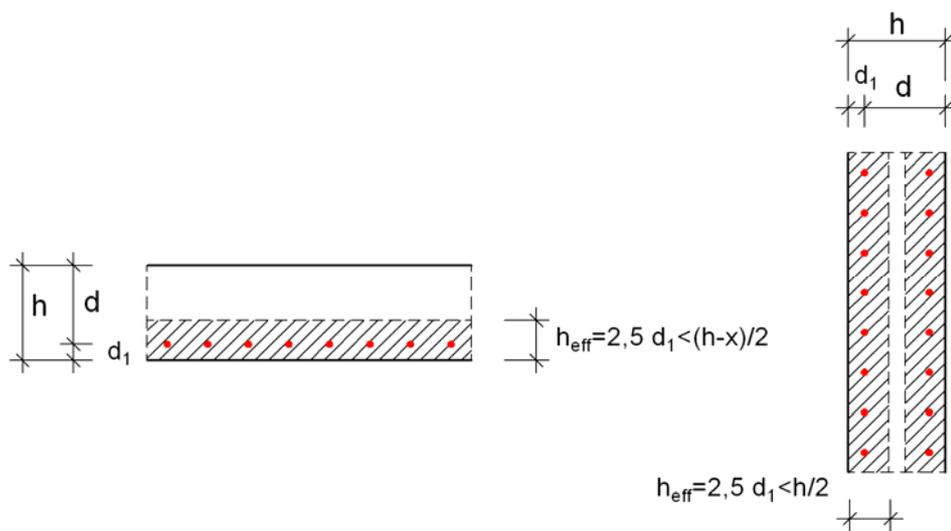


Bild 35: Effektive Randzugzone (Biegung und zentrischer Zug)

Genauere Untersuchungen nach [Kön 35] haben ergeben, dass der Faktor $h_{eff}/d_1=2,5$ zur Ermittlung der Dicke der effektiven Randzugzone vom Verhältnis h/d_1 abhängt, welches bei dicken Bauteilen zunimmt. In Abhängigkeit von der Beanspruchungsart kann h_{eff}/d_1 nach Bild 36 angenommen werden.

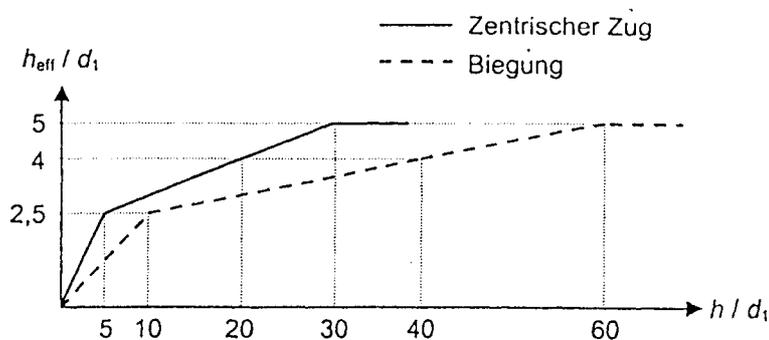


Bild 36: Effektive Dicke h_{eff} in Abhängigkeit von der Bauteildicke nach [Kön 35]

7.4.3 Modifizierung der Stahlkennlinie nach Heft 525 des DAfStb

Abgeleitet aus dem Rissmodell wird in Heft 525 des DAfStb [DIN 9] die Mitwirkung des Betons auf Zug – bzw. die Verbundwirkung zwischen den Rissen – beim abgeschlossenen Rissbild mit nachfolgender Näherung angegeben.

$$\Delta \varepsilon_{sm} = \beta_t \cdot (\varepsilon_{sr}^{II} - \varepsilon_{sr}^I) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{sr}^{II} = \frac{\sigma_{sr}^{II}}{E_s} = \frac{F_s}{E_s \cdot A_s} \quad (7.24) \quad (7.25)$$

ε_{sr}^I Stahldehnungen im ungerissenen Zustand unter Risschnittgrößen

ε_{sr}^{II} Stahldehnungen im Riss unter Risschnittgrößen

σ_{sr}^{II} Spannung in der Bewehrung auf Grundlage eines gerissenen Querschnitts (Zustand II) unter Risschnittgrößen

Die Dehnungen im ungerissenen Zustand I sind klein, so dass näherungsweise für $\Delta \varepsilon_{sm}$ angenommen werden kann:

$$\Delta \varepsilon_{sm} \approx \beta_t \cdot (\varepsilon_{sr}^{II}) = \beta_t \cdot \frac{F_s}{E_s \cdot A_s} \quad (7.26)$$

F_s Zugkraft in der Bewehrung nach Zustand II unter Risschnittgrößen

Der ursprüngliche Ansatz auf der Grundlage des Rissmodells nach [Kön 37] bezog sich auf die effektiv mitwirkende Randzone:

$$\Delta \varepsilon_{sm} = \beta_t \cdot \frac{A_{c,eff} \cdot f_{ct,eff}}{E_s \cdot A_s} = \beta_t \frac{F_{cr,eff}}{E_s \cdot A_s} \quad (7.27)$$

$F_{cr,eff}$ effektive Randzugkraft in der Wirkungszone der Bewehrung

$$F_{cr,eff} = h_{eff} \cdot f_{ct,eff}$$

Vergleicht man beide Ansätze, so unterscheiden sie sich dadurch, dass nach [DIN 9] die Mitwirkung $\Delta \varepsilon_{sm}$ auf der Grundlage der Zugkraft F_s in der Bewehrung nach Zustand II unter Risschnittgrößen ermittelt wird, wohingegen sich das Rissmodell auf die effektive Randzugkraft $F_{cr,eff}$ bezieht.

Zugkraft F_s in der Bewehrung infolge Risschnittgrößen

Beim Übergang des Querschnittes in den Zustand II gehen die unter Risschnittgrößen entstandenen Betonzugspannungen im Rissquerschnitt ganz auf den reinen Stahlquerschnitt über. Die dabei entstehende Zugkraft in der Bewehrung F_s kann beanspruchungsabhängig sehr unterschiedlich sein. Unter der Annahme von Bruttoquerschnittswerten, sowie vereinfacht mit dem geschätzten Hebelarm $z=0,8h$ ergeben sich für Rechteckquerschnitte folgende Zugspannungen in der Bewehrung:

Biegung:
$$F_s = \frac{M_{cr}}{z} \approx \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot f_{ct} \cdot 1,25 \cdot \frac{1}{h} = 0,21 \cdot b \cdot h \cdot f_{ct} \tag{7.28}$$

Normalkraft:
$$F_s \approx \frac{N_{cr}}{2} = \frac{b \cdot h}{2} \cdot f_{ct} = 0,5 \cdot b \cdot h \cdot f_{ct} \tag{7.29}$$

Bei reiner Normalkraftbeanspruchung ist die entstehende Zugkraft in der Bewehrung ca. doppelt so groß wie bei reiner Biegung.

Vergleich zwischen F_s und $F_{cr,eff}$

Während bei reiner Biegung die beiden Kräfte $F_{cr,eff}$ und F_s in etwa gleich groß sind, können sich bei reiner Zugbeanspruchung große Unterschiede ergeben (Bild 37). Weicht jedoch F_s von der effektiven Zugkraft $F_{cr,eff}$ ab, so trifft man nicht mehr die ursprüngliche Herleitung aus dem Rissmodell. Dies ist insbesondere bei hohen Querschnitten mit im Verhältnis zur Querschnittshöhe kleinen effektiven Randzonen der Fall. Tatsächlich ist die über die Verbundspannungen übertragbare Kraft in der Wirkungszone der Bewehrung in Abhängigkeit von $F_{cr,eff}$ begrenzt, und damit auch die Mitwirkung des Betons auf Zug.

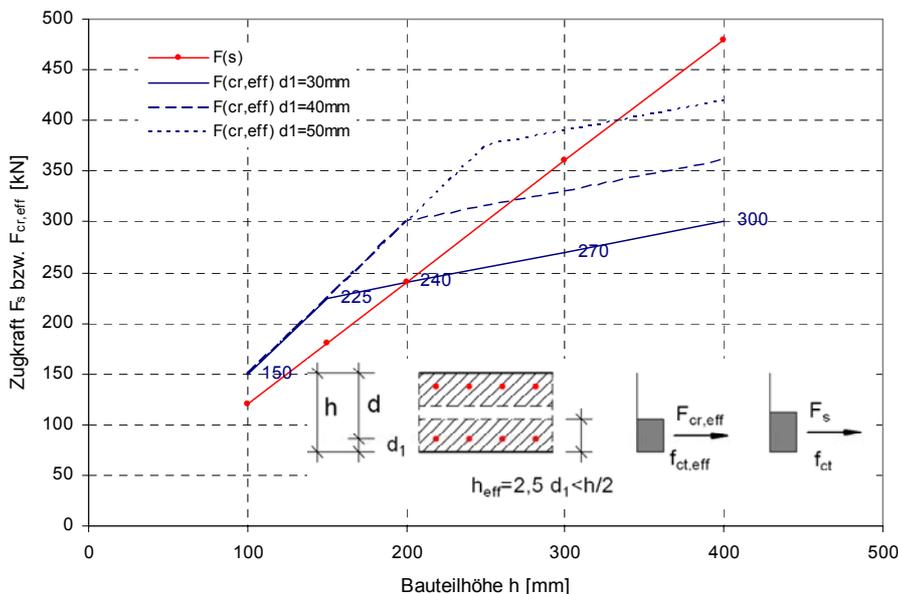


Bild 37: Vergleich $F_{cr,eff}$ und F_s für reine Zugkraft, $f_{ctm} = 3,0 \text{ MN/m}^2$

7.4.4 Zusammenfassung: Mitwirkung des Betons auf Zug

Die Zugfestigkeit des Betons ist eine stark streuende Größe und nimmt unter einer dauernd wirksamen Zugspannung mit der Zeit ab (Dauerstandzugfestigkeit). Bezugswert ist die zentrische Zugfestigkeit im Kurzzeitversuch f_{ctm} .

Die Zugfestigkeit wird bei der Ermittlung der Risschnittgrößen sowie bei der versteifenden Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen in Ansatz gebracht. Bei der Verbundwirkung ist zusätzlich das Verbundkriechen zu beachten.

Bei der Ermittlung der Risschnittgrößen sind folgende Einflüsse zu berücksichtigen, durch welche die Zugfestigkeit des Betons vermindert oder erhöht wird:

- Minderung der Zugfestigkeit durch Eigenspannungen
- Minderung der Zugfestigkeit durch den Dauerstandeffekt
- Verminderung der Zugfestigkeit durch Kerbwirkung (z. B. infolge Querbewehrung)
- Beanspruchungsabhängige Erhöhung der Biegezugfestigkeit durch den Maßstabeffekt
- Erhöhung der Risschnittgrößen durch die Bewehrung (ideelle Querschnittswerte)

Über die Risschnittgrößen ergibt sich die Ausdehnung der gerissenen Bereiche. Zum Zeitpunkt $t=\infty$ findet eine Ausweitung der gerissenen Bereiche unter einer kombinierten Beanspruchung mit einer zusätzlichen Zwangzugkraft statt. Die Größe der zusätzlichen Normalkraft ist jedoch nicht von vornherein bekannt, so dass die Erfassung der Risschnittgrößen beanspruchungsunabhängig erfolgen sollte. Für die nichtlinearen Untersuchungen werden nachfolgende Bezugswerte festgelegt.

$$t = 0 \quad f_{ctm} = 3,0 \text{ MN} / \text{m}^2$$

$$t = \infty \quad f_{ctm} = 70\% \cdot 3,0 \text{ MN} / \text{m}^2 = 2,1 \text{ MN} / \text{m}^2$$

Die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen wird über die effektive Zugzonenhöhe h_{eff} erfasst. Der maximale Rissabstand ergibt sich aus der Verbundspannung τ_{bm} . Die Rissbildung stellt sich unter der Erstbelastung ein. Die zeitliche Nachgiebigkeit des Verbundes durch Langzeiteinflüsse wie z. B. Verbundkriechen, Schwinden des Betons oder wiederholte Belastung, wird pauschal durch Herabsetzen des Beiwertes β_t von 0,4 auf 0,25 berücksichtigt.

$$\Delta \varepsilon_{sm} = \beta_t \cdot \frac{A_{c,eff} \cdot f_{ct,eff}}{E_s \cdot A_s}$$

Folgende Einflussfaktoren sind bei der Mitwirkung zu berücksichtigen:

- Effektive Zugzonenhöhe in Abhängigkeit von der Beanspruchungsart (M oder N) sowie der Einfluss der Betondeckung
- Nachgiebigkeit des Verbundes durch Langzeiteinflüsse

Geht man davon aus, dass die Rissbildung unter Biegebeanspruchung stattfindet, und legt man ferner für die nichtlinearen Untersuchungen den Faktor h_{eff}/d_1 einheitlich fest, so ergibt sich:

$$t = 0 \quad h_{eff} = 2,5 \cdot d_1 \quad f_{ct,eff} = 3,0 \text{ MN} / \text{m}^2 \quad \beta_t = 0,4$$

$$t = \infty \quad h_{eff} = 2,5 \cdot d_1 \quad f_{ct,eff} = 3,0 \text{ MN} / \text{m}^2 \quad \beta_t = 0,25$$

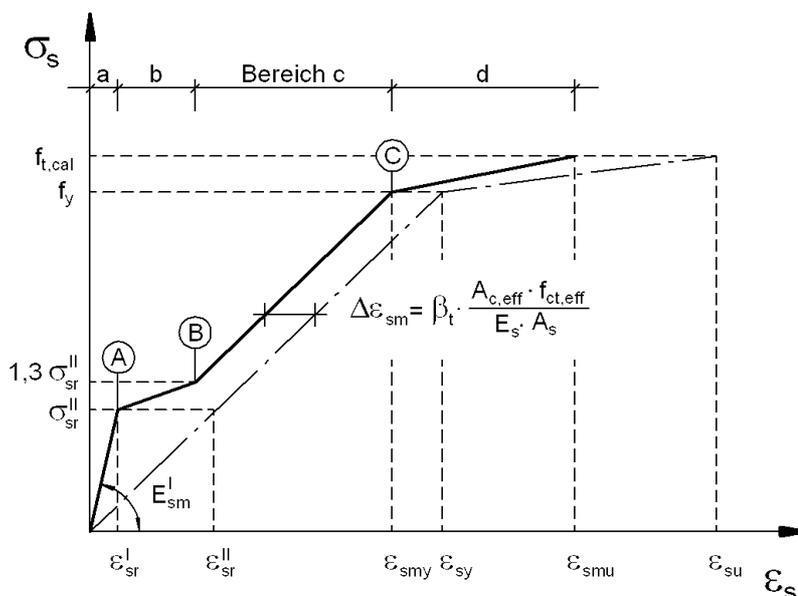
7.5 Modellierung des Werkstoffverhaltens

Beim verschmierten Rissmodell wird jedem Element bzw. jedem betrachteten Schnitt am Bauteil ein mittleres Verhalten zugeordnet, welches das Verhalten eines Risselementes mit einer gewissen Ausdehnung und konstanter Beanspruchung repräsentiert. Das Modell ist für Bauteile geeignet, die – im Vergleich zum Rissabstand – eine ausreichende Länge besitzen.

7.5.1 Modifizierung der Stahlkennlinie

Die Modifizierung der Kennlinie des Stahls erfolgt so, dass bei der Beschreibung des mittleren Verhaltens nachfolgende Bereiche abgebildet werden.

- a) Ungerissener Bereich
- b) Phase der Rissbildung
- c) Abgeschlossenes Rissbild
- d) Fließen der Bewehrung



A: $\sigma_{sr}^{II}; \epsilon_{sr}^I$

B: $1,3 \cdot \sigma_{sr}^{II}; \frac{1,3 \cdot \sigma_{sr}^{II}}{E_s} - \Delta \epsilon_{sm}$

C: $f_y; \frac{f_y}{E_s} - \Delta \epsilon_{sm}$

σ_{sr}^{II} Spannung in der Bewehrung im Rissquerschnitt unter Risschnittgrößen

ϵ_{sr}^I Dehnung in der Bewehrung im Zustand I unter Risschnittgrößen

ϵ_{sr}^{II} Dehnung in der Bewehrung im Zustand II unter Risschnittgrößen

Bild 38: Modifizierung der Stahlkennlinie

Im Bereich a) wird durch die Modifizierung der Stahlkennlinie die Steifigkeit des ungerissenen Zustands I abgebildet, indem die inneren Zugkräfte im Beton bis zur Rissbildung der Bewehrung zugewiesen werden. Die zugehörige Spannung im Stahl im Riss unter Risschnittgrößen kann mit einem Programm oder mit einer Näherungsformel unter Verwendung der Arbeitslinien des Betons im Gebrauchszustand ermittelt werden. Diese Modifizierung ist beanspruchungsabhängig. So können die Spannung im Stahl bei der Rissbildung, sowie der modifizierte E-Modul E_{sm} mit einem Faktor von ca. 2 variieren. Folgende Beanspruchungsarten können auftreten:

- a) nur Biegebeanspruchung
- b) nur Normalkraftbeanspruchung
- c) kombinierte Biege- und Normalkraftbeanspruchung

Der Bereich b) der Rissbildung erstreckt sich von Punkt A bis zum Punkt B, an dem die 1,3-fache Risschnittgröße erreicht wird. Die zugehörigen Spannungen sind ebenfalls beanspruchungsabhängig. Bei Normalkraftbeanspruchung ergeben sich höhere mittlere Stahlspannungen, sowie eine Verschiebung des Bereiches b) in Richtung der Fließdehnung.

Im Bereich c) (abgeschlossenes Rissbild) kann die Mitwirkung des Betons auf Zug unter Annahme eines verschmierten Rissbildes angenommen werden zu:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_s^{II} - \Delta\varepsilon_{sm} \quad (7.30)$$

$$\Delta\varepsilon_{sm} = \beta_t \cdot \frac{A_{c,eff} \cdot f_{ct,eff}}{E_s \cdot A_s} = \beta_t \cdot \frac{f_{ct,eff}}{E_s \cdot \rho_{eff}} \quad (7.31)$$

ε_{sm} mittlere Stahldehnung

ε_s^{II} Stahldehnung im gerissenen Zustand II im Riss

β_t Beiwert zur Berücksichtigung des Einflusses der Belastungsdauer oder einer wiederholten Belastung auf die mittlere Dehnung

$\beta_t = 0,40$ für eine einzelne kurzzeitige Belastung

$\beta_t = 0,25$ für eine andauernde Last oder für häufige Lastwechsel

Im Bereich d) oberhalb der Streckgrenze des Stahls gibt es einen elastischen und einen plastischen Anteil für die Betonmitwirkung. Dabei ist der plastische Anteil von der Duktilität der Bewehrung abhängig.

$$\varepsilon_{sm} = \underbrace{\varepsilon_{sy} - \Delta\varepsilon_{sm}}_{\text{elastischer Anteil}} + \underbrace{\delta_d \left(1 - \frac{\sigma_{sr}^{II}}{f_y} \right)}_{\text{plastischer Anteil}} \cdot (\varepsilon_s^{II} - \varepsilon_{sy}) \quad (7.32)$$

δ_d Beiwert zur Berücksichtigung der Duktilität der Bewehrung

$\delta_d = 0,8$ für hochduktilen Stahl

$\delta_d = 0,6$ für normalduktilen Stahl

Dieser Bereich spielt bei den Untersuchungen im Gebrauchslastbereich keine Rolle.

Reine Biegung: Zustand I (ungerissen)

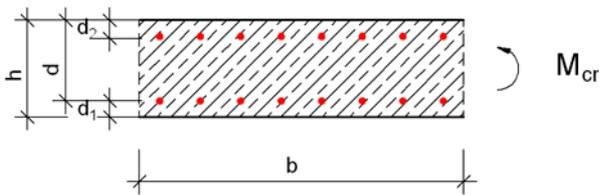
Bei der Modellierung mit Hilfe der modifizierten Stahlkennlinie werden der Betonquerschnittsfläche im ungerissenen Zustand I keine Zugspannungen zugewiesen. Daher reißt der Querschnitt im Rechenmodell unter Biegebeanspruchung sofort auf. Um dennoch das Querschnittsverhalten mit der Steifigkeit entsprechend dem ungerissenen Zustand abbilden zu können, wird die Stahlkennlinie so modifiziert, dass die Dehnungsebene entsprechend dem Verhalten des ungerissenen Querschnitts unter Berücksichtigung der Bewehrung möglichst wirklichkeitsnah angenähert wird (Bild 39). Die Modifizierung der Stahlkennlinie erfolgt dazu für den Rechteckquerschnitt im Rechenmodell mit:

$$\sigma_{sr}^I = \frac{M_{cr}}{A_s \cdot z} \quad \text{mit} \quad z = d - \frac{h}{6} \tag{7.33} \tag{7.34}$$

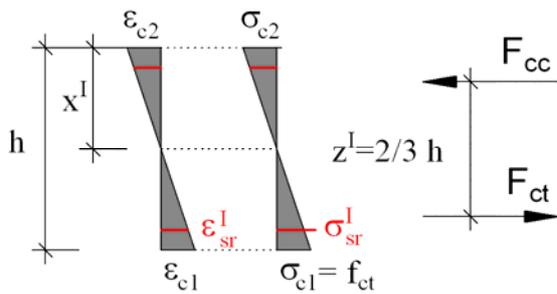
$$\varepsilon_{sr}^I = \frac{f_{ct}}{E_{c0m}} \cdot \frac{d - h/2}{h/2} \tag{7.35}$$

Der modifizierte Elastizitätsmodul für den Stahl beträgt im Rechenmodell:

$$E_{sm}^I = \frac{\sigma_{sr}^I}{\varepsilon_{sr}^I} = \frac{W_{u,i} \cdot h/2}{(d - h/6) \cdot A_s \cdot (d - h/2)} \cdot E_{c0m} \tag{7.36}$$



$$M_{cr} = f_{ct} \cdot W_{u,i}$$

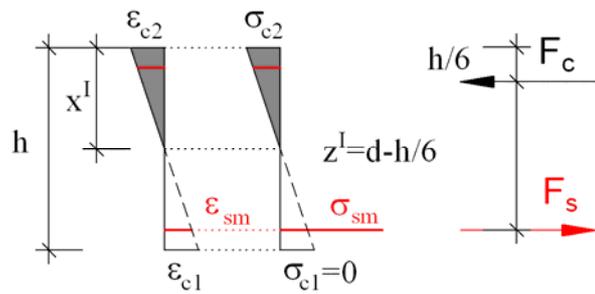


a) ungerissener Zustand I

$$x^I = h/2$$

$$z^I = \frac{2}{3} \cdot h = 0,6667 \cdot h$$

$$EI^I = E_{c0m} \cdot I_i$$



b) Rechenmodell

$$x^I \approx h/2$$

$$z^I \approx d - \frac{h}{6} \quad [\approx 0,733 \cdot h \text{ für } d = 0,9 \cdot h]$$

$$EI^I = \frac{M_{cr}}{\kappa_{cr}} \approx E_{c0m} \cdot I_i$$

Bild 39: Dehnungen und Spannungen unter dem Rissmoment (Zustand I)

Reine Biegung: Zustand II (gerissen)

Reißt der Querschnitt auf, so wirkt der Beton infolge des Verbundes im Bereich zwischen den Rissen mit. Die Mitwirkung des Betons wird über den versteifenden Anteil $\Delta \varepsilon_{sm}$ erfasst (Bild 38). Zur Bestimmung der Lage des Punktes B wird die Spannung im Stahl unter dem Rissmoment benötigt. Diese kann entweder mit einem Programm ermittelt werden oder näherungsweise unter Annahme einer linear-elastischen Spannungs-Dehnungslinie des Betons abgeschätzt werden.

$$\sigma_{sr}^{II} = \frac{M_{cr}}{z^{II} \cdot A_s} \quad (7.37)$$

$$z^{II} = d - x^{II} / 3$$

$$\text{mit } x^{II} = \xi \cdot d$$

$$\xi = -\alpha_E \cdot \rho_{s1} \cdot (1 + \rho_{s2} / \rho_{s1}) + \sqrt{[\alpha_E \cdot \rho_{s1} \cdot (1 + \rho_{s2} / \rho_{s1})]^2 + 2 \cdot \alpha_E \cdot \rho_{s1} \cdot (1 + \rho_{s2} / \rho_{s1}) \cdot d_2 / d} \quad (7.38)$$

$$\alpha_E = E_s / E_{cm}$$

Der Einfluss der Druckbewehrung bei der Bestimmung des Hebelarms ist dabei von untergeordneter Bedeutung. In die obige Näherungsgleichung geht der Sekantenmodul des Betons ein.

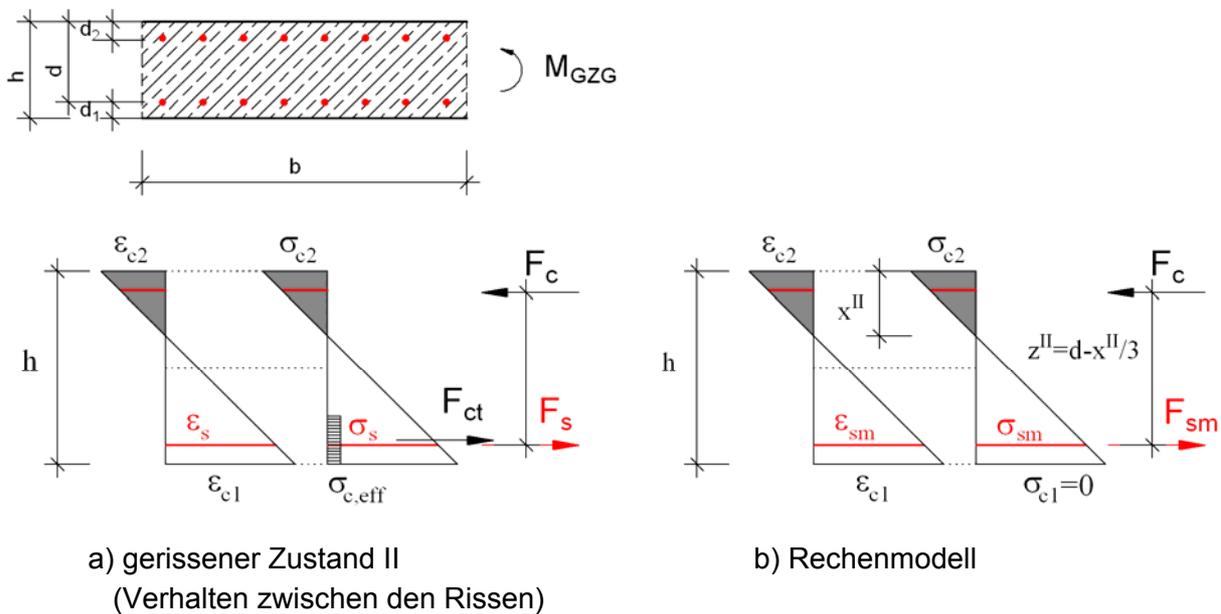


Bild 40: Dehnungen und Spannungen im Zustand II (nur M)

Reine Normalkraft: Zustand I (ungerissen)

Die Nachbildung des ungerissenen Zustands eines normalkraftbeanspruchten, symmetrisch bewehrten Querschnitts erfolgt ebenfalls unter Berücksichtigung der ideellen Querschnittswerte (Bild 41). Die Modifizierung der Spannungs-Dehnungslinie des Stahls erfolgt mit:

$$\epsilon_{sr}^I = \frac{f_{ct}}{E_{c0m}} \quad \sigma_{sr}^I = \frac{N_{cr}}{2 \cdot A_s} = \frac{f_{ct} \cdot A_i}{2 \cdot A_s} \tag{7.39} \tag{7.40}$$

Der modifizierte Elastizitätsmodul für den Stahl beträgt im Rechenmodell:

$$E_{sm}^I = \frac{\sigma_{sr}^I}{\epsilon_{sr}^I} = 0,5 \cdot \frac{A_i}{A_s} \cdot E_{c0m} \tag{7.41}$$

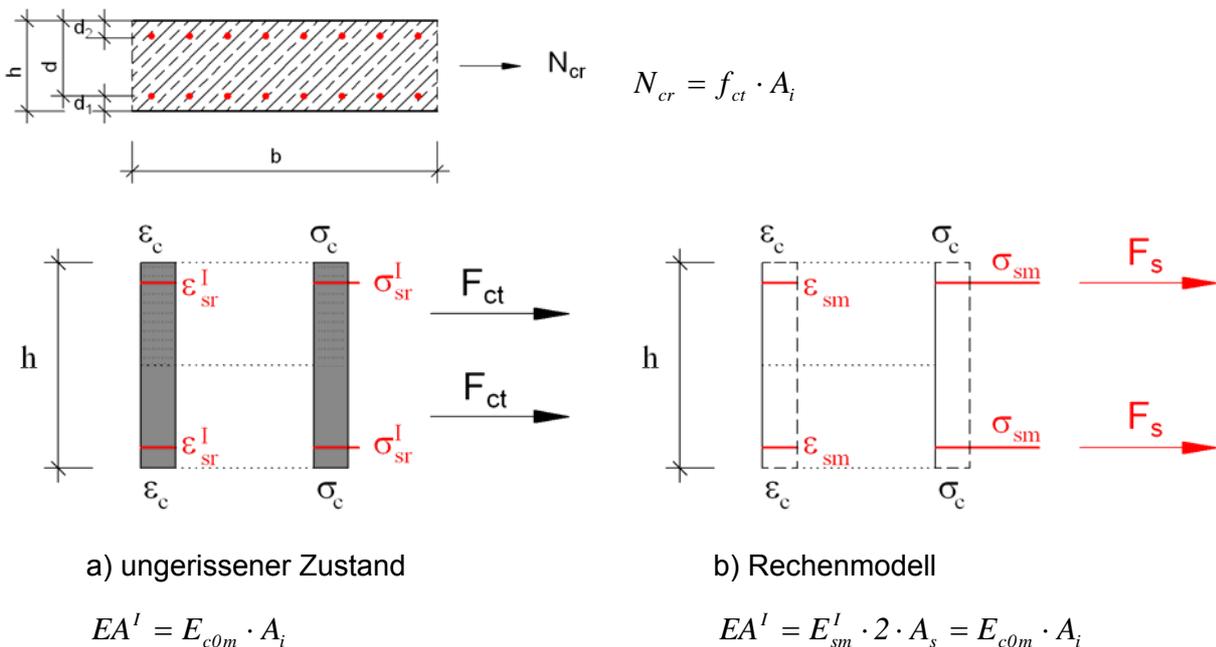


Bild 41: Spannungen und Dehnungen unter der Rissnormalkraft (Zustand I)

Damit wird die Dehnsteifigkeit $E_{c0m} A_i$ eines homogenen, ungerissenen und symmetrisch bewehrten Querschnitts genau abgebildet. Die Rissnormalkraft wird mit dem Modell ebenfalls genau erfasst. Jedoch wird die Biegesteifigkeit bei Anwendung der so modifizierten Stahlkennlinie zu groß abgebildet.

Reine Normalkraft: Zustand II (gerissen)

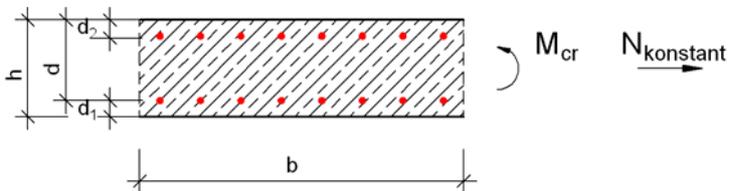
Reißt der Querschnitt auf, so wird die Rissnormalkraft von der Bewehrung alleine aufgenommen. Die Mitwirkung des Betons auf Zug wird in der Spannungsdehnungslinie des Stahls über den versteifenden Anteil $\Delta\epsilon_{sm}$ berücksichtigt.

Die zur Bestimmung der Lage des Punktes B erforderliche Spannung in der Bewehrung unter der Rissnormalkraft beträgt:

$$\sigma_{sr}^{II} = \sigma_{sr}^I = \frac{N_{cr}}{2 \cdot A_s} \quad (7.42)$$

Kombinierte Beanspruchung (N – M): Zustand I (ungerissen)

Das Ziel bei einer Modellierung des Stahlbetonverhaltens unter einer kombinierten Beanspruchung aus M und N besteht darin, die Risschnittgrößen, welche über die Ausdehnung der gerissenen Bereiche entscheiden, über die modifizierte Stahlkennlinien möglichst zutreffend abzubilden. Ist die Normalkraft konstant, so lässt sich das zugehörige Rissmoment wie folgt bestimmen:

$$M_{cr} = \left(f_{ct} - \frac{N_{konstant}}{A_i} \right) \cdot W_{u,i}$$


Die Modifizierung der Stahlkennlinie erfolgt so, dass die Risschnittgrößen wirklichkeitsnah abgebildet werden. Dabei kann der Effekt der Vergrößerung der Biegezugfestigkeit infolge des Maßstabeffekts – je nach Größe der Exzentrizität – berücksichtigt werden. Über das Aufstellen einer Momenten-Krümmungsbeziehung für einen Querschnitt kann man zeigen, dass die Risschnittgrößen im Falle einer konstanten Normalkraft gut getroffen werden und somit die Ausdehnung der gerissenen und ungerissenen Bereiche realistisch erfasst werden. Diese Art der Modifizierung setzt jedoch voraus, dass die Normalkraft bekannt ist.

Kombinierte Beanspruchung: Zustand II (gerissen)

Bei einer kombinierten Beanspruchung aus M und N wird der Bereich der abgeschlossenen Rissbildung genauso wie bei den beiden vorangegangenen Modifizierungsweisen modelliert. Die Differenzdehnung $\Delta\varepsilon_{sm}$, welche sich über die effektiv mitwirkende Randzugzone ergibt, ist die gleiche wie bei den beiden anderen Modifizierungsweisen. Jedoch verschiebt sich die Lage der Punkte A und B (Bild 38) je nach Größe der gleichzeitig wirkenden Normalkraft. Zur Bestimmung der Spannungen und Dehnungen Punkte A und B benötigt man die Spannung in der Bewehrung unter den Risschnittgrößen. Diese kann entweder mit einem Programm ermittelt oder mit der nachfolgender Näherungsformel abgeschätzt werden.

$$\sigma_{sr}^{II} \approx \frac{N}{2 \cdot A_s} + \frac{M_{cr}}{z^{II} \cdot A_s} \quad (7.43)$$

7.5.2 Vergleich der beanspruchungsabhängigen Modifizierungsweisen

Anhand eines beispielhaften, symmetrisch bewehrten Querschnittes werden die zuvor beschriebenen beanspruchungsabhängigen Modifizierungsweisen der Stahlkennlinie miteinander verglichen. Dabei wird die Erhöhung der Zugfestigkeit infolge des Maßstabeffekts berücksichtigt. Für die kombinierte Beanspruchung wird die gleichzeitig wirkende Zugkraft N entsprechend 25%, 50%, 75% und 100% von N_{cr} variiert. Damit ergeben sich folgende Risschnittgrößen:

Reine Biegung: $M_{cr} = \alpha \cdot f_{ct,fl} \cdot W_{u,i} = (3,77 \cdot 0,0164) kNm = 61,8 kNm$

Reine Normalkraft: $N_{cr} = \alpha \cdot f_{ctm} \cdot A_i = (2,9 \cdot 0,31423) kN = 911 kN$

Kombinierte Beanspruchung:

$N_1 = 250 kN \approx 25\% \cdot N_{cr} \quad f_{ct,fl} = 1,25 \cdot f_{ctm} \quad M_{1,cr} = 46,5 kNm$

$N_2 = 500 kN \approx 50\% \cdot N_{cr} \quad f_{ct,fl} = 1,2 \cdot f_{ctm} \quad M_{2,cr} = 31,0 kNm$

$N_2 = 750 kN \approx 75\% \cdot N_{cr} \quad f_{ct,fl} = 1,1 \cdot f_{ctm} \quad M_{3,cr} = 13,1 kNm$

Bild 42 zeigt die modifizierten Stahlkennlinien bei reiner Biege- bzw. reiner Normalkraftbeanspruchung („biegungsorientierte“ und „normalkraftorientierte“ Modifikation). Es ergibt sich ein signifikanter Unterschied bei den Anfangssteigungen, mit denen der Zustand I abgebildet wird.

Reine Biegung: $E_{sm}^I \approx \frac{0,0164 \cdot 0,15}{0,22 \cdot 13,5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,12} \cdot E_{c0m} = 69 E_{c0m}$

Reine Normalkraft: $E_{sm}^I \approx 0,5 \cdot \frac{0,31423}{13,5 \cdot 10^{-4}} \cdot E_{c0m} = 116 E_{c0m}$

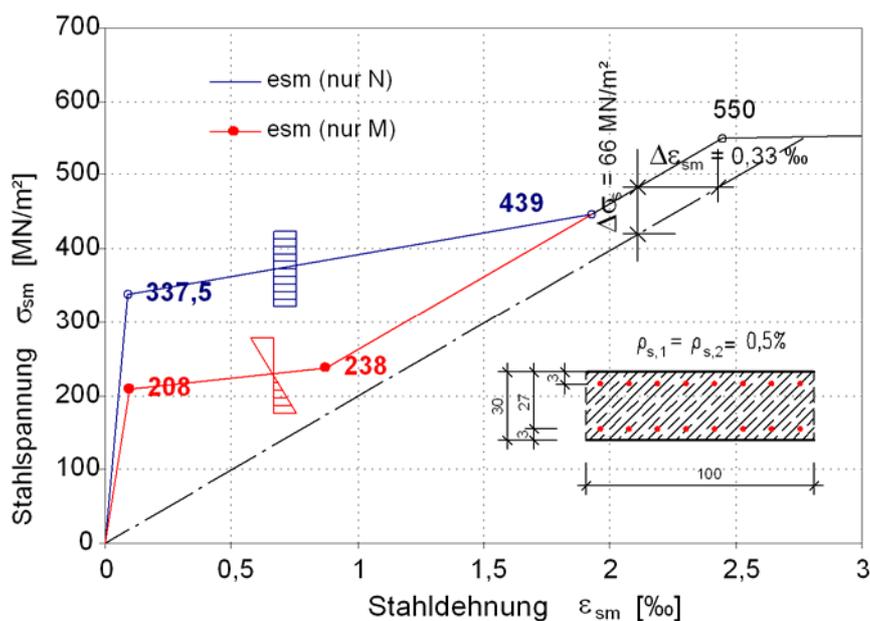


Bild 42: Modifizierte Spannungs-Dehnungslinien (biegungs- und normalkraftorientiert)

Des Weiteren ist eine Verschiebung der Punkte A und B (vgl. Bild 38) je nach Beanspruchungsart erkennbar. Die Modifizierung für reine Normalkraftbeanspruchung ergibt für diese Punkte höhere mittlere Stahlspannungen.

Die beanspruchungsabhängige Modifizierung wirkt sich insbesondere in den Bereichen a) ungerissen und b) Rissbildung aus. Im Bereich der abgeschlossenen Rissbildung ist die Modifikation der Stahlkennlinie beanspruchungsunabhängig. Befindet sich ein Bauteil überwiegend im Zustand II, nähern sich daher die Ergebnisse beider Modifizierungsweisen an.

Vergleich der Dehn- und Biegesteifigkeiten

Bild 43 zeigt die sich ergebenden Dehnsteifigkeiten für die „biegungsorientierte“ und die „normalkraftorientierte“ Modifizierung. Die „normalkraftorientierte“ Modifizierung ergibt bei reiner Zugbeanspruchung realistische Dehnsteifigkeiten. Bei der „biegungsorientierten“ Modifizierung der Stahlkennlinie wird die Dehnsteifigkeit EA^I im Zustand I deutlich unterschätzt. Der Querschnitt geht bei dieser Art der Modellierung rechnerisch schon bei ca. 60% der Rissnormalkraft in den Zustand II über.

Dies hat zur Folge, dass im Falle einer Temperatureinwirkung ΔT_N oder einer Schwindverkürzung ε_{cs} , sofern die Verkürzung behindert wird, die entstehenden Normalkräfte deutlich zu klein ermittelt werden.

Die Dehnsteifigkeit im Zustand II, die sich in Bereichen mit abgeschlossener Rissbildung auswirkt, wird ebenfalls unterschätzt. Da die absoluten Steifigkeiten dann unter 10% liegen, hat dies in der Regel einen untergeordneten Einfluss auf die Ergebnisse.

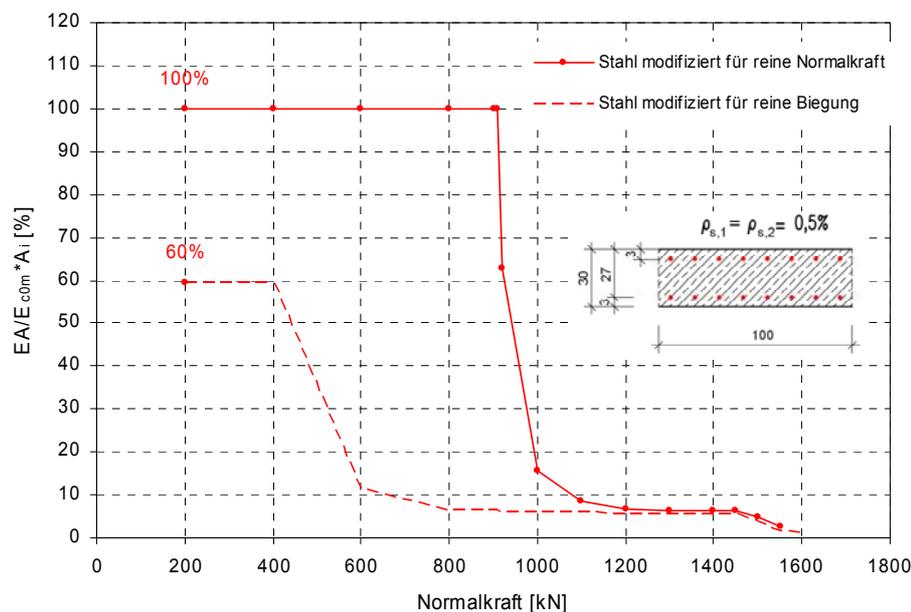


Bild 43: Dehnsteifigkeiten bei unterschiedlicher Modifizierungsweise des Stahls

Bild 44 zeigt demgegenüber die Biegesteifigkeiten der beiden Modifizierungsweisen. Bei der normalkraftorientierten Modifizierung werden die Biegesteifigkeit EI^I im ungerissenen Zustand I sowie das Rissmoment unter reiner Biegebeanspruchung deutlich überschätzt. Dadurch wird

die Ausdehnung der gerissenen und ungerissenen Bereiche nicht mehr richtig erfasst. Dies hat zur Folge, dass unter reiner Lastbeanspruchung die Durchbiegungen zu gering berechnet werden.

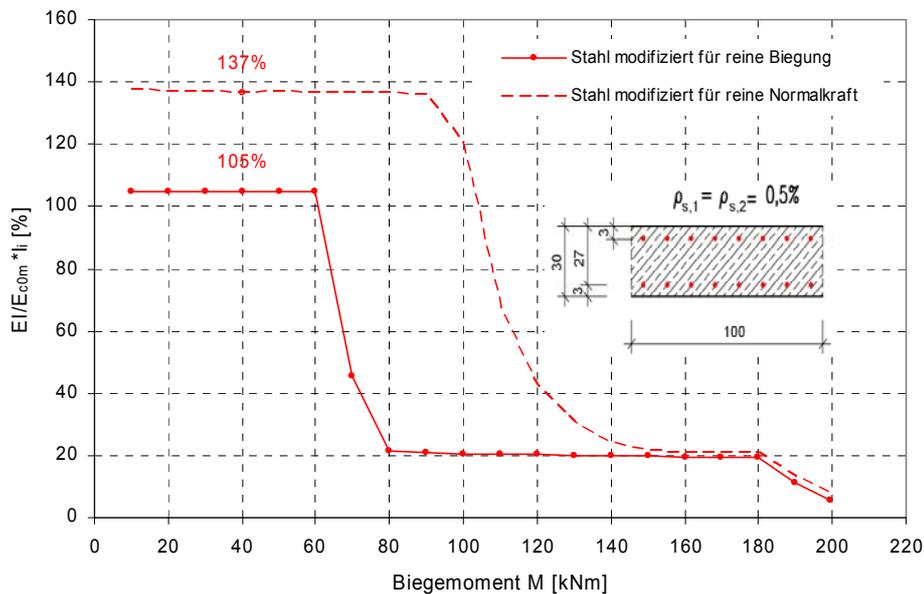


Bild 44: Biegesteifigkeiten bei unterschiedlicher Modifizierungsweise des Stahls

Tabelle 1 zeigt für den ausgesuchten Querschnitt die sich aus den je nach Beanspruchung unterschiedlichen Modifizierungsweisen ergebenden Steifigkeiten im Zustand I. Die Biegesteifigkeit im Zustand I ergibt sich mit M/κ aus der nichtlinearen Querschnittsbetrachtung. Das Rechenmodell erfasst gut das zur konstanten Normalkraft gehörige Rissmoment. Somit werden am Bauteil die gerissenen und ungerissenen Bereiche gut erfasst. In keinem der Fälle werden beide Steifigkeiten – Biege- und Dehnsteifigkeit im Zustand I – richtig erfasst.

Tabelle 1: Dehn- und Biegesteifigkeiten (Zustand I) in Abhängigkeit von der Modifizierungsweisen (Querschnitt 100/30/27)

N_{cr}	M_{cr}	$\frac{E_{sm}}{E_{com}}$	$EA^I = 2 \cdot A_s \cdot E_{sm}$	$EI^I = \frac{M}{\kappa}$
[kN]	[kN m]	[-]	[MN]	[MNm ²]
0	62	69	5945	80,3
250	45	76	6525	85,4
500	31	91	7803	93,3
750	13	104	8924	100,3
911	0	116	10024	104,7

Ungerissener Querschnitt (Zustand I): $EA^I=10024$ MN, $EI^I =76,5$ MNm²

7.5.3 Berücksichtigung des Kriechens bei der Modifizierung der Stahlkennlinie

Im ungerissenen Bereich wird das Kriechen des Betons über eine Anpassung des Elastizitätsmoduls berücksichtigt. Auf Grund der reduzierten Dauerstandzugfestigkeit reduziert sich das Rissmoment auf ca. 70% des Wertes zum Zeitpunkt $t=0$. Die zugehörigen Dehnungen vergrößern sich im ungerissenen Bereich mit dem Faktor $(1 + \varphi)$.

$$M_{cr,\infty} = 70\% \cdot M_{cr,0} \quad (7.44)$$

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi} \quad (7.45)$$

Im gerissenen Bereich c) (abgeschlossenes Rissbild) verringert sich durch das Verbundkriechen die Mitwirkung des Betons auf Zug ($\beta_t=0,25$). Im Zustand II wirkt sich das Kriechen nur auf die Betondruckzone aus. Die Druckzonenhöhe erhöht sich, wodurch der Hebelarm z etwas kleiner wird. Dadurch werden die Spannungen in der Bewehrung größer.

Bild 45 zeigt beispielhaft für den Plattenquerschnitt die verwendete modifizierte Spannungs-Dehnungslinie des Stahls mit und ohne Berücksichtigung des Kriechens des Betons. Da bei der Modifizierung im ersten Bereich a) ein kleinerer Hebelarm als im Bereich b) maßgebend wird, ist das Verhältnis der Spannung des Punktes B zur Spannung des Punktes A kleiner als 1,3.

Punkt A: $\sigma_{sr}^I = \frac{M_{cr}}{z \cdot A_s} = 208 \text{ MN/m}^2$ mit $z = d - h/6$

Punkt B: $1,3 \cdot \sigma_{sr}^I = 1,3 \cdot \frac{M_{cr}}{z'' \cdot A_s} = 238 \text{ MN/m}^2$ mit $z'' = d - \xi \cdot d/3$ nach Gl.7.38

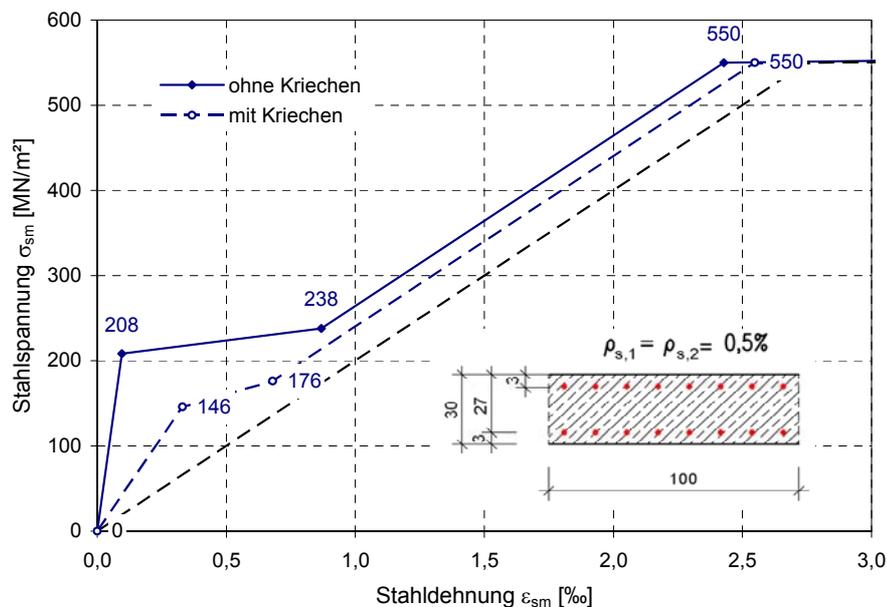


Bild 45: Modifizierte Spannungs-Dehnungslinie des Stahls unter Berücksichtigung des Kriechens ($\varphi = 2,5$)

7.5.4 Modifizierung der Betonkennlinie

Alternativ zur Modifizierung der Stahlkennlinie kann die versteifende Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen (Tension-Stiffening) durch eine Modifikation der Spannungs-Dehnungslinie des Betons im Zugbereich erfolgen. Hierzu findet man eine Reihe von Ansätzen in der Literatur, welche Pardey in [Par 52] ausführlich analysiert hat. Für die von ihm durchgeführten nichtlinearen Berechnungen hat er die Tension-Stiffening Ansätze 1 bzw. 2 gewählt (Bild 46). Die fiktiven Zugspannungen können entweder verteilt über die Querschnittshöhe, oder konzentriert in der Nähe der Bewehrung angesetzt werden, wobei beide Ansätze bei entsprechender Wahl der Ansatzfunktion zum gleichen Ergebnis führen. Die in Bild 46 dargestellten Ansätze werden über die ganze Querschnittshöhe angesetzt.

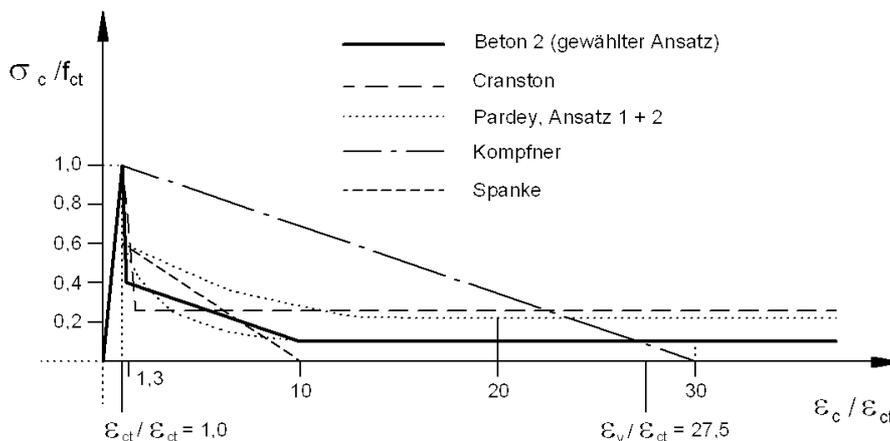


Bild 46: Ansätze zur Berücksichtigung des Tension-Stiffening im Beton nach [Par 52]

Zustand I

Durch die Annahme einer linear-elastischen Spannungs-Dehnungsbeziehung für den Beton unter Zugbeanspruchung im Bereich kleiner Dehnungen (bis $\epsilon_{ct} = f_{ct}/E_{cm}$) können sowohl die Biegesteifigkeit als auch die Dehnsteifigkeit des Querschnitts im Zustand I richtig erfasst werden. Ebenfalls richtig getroffen werden – unabhängig von der Beanspruchungskombination – die Risschnittgrößen. Lediglich der Einfluss aus dem Maßstabeffekt, der mit zunehmender Normalkraft abnimmt, kann bei einer einheitlichen, beanspruchungsunabhängigen Modifizierung des Betons nicht berücksichtigt werden.

Zustand II

Im Bereich des abgeschlossenen Rissbildes ist die Mitwirkung des Betons auf Zug von N_{eff} abhängig.

$$F_{cr,eff} = h_{eff} \cdot b \cdot f_{ctm} = 2,5 \cdot d_1 \cdot b \cdot f_{ctm} \quad (7.46)$$

$$\Delta F_{cr,eff} = \beta_t \cdot F_{cr,eff} \quad \beta_t = 0,40 \text{ bzw. } 0,25 \quad (7.47)$$

Die Stahlspannungsdifferenz $\Delta\sigma_{sm}$ im Bereich der abgeschlossenen Rissbildung ergibt sich in Abhängigkeit von der effektiven Zugkraft.

$$\text{Im Stahl:} \quad \Delta\sigma_{sm} = \Delta F_{cr,eff} / A_s \quad \Delta\varepsilon_{sm} = \Delta\sigma_{sm} / E_s \quad (7.48)$$

Die Differenzspannungen des Stahls $\Delta\sigma_{sm}$ können durch adäquate Betonspannungen $\Delta\sigma_{cm}$ ersetzt werden, die das Tension-Stiffening in der Wirkungszone der Bewehrung $A_{c,eff}$ berücksichtigen:

$$\text{Im Beton:} \quad \Delta\sigma_{cm} = \Delta F_{cr,eff} / A_{c,eff} = \beta_t \cdot f_{ctm} \quad (7.49)$$

$$\text{bzw.} \quad \Delta\sigma_{cm} = \frac{A_s}{A_{c,eff}} \cdot \Delta\sigma_{sm} \quad (7.50)$$

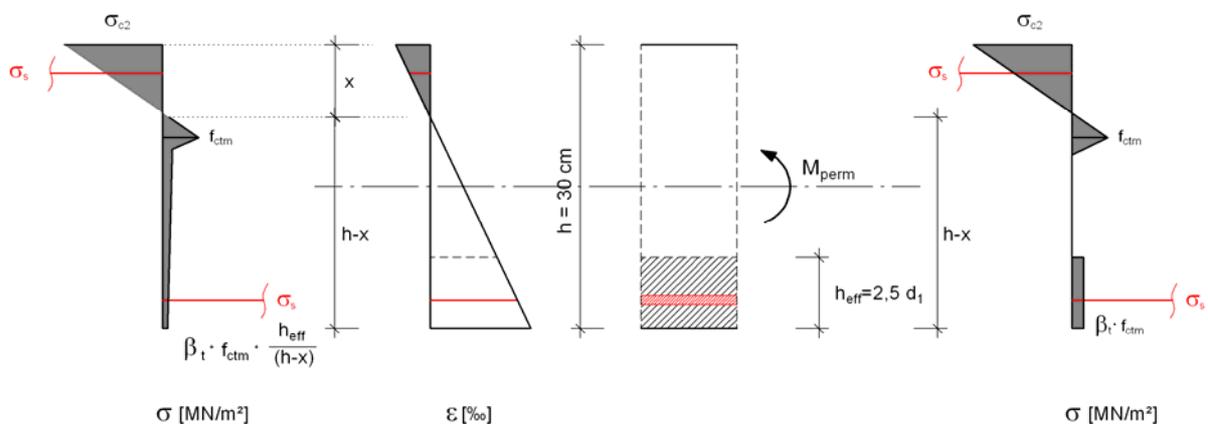
Anpassungsfaktor $f_{Biegung}$ bzw. $f_{Normalkraft}$

Da im Rechenmodell für den Beton über die ganze Querschnittshöhe das gleiche Materialgesetz angesetzt wird, erfolgt eine Anpassung mit dem Faktor:

$$f_{Biegung} = \frac{h_{eff}}{(h-x)} \quad (7.51)$$

Somit werden Zugspannungen über den ganzen Zugbereich $h-x$ mitgenommen, jedoch mit einem reduzierten Wert. Die größten Betonzugspannungen treten im ungerissenen Beton sowie in der angrenzenden Bruchprozesszone auf. Dies ist insofern realistisch, als die Übertragung von Zugkräften bei Rissweiten $< 0,1$ mm nachgebildet wird. Der Anpassungsfaktor f orientiert sich an der Beanspruchungsart Biegung. Für eine reine Zugbeanspruchung ergibt sich analog:

$$f_{Normalkraft} = \frac{h_{eff}}{(h/2)} \quad (7.52)$$



a) idealisiertes Rechenmodell

b) realistisches Verhalten

Bild 47: Dehnungen und Spannungen unter M_{perm}

Festlegung der zugehörigen Dehnungen

Wie bei der Stahlmodifikation gibt es auch bei der Betonmodifikation die 4 unterschiedlichen Bereiche: ungerissen, Rissbildung, abgeschlossenes Rissbild und Fließen. Für die Untersuchungen im Gebrauchszustand sind die ersten drei Bereiche von Interesse. Der ungerissene Bereich a) wird automatisch und beanspruchungsunabhängig richtig abgebildet. Die zugehörige Dehnung ist:

$$\varepsilon_{ct} = \frac{f_{ct}}{E_{cm}} \approx 0,1\text{‰} \tag{7.53}$$

Die Bereiche b) und c), d. h. die Rissbildung sowie das Erreichen des abgeschlossenen Rissbildes (Lage des Punktes B) sind von der Beanspruchungsart und vom Bewehrungsgrad abhängig. Bild 48 zeigt mit der gestrichelten Linie die biegungsorientierte Stahlmodifikation für einen bestimmten Bewehrungsgrad, welche alternativ zur Modifizierung der Betonkennlinie vorgenommen werden kann. Die Stahldehnung bei Erreichen des abgeschlossenen Rissbildes (Punkt B) ist vom Bewehrungsgrad abhängig. Für die Betondehnung ergibt sich ein entsprechender Wert. Da für den Beton ein einheitliches Materialgesetz verwendet wird, wird für die Betondehnung bei Erreichen des abgeschlossenen Rissbildes ein einheitlicher Wert angenommen, welcher unabhängig vom Bewehrungsgrad ist.

$$\varepsilon_c(B) = 1\text{‰}$$

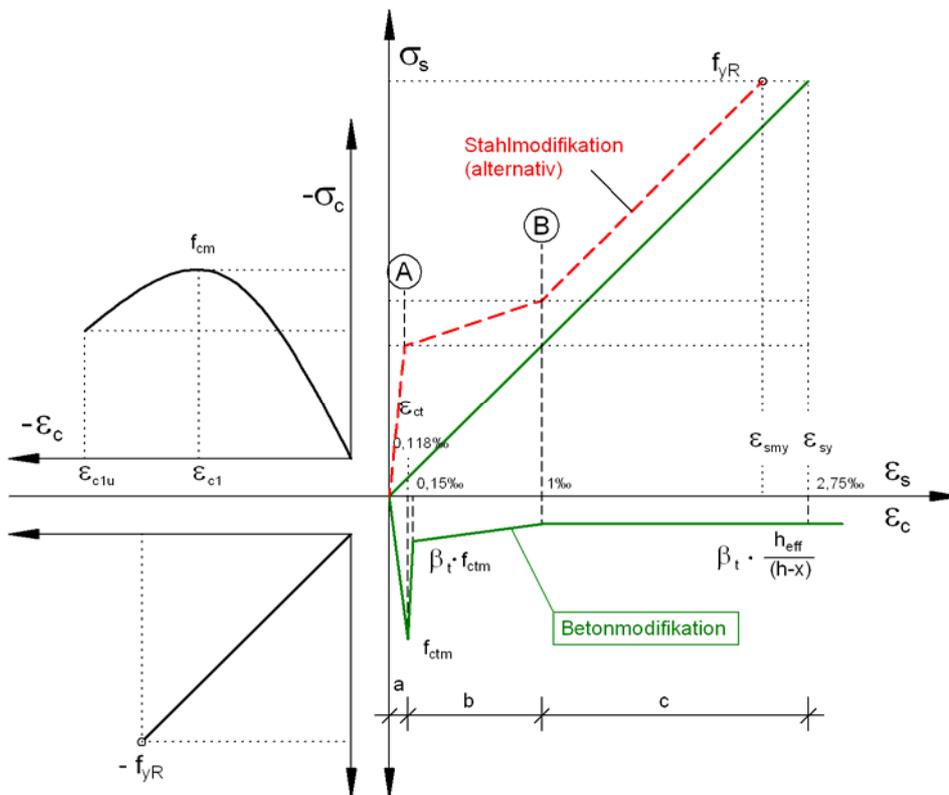


Bild 48: Stahlmodifikation und Betonmodifikation im Vergleich

Dehn- und Biegesteifigkeiten bei Anwendung der Betonmodifikation

Die Modifikation der Betonkennlinie hat vor allem Vorteile bei der Modellierung des Querschnittes im Zustand I und bei der Abbildung der Risschnittgrößen. Bild 50 und Bild 51 zeigen die sich ergebenden Dehn- und Biegesteifigkeiten bei Anwendung der Betonmodifikation für den in Abschnitt 7.5.2 betrachteten Querschnitt. Mit nur einer Art der Betonmodifizierung, können beide Steifigkeiten im Zustand I mit ausreichender Genauigkeit abgebildet werden.

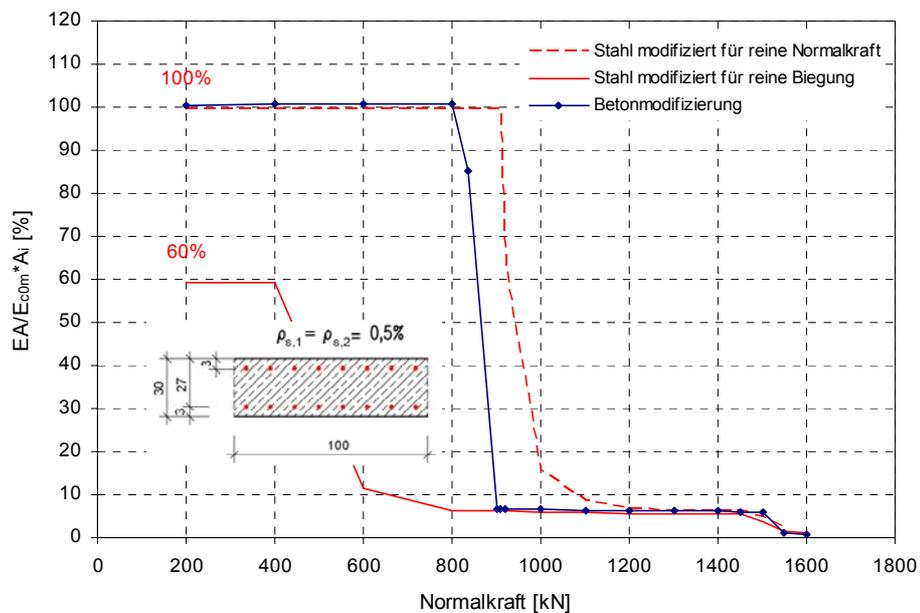


Bild 50: Dehnsteifigkeit bei Anwendung der Betonmodifikation

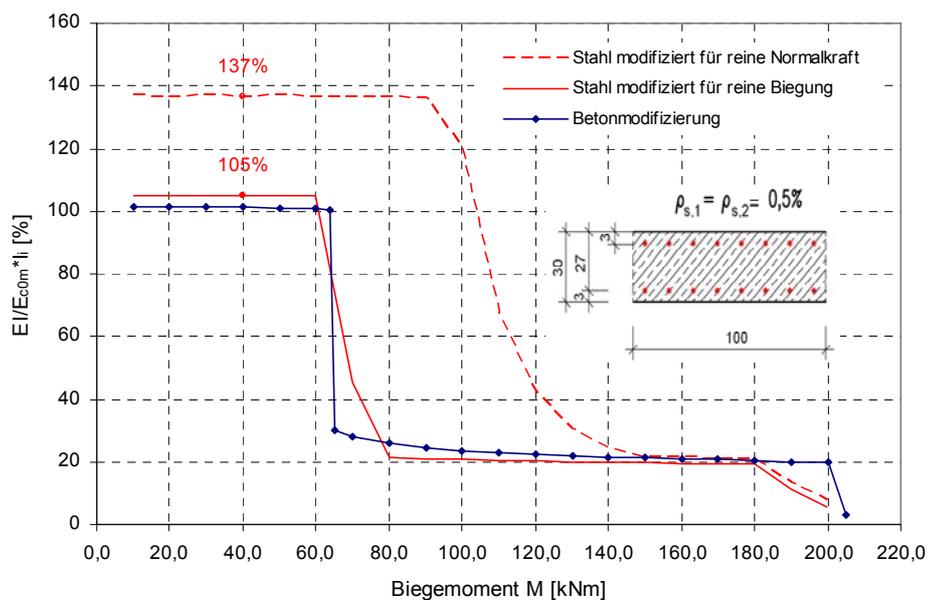


Bild 51: Biegesteifigkeit bei Anwendung der Betonmodifikation

7.5.5 Berücksichtigung des Kriechens bei der Modifizierung der Betonkennlinie

Ausgehend davon, dass das Betonzugkriechen sich ähnlich verhält wie das Druckkriechen und bei Ansatz des gleichen Elastizitätsmoduls für Zug und Druck, wird das Kriechen des Betons – analog zur Stahlmodifikation – über die Vergrößerung der Dehnungen mit dem Faktor $(1+\varphi)$ berücksichtigt.

Zur Berücksichtigung des zeitabhängigen Verhaltens wird für die Dauerstandzugfestigkeit 70% der im Kurzzeitversuch gemessenen Zugfestigkeit f_{ctm} angesetzt. Im Bereich der abgeschlossenen Rissbildung wird das Dauerstandverhalten durch eine Reduzierung des Faktors β_t von 0,4 auf 0,25 wegen des Verbundkriechens berücksichtigt.

Der hier gewählte Ansatz für die Betonmodifikation Beton 2 für die nichtlinearen Berechnungen unter Berücksichtigung des Kriechens ist in Bild 52 dargestellt.

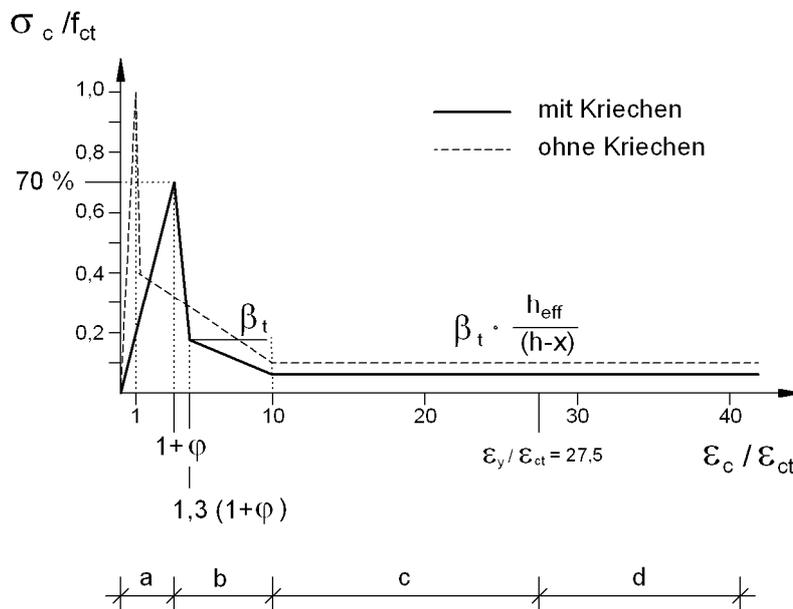


Bild 52: Tension-Stiffening Ansatz: Beton 2 für die nichtlinearen Berechnungen mit Kriechen

7.6 Vergleich der Modellierungsarten (Stahl – Beton)

Für die Nachweise im Gebrauchszustand ist die wirklichkeitsnahe Abbildung der Steifigkeiten für die zutreffende Ermittlung der Zwangsschnittgrößen von großer Bedeutung. Das umfasst sowohl die Biegesteifigkeiten (EI^I und EI^{II}) und Dehnsteifigkeiten (EA^I und EA^{II}) im gerissenen und ungerissenen Zustand, als auch den Übergang von Bauteilbereichen in den Zustand II, d. h. das Überschreiten der Risschnittgrößen und die Phase der Rissbildung. Die wirklichkeitsnahe Erfassung der Biegesteifigkeiten ist insbesondere bei Durchbiegungsberechnungen von Bedeutung, während die Dehnsteifigkeit für die Größe der entstehenden Zwangskräfte und der daraus resultierenden Rissbreiten von großem Einfluss ist.

Eignung der Modifizierungen für kombinierte Beanspruchung

Am beidseitig starr eingespannten System mit horizontal unverschieblicher Lagerung kann die Eignung der Modifizierung hinsichtlich einer kombinierten Beanspruchung aus Last und zentrischem Zwang überprüft werden. Dazu wird eine Temperatureinwirkung von $\Delta T_N = -15$ K zusätzlich zur Lastbeanspruchung untersucht. Die Auswertung erfolgt über alle Laststufen. Die Modifizierung erfolgt sowohl für den Beton als auch für den Stahl „biegungsorientiert“. Durch die zusätzlich vorhandene Temperatureinwirkung und der damit verbundenen Zugkraft infolge Zwanges nehmen die Durchbiegungen des Plattenstreifens deutlich zu (Bild 53).

Mit der Stahlmodifikation ergeben sich stetigere Kurvenverläufe. Durch die zu geringe Dehnsteifigkeit im ungerissenen Zustand reißt der Querschnitt schon unter reiner Zugbeanspruchung auf, obwohl die zugehörige Normalkraft (570 kN) die Rissnormalkraft noch nicht erreicht hat. Die Durchbiegungen nehmen im unteren Bereich stark zu, was der Realität nicht entspricht. Die Modifizierung der Betonkennlinie bildet naturgemäß den ungerissenen Bereich besser ab, zeigt aber Unstetigkeiten bzw. Oszillation der numerischen Ergebnisse im Bereich der Rissbildungsphase. Nach Entstehung der ersten Risse auch im Einspannbereich ($q_{cr} = 13,2$ kN/m) weichen die Ergebnisse kaum voneinander ab (Bild 53).

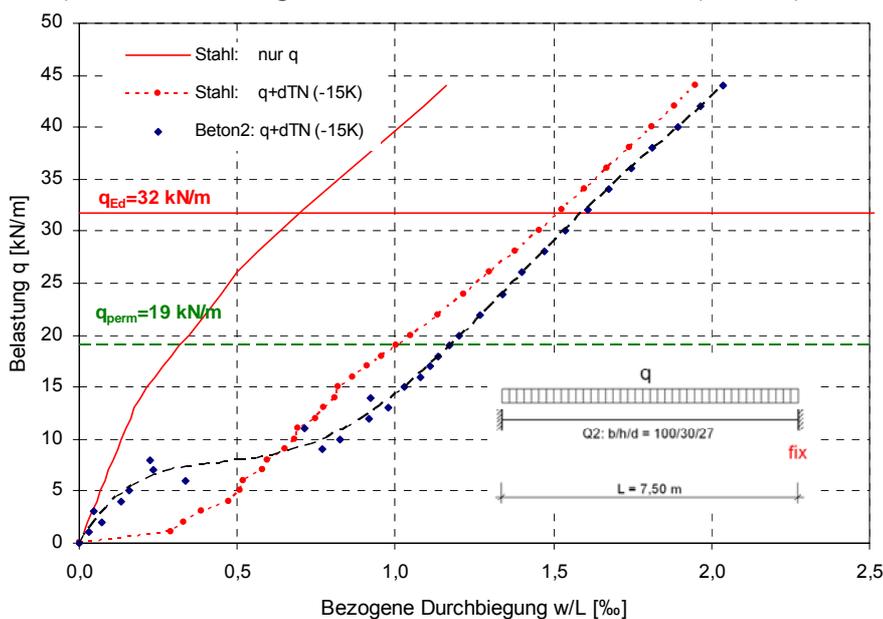


Bild 53: Bezogene Durchbiegungen mit und ohne Temperatureinwirkung

Normalkräfte bei kombinierter Beanspruchung

Die sich ergebenden Normalkräfte sind bei beiden Modifizierungsarten in etwa gleich groß. Im Fall, dass nur eine Temperatureinwirkung von $\Delta T_N = -15$ K vorliegt ergibt sich eine Zugkraft von ca. $N = 500$ kN (Bild 54). Im Bereich hoher Querbelastung q reicht die Dehnung nicht aus, um die durch Lastbeanspruchung entstehende Druckkraft zu kompensieren.

In Abhängigkeit von der Belastung q kann die Zwangnormalkraft aufgetragen werden. Sie ergibt sich als Differenzwert zwischen der nichtlinearen Berechnung mit und ohne Temperatureinwirkung. Die Zwangskraft infolge $\Delta T_N = -15$ K nimmt mit zunehmender Querbelastung q um ca. 50% ab. Bei Erreichen des abgeschlossenen Rissbildes im Stütz- und Feldbereich bleibt die Zwangskraft konstant, da sich durch die weitere Belastung die Dehnsteifigkeit des Bauteils nicht mehr stark verändert.

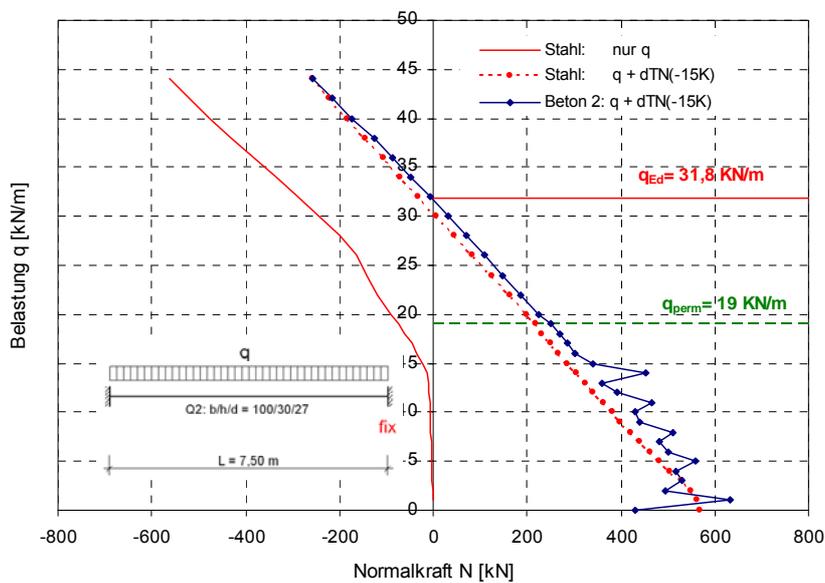


Bild 54: Normalkraft in Abhängigkeit von der Belastung mit und ohne Zwang

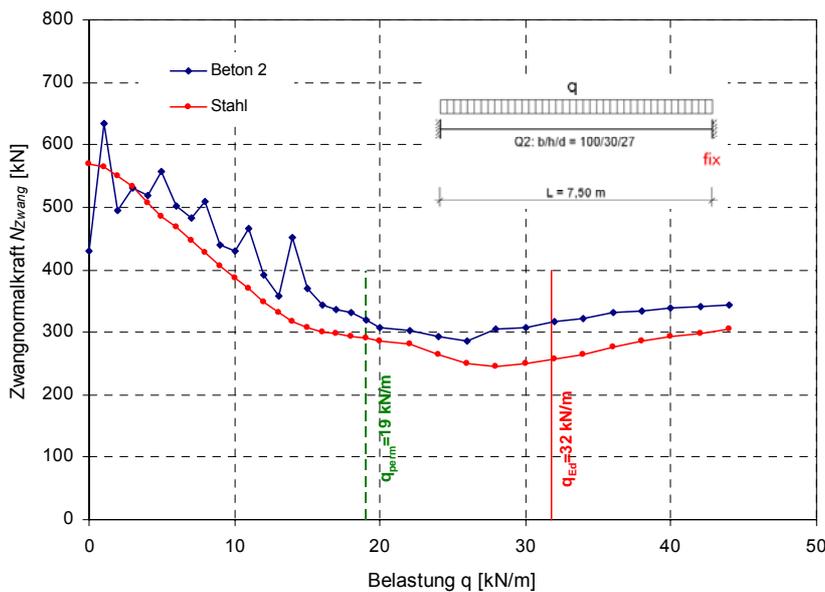
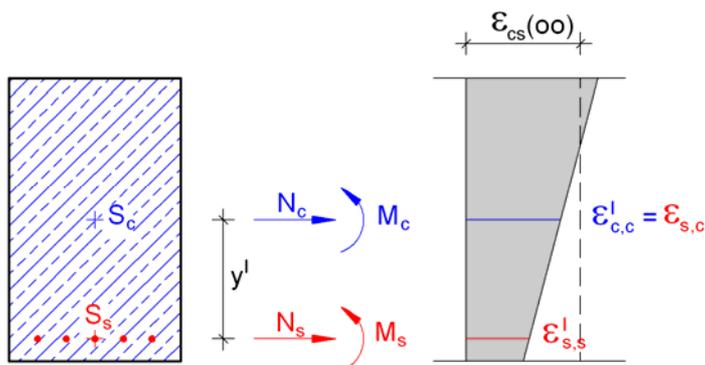


Bild 55: Entwicklung der Zwangnormalkraft infolge $\Delta T_N = -15$ K

7.7 Berücksichtigung des Schwindens

Die Schwindverkürzung erzeugt im Querschnitt einen Eigenspannungszustand. Die eingelegte Bewehrung behindert die Schwindverkürzung des Betons. Dadurch entsteht bei unsymmetrisch bewehrten Querschnitten sowie immer im gerissenen Querschnitt eine Schwindkrümmung. Zur Bestimmung der Krümmung infolge Schwindens kann der Verbundquerschnitt in zwei gedachte Teilquerschnitte aus Beton und Stahl zerlegt werden. Die Dehnungen der gedachten Teilquerschnitte werden durch innere Kräfte erzeugt. Bei Annahme einer schubstarran Verbindung der Teilquerschnitte, kann die Schwindkrümmung über das Kräfte- und Momentengleichgewicht sowie die Kompatibilitätsbedingungen (Ebenbleiben des Querschnitts) bestimmt werden. Die Betrachtungsweise erfolgt am Querschnitt im Zustand I und im Zustand II.

7.7.1 Schwindkrümmung im Zustand I



$$K_s^I = \frac{\varepsilon_{c,c}^I - \varepsilon_{s,s}^I}{y^I} \quad (7.54)$$

$$\varepsilon_{s,s}^I = \frac{\varepsilon_{cs}(\infty)}{1 + \alpha_E \cdot (1 + \varphi) \cdot \left(\rho_s + (y^I)^2 \cdot \frac{A_s}{I_c} \right)} \quad (7.55)$$

$$\varepsilon_{c,c}^I = \varepsilon_{cs}(\infty) - \frac{\varepsilon_{cs}(\infty) \cdot \rho_s \cdot \alpha_E \cdot (1 + \varphi)}{1 + \alpha_E \cdot (1 + \varphi) \cdot \left(\rho_s + (y^I)^2 \cdot \frac{A_s}{I_c} \right)} \quad (7.56)$$

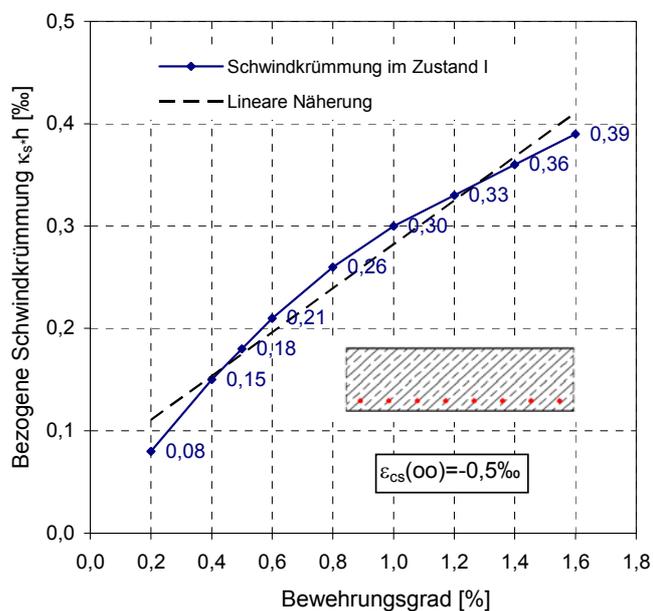
Im Zustand I entsteht eine Schwindkrümmung nur bei unsymmetrisch eingelegter Bewehrung. Die Größe der Schwindverformung im Zustand I variiert mit dem Bewehrungsgrad. Im Sonderfall der einseitig bewehrten Querschnitte ergeben sich die in Bild 56 dargestellten bezogenen Krümmungen. Für einen beidseitig unsymmetrisch bewehrten Querschnitt kann die bezogene Schwindkrümmung mit der Differenz des oberen und unteren Bewehrungsgrades ermittelt werden.

Die Schwindkrümmung im Zustand I steigt mit dem Bewehrungsgrad ρ_s an. Sie kann vereinfacht für einen beliebigen Rechteckquerschnitt mit nachfolgender linearer Näherung direkt berechnet werden.

$$\kappa_s^I = (0,428 \cdot \rho_s + 0,136) \cdot \varepsilon_{cs} / h \quad (7.57)$$

$$\kappa_s^I [1/km] \quad \rho_s [\%] \quad \varepsilon_{cs} [‰] \quad h [m]$$

Alternativ kann die Schwindkrümmung im Zustand I mit nachfolgendem Diagramm ermittelt werden.



Ermittlung der Schwindkrümmung im Zustand I:

$$\kappa_s^I = \frac{\text{Tafelwert}}{h} \cdot \frac{\varepsilon_{cs}(\text{vorh.})}{-0,5‰}$$

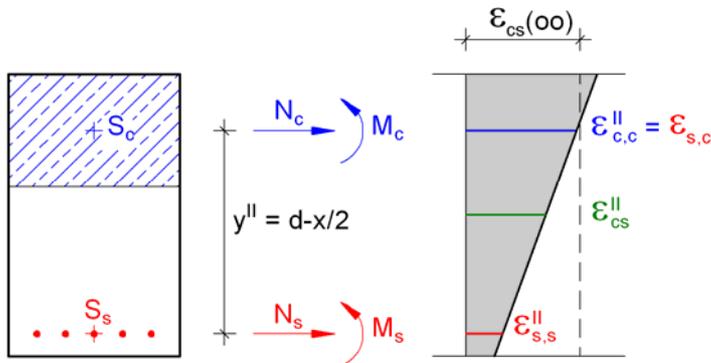
Bild 56: Bezogene Schwindkrümmungen im Zustand I, $d_1=0,1h$

Die Schwindkrümmung im Zustand I ist – insbesondere bei gering bewehrten Querschnitten – deutlich kleiner als die Schwindkrümmung im Zustand II. Bereiche mit einseitig eingelegter Bewehrung kommen nur bei Einfeldträgern vor. Bei Durchlaufträgern ist der Anteil der Bereiche mit symmetrischer oder nahezu symmetrischer Bewehrungsanordnung (insbesondere im Feldbereich) groß, so dass unter dieser Voraussetzung eine Vernachlässigung der Schwindkrümmung im Zustand I gerechtfertigt ist.

Daher wird im Rahmen dieser Arbeit die Schwindkrümmung im Zustand I bei den numerischen Untersuchungen in der Regel vernachlässigt.

7.7.2 Schwindkrümmung im Zustand II

Bei Annahme eines starren Verbundes zwischen Beton und Bewehrung ergeben sich für den Stahlbetonverbundquerschnitt im gerissenen Zustand II die nachfolgenden Beziehungen auf der Grundlage des Ebenbleibens der Querschnitte.



$$\kappa_s^{\text{II}} = \frac{\varepsilon_{c,c}^{\text{II}} - \varepsilon_{s,s}^{\text{II}}}{y^{\text{II}}} = \frac{\varepsilon_{c,c}^{\text{II}} - \varepsilon_{s,s}^{\text{II}}}{d - x/2} \quad (7.58)$$

$$\varepsilon_{s,s}^{\text{II}} = \frac{\varepsilon_{cs}(\infty)}{1 + \alpha_E \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \left(\rho_s / \xi + (y^{\text{II}})^2 \cdot \frac{A_s}{I_c \cdot \xi^3 + I_s \cdot \alpha_E \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)} \right)} \quad (7.59)$$

$$\varepsilon_{c,c}^{\text{II}} = \varepsilon_{cs}(\infty) - \frac{\varepsilon_{cs}(\infty) \cdot \rho_s / \xi \cdot \alpha_E \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}{1 + \alpha_E \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \left(\rho_s / \xi + (y^{\text{II}})^2 \cdot \frac{A_s}{I_c \cdot \xi^3 + I_s \cdot \alpha_E \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)} \right)} \quad (7.60)$$

mit

$\xi = x/d$ unter Berücksichtigung des Kriechens

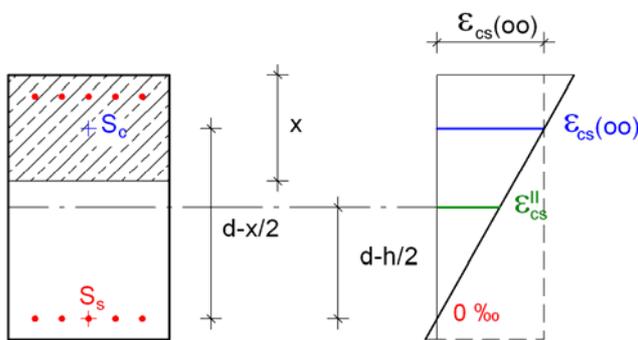
ρ Relaxationsbeiwert

Im Zustand II ist die entstehende Schwindkrümmung kaum vom eingelegten Bewehrungsgrad abhängig. Entsprechend dem Bewehrungsgrad variiert lediglich die Druckzonenhöhe x , welche unter Berücksichtigung des Kriechens ermittelt wird. Durch die Dehnung im Schwerpunkt der Druckzone und die Dehnung in Höhe der Stahleinlage ist die Schwinddehnungsebene eindeutig bestimmt. Mit den geometrischen Randbedingungen lässt sich die Dehnung in der Schwerachse des Querschnitts bestimmen. Sie ist ca. halb so groß wie das Schwindmaß im Schwerpunkt der Druckzone.

$$\varepsilon_{cs}^{\text{II}} = \varepsilon_{s,s}^{\text{II}} + \kappa_s^{\text{II}} \cdot (d - h/2) \quad (7.61)$$

Vereinfachte Ermittlung der Schwindkrümmung im Zustand II

Berücksichtigt man die Nachgiebigkeit des Verbundes, so ist der Einfluss des Schwindens auf die mittlere Stahldehnung bei abgeschlossener Rissbildung gering [Mau 44]. Die mittlere Dehnung in der Bewehrung ändert sich durch das Schwinden nahezu nicht. Geht man ferner davon aus, dass im Schwerpunkt der Druckzonenhöhe x die Schwinddehnung $\varepsilon_{cs}(\infty)$ vorhanden ist, so ergibt sich im Zustand II bei abgeschlossener Rissbildung die durch das Schwinden verursachte Krümmung – bei Querschnitten mit geringer oder ohne Druckbewehrung – in guter Näherung gemäß Gl. 7.63. Durch die zwei gegebenen Dehnungswerte ist die Dehnungsebene infolge des Schwindens eindeutig definiert und damit auch die Schwindverkürzung in der Bauteilachse (Gl. 7.64). Dabei ist x die Druckzonenhöhe im Gebrauchszustand unter Berücksichtigung des Bewehrungsgrades und des Kriechens.



$$\kappa_s^{II} = \frac{\varepsilon_{cs}(\infty)}{d - x/2} \quad (7.62)$$

$$\varepsilon_{cs}^{II} = \frac{\varepsilon_{cs}(\infty)}{(d - x/2)} \cdot (d - h/2) \quad (7.63)$$

Bild 57: Dehnungen infolge Schwindens über die Querschnittshöhe

Vergleich der Ansätze

Werden Schwinddehnungen und Krümmungen als auf die Bauteilhöhe bezogene Größen angegeben, so lassen sich die Ansätze in Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad leicht miteinander vergleichen (Bild 58).

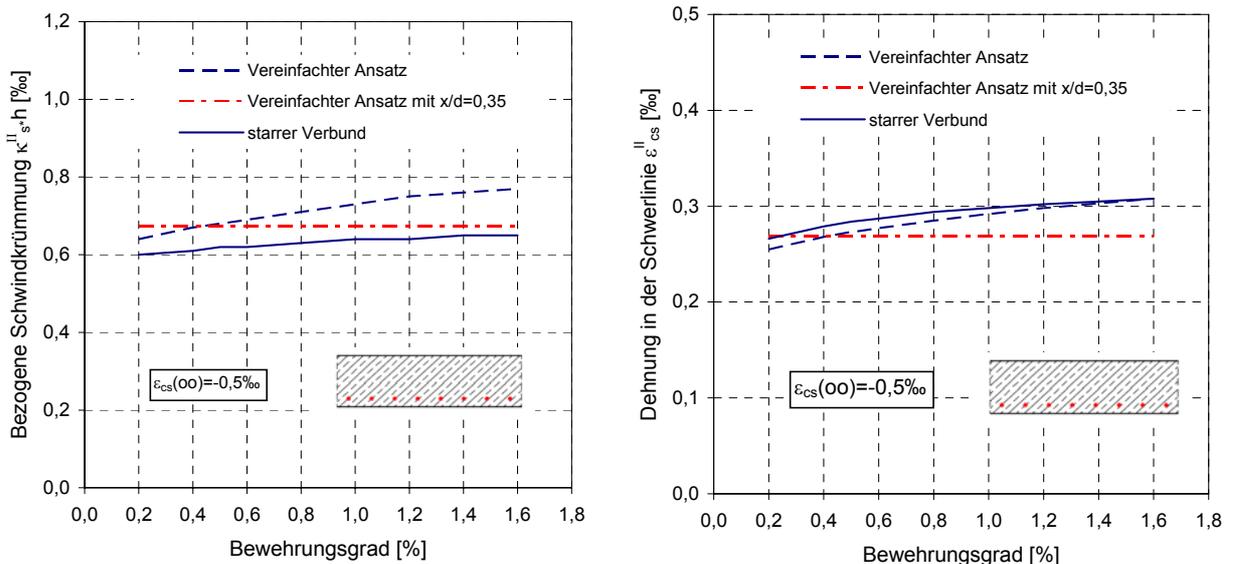


Bild 58: Bezogene Schwindkrümmung und Dehnungen in der Schwerlinie ($d=0,9h$)

Vereinfachter Ansatz mit konstantem x/d :

In Bild 58 ist zusätzlich ein noch weiter gehender vereinfachter Ansatz mit einer einheitlichen Druckzonenhöhe von $x/d=0,35$ (gilt für einen Bewehrungsgrad von $\rho_s=0,5\%$ unter Berücksichtigung des Kriechens) dargestellt.

$$\text{Schwindkrümmung: } \kappa_s'' = \frac{1}{0,825 \cdot d} \cdot \varepsilon_{cs}(\infty) = 1,21 \cdot \frac{1}{d} \cdot \varepsilon_{cs}(\infty) \quad (7.64)$$

$$\text{Schwinddehnung: } \varepsilon_{cs}'' = \frac{1}{0,825 \cdot d} \cdot (d - h/2) \cdot \varepsilon_{cs}(\infty) \quad (7.65)$$

$$\text{mit } d=0,9h: \varepsilon_{cs}'' = 0,538 \cdot \varepsilon_{cs}(\infty)$$

$$\text{mit } d=0,85h: \varepsilon_{cs}'' = 0,5 \cdot \varepsilon_{cs}(\infty)$$

Der starre Verbund ergibt die kleinsten Krümmungen, jedoch die größten Dehnungen in der Stabachse. Wie Bild 58 zeigt, ist der Unterschied zwischen den drei Ansätzen nicht groß und zudem kaum vom Bewehrungsgrad abhängig. Daher wird zur Rechenvereinfachung und wegen der besseren Anschaulichkeit der vereinfachte Ansatz mit konstantem x/d gewählt.

7.7.3 Schwindeinwirkung bei der nichtlinearen Berechnung

Im Rechenmodell wird die Schwindeinwirkung durch die Eingabe von Dehnungen in der Stabachse (ε_{cs}^I und ε_{cs}^{II}) sowie durch Eingabe von Krümmungen κ_s'' erfasst. Die vereinfachte Berechnung der Schwinddurchbiegungen mit dem Arbeitssatz zeigt, dass es notwendig und wesentlich ist, zwischen Bauteilbereichen im Zustand I und im Zustand II zu unterscheiden. Ferner ist zu beachten, dass sowohl in Bereichen positiver, als auch in Bereichen negativer Momente die Schwindkrümmungen die Durchbiegungen infolge Last vergrößern. Daher erfolgt die Eingabe der Schwindeinwirkung abschnittsweise, wobei grundsätzlich drei Bereiche (L_1 , L_2 und L_3) unterschieden werden.

Bereich L_1 : ungerissener Bereich (Zustand I) im Bereich des Momentennullpunktes $M < M_{cr}$

Bereich L_2 : gerissener Bereich (Zustand II) im Bereich positiver Momente

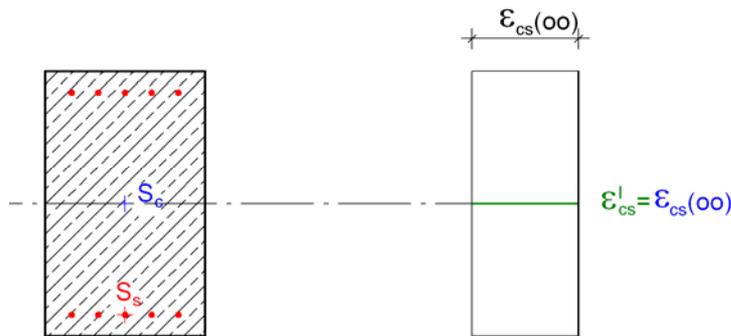
Bereich L_3 : gerissener Bereich (Zustand II) im Bereich negativer Momente

Die Längen dieser Bereiche im GZG sind vom Belastungsgrad bzw. vom Bewehrungsgrad abhängig und werden in einem Zwischenschritt aus dem nichtlinearen Rechenlauf mit reiner Lastbeanspruchung q_{perm} bestimmt.

Zustand I

Die Krümmung aus Schwinden im Zustand I ist gering und wird daher vernachlässigt. Im Zustand I wird somit ausschließlich die Dehnung $\varepsilon_{cs}(\infty)$ über den ganzen Querschnitt angesetzt.

Bereich L₁: ungerissener Bereich (Zustand I) im Bereich des Momentennullpunktes $M < M_{cr}$



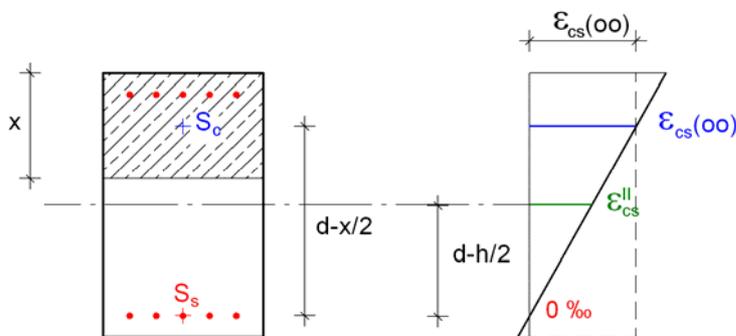
$$\varepsilon_{cs}^I = \varepsilon_{cs}(\infty)$$

$$\kappa_S^I \approx 0$$

Zustand II

Im gerissenen Zustand II bewirkt die Schwindverkürzung nur eine vernachlässigbare Dehnungsänderung in der Bewehrung in der gerissenen Zugzone. Die sich einstellende Dehnungsebene wird mit der in Abschnitt 7.7.1 angegebenen Näherung erfasst. Im Bereich positiver Momente werden positive Krümmungen aufgegeben, im Bereich negativer Momente negative Krümmungen. Die Krümmungen wirken somit in Richtung der Lastkrümmungen und vergrößern die Durchbiegungen und erzeugen Zwangsmomente.

Bereich L₂: gerissener Bereich (Zustand II) im Bereich positiver Momente



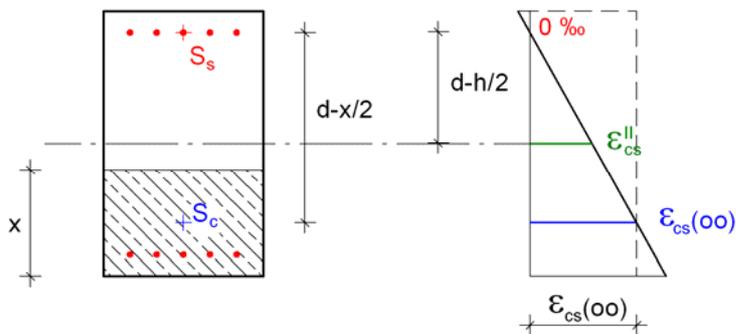
Pos. Krümmung

$$\kappa_S^{II} = -\frac{\varepsilon_{cs}(\infty)}{d-x/2}$$

Dehnung

$$\varepsilon_{cs}^{II} = \frac{\varepsilon_{cs}(\infty)}{d-x/2} \cdot (d-h/2)$$

Bereich L₃: gerissener Bereich (Zustand II) im Bereich negativer Momente



Neg. Krümmung

$$\kappa_S^{II} = \frac{\varepsilon_{cs}(\infty)}{d-x/2}$$

Dehnung

$$\varepsilon_{cs}^{II} = \frac{\varepsilon_{cs}(\infty)}{d-x/2} \cdot (d-h/2)$$

Die zentrische *Schwindverkürzung* bewirkt entweder eine horizontale Verformung oder – bei Behinderung dieser Verformung - Zwangnormalkräfte. Diese vergrößern die Durchbiegungen und Rissbreiten im Bauteil. Die Größe der Zwangnormalkräfte ist vom Grad der Verformungsbehinderung abhängig.

Die bei unsymmetrisch bewehrten Querschnitten, sowie bei gerissenen Querschnitten auftretenden *Schwindkrümmungen* bewirken ebenfalls eine Zunahme der Durchbiegungen und der Rissbreiten im Bauteil.

Verformungseinwirkung aus Schwinden am Beispiel des beidseitig eingesp. Stabes

Auf dieser Grundlage sind beispielsweise für den beidseitig starr eingespannten Stab die in Bild 59 dargestellten Einwirkungen infolge Schwindens zu berücksichtigen. Beim zwangsfreien System (horizontal verschieblich) haben die Schwinddehnungen in der Stabachse keinen Einfluss auf die Durchbiegungen, da keine zusätzliche Zugkraft infolge Zwangs entsteht.

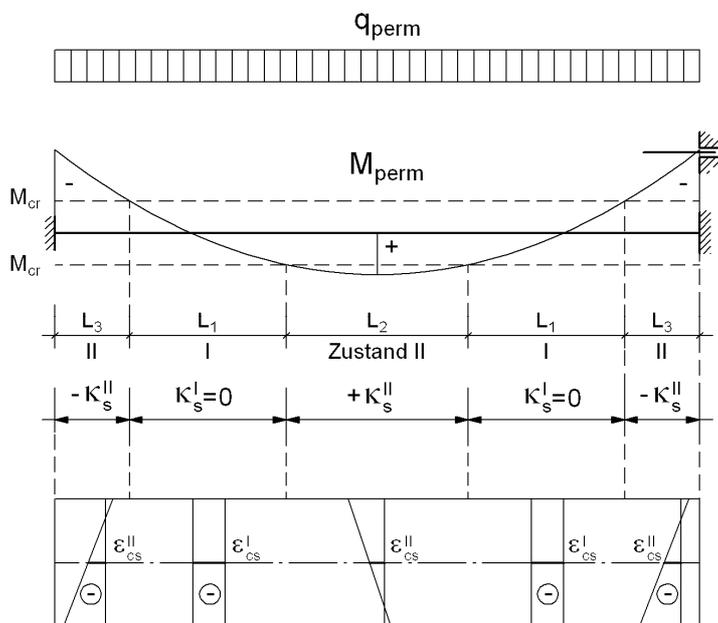


Bild 59: Einwirkungen aus Schwinden für ein beidseitig eingespanntes System

Gerissene und ungerissene Bereiche bei der nichtlinearen Berechnung

Die Ermittlung der gerissenen und ungerissenen Bereiche muss separat erfolgen und ist daher aufwändig. Daher wird die Schwindverkürzung über die ganze Bauteillänge als mittlerer konstanter Wert eingegeben:

$$\epsilon_{cs}(i.M.) = [\epsilon_{cs}^{II} \cdot L_{cr} + \epsilon_{cs}^I (L - L_{cr})] / L \tag{7.66}$$

L_{cr} gemäß nichtlinearer Berechnung für Lastfall q_{perm} (siehe auch Bild 104)

7.8 Zusammenfassung: Rechenmodell und Modellierungen

Die Schnittgrößen und Verformungen werden mit einem Stabwerkprogramm geometrisch und physikalisch nichtlinear berechnet. Grundlage bei der Berechnung ist das verschmierte Rissmodell. Die Rissbildung, die Mitwirkung des Betons auf Zug, sowie das Kriechen des Betons erfolgt durch Modifizierung der Materialkennlinien. Da die Zugfestigkeit des Betons stark streut, wird ein einheitlicher Bezugswert von $f_{ctm}=3,0 \text{ MN/m}^2$ angenommen.

Die Rissbildung und die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen erfolgt durch die Modifizierung der Stahlkennlinie oder der Betonkennlinie im Zugbereich. Bei der Entwicklung eines geeigneten Materialmodells mit dem sich insbesondere das Verhalten eines Stahlbetonbauteils unter kombinierter Beanspruchung aus Last und Zwang erfassen lässt, werden unterschiedliche Modifizierungsarten analysiert.

Die Analyse der Modelle mit der Modifizierung der Arbeitslinie des Stahls ergibt, dass die Modifizierungen nicht beanspruchungsunabhängig vorgenommen werden können und zudem die Biege- und Dehnsteifigkeiten im Zustand I mit dem Modell nicht zugleich wirklichkeitsnah über die ganze Bauteillänge abgebildet werden können.

Mit der Modifizierung der Betonkennlinie gemäß Abschnitt 7.5.4 (Modifizierung der Betonkennlinie) gelingt die Erfassung der Risschnittgrößen gut. Zur Modellierung des Verhaltens während der Rissbildung sowie beim abgeschlossenen Rissbild wurden verschiedene Ansätze überprüft.

Da im vorgesehenen Rechenmodell für den Beton sowohl über die Querschnittshöhe, als auch über die Bauteillänge ein einheitliches Materialgesetz verwendet wird, wird die Arbeitslinie des Betons nach Erreichen der maximalen Zugdehnung so modelliert, dass die Verhältnisse im Bauteil beanspruchungs- und bewehrungsunabhängig gut getroffen werden.

Bei den nachfolgenden Berechnungen wird hauptsächlich die Modifizierung im Zugbereich der Betonkennlinie angewendet.

Die Berücksichtigung des Kriechens des Betons erfolgt durch Anpassung der Betonkennlinie im Druckbereich und bei der Modifizierung der Materialkennlinien im Zugbereich (Stahl oder Beton). Im Druckbereich werden die Betondehnungen mit dem Faktor $(1+\varphi)$ multipliziert. Im Zugbereich wird bei der Abbildung der Risschnittgrößen zur Berücksichtigung des Dauerstandeffekts nur 70% der Kurzzeitfestigkeit angesetzt. Das Verbundkriechen wird über eine Reduzierung des Beiwertes β_t bei der Anpassung der Materialkennlinien berücksichtigt.

Zur Berücksichtigung des Schwindens wird ein vereinfachter Ansatz für die Schwindkrümmung im Zustand II hergeleitet, der für alle Bewehrungsgrade eine konstante bezogene Krümmung $\kappa_s^{\text{II}} \cdot d$ ergibt. Die Schwindkrümmungen im Zustand I sind im Verhältnis zu den Schwindkrümmungen im Zustand II klein und werden daher vernachlässigt.

Die Schwindverkürzung in der Stabachse wird als ein über die Bauteillänge gemittelter Wert berücksichtigt. Dieser erfasst die unterschiedlichen Dehnungen $\varepsilon_{c,s}^{\text{I}}$ und $\varepsilon_{c,s}^{\text{II}}$ in den gerissenen und ungerissenen Bereichen.

8 Verifizierung des Rechenmodells

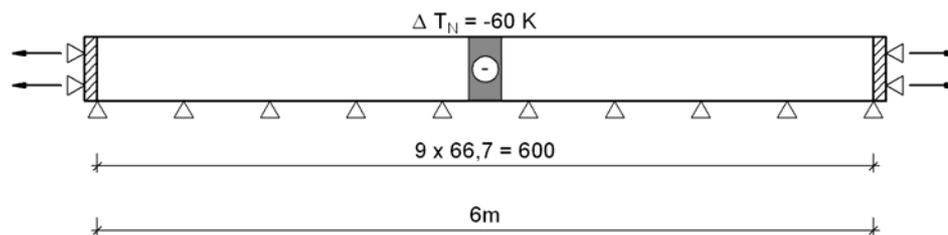
Die Verifizierung des Rechenmodells und der gewählten Werkstoffmodellierung erfolgt durch umfangreiche Versuchsnachrechnungen [Mau 46], [Mau 47]. Nachfolgend sind beispielhaft die Nachrechnungen der Versuche von Falkner, Alavizadeh-Farhang und Jaccoud/Favre erläutert.

8.1 Versuche von Falkner

Falkner [Fal 18] führte Versuche an Stahlbetonbauteilen durch, welche durch Temperatureinwirkung zentrisch auf Zug beansprucht wurden.

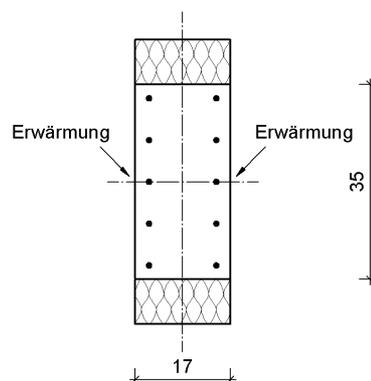
Die an den 7 Probekörpern gemessenen Zwangnormalkräfte infolge einer über den Querschnitt konstant verteilten Abkühlung von $\Delta T_N = -60$ K werden mit dem in den Abschnitten 6 und 7 beschriebenen Rechenmodell nachgerechnet. Da es sich um den Grenzfall einer reinen zentrischen Zwangbeanspruchung handelt, wird die normalkraftorientierte Stahlmodifizierung für die Versuchsnachrechnung gewählt.

System:



Temperatureinwirkung (Abkühlung): $\Delta T_N = -60$ K

Querschnitt:



Versuchskörper:

Versuch 1a	$\mu = 0,5 \%$	24 $\emptyset 4$
Versuch 1b	$\mu = 0,5 \%$	10 $\emptyset 6$
Versuch 1c	$\mu = 0,5 \%$	4 $\emptyset 10$
Versuch 2a	$\mu = 0,77 \%$	16 $\emptyset 6$
Versuch 2c	$\mu = 0,77 \%$	4 $\emptyset 12$
Versuch 3a	$\mu = 1,0 \%$	12 $\emptyset 8$
Versuch 3c	$\mu = 1,0 \%$	4 $\emptyset 14$

Durch die Beanspruchung infolge Abkühlung des Balkens um 60 K liegt man im Bereich der Einzelrissbildung. Der Querschnitt reißt auf, das abgeschlossene Rissbild wird durch die Abkühlung alleine jedoch noch nicht erreicht.

8.1.1 Materialkennwerte

Bei der Nachrechnung werden die begleitend zu den Versuchen gemessenen mittleren Baustoffkennwerte bzw. Spannungs-Dehnungslinien berücksichtigt.

Beton

Die zentrische Zugfestigkeit des Betons wurde zum einen an kleinen Prismen gemessen, zum anderen an den 6 m langen Probekörpern aus der Risslast bestimmt. Sie streute im Bereich $f_{ctm} = (1,87 - 2,45) \text{ MN/m}^2$. Bei der rechnerischen Ermittlung der Zwangskraft wird die an den 6 m langen Probekörpern gemessene Zugfestigkeit des Betons zu Grunde gelegt. Der Elastizitätsmodul sowie die Wärmedehnzahl werden für alle Versuchsnachrechnungen gleich angenommen ($E_{cm} = 32400 \text{ MN/m}^2$; $\alpha_T = 1 \cdot 10^{-5} / K$; siehe auch Tabelle 2).

Betonstahl

Im Rahmen der experimentellen Untersuchungen wurden auch die Spannungs-Dehnungslinien der verwendeten Stähle ermittelt. Die Spannungs-Dehnungslinien der kaltverformten Stähle ohne ausgeprägtes Fließplateau zeichnen sich durch zwei nahezu lineare Äste aus, die im Bereich der Fließgrenze durch eine Rundung verbunden sind. Für die Nachrechnung wird die Rundung vernachlässigt und die Spannungs-Dehnungslinie mit den in der Tabelle angegebenen Mittelwerten näherungsweise bilinear modelliert. (Bild 60) zeigt beispielhaft die für die Nachrechnung des Versuchs 1a angesetzte Spannungs-Dehnungslinie mit den entsprechenden Werten.

Tabelle 2 fasst alle für die Nachrechnung der Versuche verwendeten Baustoffkennwerte zusammen. Der Betonstahl des Versuchs 1a entspricht einem heutigen BSt 500. Die übrigen Versuche wurden mit Stählen geringerer Festigkeit durchgeführt.

Tabelle 2 Übersicht über die angesetzten Baustoffkennwerte (Mittelwerte)

	Beton B 300 (Entspricht: C 20/25)	Betonstahl BST IVb, IIIb (Entspricht: BST 500/550, BSt 420/500)			
	$E_{cm} = 32400 \text{ MN/m}^2$	$E_s = 206\,000 \text{ MN/m}^2$			
	f_{ctm}	f_y	ε_{sy}	f_u	ε_{su}
	[MN/m ²]	[MN/m ²]	[‰]	[MN/m ²]	[‰]
Versuch 1a	2,10	600	2,91 ‰	647	32 ‰
Versuch 1b	1,87	467	2,27 ‰	582	34 ‰
Versuch 1c	1,90	441	2,14 ‰	564	26 ‰
Versuch 2a	2,15	467	2,27 ‰	582	36 ‰
Versuch 2c	2,06	422	2,05 ‰	538	40 ‰

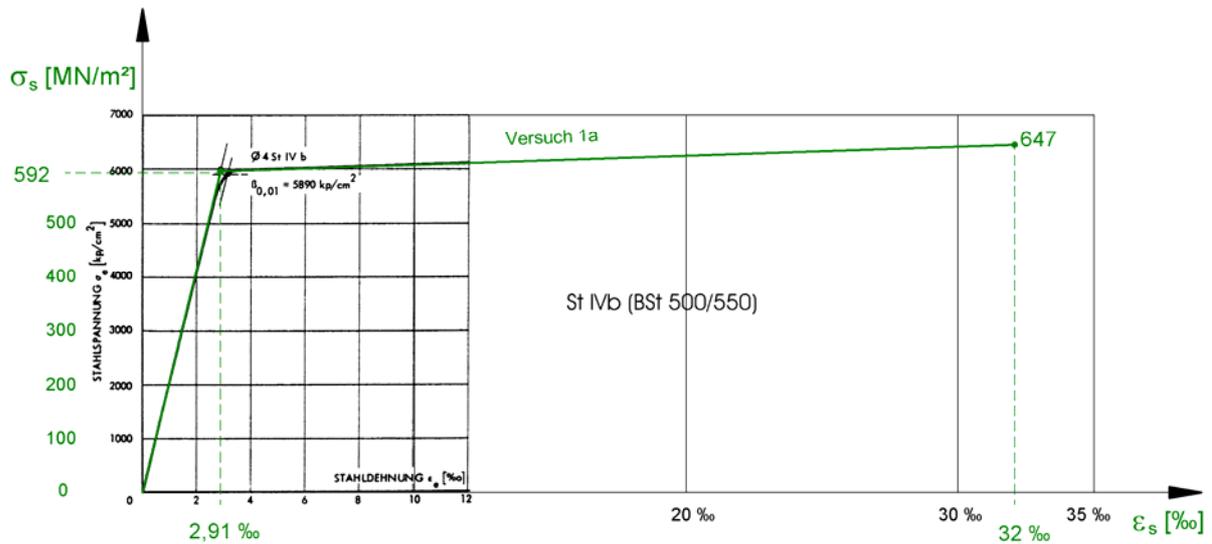


Bild 60: Für die Rechnung angesetzte Spannungs-Dehnungslinie des Betonstahls, Versuch 1a

Modifizierung der Stahlkennlinie

Zur Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug wird die Spannungs-Dehnungslinie des Betonstahls nach Abschnitt 7.5.1 normalkraftorientiert modifiziert. Bild 61 zeigt beispielhaft die so ermittelten Stahlkennlinien für die Nachrechnung des Versuches 1a. Auf Grund des niedrigen Bewehrungsgrades sind die Stahlspannungen bei der Rissbildung verhältnismäßig groß.

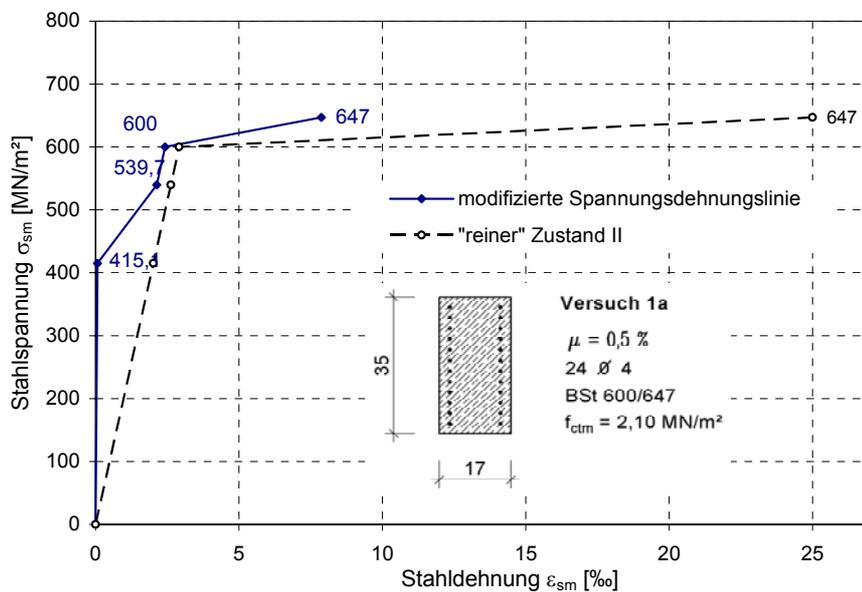


Bild 61: Modifizierte Spannungs-Dehnungslinie des Bewehrungsstahls des Versuches 1a

8.1.2 Ergebnisse der Versuchsnachrechnung

Versuch 1a

Der zeitliche Verlauf der Zwangkraftentwicklung sowie die zugehörige Abkühlung sind in Bild 62 dargestellt (gemessene und berechnete Werte). Der Träger hat eine Vorlast von 36 kN. Die Normalkraft steigt zunächst stark an, und nimmt nach ca. 4 Stunden nur noch allmählich zu. Nach ca. 24 Stunden wird der Maximalwert erreicht.

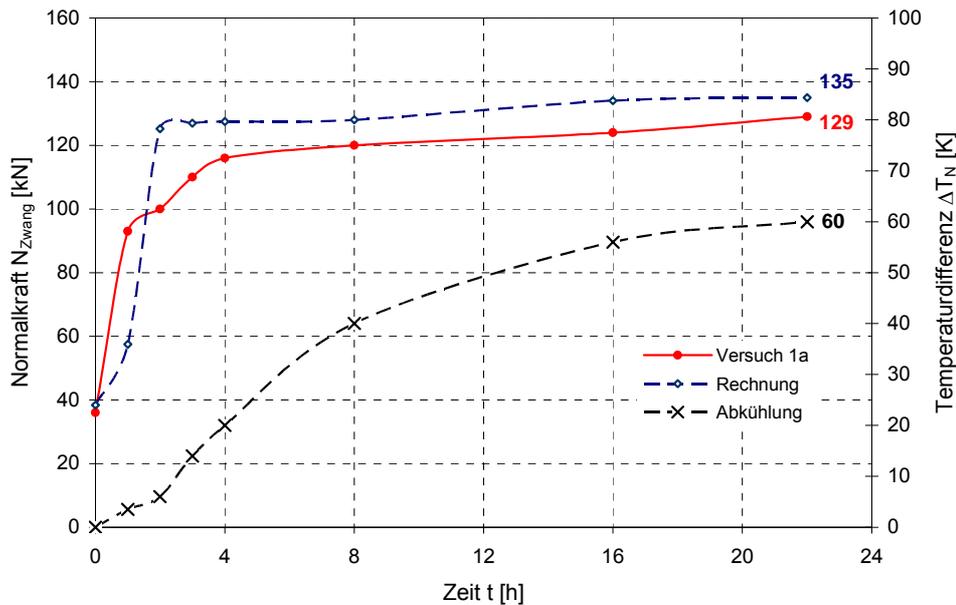


Bild 62: Zwangkraft N_{Zwang} in Abhängigkeit von der Zeit

Die rechnerisch ermittelte Zwangkraft $N_{Zwang}=135$ kN bei einer Abkühlung von -60 K ist in ausreichend guter Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen (129 kN). Sie beträgt nur ca. 12 % des Wertes, der sich unter Berücksichtigung der vollen Steifigkeit EA^I nach Zustand I ergeben würde. Andererseits ist die Zwangkraft um ein Vielfaches größer als die nach reinem Zustand II berechnete.

Rechnerisch: „reiner Zustand II“:

$$N^{II} = E_s \cdot A_s \cdot \alpha_T \cdot \Delta T_N = 206000 \cdot 3,01 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-5} \cdot 60 = 62 \text{ MN} \cdot 0,6\text{‰} = 37 \text{ kN} \quad (8.1)$$

Rechnerisch: „reiner Zustand I“:

$$N^I = E_c \cdot A_c \cdot \alpha_T \cdot \Delta T_N = 32400 \cdot 0,0595 \cdot 10^{-5} \cdot 60 = 1928 \text{ MN} \cdot 0,6\text{‰} = 1157 \text{ kN} \quad (8.2)$$

nichtlinear berechnet: $N_{Zwang} = 135 \text{ kN}$ gemessen: $N_{Zwang} = 129 \text{ kN}$

$$N_{Zwang} \approx 3,65 \cdot N^{II}$$

$$N_{Zwang} \approx 0,12 \cdot N^I$$

Die experimentellen und rechnerischen Ergebnisse lassen sich besser vergleichen, wenn die Zwangskraft in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz aufgetragen wird (Bild 63). Um die Vorlast zu erfassen, wird die Kurve um 2 K nach links verschoben, was einer zusätzlichen Temperaturdifferenz von ca. 2 K (bezogen auf den ungerissenen Querschnitt) entspricht.

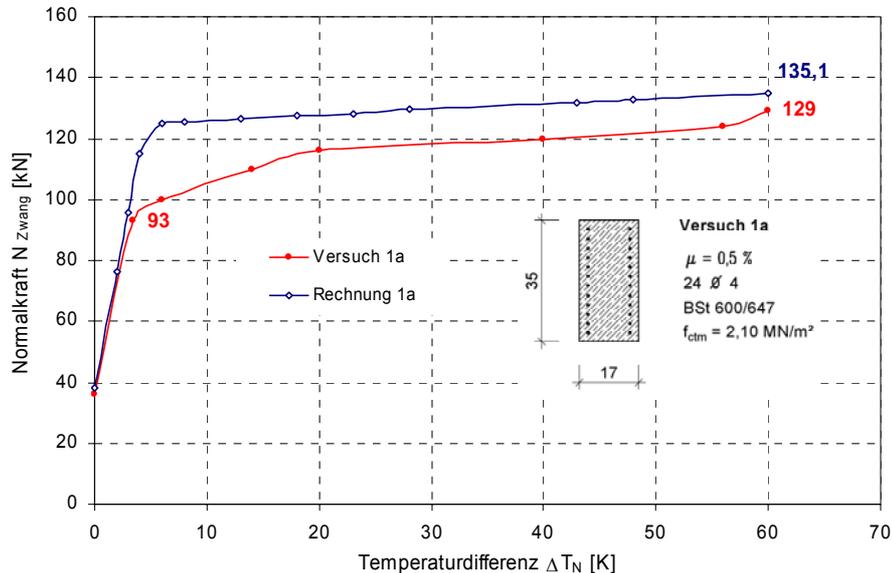


Bild 63: Zwangnormalkraft N in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz

Die Rissnormalkraft ist direkt abhängig von der Zugfestigkeit des Betons (hier $f_{ctm} = 2,1 \text{ MN/m}^2$). Die sich rechnerisch ergebende Rissnormalkraft N_{cr} ohne Berücksichtigung von Eigenspannungen ist im Diagramm ablesbar und liegt über dem im Versuch gemessenen Wert von ca. 93 kN.

$$N_{cr} = f_{ctm} \cdot b \cdot d = 2,1 \cdot 0,17 \cdot 0,35 \cdot 10^3 \text{ kN} = 125 \text{ kN} \quad (8.3)$$

Eigenspannungen

Infolge des Temperaturunterschieds zwischen Kern und Rand ($\max. \Delta T = 7 \text{ K}$) treten bei der Abkühlung Eigenspannungen auf. Bei Bildung des ersten Risses liegt eine gegenüber f_{ctm} reduzierte Zugfestigkeit am Rand des Bauteils vor.

$$f_{ct} = 0,093 / (0,17 \cdot 0,35) \text{ MN/m}^2 = 1,56 \text{ MN/m}^2 = 0,74 \cdot f_{ctm} \quad (8.4)$$

Zur Abschätzung der entstehenden Eigenspannung bei Abkühlung am Bauteilrand kann die in Bild 64 dargestellte Temperatur und Spannungsverteilung angenommen werden. Bei der Temperaturverteilung über die Querschnittshöhe wird näherungsweise die Annahme getroffen, dass die Temperatur im Innern halb so groß ist wie am Rand. Im Falle eines Temperaturunterschiedes von 5 K zwischen Rand und Kern ergeben sich daraus die in Bild 64 dargestellten Eigenspannungen. Am Rand entsteht eine Zugspannung ein Wert von:

$$\sigma_c = \alpha_T \cdot E_c \cdot \Delta T = (10^{-5} \cdot 32400 \cdot 3,3) \text{ MN/m}^2 \approx 1,0 \text{ MN/m}^2 \quad (8.5)$$

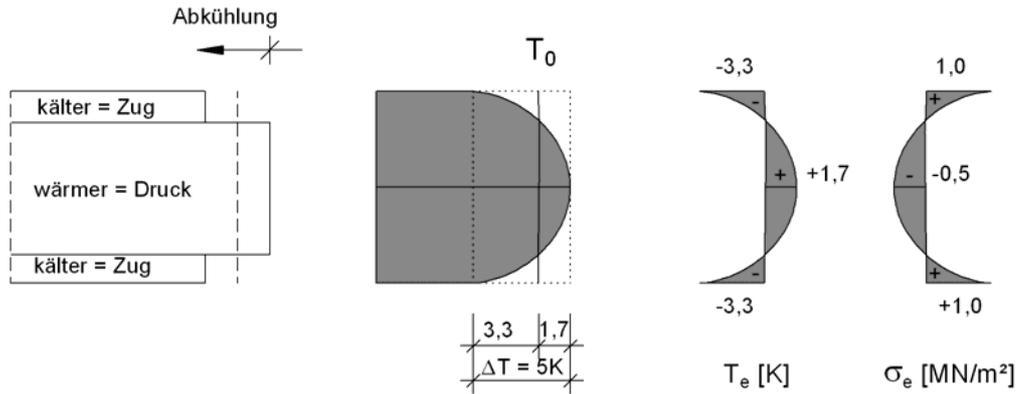


Bild 64: Bei der Abkühlung entstehende Eigenspannungen

Bei einer Abkühlung um $\Delta T_N = -60$ K sind die Eigenspannungen infolge der Rissbildung nahezu vollständig abgebaut. Die gemessenen und berechneten Werte sind somit gut vergleichbar. Es ergeben sich Abweichungen von ca. 4% bzw. 7% (Tabelle 3, letzte Spalte).

Tabelle 3 Gemessene und berechnete Zwangkräfte im Vergleich

	Versuch			Rechnung		
	f_{ctm}	$N_{cr,Versuch}$	$\max N_{Versuch}$	$N_{cr,Rechnung}$	$\max N_{Rechnung}$	$\frac{\max N_{Rechnung}}{\max N_{Versuch}}$
	[MN/m ²]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[%]
Versuch 1a	2,10	93	129	125,2	135	104,7
Versuch 1b	1,87	80	115	111,3	118	102,6
Versuch 1c	1,90	100	117	111,6	120	102,6
Versuch 2a	2,15	77	134	128,6	143	106,7
Versuch 2c	2,06	89	128	122,7	138	107,8

8.2 Versuche von Alavizadeh-Farhang

Alavizadeh-Farhang [Ala 1] führte Versuche an symmetrisch bewehrten Stahlbetonbalken unter kombinierter Last- und Temperaturbeanspruchung (ΔT_M) durch. Dazu wurden zwei Testserien mit gleichen Querschnittsabmessungen und Baustoffen durchgeführt:

- Einfeldträger, statisch bestimmt
- Träger mit Teileinspannung

8.2.1 Materialkennwerte

Beton

Der verwendete Beton entspricht einem Beton C 35/45 nach DIN 1045-1. Parallel zu den Versuchen wurden nachfolgende Materialkennwerte ermittelt. Für die Versuchsnachrechnungen werden die Mittelwerte der Baustoffkennwerte verwendet.

Die Druckfestigkeit des Betons wurde von [Ala 1] an Zylindern ermittelt.

$$f_{cc,cylinder} = 43,3 \text{ MN} / \text{m}^2 \cong f_{cm} (C 35 / 45) = 43 \text{ MN} / \text{m}^2 \quad (8.6)$$

Da die Spannungs-Dehnungslinie nicht explizit angegeben ist, wird qualitativ der Verlauf nach DIN 1045-1 (9.1.5) mit $f_c = 43,3 \text{ MN/m}^2$ angenommen. Da in der Regel bei den Versuchen die maximal gemessene Betondehnung nicht bei 3,5 ‰ endet, wird der Definitionsbereich der Spannungs-Dehnungslinie bis $\varepsilon_{c1u} = 5\text{‰}$ erweitert. Die in den Versuchen gemessenen Betondehnungen rechtfertigen diese Annahme.

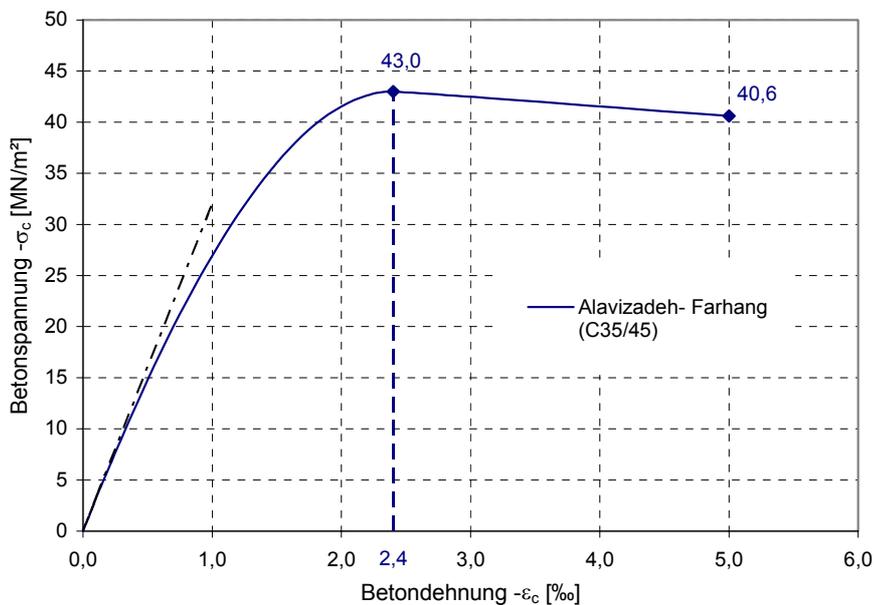


Bild 65: Für die Versuchsnachrechnung angesetzte Spannungs-Dehnungslinie des Betons

Zugfestigkeit des Betons

Die Zugfestigkeit des Betons bzw. die Verbundwirkung gehen über die modifizierte Arbeitslinie des Betonstahls in die Berechnung ein. Aus der von [Ala 1] gemessenen Spaltzugfestigkeit wurde die für die Versuchsnachrechnung erforderliche zentrische Zugfestigkeit abgeleitet.

$$f_{ctm} \approx 0,9 \cdot f_{ct,sp} = 0,9 \cdot 3,83 = 3,45 \text{ MN} / \text{m}^2 \quad (8.7)$$

$f_{ct,sp}$ gemessene Spaltzugfestigkeit nach [Ala 1]

Der Elastizitätsmodul des Betons wurde nach [Ala 1] zu ca. 32.000 MN/m² bestimmt.

Betonstahl

Der verwendete Betonstabstahl entspricht einem BSt 500 S nach DIN 1045-1. Die Spannungs-Dehnungslinien des Betonstahls wurden von [Ala 1] für mehrere Stahlproben in Zugversuchen bestimmt. Zur Versuchsnachrechnung wird eine gemittelte Spannungs-Dehnungslinie angesetzt (Rechnung 557). Beim Träger mit Teileinspannung wird zusätzlich eine Vergleichsrechnung mit den unteren Materialkennwerten geführt (Rechnung 528).

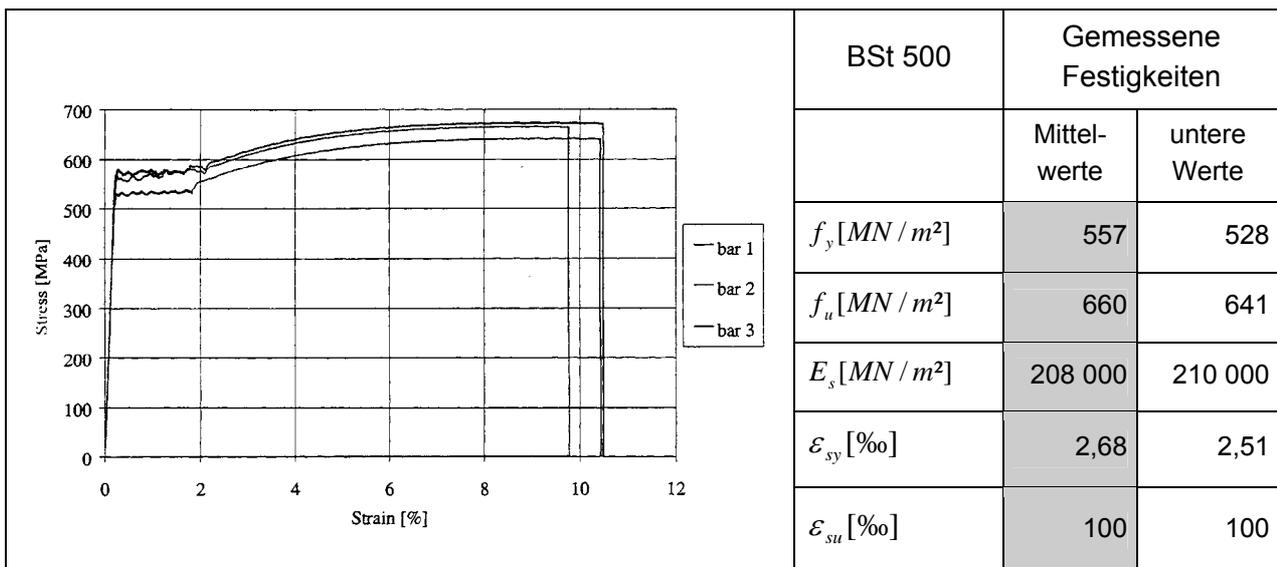


Bild 66: In [Ala 1] gegebene Spannungs-Dehnungslinie des verwendeten Betonstahls

Modifizierung der Stahlkennlinie

Zur Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug wird die Spannungs-Dehnungslinie des Bewehrungsstahls wie in Bild 67 dargestellt modifiziert. Besondere Sorgfalt wird in diesem Fall auch auf die Modellierung des Bereiches nach dem Fließen der Bewehrung gelegt.

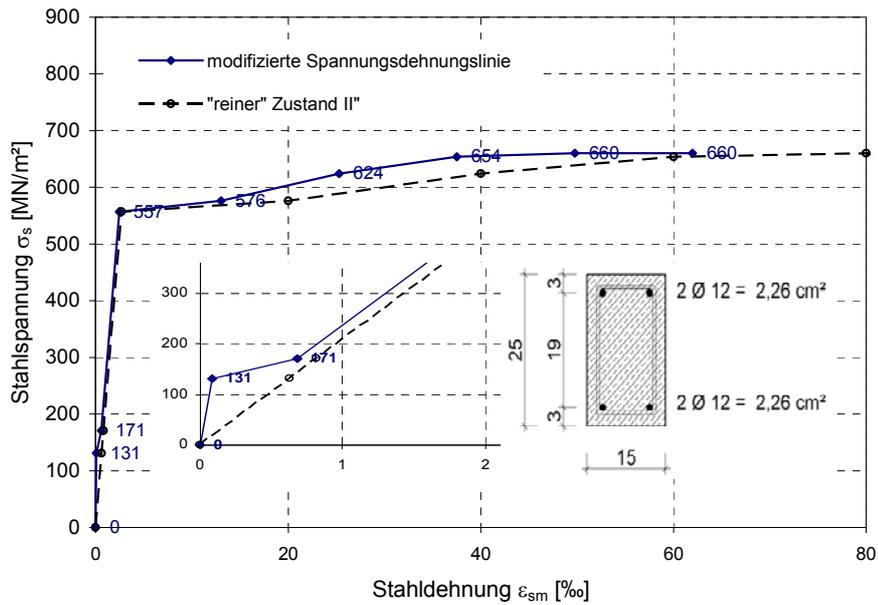
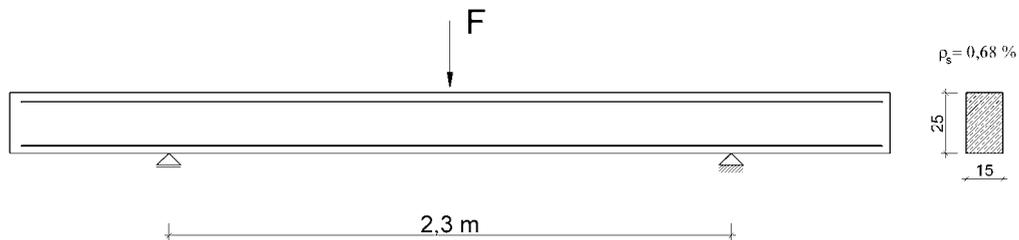


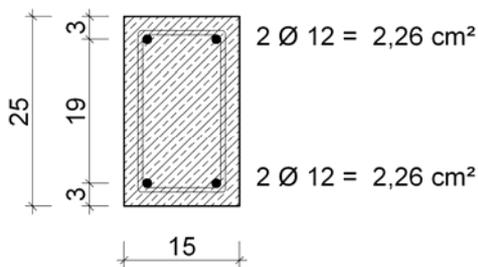
Bild 67: Modifizierte Spannungs-Dehnungslinie des Bewehrungsstahls (Rechnung 557: mit $f_{yR} = 557$ (entspricht Mittelwert))

8.2.2 Alavizadeh-Farhang: Statisch bestimmter Einfeldträger

System:



Querschnitt:



Querschnittswerte:

$$A_c = 375 \text{ cm}^2$$

$$A_{c,eff} = 112,5 \text{ cm}^2 \quad \rho_{s,eff} = 2 \%$$

$$vorh. A_s = 2,26 \text{ cm}^2 \quad \rho_s = 0,68 \%$$

Die Versuchsergebnisse sind in Bild 68 über alle Laststufen in einem Momenten-Rotationsdiagramm dargestellt, welches ebenso wie ein Last-Verformungsdiagramm zur Beurteilung der Steifigkeiten geeignet ist. Das im Versuch erreichte Maximalmoment in

Feldmitte (max.M=30 kN/m) stimmt mit der Versuchsnachrechnung exakt überein. Die in der Versuchsbeschreibung angegebene Betonstauchung bei Versagen ($\epsilon_{cu}=-4,29 \text{ ‰}$) durch Ausbruch der Betondruckzone kann mit der Nachrechnung gut nachvollzogen werden ($\epsilon_{cu}=-5 \text{ ‰}$). Begrenzt man die Betonstauchung auf 3,5 ‰, so wird nur ein Versagemoment von 28,6 kNm erreicht. Die zugehörigen Verformungen sind deutlich niedriger als bei $\epsilon_{cu}=-5 \text{ ‰}$. Nach Erreichen des Maximums fällt die Last im Versuch um ca. 5 % ab. Im weiteren Verlauf wird das Moment in der Druckzone nur noch durch die oben liegende Bewehrung aufgenommen. Die zugehörigen Auflagerverdrehwinkel stimmen gut mit den im Versuch gemessenen Werten überein, was darauf hinweist, dass die Steifigkeiten des Trägers bei der Nachrechnung in ausreichender Genauigkeit gut erfasst werden.

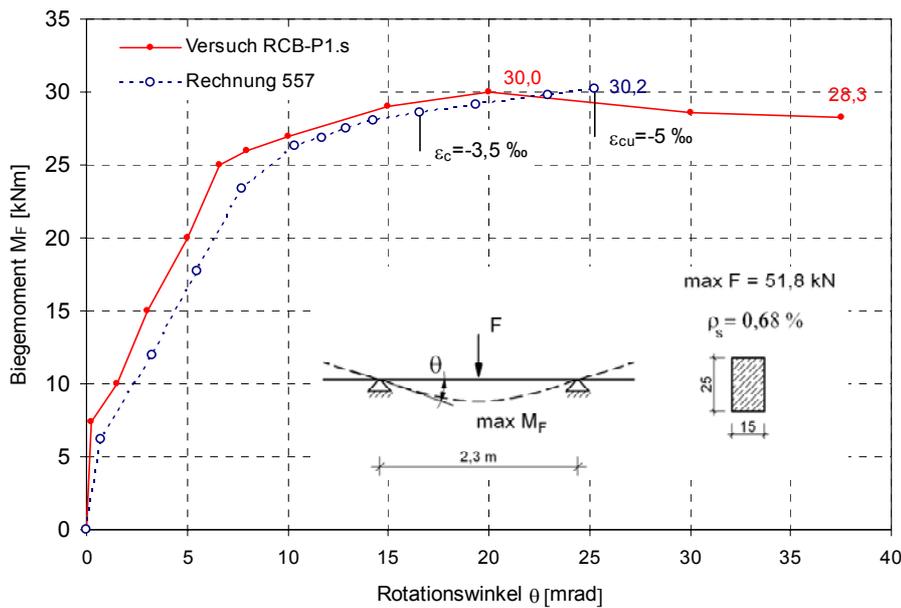


Bild 68: Momenten-Rotationsdiagramm

Rechnerische Dehnungsebene bei Versagen

Bild 69 zeigt die rechnerische Dehnungsebene im GZT. Der Querschnitt versagt durch Betonversagen, da durch die große Stahldehnung die Betondruckzone sehr stark eingeschnürt wird. Wie die zugehörige Dehnungsebene zeigt, wird nahezu die gesamte Druckkraft durch die ca. 3 cm hohe Betondruckfläche im Bereich der Betondeckung aufgenommen. In diesem Bereich befindet sich keine Druckbewehrung und die Druckzone wird nicht von Bügeln umschlossen.

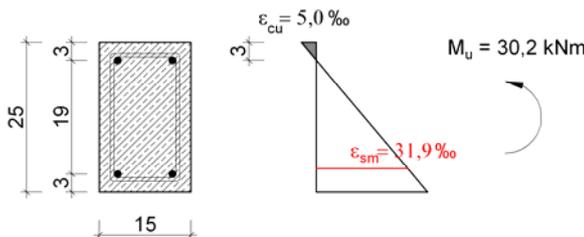
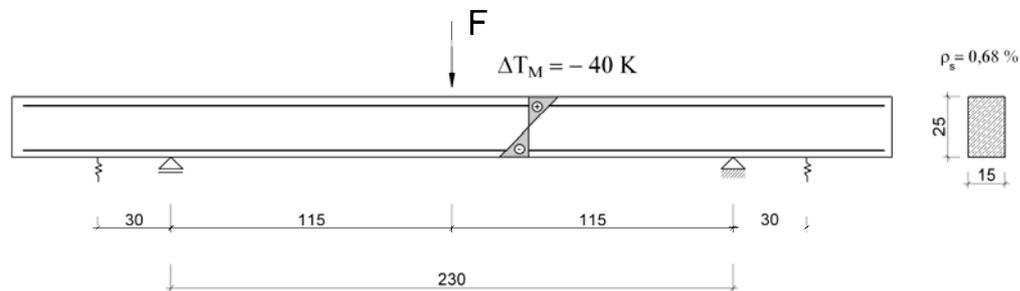


Bild 69: Dehnungsebene im rechnerischen Bruchzustand

8.2.3 Alavizadeh-Farhang: Einfeldträger mit Teileinspannung

System



Belastung

- Einzellast F in Feldmitte bis zur Bruchlast
- Temperatureinwirkung $\Delta T_M = -40$ K (oben wärmer als unten), anschließend Laststeigerung bis P_u
- 75 % P_u , dann Temperaturbelastung $\Delta T_M = -40$ K, anschließend Laststeigerung bis P_u

In der zweiten Versuchsreihe untersuchte *Alavizadeh-Farhang* einen Träger mit Teileinspannung. Die Teileinspannung wurde durch zwei vorgespannte Zugstangen mit einem Durchmesser von 27 mm und einer Länge von 1,5 m realisiert, welche gegen den Auflagerbalken gespannt waren. In der Nachrechnung wird dies durch die Eingabe einer Feder berücksichtigt. Die angesetzte Federsteifigkeit beträgt:

$$k = 2 \cdot \frac{E_s \cdot A_s}{l_s} = 2 \cdot \frac{210000 \cdot \frac{\pi \cdot 0,027^2}{4}}{1,5} = 160,4 \text{ MN/m} \quad (8.8)$$

Die angesetzte Teileinspannung und die Höhe der Vorspannung sind so gewählt, dass in der Regel das Stützmoment kleiner als das Feldmoment ist und somit eine Momentenumlagerung vom Feld- zum Stützmoment stattfindet. Durch die später aufgebrachte Erwärmung von oben bildet sich ein positives Moment über die ganze Balkenlänge aus, welches sich ungünstig auf das Umlagerungsvermögen auswirkt.

Da die Querschnitte und der Bewehrungsgrad identisch sind, wird die Spannungs-Dehnungslinie wie bei der ersten Versuchsreihe modelliert (siehe Bild 67).

Die bei diesem System aufgegebene Temperatureinwirkung ist linear über den Querschnitt veränderlich und erzeugt Zwangmomente, jedoch keine Zwangnormalkräfte. Daher werden im Folgenden nur die Ergebnisse der Nachrechnungen für die reine Lastbeanspruchung eingehend erläutert.

Träger unter Lastbeanspruchung (nur F)

Unter reiner Lastbeanspruchung durch eine Einzellast in Feldmitte ergibt die linear-elastische Berechnung die in Bild 70 dargestellte Momentenverteilung. Das Feldmoment ist 1,88-fach so groß wie das betragsmäßige Stützmoment, so dass eine Momentenumlagerung vom Feld zur Stütze zu erwarten ist. Über eine Variation der Federsteifigkeit kann der Einspanngrad verändert werden. Bei Ansatz einer Federsteifigkeit von 484 MN/m², was einem Durchmesser der Zugstangen von 47 mm entspricht, ergibt sich ein Verhältnis $M_F/M_S=1,40$.

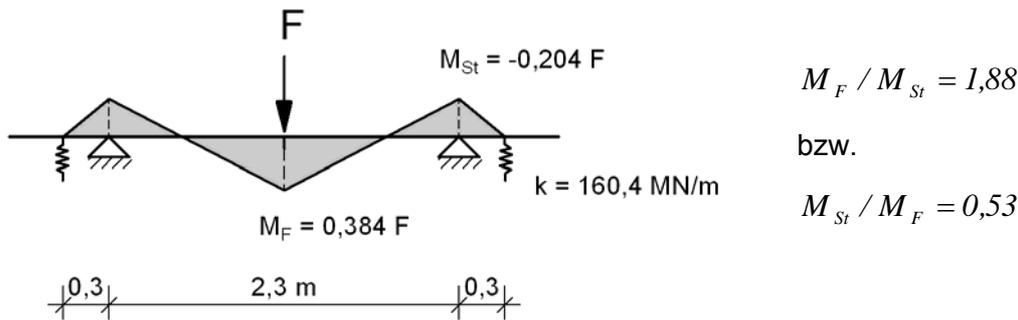


Bild 70: Momentenverteilung nach linear-elastischer Berechnung

Die Ergebnisse der Versuchsnachrechnung sind in Bild 71 dargestellt. Das rechnerische System verhält sich etwas steifer als der Träger im Versuch. Durch die Nachrechnung kann das Verformungsverhalten bis zum Erreichen der Maximallast nachgebildet werden. Die errechneten Durchbiegungen liegen bei maximal 19 mm, während sich der Versuchsträger bis zum Erreichen der Maximallast noch weitere 10 mm durchbiegt. Die errechnete Systemtraglast stimmt mit dem Versuchsergebnis überein. Bei der Berechnung mit Berücksichtigung des Versatzmaßes ist ein deutlicher Abfall der Steifigkeit und eine Reduzierung der Traglast zu erkennen. Der Verlauf der Last-Verformungskurve stimmt allerdings besser mit dem Versuch überein.

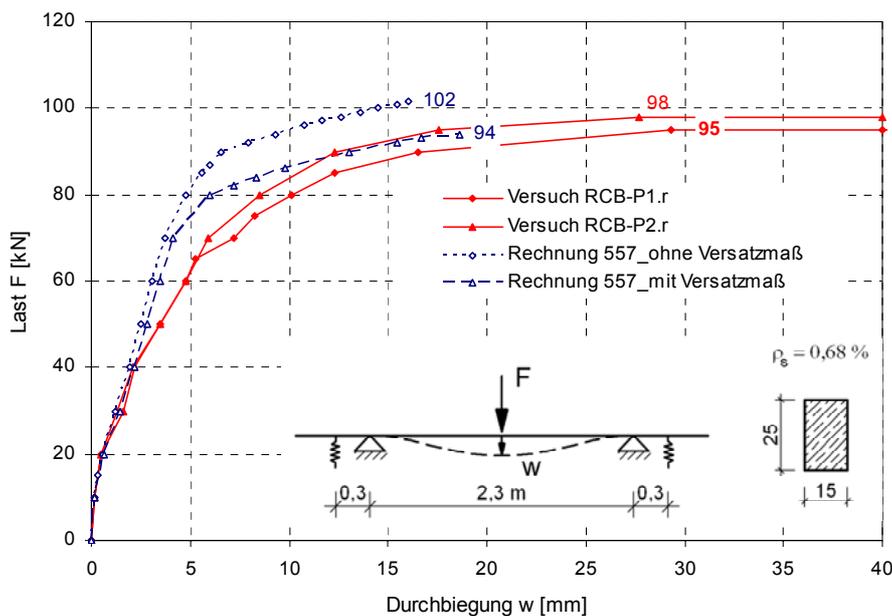


Bild 71: Last- Verformungsdiagramm Rechnung $f_{yR} = 557 \text{ N/mm}^2$ (Mittelwert)

Berechnung mit unteren Werten der Stahlfestigkeit (Rechnung528)

Wie die Darstellungen zeigen, gibt es bei den beiden Versuchsträgern Unterschiede, obwohl sie identisch sind und mit dem gleichen Material hergestellt wurden. So verhält sich der erste Träger (RCB-P1.r) etwas weicher und versagt bei einer etwas niedrigeren Traglast als der zweite Träger. Die Begründung hierfür dürfte in der Streuung der Materialfestigkeiten (Fließgrenze und Zugfestigkeit des verwendeten Bewehrungsstahls) liegen. Daher wird an dieser Stelle eine weitere Vergleichsrechnung mit den unteren gemessenen Werten (Rechnung 528: $f_{yR}=528 \text{ MN/m}^2$, $f_{tR}=641 \text{ MN/m}^2$) geführt (Bild 66). Diese Berechnung zeigt eine bessere Übereinstimmung mit dem ersten Versuchsträger, während die vorhergehende Berechnung mit Versuchsträger RCB-P2.r gut übereinstimmt. Bei Berücksichtigung des Versatzmaßes ergibt sich auch in diesem Falle eine bessere Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen.

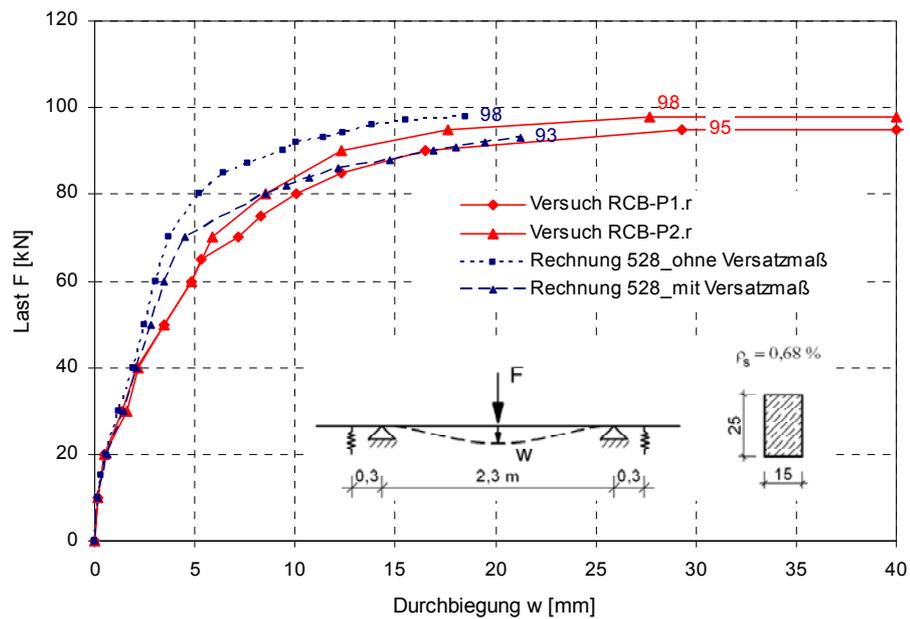


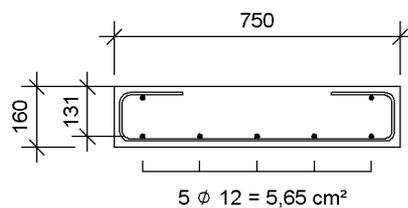
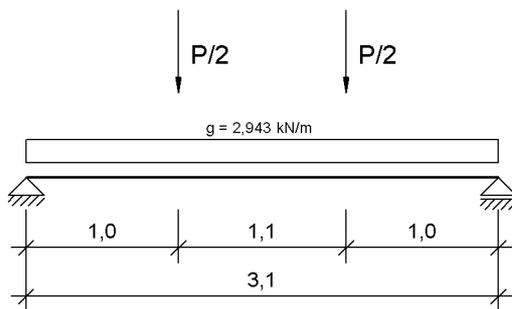
Bild 72: Last-Verformungsdiagramm Rechnung $f_{yR} = 528 \text{ N/mm}^2$ (unterer Grenzwert)

8.3 Versuche von Jaccoud/Favre

Die von *Jaccoud/Favre* [Jac 32] durchgeführten Versuche an einachsig und zweiachsig gespannten Platten wurden sowohl unter Kurzzeit- als auch unter Langzeitbelastung durchgeführt und eignen sich somit gut zur Überprüfung des Rechenmodells hinsichtlich der Erfassung des Kriechens und Schwindens. In der Serie C (Bild 73) wurden mit den insgesamt 11 einachsig gespannten Platten 3 Kurzzeitversuche (C1, C2, C3) und 7 Dauerstandversuche (C11-C15, C22, C24) durchgeführt.

Jaccoud/Favre: Versuchsserie C

$b/h/d=75/16/13,1$ BSt III, C25/30



Systemparameter:

Systemlänge: $L = 3,10 \text{ m}$

Schlankheit: $L/h = 19,4 \approx 20$

$L/d = 23,7 \approx 25$

Querschnittswerte/Bewehrungsgrade:

$\rho_s = 0,58\%$

$h_{eff} = 2,5 \cdot 2,9 = 7,25 \text{ cm}$

$\rho_{s,eff} = 1,04\%$

Belastung:

C11: $P = 5,77 \text{ kN}$

C12: $P = 12,19 \text{ kN}$

C13: $P = 18,61 \text{ kN}$

C14: $P = 25,04 \text{ kN}$

C15: $P = 31,45 \text{ kN}$

Materialparameter (Mittel Serie C):

$f_{cm} = 30,55 \text{ MN / m}^2$

$E_{cm} = 29500 \text{ MN / m}^2$

$f_{ctm} = 2,8 \text{ MN / m}^2$

Bild 73: System und Querschnitt der Versuchsserie C

Um den Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit zu testen, wurden die Versuche mit einer Belastungszeit von 12 sec, 10 min und 10 h durchgeführt. Die Belastung P wurde bis zu ca. 60% der Versagenslast gesteigert, anschließend wurde zyklisch 10-mal be- und entlastet.

Die Dauerstandversuche wurden unter 5 verschiedenen Beanspruchungsniveaus (0,2 bis 0,6 M/M_u) durchgeführt. Dabei wurden die Durchbiegungen über einen Zeitraum von 500 Tagen gemessen.

8.3.1 Mechanische Materialkennwerte

Beton

Parallel zu den durchgeführten Versuchen wurden Druckfestigkeit, Zugfestigkeit, Elastizitätsmodul (Sekantenmodul) sowie Kriech- und Schwindbeiwerte in Abhängigkeit von der Zeit gemessen.

Die Druckfestigkeit wurde an Würfeln, Prismen und Zylindern bestimmt. Anhand der Zylinderdruckfestigkeit f_{cm} lässt sich der verwendete Beton in die Festigkeitsklasse C 25/30 einordnen.

$$f_{cm} = 30,6 \text{ MN} / \text{m}^2 \quad f_{ck} \approx (30,6 - 8) \text{ MN} / \text{m}^2 = 23 \text{ MN} / \text{m}^2 \Rightarrow \text{C25/30}$$

Die Versuchsnachrechnungen basieren auf Grundlage der in Tabelle 4 angegebenen mechanischen Festigkeiten. In der Regel werden die Mittelwerte der Serie C verwendet. Bei der nichtlinearen Berechnung der Kurzzeitversuche wird die Zugfestigkeit f_{ctm} zu 100% angesetzt. Für die Langzeitversuche wird die Zugfestigkeit in Abhängigkeit von der Zeit gemäß Abschnitt 6.1.3 auf ca. 60%- 70% abgemindert.

Tabelle 4: Mechanische Kennwerte für die Versuchsnachrechnung

Versuch	f_{cm}	f_{ctm}	$E_{c0m} = 1,15 \cdot E_{cm}$
	[MN/m ²]	[MN/m ²]	[MN/m ²]
C11	28,8	2,56	29000*1,15
C12	29,4	3,06	28300*1,15
C13	30,93	2,82	29200*1,15
C14	29,4	3,06	28300*1,15
C15	29,29	2,90	28700*1,15
C2	29,3	2,90	28700*1,15
Mittel Serie C	30,55	2,8	33925

Betonstahl

Für alle Versuchsreihen wurde ein naturharter Stahl der Gruppe IIIa gemäß der Schweizer Norm SIA 162 verwendet. Für die Serie C wurde die Fließgrenze (0,2% Dehngrenze) mit $f_{0,2}=580 \text{ MN} / \text{m}^2$ sowie die Bruchspannung mit $f_u = 460 \text{ MN} / \text{m}^2$ bestimmt.

Bei den nichtlinearen Berechnungen wird der Elastizitätsmodul des Stahls einheitlich mit $E_s=200 \text{ 000 MN} / \text{m}^2$ angesetzt.

8.3.2 Rheologische Materialkennwerte des Betons

Parallel zu den Versuchen wurden die Schwind- und Kriechbeiwerte gemessen. Bild 74 zeigt die für die Versuchsnachrechnung verwendeten gemessenen Kriechzahlen. Zur Berücksichtigung des Schwindens werden die gemessenen Schwindwerte gemäß Bild 75 angesetzt. Die gemessenen Werte liegen im Bereich der gemäß Norm (Heft 525 DAfStb) anzusetzenden Werte.

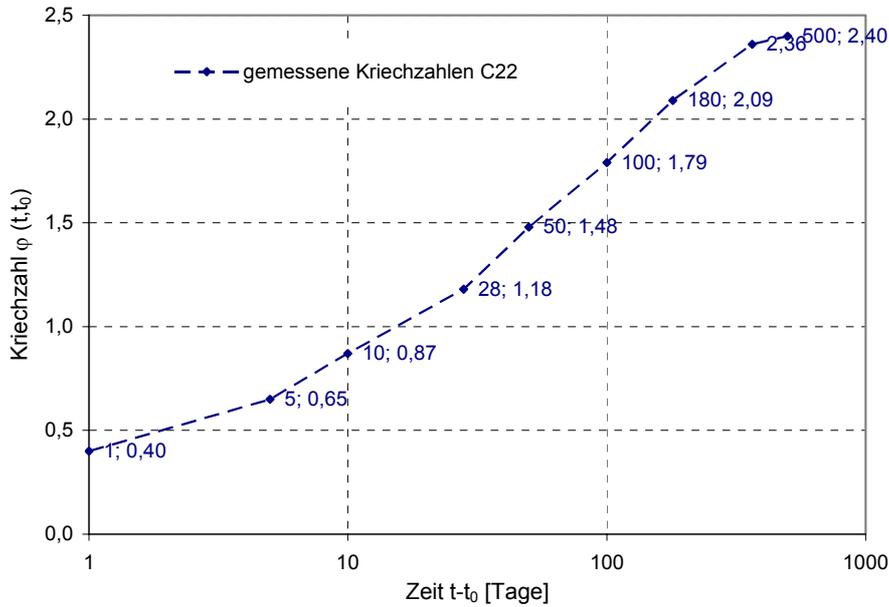


Bild 74: Gemessene Kriechzahlen $\varphi(t, t_0)$ der Versuchsserie C, $t_0=28$

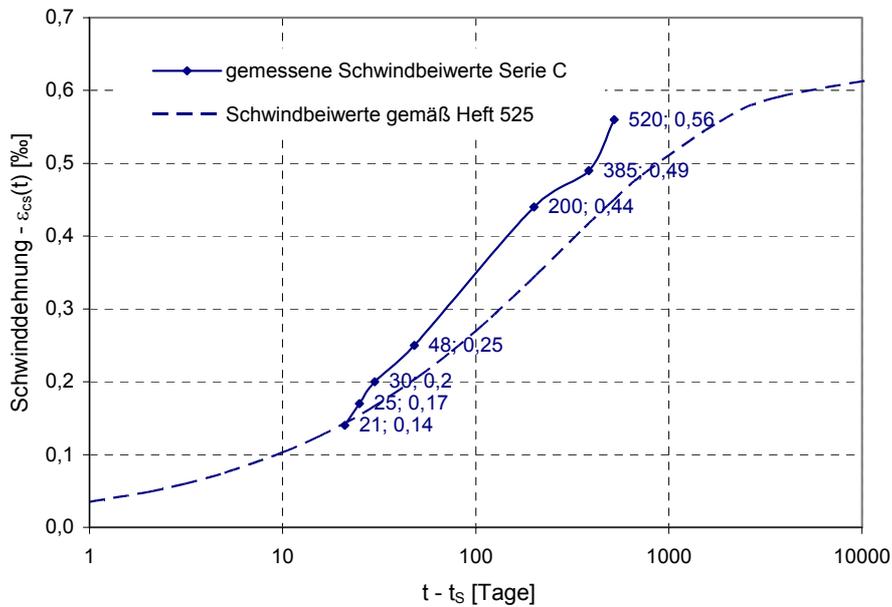


Bild 75: Gemessene Schwindbeiwerte der Versuchsserie C

8.3.3 Kurzzeitversuche der Serie C

Bild 76 zeigt die gemessenen und berechneten Durchbiegungen des Kurzzeitversuchs im Vergleich. Die Berechnung trifft sehr gut den gemessenen Verlauf. In den Kurzzeitversuchen zeigt *Jaccoud/Favre* den Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit auf den Verlauf. Bezugswert ist hier die mittlere Belastungsgeschwindigkeit des Versuches C2 (12 min). Als zweite Bezugskurve sind die Durchbiegungen aus den 5 Langzeitversuchen C11 bis C15 zum Zeitpunkt $t=0$ aufgetragen. Obwohl diese Kurve – je nach Versuch – streuende Materialfestigkeiten enthält, stimmt sie ebenfalls gut mit der Rechnung überein. Wie man den Langzeitversuchen in [Jac 32] entnehmen kann, nimmt die Durchbiegung bei den Versuchen C13 bis C15 schon innerhalb der ersten fünf Minuten deutlich zu (ca. 10%).

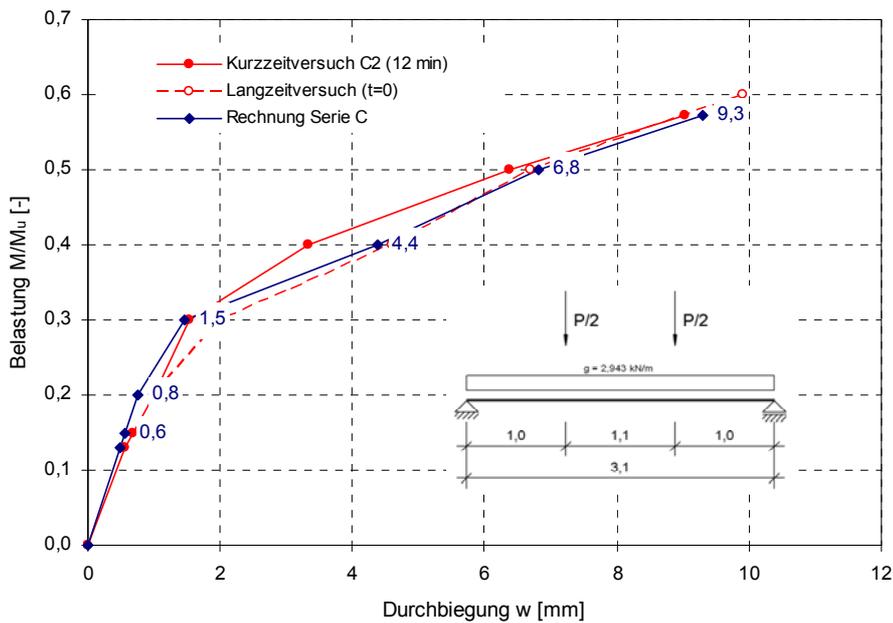


Bild 76: Vergleich der gemessenen und berechneten Durchbiegungen im Kurzzeitversuch

8.3.4 Langzeitversuche C11 bis C15

Die Einflüsse aus Kriechen und Schwinden treten bei der Messung der Durchbiegungen der Langzeitversuche immer in gekoppelter Form auf. Daher müssen auch die rechnerischen Untersuchungen beide Einflüsse enthalten. Der Vergleich der gemessenen und berechneten Durchbiegungen (Bild 77) zeigt eine ausreichend gute bis teilweise sehr gute Übereinstimmung. Am besten werden die Versuchsergebnisse des Trägers C13 getroffen, der mit $M/M_u = 40\%$ gut den Belastungsgrad des Gebrauchszustandes wiedergibt.

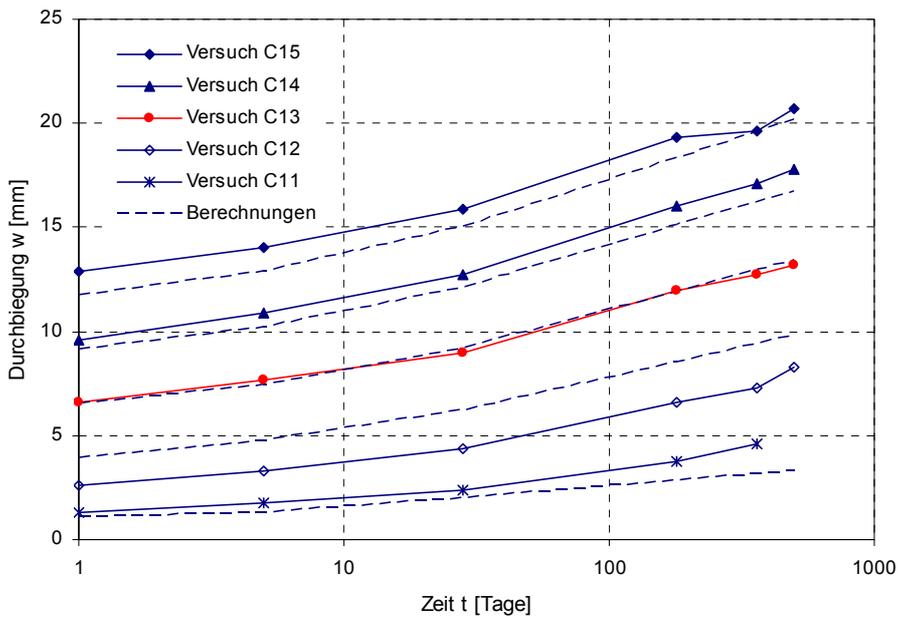


Bild 77: Vergleich der gemessenen und berechneten Durchbiegungen im Langzeitversuch

Am größten sind die Unterschiede bei dem Versuchsträger C12. Während die Platte C11 immer im Zustand I verbleibt, ist die Belastung des Versuchs C12 so gewählt, dass die Platte gerade in den gerissenen Zustand übergeht. Die dabei entstehenden Durchbiegungen streuen stark, da sich die Streuung der Zugfestigkeit stark auf die Ausbildung der gerissenen und ungerissenen Bereiche auswirkt.

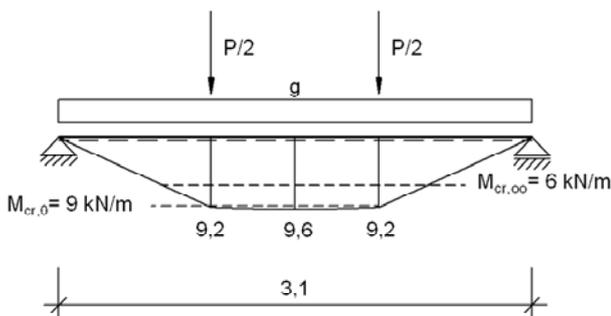


Bild 78: Momentenverlauf des Versuchs C12

Einfluss des Schwindens

Der Einfluss des Schwindens auf die Durchbiegungen ist – wie die rechnerischen Untersuchungen zeigen – groß. Im vorliegenden Versuch beträgt der Zuwachs durch das Schwinden rechnerisch ca. 40%.

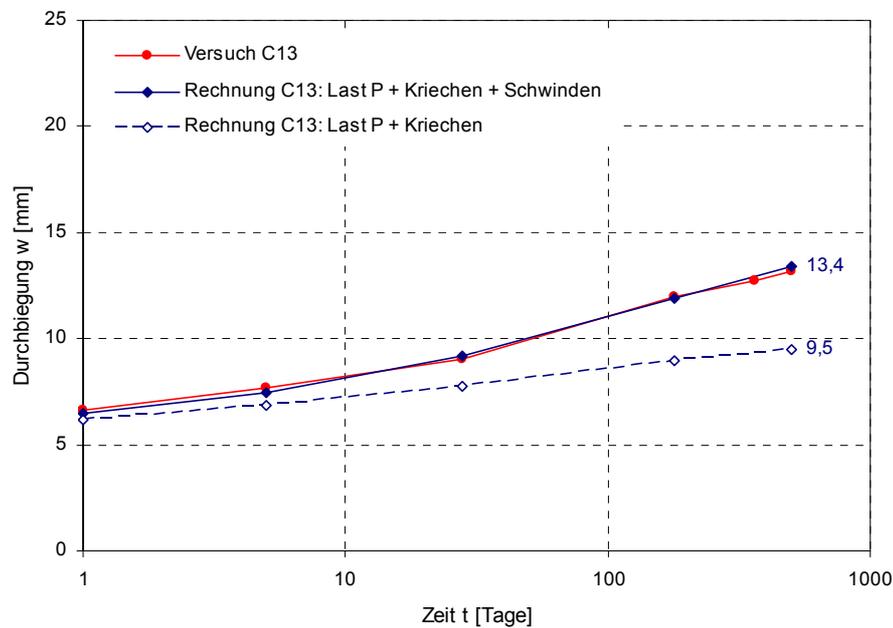


Bild 79: Einfluss des Schwindens auf die Durchbiegungen des Versuchs C13

8.4 Zusammenfassung: Verifizierung des Rechenmodells

Die Verifizierung des Rechenmodells und der Werkstoffmodellierung erfolgt u. a. durch Nachrechnen von Versuchen von *Falkner*, *Alavizadeh-Farhang* auf der Grundlage der modifizierten Stahlkennlinie. Die Versuche von *Jaccoud/Favre* wurden mit beiden Modifizierungsarten nachgerechnet, welche in etwa die gleichen Werte ergeben. Die dargestellten Ergebnisse basieren auf der Modellierung mit der modifizierten Stahlkennlinie.

Beim Versuch von *Falkner* – dem einzigen Versuch mit zentrischer Zwangbeanspruchung – ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den im Versuch ermittelten Zwangzugkräften infolge Abkühlung. Bei den beiden anderen Versuchen kann die richtige Erfassung der Steifigkeiten im Rechenmodell anhand der dokumentierten Last-Durchbiegungskurven überprüft werden. Da sich darin die Biegesteifigkeit des Systems ausdrückt, ist dies für die Berechnung von Durchbiegungen ein wesentlicher Aspekt.

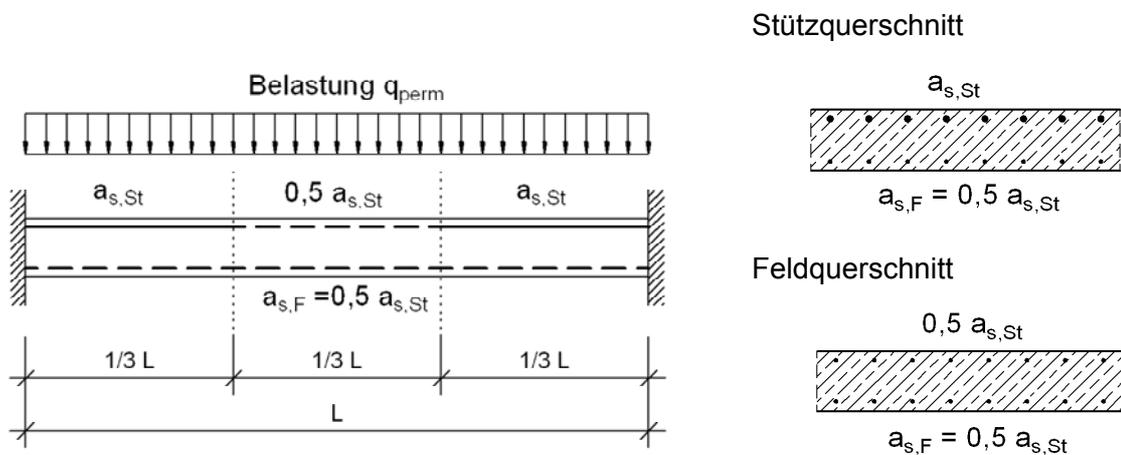
Hinsichtlich der Erfassung der Langzeiteinflüsse aus Kriechen und Schwinden ist die Nachrechnung der Versuche von *Jaccoud/Favre* für diese Arbeit besonders wichtig. Die für die Nachrechnung notwendigen rheologischen Eigenschaften des Betons wurden parallel zu den Versuchen gemessen und sind gut dokumentiert. Sowohl bei den Kurzzeitversuchen als auch bei den Langzeitversuchen ergibt sich insgesamt eine gute bis teilweise sehr gute Übereinstimmung.

9 Numerische Simulationen

9.1 Untersuchungen am Bezugssystem

Als Bezugssystem wird der in Bild 80 dargestellte, 20 cm dicke, beidseitig starr eingespannte Plattenstreifen untersucht. Es handelt sich um ein verhältnismäßig schlankes System mit einem üblichen Bewehrungsgrad von $\rho_{s,St}=0,8\%$ und $\rho_{s,F}=0,4\%$. Obwohl in der Regel der Durchbiegungsnachweis im GZG in den Endfeldern einer Decke maßgebend ist, wird hier dennoch ein beidseitig starr eingespanntes System als Bezugssystem gewählt.

Bezugssystem D $b/h/d=100/20/17$ **BSt 500** **C 30/37**



Systemlänge: $L = 7,50 \text{ m}$

$L_i = 4,50 \text{ m}$

Schlankheit: $L/d = 44$

$L_i/d = 26,5$

Belastung:

$$g_k = (5,0 + 3,5) \text{ kN} / \text{m}^2 = 8,5 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$q_k = 5 \text{ kN} / \text{m}^2 \quad \psi_2 = 0,5$$

$$q_{Ed} = 19 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$q_{perm} = 11 \text{ kN} / \text{m}^2$$

Querschnitt/Bewehrungsgrade:

$$\rho_{s,St} = 0,8\% \quad \rho_{s,St,eff} = 1,81\%$$

$$\rho_{s,F} = 0,5 \cdot \rho_{s,St} = 0,4\%$$

Materialparameter:

$$E_{c0m} = 31900 \text{ MN} / \text{m}^2$$

$$f_{ctm} = 3,0 \text{ MN} / \text{m}^2$$

$$f_{ctm}(\infty) = 2,1 \text{ MN} / \text{m}^2$$

$$\varphi_\infty = 2,5$$

$$\varepsilon_{cs}(\infty) = -0,5\%$$

Bild 80: Bezugssystem für die rechnerischen Untersuchungen ($\rho_{s,St}=0,8\%$)

Als Grenzfall wird eine horizontal unverschiebliche Lagerung angenommen, so dass die ermittelten Zwangnormalkräfte und die daraus resultierenden Durchbiegungen und Rissbreiten obere Grenzwerte darstellen. Im Allgemeinen werden die angrenzenden und verformungsbehindernden Bauteile Nachgiebigkeiten aufweisen, so dass im Einzelfall zu ermitteln ist, in welcher Größe die berechneten Zwangkräfte zu erwarten sind. Bei den

Durchbiegungsuntersuchungen wird als zweiter Grenzfall die horizontal frei verschiebliche Lagerung betrachtet.

Die angesetzte Belastung entspricht in etwa der Belastung einer Decke des üblichen Hochbaus. Der Bewehrungsgrad bzw. die eingelegte Bewehrung entspricht der statisch erforderlichen Bewehrung aus den äußeren Lasten nach linear elastischer Schnittgrößenermittlung ($\rho_{s,F}=0,5 \rho_{s,St}$). Die untere Bewehrung wird über die ganze Bauteillänge konstant durchgeführt, während die obere Bewehrung im mittleren Drittel auf die Hälfte reduziert wird.

Die eingelegte untere Bewehrung sowie im Feld die obere Bewehrung reichen nicht aus, um den vollen zentrischen Zwang ($d_s=12 \text{ mm}$, $f_{ct,eff}=3,0 \text{ MN/m}^2$) abzudecken. Gemäß Abschnitt 2.2.2 ist dazu – je nach Anforderung an die Rissbreite – folgende Bewehrung erforderlich:

$$\text{Für } w_k = 0,3 \text{ mm: } \quad d_1 / d = 0,15 \quad \text{erf. } a_{s,Zwang} = (0,47 \cdot 17) \text{ cm}^2 / \text{m} = 8 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

$$\text{Für } w_k = 0,15 \text{ mm: } \quad d_1 / d = 0,15 \quad \text{erf. } a_{s,Zwang} = (0,66 \cdot 17) \text{ cm}^2 / \text{m} = 11,2 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

Berechnungsschritte

Die nachfolgenden geometrisch und physikalisch nichtlinearen Berechnungen werden in folgenden Einzelschritten durchgeführt (Bild 81):

1. Berechnung der Verformungen und Schnittgrößen unter Berücksichtigung der Rissbildung zum Zeitpunkt $t=0$ – d. h. ohne Berücksichtigung der zeitabhängigen Einflüsse aus Kriechen und Schwinden – für alle Laststufen. Daraus folgt die Anfangsdurchbiegung:

w_0 Durchbiegung mit den Steifigkeiten ($t=0$)

$w_{0,perm}$ Durchbiegung unter quasi-ständiger Belastung zum Zeitpunkt $t=0$

2. q_{perm} + Temperatur
Berechnung der Verformungen und Schnittgrößen aus einer zusätzlichen kurzzeitigen Temperaturänderung (konstante Abkühlung) von ΔT_N für die Laststufe q_{perm} . Daraus ergibt sich der Verformungsanteil aus Temperatur wie folgt:

$$w_{T,perm}(t=0) = w_0(q_{perm} + \Delta T_N) - w_{0,perm}$$

3. q_{perm} + Kriechen
Berechnung der Verformungen und Schnittgrößen zum Zeitpunkt $t=\infty$ für alle Laststufen unter Berücksichtigung des Kriechens. Es handelt sich dabei um einen rein theoretischen Zwischenschritt zur Bestimmung der Kriechverformung. Rechentechnisch wird beim Rechenlauf für jede Laststufe die jeweilige Belastung q als kriecherzeugend angesetzt. Für die maßgebende Laststufe q_{perm} ergeben sich daraus die Kriechverformungen unter der quasi-ständigen Belastung.

w_∞ Durchbiegung mit den Steifigkeiten ($t=\infty$)

$w_{\infty,perm}$ Durchbiegung unter quasi-ständiger Belastung mit Berücksichtigung des Kriechens

$$w_{c,perm} = w_{\infty,perm} - w_{0,perm}$$

4. $q_{perm} + \text{Kriechen} + \text{Schwinden}$

Berechnung der Verformungen und Schnittgrößen zum Zeitpunkt $t=\infty$ unter Berücksichtigung des Kriechens ($\varphi=2,5$) und Schwindens $\varepsilon_{cs}(\infty)=-0,5\text{‰}$ punktuell für die Laststufe q_{perm} . Dabei werden beim Schwinden sowohl die Schwinddehnung ε_{cs} in der Schwerlinie des Querschnitts, als auch die zugehörigen Krümmungen κ_s^{\parallel} in den gerissenen Bereichen berücksichtigt. Die Schwindkrümmungen κ_s^{\perp} in den ungerissenen Bereichen, werden dagegen vernachlässigt. Der Zuwachs an Durchbiegung infolge Schwindens unter quasi-ständiger Belastung ergibt sich zu:

$$w_{s,perm} = w_{\infty}(q_{perm} + c + s) - w_{\infty,perm}$$

5. $q_{perm} + \text{Kriechen} + \text{Schwinden} + \text{Temperatur}$

Berechnung der Verformungen und Schnittgrößen aus einer zusätzlichen kurzzeitigen Temperaturänderung (konstante Abkühlung) von ΔT_N für die Laststufe q_{perm} unter Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens. Die Berechnung erfolgt mit den für Kriechen angepassten Arbeitslinien des Betons ($t=\infty$). Für die als Kurzzeitbelastung einwirkende Temperaturänderung wird daher der Wert der Einwirkung mit einem Anpassungsfaktor multipliziert. Der zusätzliche Verformungsanteil aus Temperatur ergibt sich wie folgt:

$$w_{T,perm}(t = \infty) = w_{\infty}(q_{perm} + c + s + k_T \cdot \Delta T_N) - w_{\infty}(q_{perm} + c + s)$$

k_T Anpassungsfaktor zur Berücksichtigung der Steifigkeiten für eine Kurzzeitbelastung (siehe Abschnitt 9.1.5)

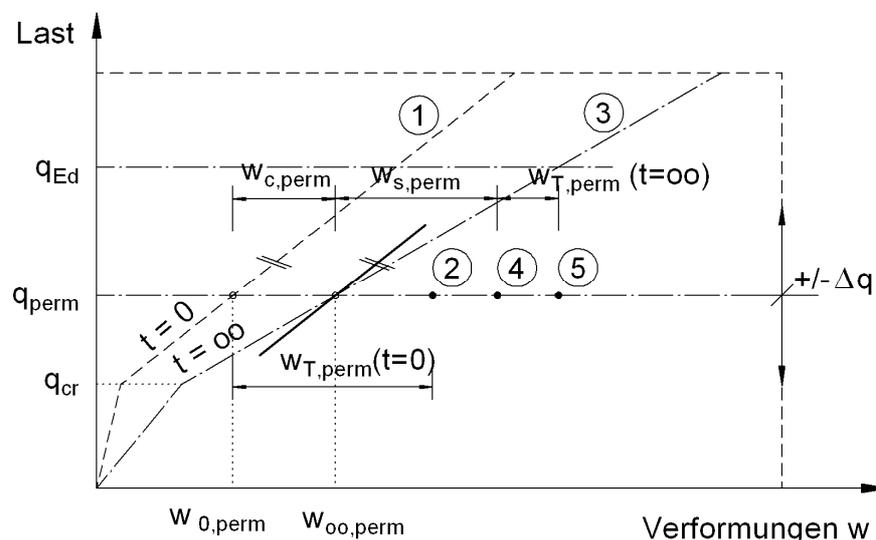


Bild 81: Berechnungsschritte der nichtlinearen Berechnung

Bei den nichtlinearen Berechnungen der numerischen Simulation wurde einheitlich die Modifizierung der Betonkennlinie im Zugbereich gemäß Abschnitt 7.5.4 verwendet.

9.1.1 Nur Lastbeanspruchung q ($t=0$) (Schritt 1)

Die rechnerische Untersuchung zum Zeitpunkt $t=0$ auf der Grundlage mittlerer Baustoffeigenschaften – jedoch zunächst ohne Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens (Schritt 1) – ergibt das in Bild 82 dargestellte Last-Durchbiegungsdiagramm. Das System ohne Behinderung der horizontalen Verschiebung (System_frei) ist zum Vergleich ebenfalls dargestellt. Die Kurvenverläufe können vereinfacht durch 3 lineare Äste beschrieben werden. Im ersten steil verlaufenden Ast befindet sich das Bauteil auf der gesamten Länge im ungerissenen Zustand I. Die Knickpunkte im Kurvenverlauf entstehen durch die Steifigkeitsänderung infolge Rissbildung – zunächst im Einspannbereich, dann im Feldbereich. Mit Beginn des 3. Astes kommt die Bewehrung ins Fließen. Durch die hohen auftretenden Druckkräfte – die sich bei starrer horizontaler Lagerung einstellen – gibt es beim gezwängten System (System_fix) eine Traglaststeigerung ohne ausgeprägtes Fließen der Bewehrung. Das System versagt infolge Versagens der Druckzone des Betons, während das freie System ein duktileres Verhalten zeigt. Unter der Gebrauchslast q_{perm} befinden sich sowohl der Stützbereich, als auch der Feldbereich im gerissenen Zustand II.

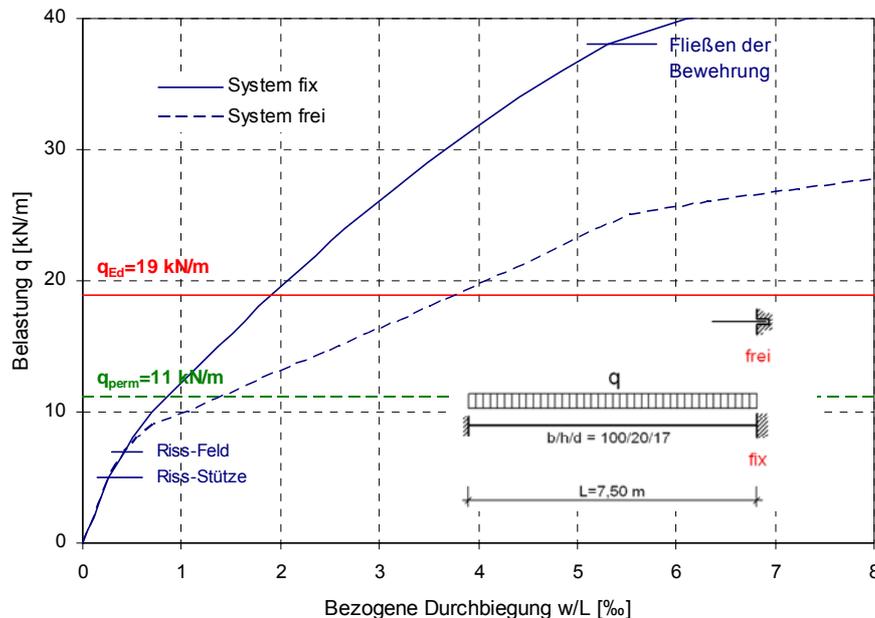


Bild 82: Last-Durchbiegungsdiagramm ($t = 0$) für das Bezugssystem mit $\rho_{s,St}=0,8\%$
2 Grenzfälle: System_fix und System_frei

Infolge der vollständigen Behinderung der horizontalen Verformung durch die starre Lagerung an beiden Auflagern entsteht unter der Gebrauchslast q_{perm} eine Druckkraft.

$$N_{0,perm} = -116 \text{ kN}$$

Die entstehende Druckkraft überdrückt den Querschnitt so, dass das Integral der Dehnungen in der Stabachse aus Verträglichkeitsgründen gleich Null ist, was den angesetzten Auflagerbedingungen entspricht. Sie baut sich jedoch bereits bei geringer Nachgiebigkeit der horizontalen Festhaltung stark ab.

Momentenumlagerungsverhalten

Da bei der nichtlinearen Berechnung auch die geometrischen Nichtlinearitäten berücksichtigt werden, vergrößert die entstehende Druckkraft auf Grund der Durchbiegung das Moment in Feldmitte. Es ergibt sich ein Zusatzmoment ΔM nach Theorie II. Ordnung:

$$\Delta M = -N \cdot w \quad (9.1)$$

Auf Grund der geringen Durchbiegungen ist das Zusatzmoment nicht besonders groß (ca. 1–4%). Da bei steigender Belastung die Durchbiegungen zunehmen und die Druckkraft nahezu linear ansteigt, vergrößert sich das Feldmoment überproportional, während das Stützmoment sich gegenüber der linear-elastischen Berechnung nur kaum verändert.

Über das Verhältnis Stützmoment zu Feldmoment lässt sich das Momentenumlagerungsverhalten studieren (Bild 83). Wie beim Träger ohne horizontale Verformungsbehinderung lagert sich beim System_fix das Stützmoment mit Beginn der Rissbildung im Einspannbereich zum Feldmoment um. Jedoch findet auf Grund der Druckkräfte keine Rückumlagerung des Momentes vom Feld zur Stütze statt. Die Rissbildung im Feld setzt erst bei einer höheren Belastung ein.

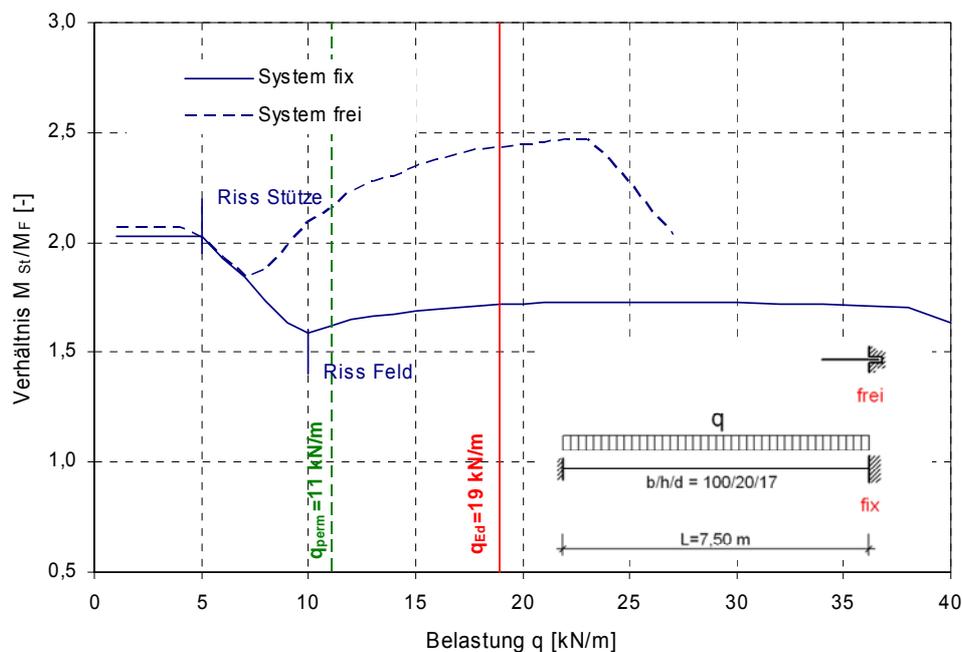


Bild 83: Momentenumlagerungsverhalten ($t=0$) für das Bezugssystem ($\rho_{s,St}=0,8\%$)
2 Grenzfälle: System_fix und System_frei

9.1.2 Lastbeanspruchung und Temperatur (Schritt 2)

Die zusätzliche Temperatureinwirkung wird als konstante Abkühlung über den Querschnitt in Form einer Dehnung in der Stabachse eingegeben. Im Gegensatz zum Schwinden entstehen keine zusätzlichen Krümmungen, da die Bewehrung ebenfalls der Temperaturebeanspruchung unterliegt. Am horizontal frei verschieblichen System hat die Temperatur keinen Einfluss auf die Schnittgrößen und Durchbiegungen, da sich das System horizontal frei verkürzen kann. Nachfolgende Betrachtungen beziehen sich daher auf den Grenzfall des horizontal starr gelagerten Systems (System_fix).

Die Temperatur ist eine Kurzzeitbeanspruchung, welche auf die Steifigkeiten des Rechenmodells (t=0) angesetzt wird. Die rechnerische Untersuchung berücksichtigt zunächst keine Einflüsse aus Kriechen und Schwinden. Die Temperaturabkühlung wird über alle Laststufen mit nachfolgenden Ansätzen untersucht:

$$\Delta T_N = -15K \quad (\text{Innenbauteil}) \quad \Delta T_N = -30K \quad (\text{Außenbauteil})$$

Normalkräfte

Wie beim Schwinden entsteht eine Zugkraft, welche sich der Druckkraft unter Lastbeanspruchung überlagert. Bild 84 zeigt neben der entstehenden Gesamtnormalkraft ebenfalls die im Bauteil vorhandene Zwangnormalkraft infolge Temperatur, welche in diesem Fall immer unter der Rissnormalkraft bleibt.

$$N_T(t=0) = N_0(q+T) - N_0(q) < N_{cr} = (0,2 \cdot 1,0 \cdot 3,0 \cdot 10^3) \text{ kN} = 600 \text{ kN} \quad (9.2)$$

Bei der Laststufe 0, d. h. unter reiner Temperatureinwirkung befindet sich der Querschnitt in beiden Fällen im gerissenen Zustand. Mit steigender Belastung q bildet sich in den Bereichen mit Biegemomentenbeanspruchung eine Druckzone aus, welche zu einer Zunahme der rechnerischen Dehnsteifigkeit führt. Dadurch ergibt sich im Fall $\Delta T_N = -30 \text{ K}$ eine Zunahme der Zwangkräfte.

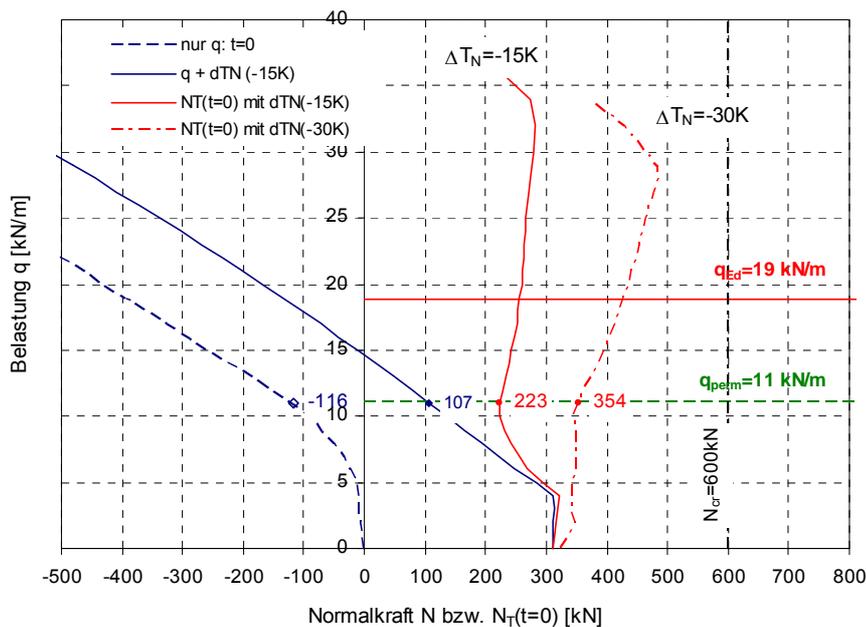


Bild 84: Normalkräfte mit Temperatureinwirkung (t=0)

Durchbiegungen

Die entstehenden Zwangkräfte am horizontal starr gelagerten System haben einen großen Einfluss auf die Durchbiegungen. Betrachtet man das Lastniveau q_{perm} , so sind die Durchbiegungen im Vergleich zur reinen Lastbeanspruchung – je nach Größe der Verformungseinwirkung ΔT_N – mehr als doppelt so groß (Bild 85). Dies ist eine Folge des durch die Zwangkräfte infolge Temperatur verursachten Steifigkeitsverlustes.

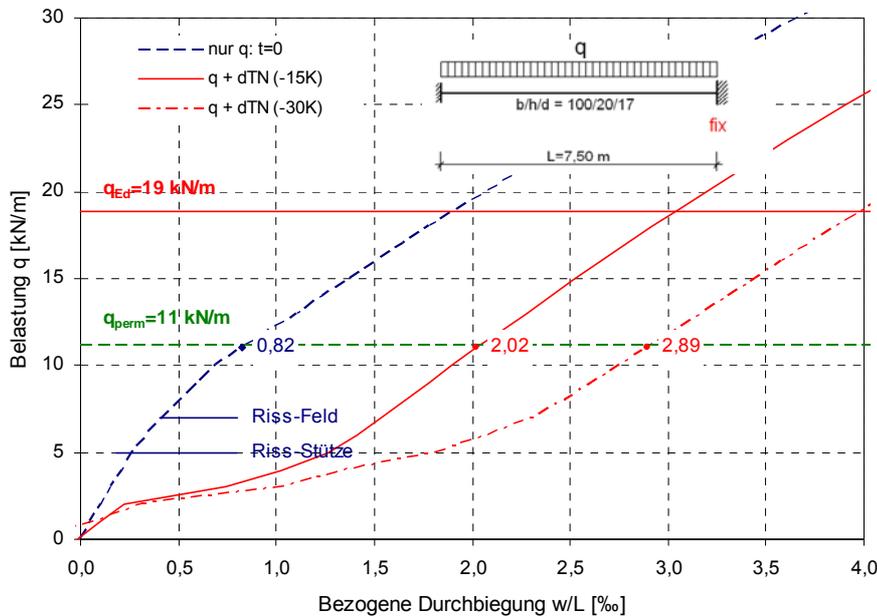


Bild 85: Bezogene Durchbiegungen unter q_{perm} mit Temperatur ($t=0$)

Rissbreiten

Aufgrund der entstehenden Normalkraft beim gezwängten System vergrößern sich auch die Rissbreiten signifikant (Tabelle 5). Dies trifft insbesondere auf den Feldbereich zu. Im Feld ergibt sich eine Vergrößerung der Rissbreite von 0,16mm auf 0,33mm bei einer Verformungseinwirkung von $\Delta T_N = -15$ K.

Tabelle 5: Ergebnisse q_{perm} + Temperatur

nichtlineare Berechnung Schritt 1 und 2						Stütze			Feld		
						$a_{s,St} = 13,6 \text{ cm}^2/\text{m}$			$a_{s,F} = 6,8 \text{ cm}^2/\text{m}$		
						$d_s = 16 \text{ mm}$			$d_s = 12 \text{ mm}$		
Last q_{perm}	M (Feld)	M(Stütze)	w/L	N	F_s	σ_s^{II}	w_k	F_s	σ_s^{II}	w_k	
[kN/m]	[kNm]	[kNm]	[%]	[kN]	kN	[MN/m ²]	[mm]	kN	[MN/m ²]	[mm]	
nur q_{perm}	11	29,82	-48,24	0,82	-116	257	189	0,11	148	218	0,16
$q_{perm} + \Delta T_N (-15K)$	11	23,00	-52,72	2,02	107	417	211	0,18	213	313	0,33
$q_{perm} + \Delta T_N (-30K)$	11	17,30	-54,87	2,89	238	497	366	0,37	239	351	0,40

9.1.3 Lastbeanspruchung und Kriechen (Schritt 3)

Das Kriechen des Betons bewirkt eine Vergrößerung der Krümmungen und damit eine Vergrößerung der Durchbiegungen. Das in Bild 86 dargestellte Last-Durchbiegungsdiagramm zeigt rein rechnerisch den Einfluss des Kriechens, wenn die jeweilige Belastung q kriecherzeugend ist. Im ungerissenen Zustand I (1. Ast) verringert sich die Steifigkeit in etwa um den Faktor $(1/(1+\varphi))$. Im weiteren Kurvenverlauf ist die Steifigkeitsminderung geringer, da sich das Kriechen im gerissenen Zustand II auf die Höhe der Druckzone beschränkt. Der Anteil der infolge Verbundkriechens ebenfalls hinzukommenden Durchbiegungen ist gering. Unter der kriecherzeugenden Last q_{perm} vergrößert sich die bezogene Durchbiegung beim horizontal unverschieblichen System (System_fix) um den Faktor 2,9.

$$w_{\infty,perm} = 2,34 / 0,82 \cdot w_{0,perm} = 2,9 \cdot w_{0,perm} \quad (9.3)$$

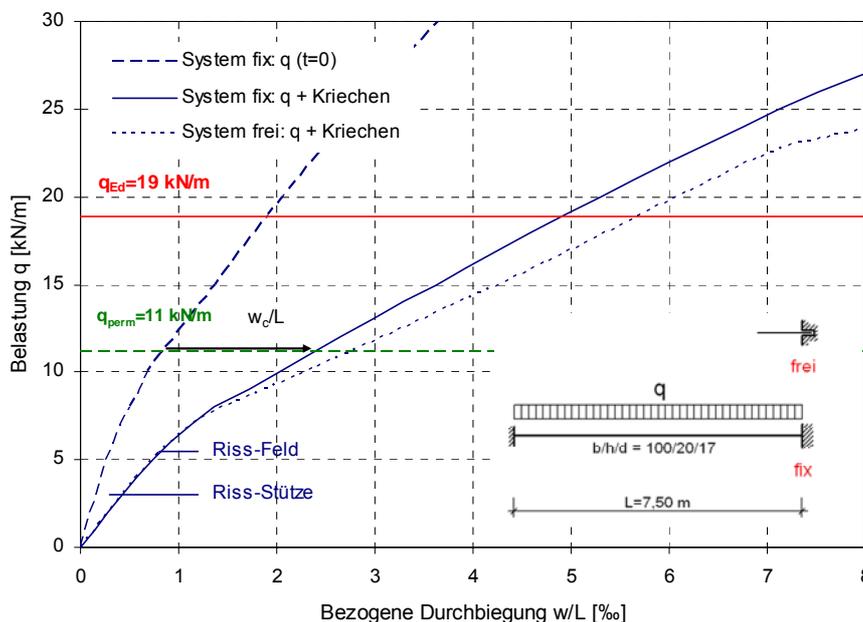


Bild 86: Last-Durchbiegungsdiagramm ($t=\infty$) für das Bezugssystem ($\rho_{s,St}=0,8\%$)

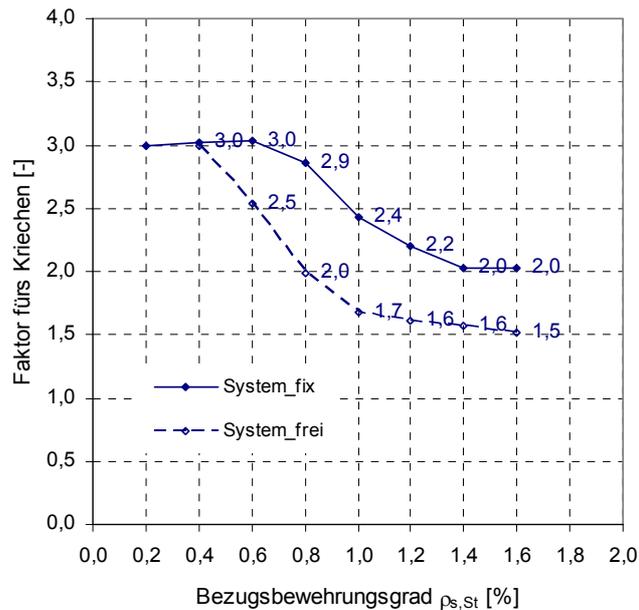
Der Kriechanteil ist bei beiden Systemen auch absolut gesehen groß. Beim horizontal frei verschieblichen System sind die Durchbiegungen sowohl zum Zeitpunkt $t=0$, als auch zum Zeitpunkt $t=\infty$ größer, jedoch ist der Kriechanteil $w_{c,perm}$ kleiner:

$$\text{System_fix:} \quad w_{c,perm} / L = w_{\infty,perm} / L - w_{0,perm} / L = 2,34\% - 0,82\% = 1,52\% \quad (9.4)$$

$$\text{System_frei:} \quad w_{c,perm} / L = w_{\infty,perm} / L - w_{0,perm} / L = 2,71\% - 1,36\% = 1,35\% \quad (9.5)$$

Kriechfaktor

In Abhängigkeit vom Bezugsbewehrungsgrad $\rho_{s,St}$ (vgl. Abschnitt 9.2.1) ergeben sich aus den nichtlinearen Berechnungen die in Bild 87 dargestellten Faktoren zur Berücksichtigung des Kriechens für das Bezugssystem ($L/d=44$) für die zwei Grenzfälle (System_fix und System_frei).



$$Faktor = \frac{w_{\infty,perm}}{w_{0,perm}}$$

Bild 87: Faktor $w_{\infty,perm} / w_{0,perm}$ zur Berücksichtigung des Kriechens ($\varphi=2,5$)

Unter dem Einfluss des Kriechens des Betons vergrößern sich die Durchbiegungen infolge Querbelastung q_{perm} . Das gilt insbesondere für Bauteile mit geringem Bezugsbewehrungsgrad, da bei diesen die Ausdehnung der Bereiche im Zustand I größer ist. Bei Bauteilen, die unter q_{perm} über die ganze Länge ungerissen bleiben, ist der Vergrößerungsfaktor durch das Kriechen am größten. Absolut gesehen sind die Durchbiegungen von ungerissenen Systemen jedoch i. d. R. deutlich kleiner als bei gerissenen Systemen.

Grenzwert:
$$\frac{w_{\infty,perm}}{w_{0,perm}} = 1 + \varphi$$

Der Faktor für das Kriechen ist bei den horizontal frei verschieblichen Systemen (System_frei) kleiner, da diese eine größere Anfangsdurchbiegung $w_{0,perm}$ besitzen. Die größten Unterschiede bezüglich des Kriechfaktors ergeben sich bei Systemen mit einem Bezugsbewehrungsgrad von ca. 0,8%.

Schnittgrößen und Rissbreiten

Die Schnittgrößen M und N ändern sich nur geringfügig. Auf Grund der leichten Verschiebung der Nulllinie in Richtung der Schwerlinie des Querschnitts (Erhöhung der Druckzonenhöhe x) sind die Dehnungen mit Kriechen in der Schwerlinie etwas geringer als ohne Kriechen (Bild 20). Somit sind auch die entstehenden Druckkräfte kleiner. Die Spannungen in der Bewehrung und damit auch die Rissbreiten sind direkt von der Schnittgrößenkombination (M_{St} und N) bzw. (M_F und N) abhängig. Bei Berücksichtigung des Kriechens ergeben sich auf Grund der Verringerung des Hebelarms z , sowie der geringeren Druckkraft etwas höhere Stahlspannungen, was zu einer leichten Zunahme der Rissbreiten führt (Tabelle 6).

9.1.4 Lastbeanspruchung + Kriechen + Schwinden (Schritt 4)

Das Schwinden des Betons wirkt sich ebenfalls stark auf die Schnittgrößen und Durchbiegungen aus. Da die Laststufe die Ausdehnung der gerissenen Bereiche beeinflusst, werden die Schnittgrößen und Verformungen punktuell für die ausgewählte Laststufe q_{perm} berechnet. Die Schwindeinwirkung wird als Krümmung und Dehnung in der Stabachse aufgebracht. Dabei wird zwischen gerissenen und ungerissenen Bereichen unter quasi-ständiger Belastung unterschieden.

Normalkräfte

Die infolge Schwindens entstehende Verkürzung baut die durch Lastbeanspruchung vorhandene Druckkraft vollständig ab. Es entsteht jetzt im starr und horizontal unverschieblich gelagerten Bezugssystem eine Zugkraft von 225 kN (Bild 88). Der durch das Schwinden verursachte Zuwachs beträgt 312 kN.

$$N_{s,perm} = N_{\infty}(q_{perm} + c + s) - N_{\infty,perm} \quad (9.6)$$

Durch diese Zugkraft wird – in Abhängigkeit von der Durchbiegung in Feldmitte – das Feldmoment M_F deutlich kleiner, während das Stützmoment annähernd gleich bleibt. Mit der Entstehung der Zugkraft vergrößern sich die Spannungen in der Bewehrung (ca. Faktor 1,5). Im Feldbereich wirkt sich die Verminderung des Feldmomentes (Schnittgrößenermittlung nach Theorie II. Ordnung) in der Tendenz günstig auf die Spannung in der Bewehrung aus.

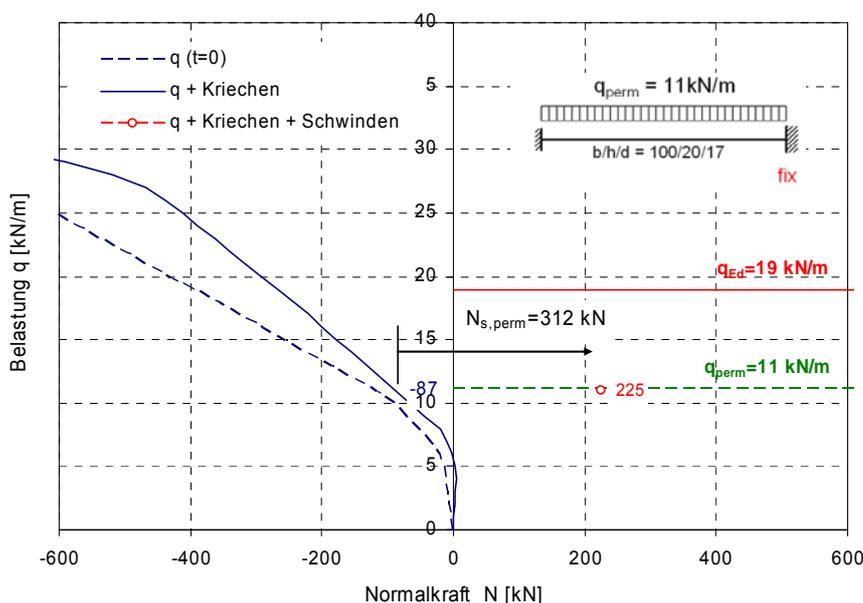


Bild 88: Normalkraft: $q_{perm} + \text{Kriechen} + \text{Schwinden}$

Durchbiegungen System_fix

Der hier als $w_{s,perm}$ bezeichnete Schwindanteil an der Gesamtdurchbiegung bezieht sich auf die ausgewählte Laststufe q_{perm} . Im hier untersuchten Bezugssystem beträgt dieser Verformungsanteil:

$$w_{s,perm} / L = 5,11\text{‰} - 2,34\text{‰} = 2,77\text{‰} \tag{9.7}$$

Die nichtlinear berechnete Durchbiegung setzt sich aus den Anteilen aus Last und Kriechen sowie dem Schwindanteil zusammen.

$$w_{0,perm} / L + w_{c,perm} / L + w_{s,perm} / L = (0,82 + 1,52 + 2,77)\text{‰} = 5,11\text{‰} \tag{9.8}$$

Die Schwindeinwirkung kann in zwei Komponenten, die Schwindkrümmung κ_s^{\parallel} und die Schwindverkürzung in der Stabachse ϵ_{cs} (i. M.), aufgeteilt werden. Die im gerissenen Einspann- und Feldbereich angesetzte Schwindkrümmung bewirkt eine Vergrößerung der Durchbiegung und führt zu Zwangmomenten. Die behinderte Dehnung in der Stabachse erzeugt große Zwangzugkräfte, die zu einem Steifigkeitsverlust (Verringerung der Druckzonenhöhe x) und damit zu größeren Durchbiegungen führen (Bild 89).

Durch das Kriechen und Schwinden wird der Grenzwert $w/L=4\text{‰}=1/250$ – entsprechend einer Durchbiegung von $L/250$ – überschritten, so dass hier eine Überhöhung des Bauteils erforderlich ist.

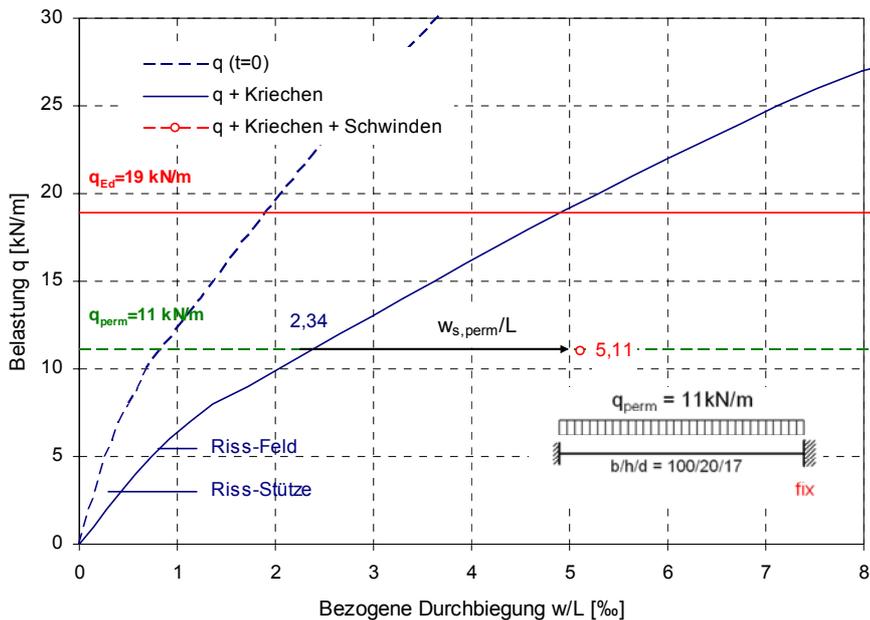


Bild 89: Bezogene Durchbiegung: $q_{perm} + \text{Kriechen} + \text{Schwinden}$ (System_fix)

Durchbiegungen System_frei

Beim horizontal frei verschieblichen System ergeben sich infolge Schwindens ebenfalls deutlich größere Durchbiegungen (Bild 90). Im Gegensatz zum Grenzfall mit starrer Lagerung resultiert der Zuwachs an Durchbiegung allein aus der Schwindkrümmung.

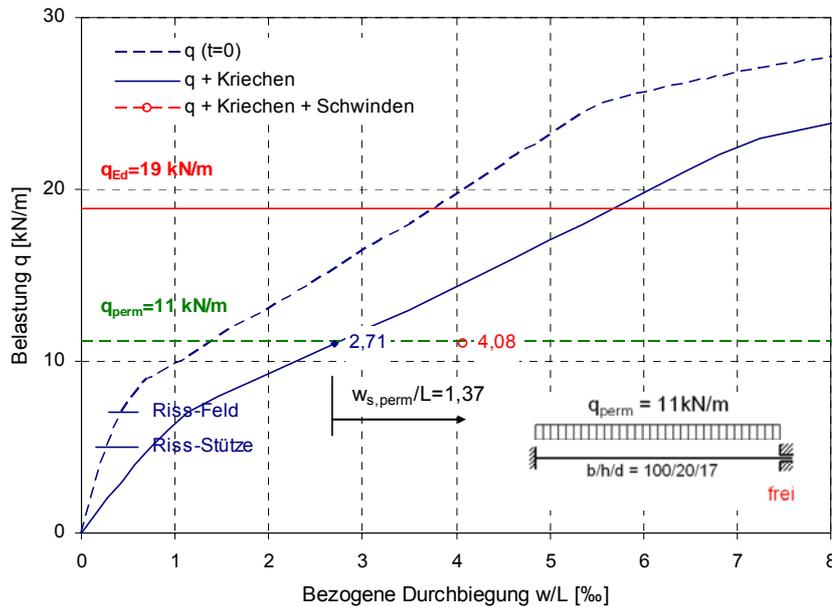


Bild 90: Bezogene Durchbiegung: $q_{perm} + \text{Kriechen} + \text{Schwinden}$ (System_frei)

Rissbreiten

Auf Grund der wesentlich höheren Spannungen in der Bewehrung vergrößern sich im Grenzfall mit starrer Lagerung (System_fix) auch die Rissbreiten durch das Schwinden signifikant. Tabelle 6 zeigt alle Ergebnisse des Bezugssystems ($\rho_{s,St}=0,8\%$). Für die Rissbreitenberechnung wurde einheitlich ein Durchmesser von $d_s=12\text{mm}$ im Feldbereich und $d_s=16\text{mm}$ im Einspannbereich sowie eine Zugfestigkeit von $f_{ct,eff}=3,0\text{MN/m}^2$ zu Grunde gelegt.

$$\text{Feld: } w_k(q_{perm} + c + s) / w_k(q_{perm} + c) = 0,33\text{mm} / 0,14\text{mm} = 2,4 \quad (9.9)$$

$$\text{Stütze: } w_k(q_{perm} + c + s) / w_k(q_{perm} + c) = 0,36\text{mm} / 0,21\text{mm} = 1,7 \quad (9.10)$$

Ohne Berücksichtigung des Schwindens wäre der Nachweis der Rissbreitenbeschränkung selbst für hohe Anforderungen ($w_k < 0,2\text{mm}$) erbracht. Durch das Schwinden verdoppeln sich die Rissbreiten in etwa, so dass in diesem Fall – ohne Erhöhung der Bewehrung – nur noch die mäßige Rissbreitenanforderung von $w_k=0,4\text{mm}$ eingehalten ist.

Die berechneten Stahlspannungen und demzufolge auch die Rissbreiten im Feld und über der Stütze sind annähernd gleich groß. Im Feldbereich liegt in diesem Fall mit und ohne Schwinden das Einzelrissbild vor, während im Stützbereich das abgeschlossene Rissbild erreicht ist.

9.1.5 Lastbeanspruchung + Kriechen + Schwinden + Temperatur (Schritt 5)

Wirkt eine zusätzliche Temperaturänderung zum Zeitpunkt $t=\infty$ auf das horizontal starr festgehaltene System, so ist dies in der Regel eine kurzzeitig veränderliche Einwirkung, welche auf die vom Kriechen unbeeinflussten Steifigkeiten bzw. Spannungs-Dehnungslinien des Betons trifft. Bei den nichtlinearen Berechnungen gilt das Superpositionsprinzip nicht, da sich durch die Beanspruchungen die Steifigkeiten und die Schnittgrößenverteilung ändern. Daher müssen alle Einwirkungen in einem Rechenlauf erfasst werden. Die Temperatureinwirkung ΔT_N wirkt in einem System, bei dem das Bauteil durch die Querbelastung Biegerisse aufweist und dessen Dehnsteifigkeit durch das Schwinden deutlich reduziert ist. Daher ist es sinnvoll, den Einfluss der Temperatureinwirkung im Rechensystem mit den Steifigkeiten zum Zeitpunkt $t=\infty$ zu untersuchen.

Um die Auswirkungen der Temperatureinwirkung mit den richtigen Steifigkeiten ermitteln zu können, wird für die Berechnungen zum Zeitpunkt $t=\infty$ ein Anpassungsfaktor k_T hergeleitet, mit welchem die Temperatureinwirkung multipliziert wird. Damit werden die zu geringen Steifigkeiten des Systems für diesen Lastfall kompensiert.

$$w_{T,perm}(t = \infty) = w_{\infty}(q_{perm} + c + s + k_T \cdot \Delta T_N) - w_{\infty}(q_{perm} + c + s) \quad (9.11)$$

k_T Anpassungsfaktor zur Berücksichtigung der Steifigkeiten für eine Kurzzeitbelastung

Herleitung des Anpassungsfaktors k_T

Die mittlere Dehnsteifigkeit des Bauteils ändert sich durch eine zusätzliche Verformungseinwirkung ε_L signifikant. Dies gilt sowohl für die Berechnungen mit den Steifigkeiten zum Zeitpunkt $t=0$, als auch für die Berechnungen mit den reduzierten Steifigkeiten zum Zeitpunkt $t=\infty$ (Bild 91).

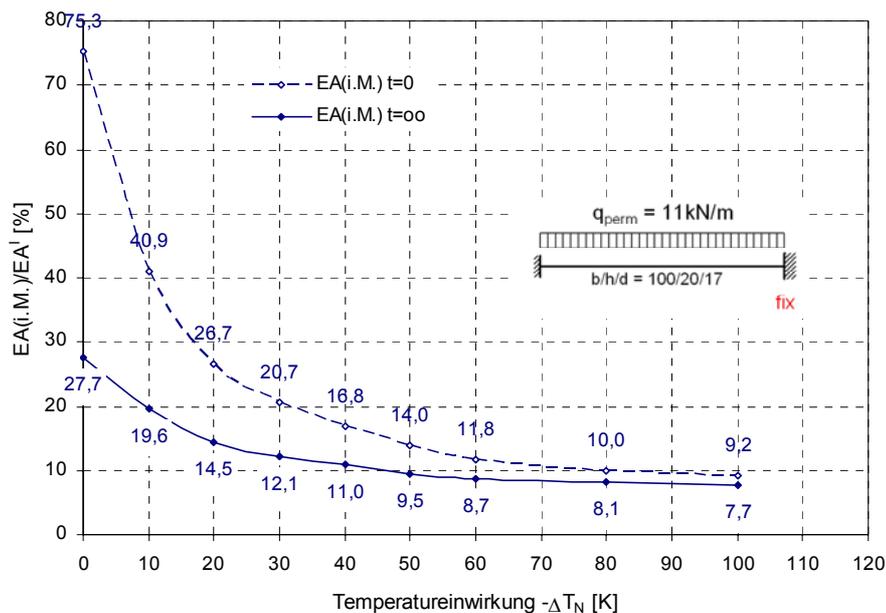
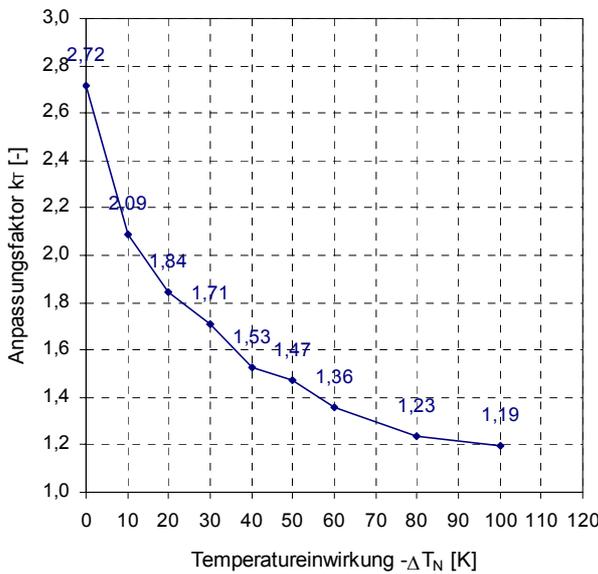


Bild 91: Mittlere Dehnsteifigkeiten des Bezugssystems ($t=0$) und ($t=\infty$)

Das Verhältnis der mittleren Dehnsteifigkeiten der Bauteile zum Zeitpunkt $t=0$ und $t=\infty$ nimmt mit zunehmender Verformungseinwirkung ab, da die Dehnsteifigkeiten des Bauteils immer mehr von den Dehnsteifigkeiten der gerissenen Querschnitte, im Grenzfall vom reinen Stahlquerschnitt, abhängen. Im Gegensatz zum ungerissenen Querschnitt unterscheiden sich beim gerissenen Querschnitt im Zustand II die sich mit dem Rechenmodell ergebenden Dehnsteifigkeiten zu den Zeitpunkten $t=0$ und $t=\infty$ kaum.

Daher werden bei der Steigerung der Verformungseinwirkung – in Abhängigkeit von der Größe der Verformungseinwirkung ΔT_N – die in Bild 92 dargestellten Anpassungsfaktoren verwendet.



ΔT_N	Faktor k_T
[K]	[-]
0	2,72
10	2,09
20	1,84
30	1,71
40	1,53
50	1,47
60	1,36
80	1,23
100	1,19

$$k_T = \frac{EA(i.M.)(t=0)}{EA(i.M.)(t=\infty)} \quad (9.12)$$

Bild 92: Anpassungsfaktor k_T (Bezugssystem) zur Berücksichtigung der Steifigkeiten für eine Kurzzeitbelastung

Normalkräfte, Durchbiegungen und Rissbreiten

Auf dieser Grundlage ergeben sich die in Tabelle 6 dargestellten Normalkräfte, bezogenen Durchbiegungen und Rissbreiten für das horizontal starr gelagerte System. Während eine zusätzliche Temperatureinwirkung sich kaum auf die Durchbiegungen auswirkt, steigt durch die Temperatureinwirkung die Normalkraft weiter an und vergrößert deutlich die Rissbreiten. Zwar vergrößert sich die durch das Schwinden entstandene Zwangzugkraft durch die Temperatureinwirkung deutlich, führt aber infolge der Einflüsse aus Theorie II. Ordnung nicht zu einer Vergrößerung der Durchbiegungen.

Die Rissbreiten vergrößern sich durch die infolge Temperatureinwirkung weiter ansteigende Zwangkraft signifikant.

9.1.6 Ergebnisse der Rechenschritte 1 bis 5

Die Ergebnisse aller Rechenschritte für das horizontal unverschieblich gelagerte Bezugssystem ($\rho_{s,St}=0,8\%$) zeigt Tabelle 6. Man erkennt deutlich die Zuwächse bei den Durchbiegungen und Zwangzugkräften durch die Einflüsse aus Kriechen, Schwinden und Temperatur. Dabei ist zu beachten, dass die Zwangnormalkräfte in der dargestellten Größe nur im Grenzfall des horizontal starr gelagerten Systems entstehen können. Beim horizontal frei verschieblichen System ergeben sich bei den Durchbiegungen ebenfalls große Zuwächse infolge Kriechens und Schwindens. Unter kombinierter Last- und Temperatureinwirkung ist grundsätzlich zu unterscheiden, ob die Temperatureinwirkung in jungem, oder spätem Betonalter wirkt. Maßgebend für den Absolutwert der sich ergebenden Durchbiegungen sowie Zwangkräfte ist der Zeitpunkt $t=\infty$. Während der Zuwachs bei den Durchbiegungen infolge Temperatur zum Zeitpunkt $t=0$ groß ist, ist der Zuwachs zum Zeitpunkt $t=\infty$ gering, da durch das Schwinden (insbesondere die Schwindverkürzung) die Steifigkeit des Systems schon deutlich reduziert ist und eine weitere Steigerung der Zwangzugkraft die Durchbiegungen nicht mehr anwachsen lässt.

$$\Delta w_{T,0,perm} / L = (2,02 - 0,82) \text{‰} = 1,20 \text{‰} \quad (9.13)$$

$$\Delta w_{T,\infty,perm} / L = (5,39 - 5,11) \text{‰} = 0,28 \text{‰} \quad (9.14)$$

Es zeigt sich jedoch auch, dass zusätzliche Temperatureinwirkungen die Stahlspannungen im Riss und damit die Rissbreite deutlich beeinflussen können.

Tabelle 6: Ergebnisse Bezugssystem ($\rho_{s,St}=0,8\%$) unter quasi-ständiger Belastung

nichtlineare Berechnung Schritt 1 bis 5						Stütze			Feld					
						$\varphi=2,5$ $\varepsilon_{cs}(\infty)=-0,5\text{‰}$ $\Delta T_N=-15K$			$a_{s,St}=13,6 \text{ cm}^2/\text{m}$			$a_{s,F}=6,8 \text{ cm}^2/\text{m}$		
									$d_s=16 \text{ mm}$			$d_s=12 \text{ mm}$		
	Last q_{perm} [kN/m]	M (Feld) [kNm]	M(Stütze) [kNm]	w/L [‰]	N [kN]	F_s kN	σ_s^{\parallel} [MN/m ²]	w_k [mm]	F_s kN	σ_s^{\parallel} [MN/m ²]	w_k [mm]			
t=0: nur q_{perm}	11	29,82	-48,24	0,82	-116	275	202	0,17	148	218	0,16			
$q_{perm}+\Delta T_N$	11	23,00	-52,72	2,02	107	417	307	0,30	213	313	0,33			
t=∞: $q_{perm}+C$	11	26,65	-52,23	2,34	-87	317	233	0,21	141	207	0,14			
$q_{perm}+C+S$	11	14,50	-54,20	5,11	225	486	358	0,36	213	313	0,33			
$q_{perm}+C+S+\Delta T_N$	11	9,91	-53,30	5,47	345	540	397	0,41	241	355	0,41			

9.1.7 Steigerung der Verformungseinwirkung ε_L (Last und Zwang)

Die Schwindkrümmung hat einen untergeordneten Einfluss auf die Entwicklung der Zwangnormalkräfte. Letztere entstehen auf Grund der Dehnung in der Stabachse des Querschnitts. Um den Einfluss der Dehnung auf die Normalkräfte und die daraus resultierenden Rissbreiten unter kombinierter Beanspruchung zu zeigen, werden nachfolgend die Lastfälle ($q_{\text{perm}} + \varepsilon_L$) und ($q_{\text{perm}} + \text{Kriechen} + \varepsilon_L$) untersucht. Bei der Untersuchung am Bezugssystem ($\rho_{s,St} = 0,8\%$) wird die Querbeltung q_{perm} konstant gehalten und die Verformungseinwirkung ε_L gesteigert. Die Zwangbeanspruchung kann aus dem Schwinden, aus einer Temperatureinwirkung, oder aus einer Kombination beider Einflüsse zu Stande kommen.

Normalkräfte

Der vollständige Abbau der Druckkraft aus der äußeren Belastung q_{perm} findet schon bei geringen Dehnungen statt ($\varepsilon_L \approx -0,1\text{‰}$). Die bei Steigerung der Verformungseinwirkung entstehenden Zwangnormalkräfte zum Zeitpunkt $t=0$ sind etwas größer als die Zwangnormalkräfte zum Zeitpunkt $t=\infty$. Die Rissnormalkraft wird erst bei großen Zwangbeanspruchungen überschritten.

$$t = 0 \quad \varepsilon_L(\text{grenz}) = -1,3\text{‰} \Rightarrow N_{\text{Zwang}} > N_{cr} = 600 \text{ kN}$$

$$t = \infty \quad \varepsilon_L(\text{grenz}) = -0,9\text{‰} \Rightarrow N_{\text{Zwang}} > N_{cr} = 420 \text{ kN}$$

Dann befindet sich das Bauteil über seine ganze Länge im Zustand II und im Bereich der Momentennullpunkte liegt eine Trennrissbildung vor.

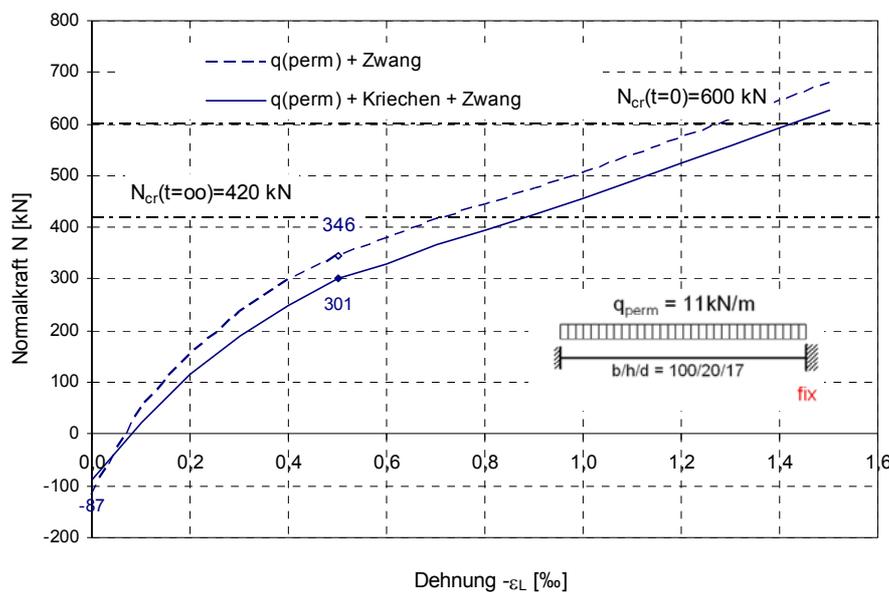


Bild 93: Normalkraft in Abhängigkeit von der zentrischen Dehnung
Bezugssystem $\rho_{s,St} = 0,8\%$

Rissbreiten

Die Rissbreiten nehmen mit zunehmender Zwangskraft infolge der behinderten zentrischen Dehnung deutlich zu (Bild 94). Die Spannung in der Bewehrung wird zunehmend von der Zwangzugkraft bestimmt. Der Anteil der Spannung in der Bewehrung aus den Biegemomenten nimmt dadurch ab. Der Grenzwert $w_k=0,4$ mm wird bei einer zusätzlichen Dehnung von ca. $\varepsilon_L=-0,6\text{‰}$ überschritten. Die Rissbreiten vergrößern sich durch die Zwangnormalkraft insbesondere im Feldbereich, so dass vor allem dort die Bewehrung zu erhöhen ist. Bei überwiegender Zwangbeanspruchung ist ein symmetrisch bewehrter Querschnitt zunehmend sinnvoller als eine am Biegemomentenverlauf infolge Last orientierte Bewehrungsabstufung.

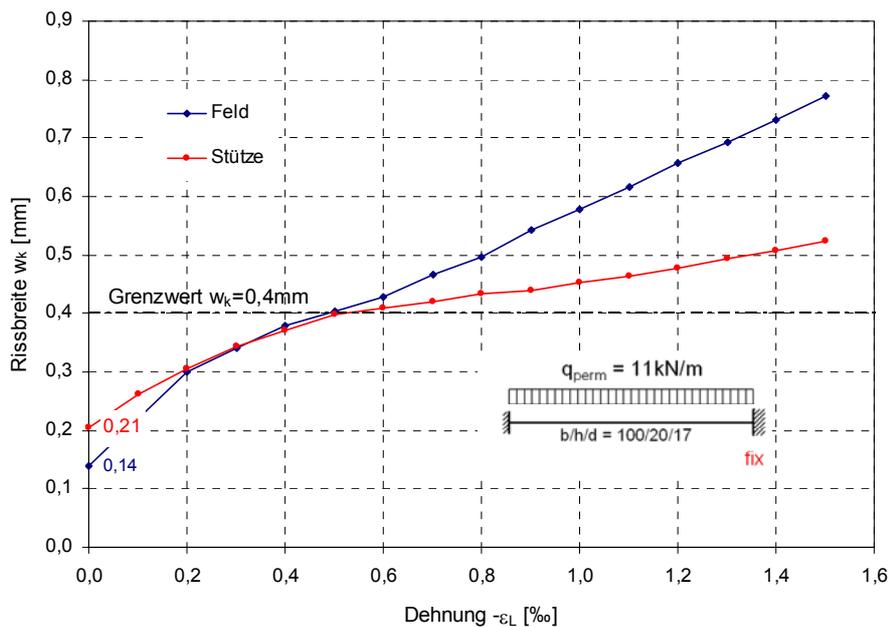


Bild 94: Rissbreiten unter q_{perm} + Kriechen + Zwang ($\varphi=2,5$)

Durchbiegungen

Bezüglich der Durchbiegungen wirkt sich die Verformungseinwirkung ε_L nur auf Systeme aus, die in ihrer horizontalen Verformung behindert sind (System_fix). Mit zunehmender Dehnung geht das Bauteil immer mehr in den gerissenen Zustand II über, womit die Biegesteifigkeit stark abnimmt. Befindet sich das Bauteil nahezu über seine ganze Länge im gerissenen Zustand II, nimmt die Steifigkeit nicht mehr stark ab, jedoch wachsen die Zwangzugkräfte weiter an. Große Zugkräfte wirken sich über die Effekte nach Theorie II. Ordnung zunehmend günstig auf die Durchbiegungen aus.

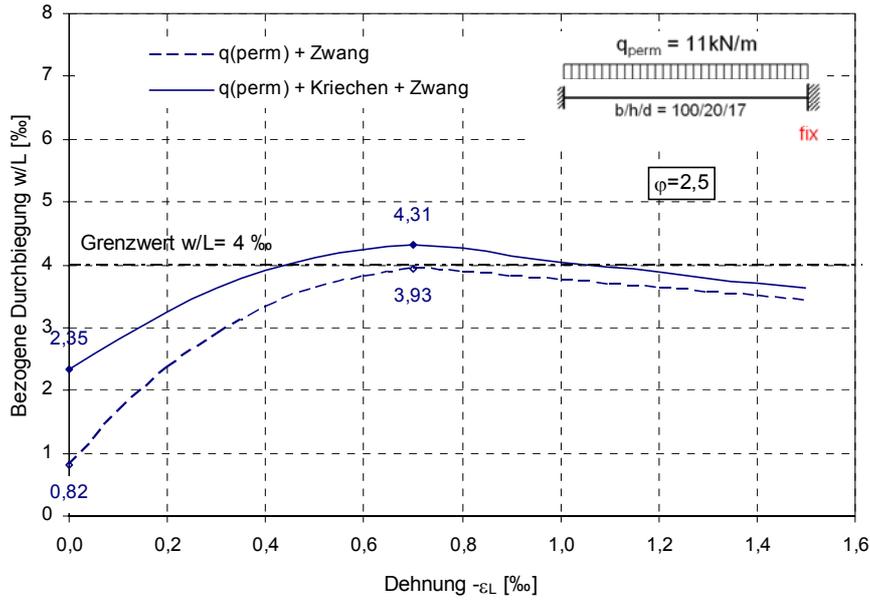


Bild 95: Bezogene Durchbiegungen bei Steigerung der Verformungseinwirkung

9.1.8 Variation der Zugfestigkeit

Der für die Untersuchungen angesetztte Bezugswert $f_{ctm} = 3,0 \text{ MN/m}^2$ wird nach oben und unten mit ca. 30 % variiert.

Unterer Grenzwert: $f_{ctm} = 0,7 \cdot 3,0 \text{ MN/m}^2 = 2,1 \text{ MN/m}^2$ (9.15)

Oberer Grenzwert: $f_{ctm} = 1,3 \cdot 3,0 \text{ MN/m}^2 = 3,9 \text{ MN/m}^2$ (9.16)

Für die Langzeituntersuchungen ergeben sich somit die in Bild 96 dargestellten Arbeitslinien des Betons im Zugbereich ($\phi = 2,5$), wobei die Zugfestigkeit des Betons mit 70% der Kurzzeitzugfestigkeit angesetzt wird.

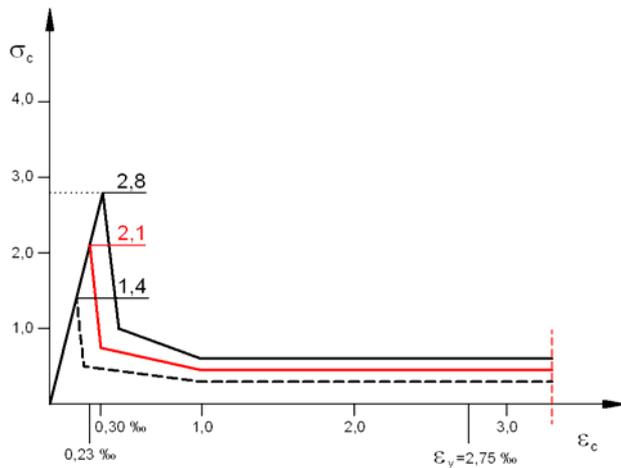


Bild 96: Spannungs-Dehnungslinie des Betons im Zugbereich, $t = \infty$

Last-Durchbiegungsdiagramm unter reiner Lastbeanspruchung

Bild 97 zeigt den Einfluss der Betonzugfestigkeit auf die Durchbiegungen für den theoretischen Rechenschritt 3 ($t=\infty$), q kriecherzeugend). Die Kurve $f_{ctm}=0 \text{ MN/m}^2$ berücksichtigt keinerlei Mitwirkung des Betons auf Zug, so dass sich das Bauteil in allen Laststufen im gerissenen Zustand II befindet. Man erkennt im Anfangsbereich der Kurven den Übergang in den gerissenen Zustand, bzw. die Rissbildung über der Stütze. Die Belastung, die zur Erstrissbildung führt, ist umso höher, je größer die Zugfestigkeit des Betons ist. Im weiteren Verlauf zeigt sich die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen. Diese ist von der mittleren Verbundspannung abhängig, welche ebenfalls mit der Zugfestigkeit wächst. Je größer die Zugfestigkeit ist, desto steifer wird das System. Beim Bezugssystem variiert auf Grund der Zugfestigkeit die Durchbiegung unter q_{perm} um ca. 11 bis 16%.

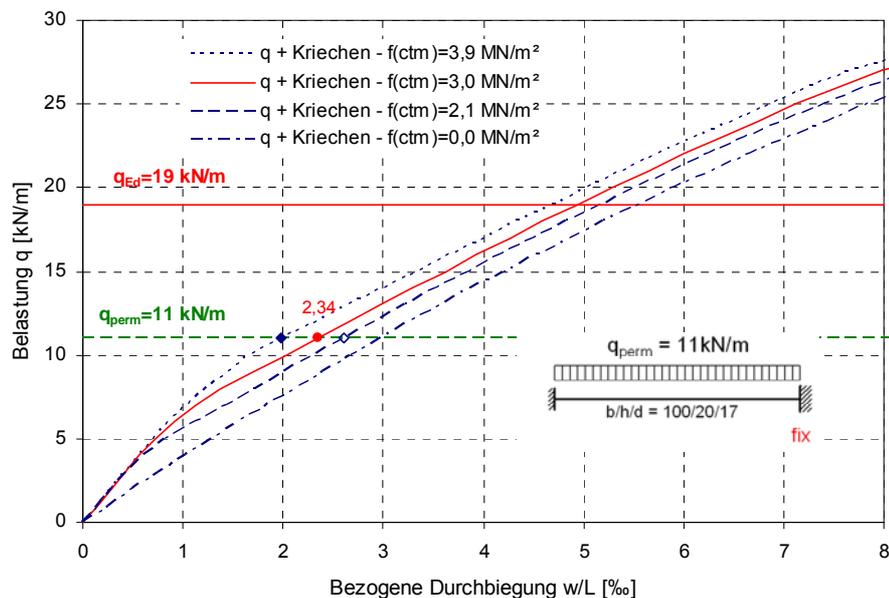


Bild 97: Last-Durchbiegungsdiagramm bei Variation der Zugfestigkeit am Bezugssystem ($\rho_{s,St}=0,8\%$)

Normalkräfte unter q_{perm}

Die weitere Auswertung erfolgt auf dem Belastungsniveau q_{perm} . Bild 98 zeigt die Normalkräfte mit und ohne Verformungseinwirkung bei Variation der Zugfestigkeit für alle 5 Berechnungsschritte. Die unter reiner Lastbeanspruchung entstehenden Druckkräfte sind bei niedriger Zugfestigkeit größer. Dies liegt an den größeren Dehnungen in der Stabachse auf Grund der geringeren Steifigkeit, welche durch die Druckkraft in Verträglichkeit mit der horizontal unverschieblichen Lagerung gebracht werden müssen. Unter kombinierter Beanspruchung aus Last und Verformungseinwirkung steigen die Zwangkräfte auf Grund der größeren Dehnsteifigkeit mit der Zugfestigkeit an.

Der Einfluss der Zugfestigkeit auf die entstehende Zwangnormalkraft ist groß. Dies gilt insbesondere im Bereich kleiner bis mäßig großer Verformungseinwirkung, wo sich die Zwangkräfte aus Verformungseinwirkung den Druckkräften aus Lastbeanspruchung überlagern. In diesem Bereich ist der Absolutwert der Zwangkraft gemessen an der Rissnormalkraft jedoch klein.

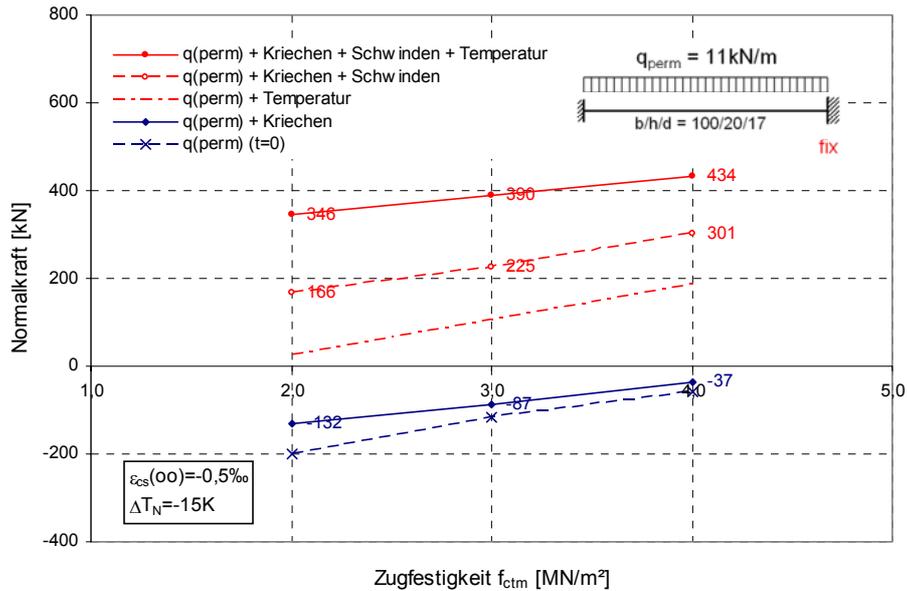


Bild 98: Normalkraft bei Variation der Zugfestigkeit

Rissbreiten unter q_{perm}

Mit zunehmender Zugfestigkeit nehmen die Rissbreiten deutlich zu, was an den höheren Zugkräften auf Grund der höheren Steifigkeiten im Zustand I und im Zustand II liegt. Der Einfluss auf die Rissbreiten im Feld ist dabei etwas größer, da sich eine Änderung der Zugkraft im Feld auf Grund des kleineren Bewehrungsquerschnitts stärker in der Rissbreitenbeschränkung auswirkt. Im Feld liegt in der Regel das Einzelrissbild vor, während im Einspannbereich in der Regel das abgeschlossene Rissbild auftritt.

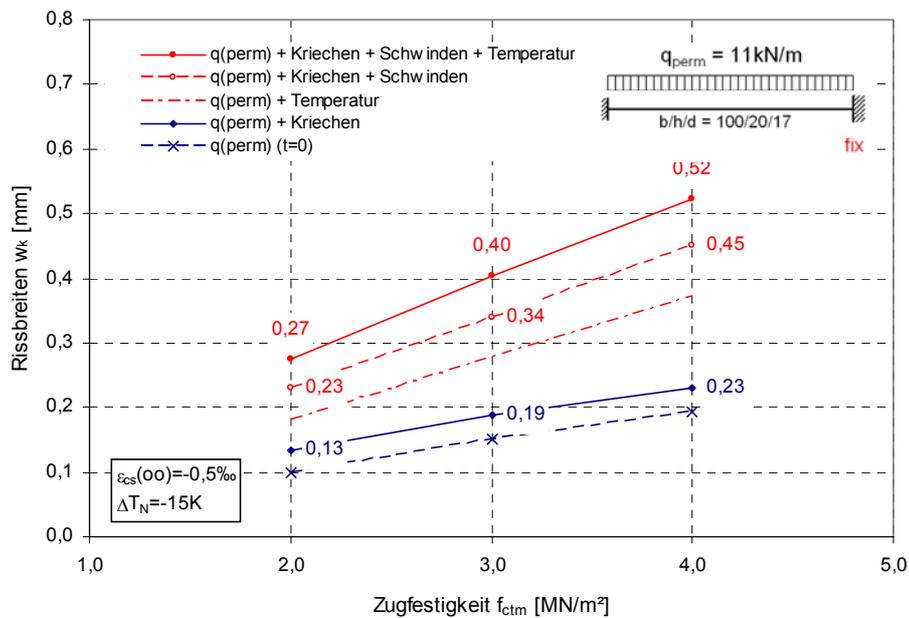


Bild 99: Rissbreiten (Einspannbereich) bei Variation der Zugfestigkeit

Durchbiegungen unter q_{perm}

Die Durchbiegungen des Trägers unter q_{perm} werden bei zunehmender Zugfestigkeit geringer. Der Einfluss der Zugfestigkeit auf die Durchbiegungen ist bei reiner Lastbeanspruchung größer als bei kombinierter Beanspruchung. Unter reiner Lastbeanspruchung sind die Durchbiegungen stark von der Ausdehnung der gerissenen und ungerissenen Bereiche abhängig, wobei letztere mit steigender Zugfestigkeit zunehmen. Dieser Einfluss kommt bei kombinierter Beanspruchung nicht mehr so stark zum Tragen, da sich das Bauteil infolge der Zwangskraft nahezu auf ganzer Länge im gerissenen Zustand II befindet.

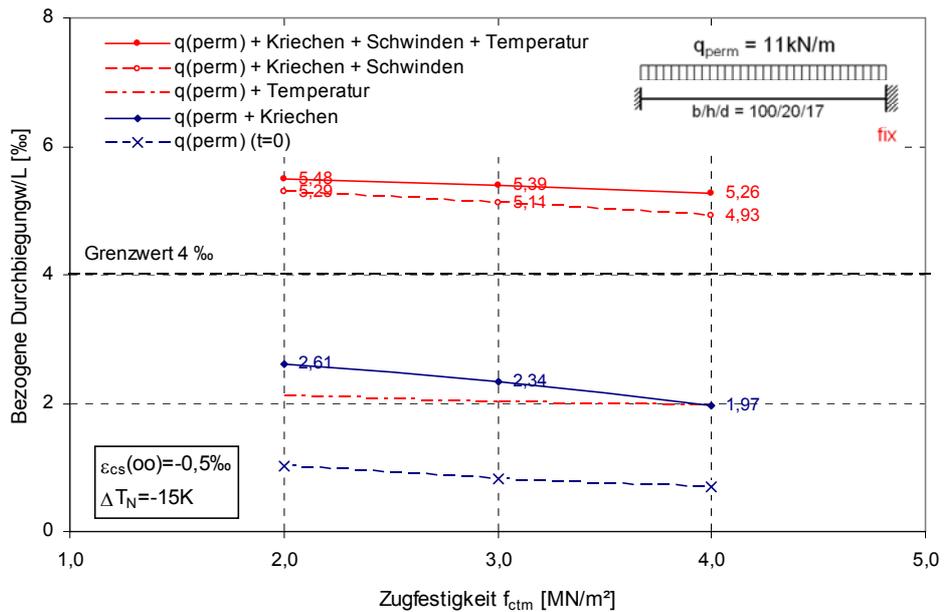
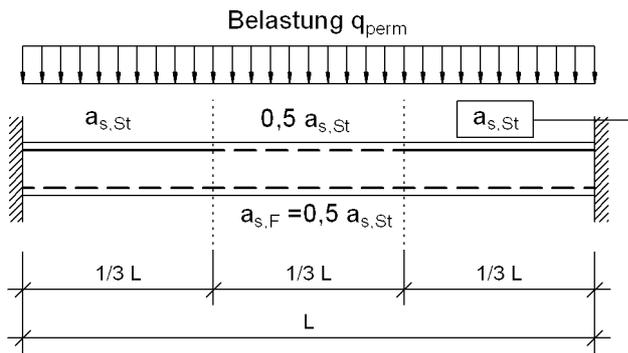


Bild 100: Bezogene Durchbiegungen bei Variation der Zugfestigkeit

9.2 Parameterstudie Bezugsbewehrungsgrad

9.2.1 Definition des Bezugsbewehrungsgrades

Der Bezugsbewehrungsgrad wird definiert als der statisch erforderliche Bewehrungsgrad eines Bauteils an der Stelle des größten auftretenden Biegemomentes nach linear-elastischer Berechnung (Bild 101). Damit ist es möglich, anhand eines einzigen Parameters auf den Belastungsgrad des Systems zu schließen. Mit dem in Abschnitt 5.1 eingeführten Belastungsfaktor $f_{perm}=1,7$ wird einheitlich auf das Belastungsniveau im Gebrauchszustand (quasi-ständig) geschlossen.



Bezugsbewehrungsgrad:

$$\rho_{s,St} = \frac{a_{s,St}}{b \cdot d}$$

$$\rho_{s,St} \Rightarrow M_{Ed,St} \Rightarrow q_{Ed} \Rightarrow q_{perm} = \frac{q_{Ed}}{f_{perm}}$$

Bild 101: Definition des Bezugsbewehrungsgrades

Mit der Steigerung des Bezugsbewehrungsgrades nehmen die Traglast und die Steifigkeit des Systems zu und damit auch das Belastungsniveau (Belastung q_{perm}) für die Berechnung der Durchbiegungen und Rissbreiten im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit (Bild 102).

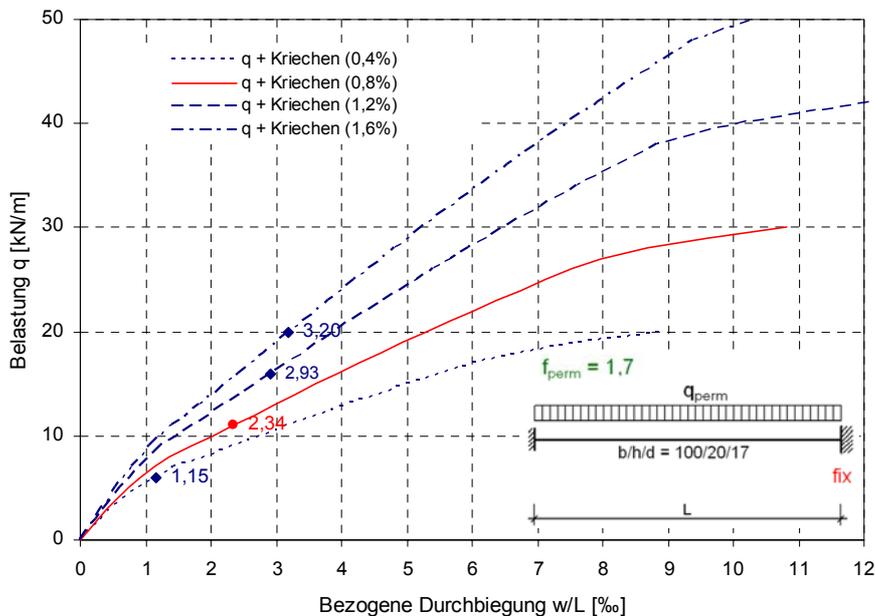


Bild 102: Last-Durchbiegungsdiagramm bei Variation des Bewehrungsgrades (nur q)

Der Bezugsbewehrungsgrad ist nicht zu verwechseln mit der letztendlich angeordneten Bewehrung. Diese kann z. B. durch die Anforderungen an die Rissbreite höher sein. Des Weiteren ändert sich der Belastungsgrad des Systems nicht durch eine derartig bedingt Bewehrungserhöhung. Parallel durchgeführte Untersuchungen zu Systemen mit Bewehrungserhöhung bei gleich bleibender Belastung zeigen, dass die Durchbiegungen zwar geringer werden, die Bewehrungserhöhung jedoch nicht ein geeignetes Mittel zur effektiven Reduzierung der Durchbiegungen ist.

Beim beidseitig starr eingespannten System ist als Bezugsbewehrungsgrad der statisch erforderliche Bewehrungsgrad im Einspannbereich definiert und hat nach dieser Betrachtungsweise Einfluss auf:

- L_{cr} / L Ausdehnung der gerissenen Bereiche
- $\rho_s(i.M.) = \frac{a_{s0}(i.M.) + a_{st}(i.M.)}{b \cdot d}$ Mittlerer Bewehrungsgrad des Bauteils

Systeme mit gleichem Bezugsbewehrungsgrad weisen somit die gleiche Ausdehnung der gerissenen Bereiche unter q_{perm} und den gleichen mittleren Bewehrungsgrad auf. Mit den dimensionslosen Parametern (L_{cr}/L und $\rho_s(i. M.)$) kann direkt auf die Durchbiegungen und Zwangnormalkräfte geschlossen werden.

9.2.2 Gerissene Bereiche infolge äußerer Belastung q

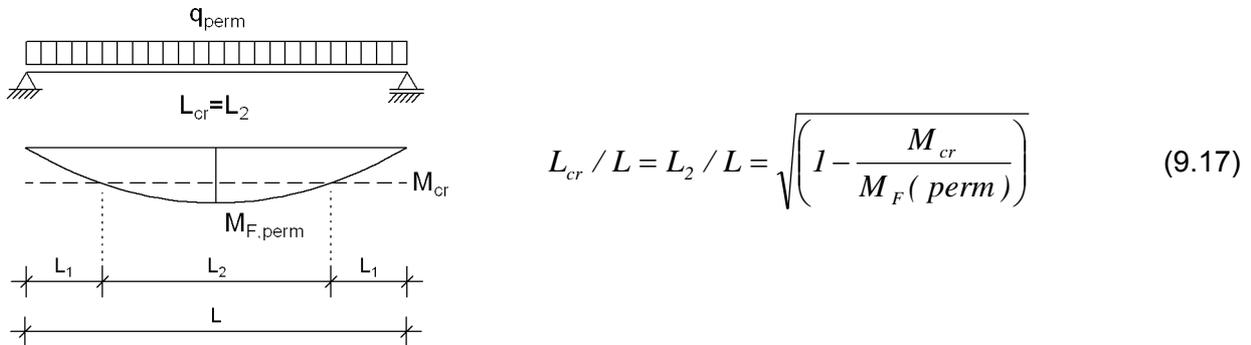
Die Ausdehnung der gerissenen Bereiche steht in engem Zusammenhang mit den Dehn- und Biegesteifigkeiten des Bauteils, welche wiederum Einfluss auf die entstehenden Zwangkräfte sowie Durchbiegungen haben. Die Ausdehnung der gerissenen Bereiche ist von folgenden Faktoren abhängig:

- System
- Belastungsgrad (Bezugsbewehrungsgrad und Belastungsfaktor f_{perm})
- Zugfestigkeit

Infolge der äußeren Belastung q gehen nach Erreichen des Rissmomentes Bauteilbereiche in den gerissenen Zustand II über. Dies geschieht unter der Belastung q_{cr} , bei der sich die ersten Risse im Bauteil bilden und welche von der Zugfestigkeit des Betons abhängig ist. Beim beidseitig gelenkig gelagerten Einfeldträger erfolgen die ersten Risse im Feld, beim einseitig und beidseitig eingespannten Träger im Einspannbereich. Mit zunehmender Last, vergrößern sich die gerissenen Bereiche, wobei man einen sprunghaften Anstieg direkt nach Überschreiten des Rissmomentes feststellen kann. Unter dem definierten Lastniveau q_{perm} (siehe Abschnitt 5.1) können die gerissenen Bereiche unter reiner Lastbeanspruchung analysiert werden. Für die Analyse der Ausdehnung der gerissenen Bereiche werden horizontal frei verschiebliche Systeme untersucht.

Beidseitig gelenkig gelagerter Einfeldträger

Beim beidseitig gelenkig gelagerten Träger kann der gerissene Bereich unter quasi-ständiger Belastung nach linear-elastischer Berechnung analytisch hergeleitet werden.



Die in Bild 103 dargestellten Bereiche gemäß linear-elastischer Berechnung (unter der Annahme von Bruttoquerschnittswerten und einer Zugfestigkeit zum Zeitpunkt t=0) sind nahezu identisch mit den Werten einer nichtlinearen Berechnung. Man erkennt insbesondere in den Bereichen geringer statisch erforderlicher Bewehrungsgrade $\rho_{s,F} < 0,6\%$ den starken Einfluss der Betonzugfestigkeit. Bei Bewehrungsgraden von $\rho_{s,F} = 0,1\%$ bis $\rho_{s,F} = 0,3\%$ (je nach Zugfestigkeit), verbleibt der Träger im ungerissenen Zustand I und eine Abnahme der Zugfestigkeit des Betons zum Zeitpunkt $t = \infty$ kann zum Übergang in den gerissenen Zustand II führen.

Bei einem für Decken üblichen Bewehrungsgrad von $\rho_{s,F} = 0,5\%$ variiert die Ausdehnung der gerissenen Bereiche zwischen 50 und 80%.

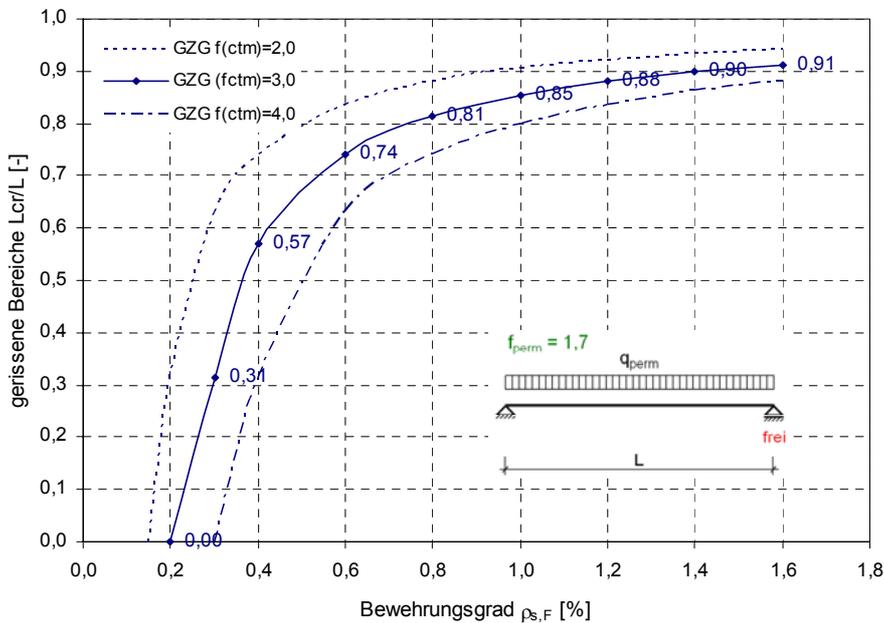
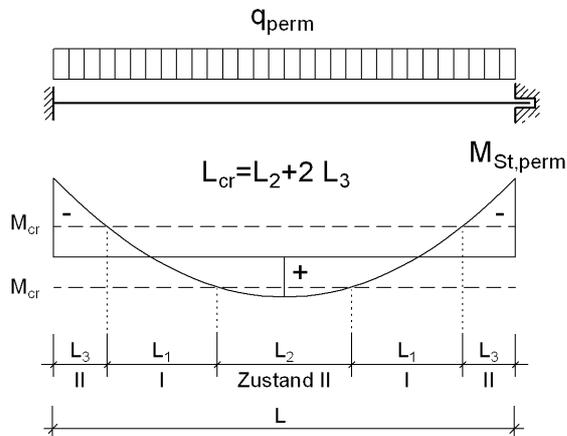


Bild 103: Gerissener Feldbereich beim Einfeldträger unter q_{perm} bei Variation der Zugfestigkeit (t=0)

Beidseitig starr eingespanntes System

Beim beidseitig eingespannten Träger ist der Anteil der Bereiche, die im Zustand I verbleiben, größer (Bild 104). Auch hier kann man die Ausdehnung der gerissenen Bereiche analytisch bestimmen.



$$L_{cr} / L = 2 \cdot L_3 / L + L_2 / L \tag{9.18}$$

$$L_3 / L = 0,5 - 0,5 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{8}{12} \cdot \left(1 - \frac{M_{cr}}{M_{St,perm}}\right)\right)} \tag{9.19}$$

$$L_2 / L = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{M_{cr} + M_{St,perm}}{M_{St,perm}}\right)\right)} \tag{9.20}$$

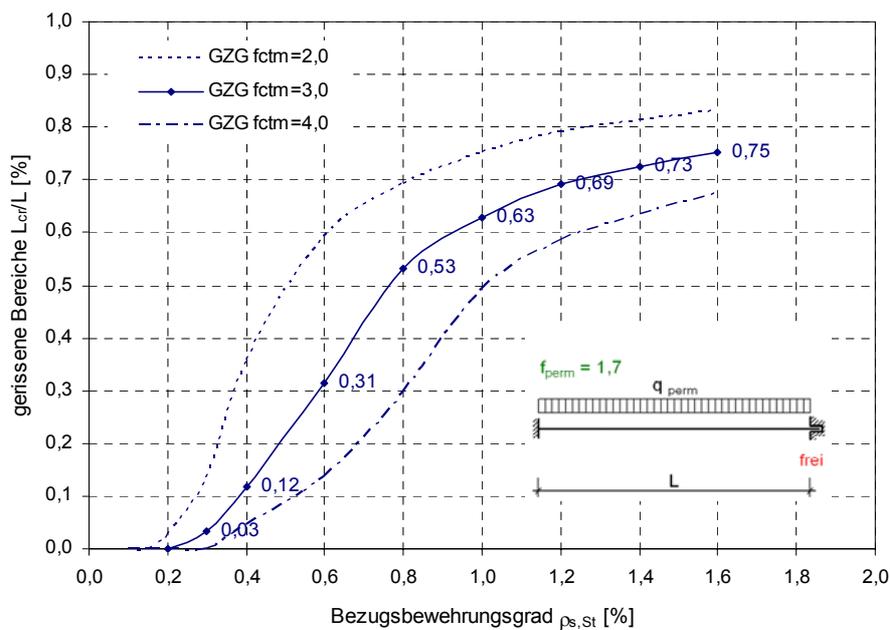


Bild 104: Gerissene Bereiche beim beidseitig starr eingespannten Träger

Es zeigt sich ebenfalls, dass die Ausdehnung der gerissenen Bereiche stark von der Zugfestigkeit des Betons abhängt. Der Einfluss der Zugfestigkeit beim beidseitig starr eingespannten System C ist größer. Zudem weisen die Kurven im Gegensatz zum statisch bestimmten Einfeldträger (System A) im Anfangsbereich einen S-förmigen Verlauf auf. Dies liegt daran, dass zunächst nur im Stützbereich das Rissmoment überschritten ist. Erst bei Systemen mit höherem statisch erforderlichen Bewehrungsgrad sind Stütz- und Feldbereiche gerissen, so dass L_{cr}/L deutlich ansteigt. Auch die Maximalwerte für L_{cr}/L sind beim beidseitig eingespannten System kleiner als beim statisch bestimmten Einfeldträger.

9.2.3 Mittlere Schwinddehnung

Die Verformungseinwirkungen infolge Schwindens werden für das Bezugssystem – unabhängig vom Bewehrungsgrad – als Schwindkrümmung und als Schwinddehnung mit folgenden Eingangswerten berücksichtigt.

Für den Querschnitt $b/h/d=100/20/17$ ($d=0,85 h$):

Bereiche im Zustand I: $\epsilon_{cs}^I = \epsilon_{cs}(\infty) = -0,5\text{‰}$ (9.21)

Bereiche im Zustand II: $\epsilon_{cs}^{II} = \frac{1}{0,825 \cdot d} \cdot (d - h/2) \cdot \epsilon_{cs}(\infty) = 0,5 \cdot \epsilon_{cs}(\infty) = -0,25\text{‰}$ (9.22)

$$\kappa_s^{II} = 1,21 \cdot \frac{1}{d} \cdot \epsilon_{cs}(\infty) = \pm 3,6 \cdot \frac{1}{km}$$
 (9.23)

Die Schwindkrümmung wird nur in den Bereichen angesetzt, in denen sich das Bauteil im Zustand II befindet, im Bereich L_3 als negative Krümmung und im Bereich L_2 als positive Krümmung. $\epsilon_{cs}(\infty) = -0,5\text{‰}$

Die mittlere Schwindverkürzung ist von der Ausdehnung der gerissenen Bereiche L_{cr} abhängig, welche mit dem statisch erforderlichen Bewehrungsgrad zunimmt. Die Schwindverkürzung wird vereinfachend konstant über die ganze Bauteillänge mit nachfolgendem Mittelwert eingegeben. Sie nimmt mit zunehmendem statisch erforderlichen Bewehrungsgrad ab (Bild 105).

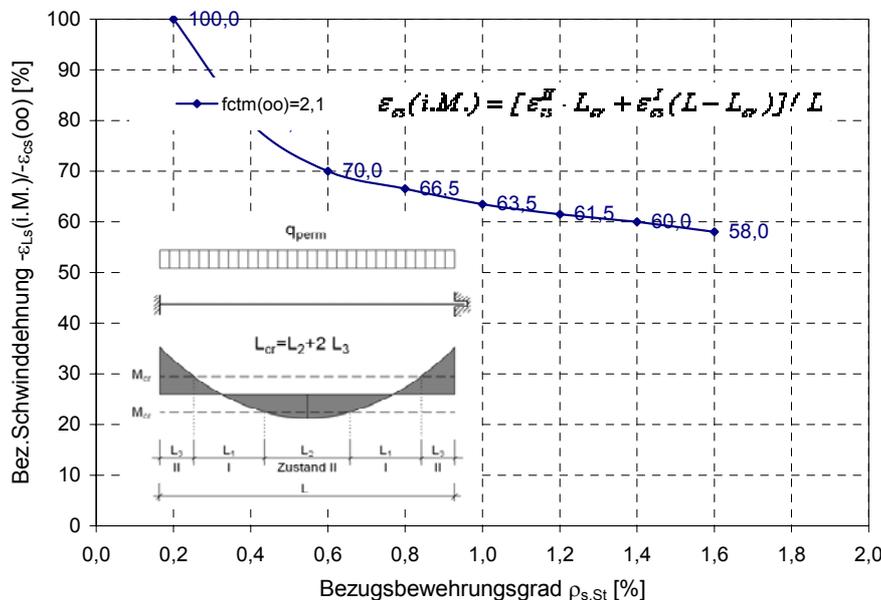


Bild 105: Eingabewerte für die Schwinddehnung in Abhängigkeit vom Bezugsbewehrungsgrad $\rho_{s,St}$

9.2.4 Ergebnisse der Parameterstudie Bezugsbewehrungsgrad

Für das relativ schlanke Bezugssystem mit ($\rho_{s,St}=0,8\%$) wird im Folgenden die Belastung und damit der Bezugsbewehrungsgrad variiert. Dabei wird als Grenzfall das System_fix mit horizontal starrer Lagerung betrachtet. Der Bezugsbewehrungsgrad wird in den Grenzen von 0,4% bis 1,6% variiert. Die Auswertung des Einflusses aus der Variation des Bezugsbewehrungsgrades mit zugehöriger Belastung q erfolgt nicht mehr für alle Laststufen, sondern nur auf dem Belastungsniveau q_{perm} .

Die Auswertung der Normalkräfte und der daraus resultierenden Rissbreiten erfolgt für die kombinierte Beanspruchung aus Last und Zwang, wobei die Zwangbeanspruchung ($-\varepsilon_L$) entweder aus dem Schwinden oder aber aus einer Temperatureinwirkung kommen kann.

Normalkräfte unter q_{perm}

Mit steigendem Bezugsbewehrungsgrad nehmen die Dehnsteifigkeiten im Zustand II und damit die Zwangkräfte zu. Dies betrifft sowohl die Druckkräfte bei reiner Lastbeanspruchung wegen der Zunahme der Ausdehnung der gerissenen Bereiche als auch die Zugkräfte unter kombinierter Beanspruchung auf Grund der höheren Dehnsteifigkeit des Querschnitts (Bild 106). Der Einfluss des Bezugsbewehrungsgrades auf die entstehenden Zugkräfte infolge Zwangs bei einer zusätzlichen Zwangbeanspruchung $-\varepsilon_L$ ist groß. Der in Bild 106 dargestellte Lastfall mit kombinierter Beanspruchung berücksichtigt eine zusätzliche Verformungseinwirkung von $\varepsilon_L=-0,5\text{‰}$.

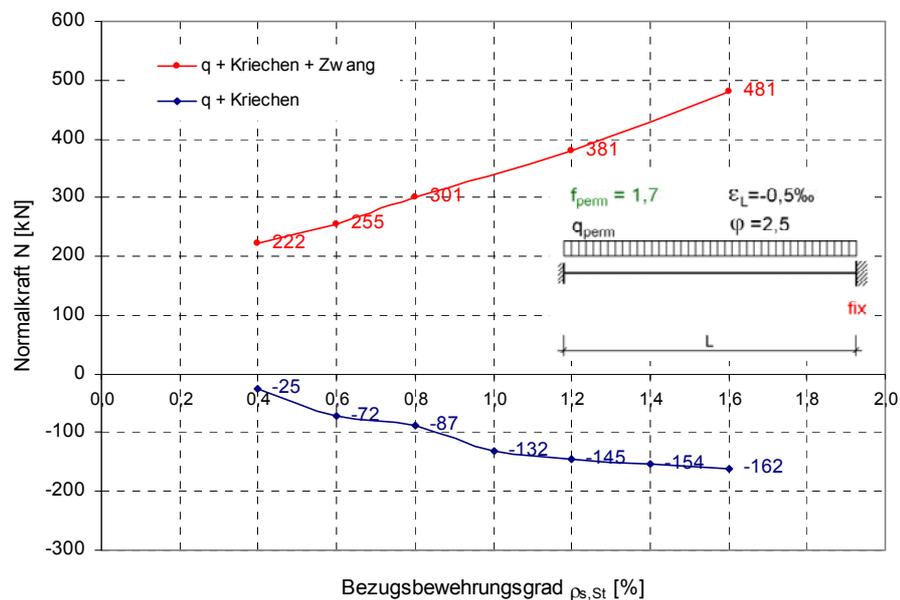


Bild 106: Normalkraft unter q_{perm} in Abhängigkeit vom Bezugsbewehrungsgrad $\rho_{s,St}$

Durchbiegungen unter q_{perm}

Die Durchbiegungen unter q_{perm} bei zunehmenden Bewehrungsgraden für das System_fix zeigt Bild 107. Die Vergrößerung der bezogenen Durchbiegungen infolge des Kriechens und des Schwindens ist deutlich erkennbar. Abgesehen vom Sonderfall $\rho_{s,St} = 0,2\%$ ergeben sich

Anfangsdurchbiegung: $w_{0,perm} = (0,38 - 1,58) \text{‰} \cdot L$ (9.24)

Kriechen: $w_{\infty,perm} = (2 - 3) \cdot w_{0,perm}$ (9.25)

Schwinden: $w_{\infty}(q_{perm} + c + s) = (3,5 - 12) \cdot w_{0,perm}$ (9.26)

Der hier ebenfalls dargestellte Bewehrungsgrad von $\rho_{s,St} = 0,2\%$ ist ein Sonderfall, bei dem das Bauteil über die ganze Länge ungerissen bleibt. In diesem Fall sind die Durchbiegungen sehr klein. Unter einer zusätzlichen Zwangbeanspruchung infolge Schwindens bewirkt die entstehende Zugkraft ein Aufreißen des Querschnittes. Daher nehmen die Verformungen um den Faktor von ca. 4 zu, d. h. das System ist besonders empfindlich. Absolut gesehen sind die Durchbiegungen bei ungerissenen Querschnitten jedoch unkritisch.

Bei üblichen Bewehrungsgraden über $\rho_{s,St} = 0,4\%$ ist bei Ansatz der Zugfestigkeit $f_{ctm}(\infty) = 2,1 \text{ MN/m}^2$ unter der quasi-ständigen Belastung das Rissmoment $M_{cr} = 14 \text{ kNm}$ überschritten, so dass sowohl Teile des Einspannbereichs, als auch des Feldbereichs gerissen sind. Bei reiner Lastbeanspruchung sind die Durchbiegungen klein und erreichen nicht den Grenzwert von $w/L = 4 \text{ ‰}$. Der Einfluss des Bewehrungsgrades ist deutlich zu erkennen. Bei gleichzeitig vorhandener Verformungseinwirkung aus Schwinden geht der Einfluss des Bewehrungsgrades beim System_fix stark zurück.

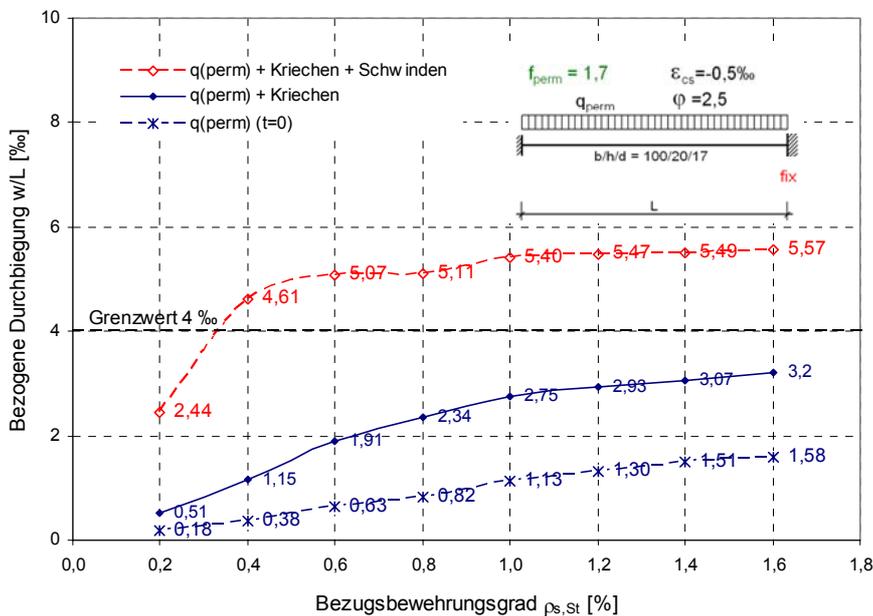


Bild 107: Bezogene Durchbiegungen w/L in Abhängigkeit vom Bezugsbewehrungsgrad $\rho_{s,St}$

Rissbreiten unter q_{perm}

Trotz Anstiegs der Normalkraft sowie der Biegemomente infolge Last q_{perm} bei hoch bewehrten Bauteilen (Bild 106) nimmt die Rissbreite mit zunehmendem Bezugsbewehrungsgrad ab. Die durch Verformungseinwirkung hervorgerufene Zwangzugkraft vergrößert deutlich die Spannung in der Bewehrung und demzufolge auch die Rissbreiten (ca. 2 bis 3-fach). Bild 108 und Bild 109 zeigen die berechneten Rissbreiten im Feld- und im Stützbereich. Bei einer Annahme eines Durchmessers von $d_s=12$ mm im Feld und $d_s=16$ mm über der Stütze ergeben sich im Feld- und Stützbereich in etwa die gleichen Rissbreiten.

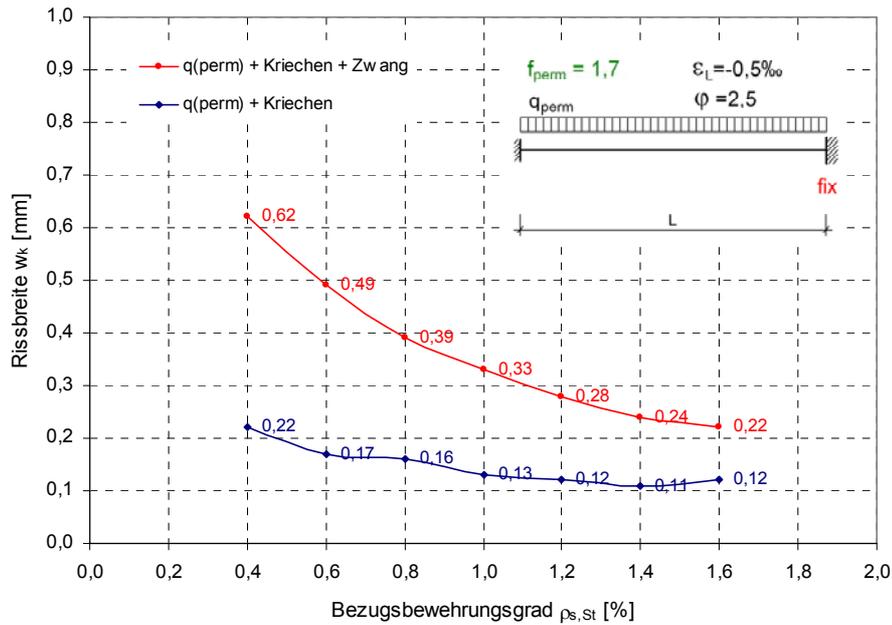


Bild 108 Rissbreiten (Feld) unter q_{perm} in Abhängigkeit vom Bezugsbewehrungsgrad $\rho_{s,St}$

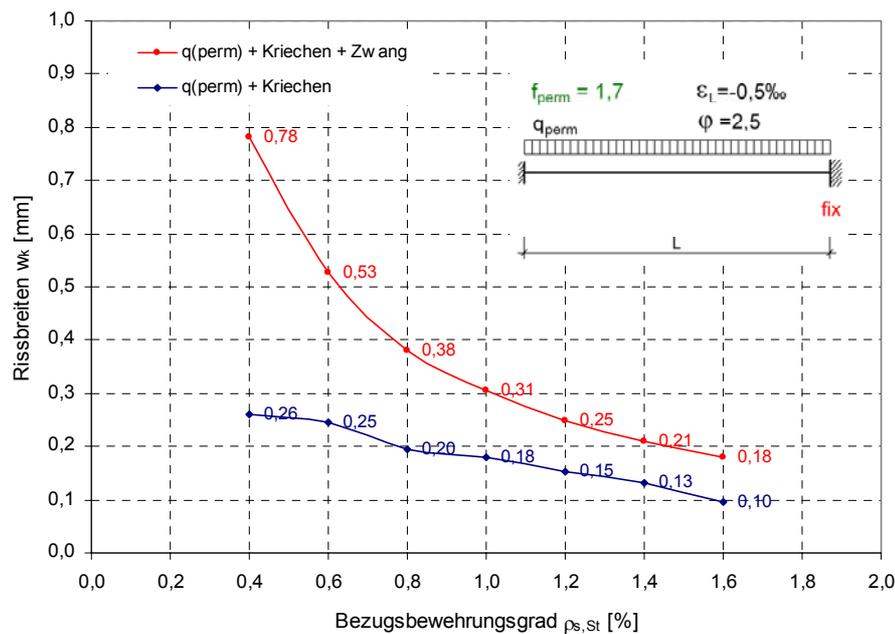


Bild 109: Rissbreiten (Stütze) unter q_{perm} in Abhängigkeit vom Bezugsbewehrungsgrad $\rho_{s,St}$

Normalkräfte bei Steigerung der Verformungseinwirkung ε_L

Wie in Abschnitt 9.1.7 gezeigt, bestimmt neben dem Bewehrungsgrad die Größe der Verformungseinwirkung die Größe der entstehenden Normalkraft. Möchte man die Abhängigkeit der Zwangnormalkraft von beiden Parametern aufzeigen, so ergeben sich Kurvenscharen. Diese Kurvenscharen können entweder in Abhängigkeit vom Bezugsbewehrungsgrad $\rho_{s,St}$ (Bild 110) oder in Abhängigkeit von der Verformungseinwirkung ε_L (Bild 111) aufgetragen werden.

Die zuvor berechneten Zwangkräfte bei einer kombinierten Beanspruchung (q+Kriechen+Zwang) (Bild 106) finden sich in der in Bild 110 dargestellten Kurve für $\varepsilon_L = -0,5\text{‰}$ wieder.

Bild 110 zeigt ebenfalls die Kurve für $\varepsilon_L = 0\text{‰}$ unter reiner Lastbeanspruchung. Die dabei entstehenden Druckkräfte sind im Vergleich zur den Zugkräften infolge Zwang klein. Bei einem Bewehrungsgrad kleiner als $\rho_{s,St} = 0,2\%$ wurde die Bewehrung symmetrisch angeordnet. Da das Bauteil über die ganze Länge im Zustand I verbleibt, ergeben sich unter reiner Lastbeanspruchung keine Druckkräfte.

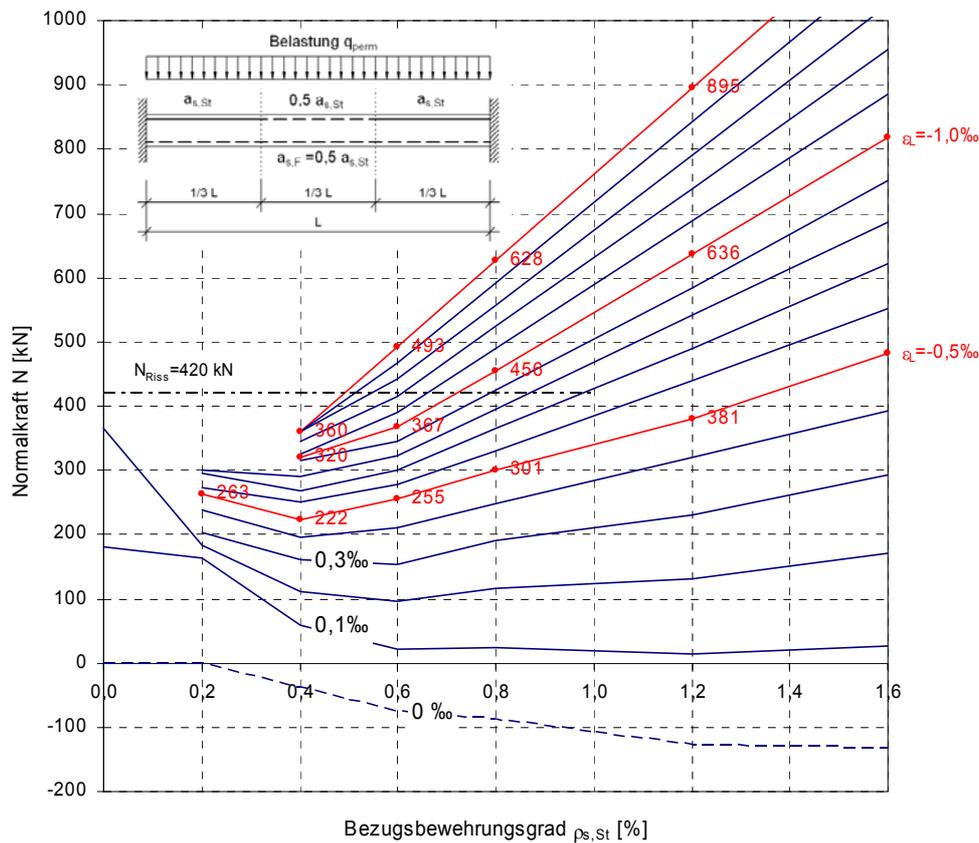


Bild 110: Normalkraft in Abhängigkeit vom Bezugsbewehrungsgrad $\rho_{s,St}$

Kurvenscharen für den Bezugsbewehrungsgrad $\rho_{s,St}$

Die Kurvenscharen für den Bezugsbewehrungsgrad $\rho_{s,St}$ (Bild 111) weisen einen steiler verlaufenden Anfangsast und einen dann flacher verlaufenden zweiten Ast auf, bei dem sich das Bauteil überwiegend im gerissenen Zustand II befindet.

Die Steigung der Kurve für $\rho_{s,St}=0\%$ zeigt die Dehnsteifigkeit des unbewehrten Querschnitts. Die Rissnormalkraft von $N_{cr}(\text{brutto})=420 \text{ kN}$ wird bei einer Verformungseinwirkung von $\varepsilon_L=-0,23 \text{ ‰}$ erreicht. Bei einem statisch erforderlichen Bewehrungsgrad von $\rho_{s,St}=0,2\%$ versagt der Querschnitt bei einer zusätzlich aufgebrauchten Dehnung von ca. $-0,7\text{‰}$. Bei Bauteilen mit $\rho_{s,St}=0,4\%$ wird selbst bei großen Verformungseinwirkungen die Rissnormalkraft nicht erreicht.

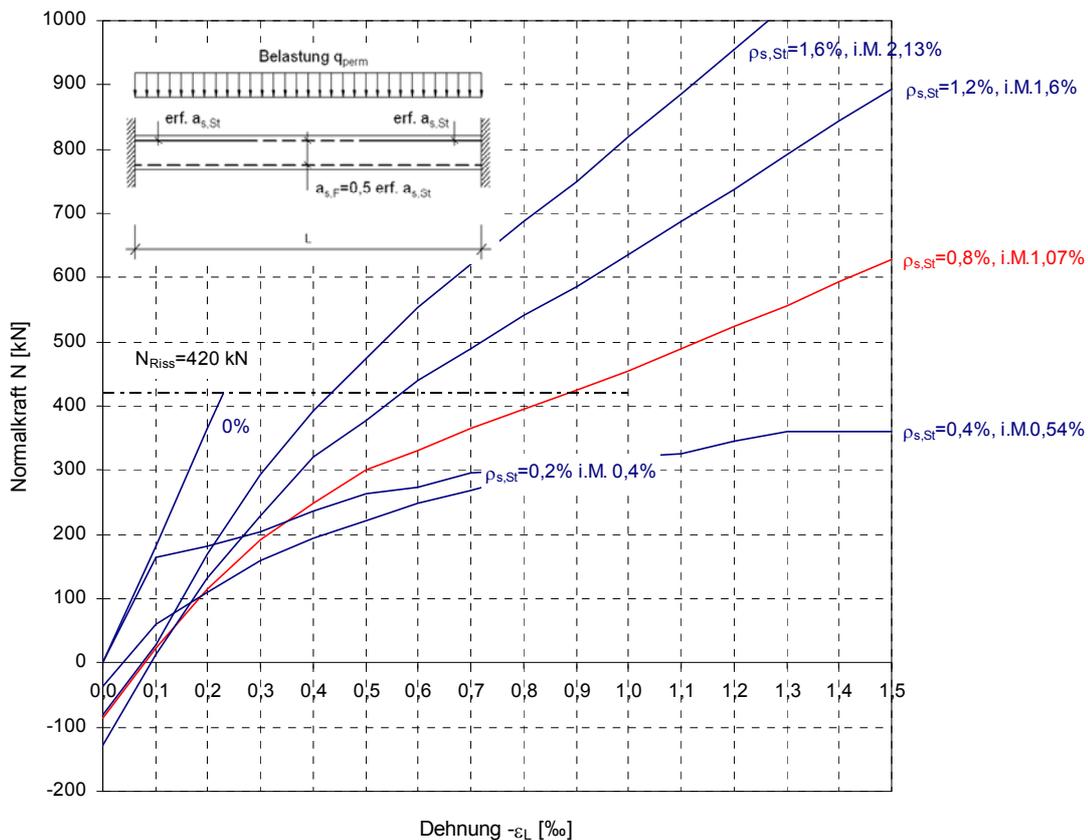


Bild 111: Normalkraft in Abhängigkeit von der Verformungseinwirkung ε_L

Anders verhält es sich bei Bezugsbewehrungsgraden größer als $\rho_{s,St}=0,8\%$. Die zusätzlich wirkende Verformungseinwirkung ε_L wirkt im zweiten flacher verlaufenden Ast der Kurve auf den über die ganze Querschnittshöhe gerissenen Querschnitt im Zustand II. Aus dem Bezugsbewehrungsgrad, der für eine Bauteilseite gilt, ergibt sich der mittlere Bewehrungsgrad für beide Bauteilseiten:

$$\rho_s(i.M.) = 2 \cdot \frac{4}{6} \cdot \rho_{s,St} = 1,33 \cdot \rho_{s,St} \tag{9.27}$$

Der Anstieg der Normalkraft kann näherungsweise über den reinen Stahlquerschnitt ohne die versteifende Mitwirkung des Betons auf Zug hergeleitet werden. So ergibt sich für $\rho_{s,St}=0,8\%$ in etwa folgender Normalkraftzuwachs:

$$\Delta N \approx a_s(i.M.) \cdot E_s \cdot \varepsilon_L = 18 \cdot 10^{-4} \cdot 200000 \cdot 0,5\text{‰} \text{ MN} = 0,180 \text{ MN} = 180 \text{ kN} \tag{9.28}$$

Aus dem Diagramm ergibt sich für eine Verformungssteigerung von $\varepsilon_L = -0,5\text{‰}$ im Bereich großer Verformungseinwirkungen folgende Differenzkraft:

$$\Delta N = (456 - 301) \text{ kN} = 155 \text{ kN}$$

Rissbreiten unter q_{perm} bei Steigerung der Verformungseinwirkung ε_L

Bild 112 zeigt die berechneten Rissbreiten unter kombinierter Beanspruchung im Einspannbereich für den Querschnitt $b/h/d=100/20/17$. Unter reiner Lastbeanspruchung ($\varepsilon_L=0\text{‰}$) sind die Rissbreiten klein. Die größten Rissbreiten treten beim System mit $\rho_{s,St}=0,4\%$ auf. Durch die Steigerung der Verformungseinwirkung steigen die Rissbreiten stark an. Besonders kritisch ist dabei das System mit niedrigem Bewehrungsgrad $\rho_{s,St}=0,4\%$. Im Einspannbereich liegen sie deutlich über dem Grenzwert von 0,4 mm. Im Feld sind die Spannungen in der Bewehrung bei der kombinierten Beanspruchung so groß, dass der Stahl ins Fließen kommt. Auf Grund des geringeren Bewehrungsgrades ist der Feldbereich bei großen zusätzlichen Dehnungen empfindlicher als der Einspannbereich.

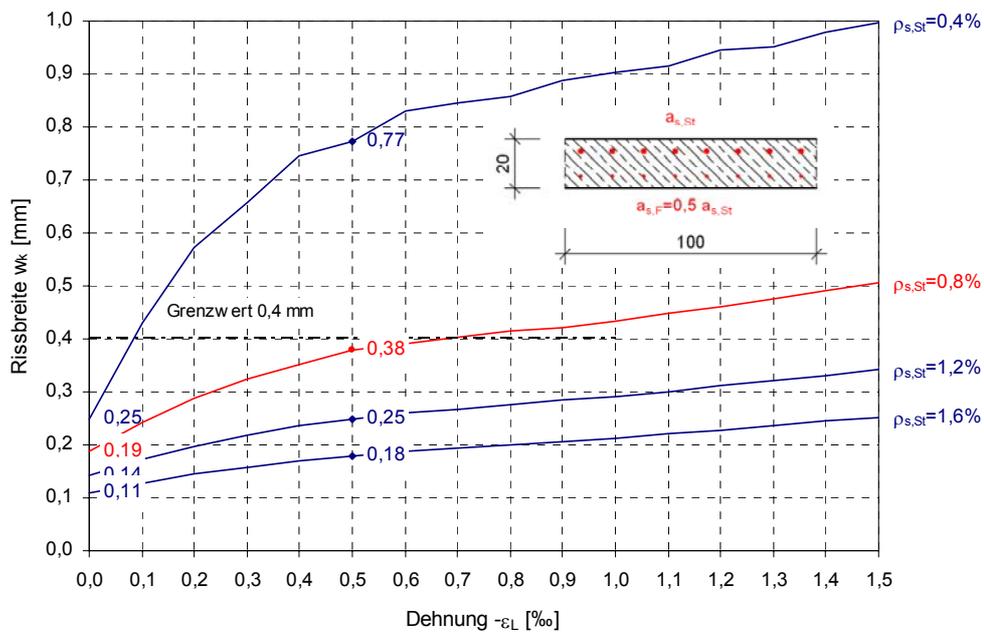


Bild 112: Rissbreiten (Einspannbereich) in Abhängigkeit von der Verformungseinwirkung ε_L

9.3 Parameterstudie Schlankheit

Zur Untersuchung des Einflusses der Schlankheit wird der Querschnitt der Platte beibehalten, die Stützweiten werden variiert. Mit den Stützweiten $L=3,75\text{m}$ und $L=10\text{m}$ wird ein relativ gedrungenes und ein sehr schlankes System untersucht. Das sehr schlanke System erfordert mindestens einen Bewehrungsgrad von $\rho_{s,St}=0,6\%$, damit es sein Eigengewicht abtragen kann. Untersuchte Systeme:

$L=3,75\text{ m}$	$L/d = 22$	
$L=5,0\text{ m}$	$L/d = 29$	
$L=7,5\text{ m}$	$L/d = 44$	(Bezugssystem)
$L=10\text{ m}$	$L/d = 59$	(entspricht $0,6\text{ L/d}=35$)

Als zweiter Parameter wird bei jeder untersuchten Schlankheit die Belastung bzw. der Bezugsbewehrungsgrad von $\rho_{s,St}=0,4\%$ bis $\rho_{s,St}=1,6\%$ variiert, so dass sich Kurvenscharen ergeben. Für die Auswertung unter Gebrauchslast wird mit dem Belastungsfaktor $f_{perm}=1,7$ vom GZT auf das quasi-ständige Belastungsniveau zurückgerechnet.

9.3.1 Normalkräfte unter q_{perm}

Die entstehenden Normalkräfte unter q_{perm} aus Zwang (Grenzfall: horizontal unverschieblich) sind von der Ausdehnung der gerissenen Bereiche sowie von der Dehnsteifigkeit im Zustand II abhängig. Beide Kriterien stehen in direktem Zusammenhang zum Bezugsbewehrungsgrad und sind unabhängig von der Schlankheit. Daher sind die Zwangnormalkräfte sowohl unter reiner Lastbeanspruchung als auch unter kombinierter Beanspruchung nur vom Bewehrungsgrad und nicht von der Schlankheit abhängig (Bild 113). Die Verformungseinwirkung wirkt zum großen Teil auf den gerissenen Querschnitt, dessen Dehnsteifigkeit vom Bewehrungsgrad abhängig ist. Die Zugkräfte nehmen mit steigendem Bezugsbewehrungsgrad zu.

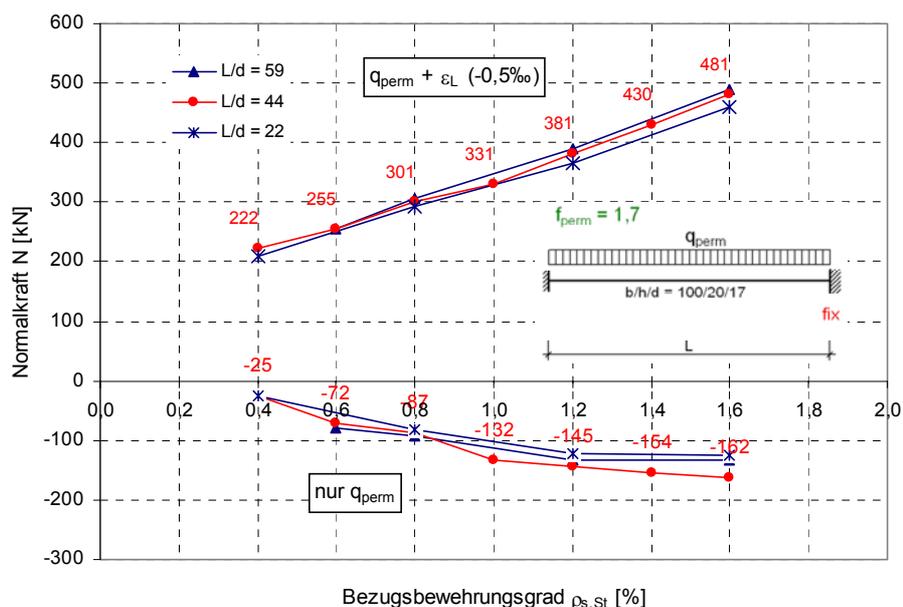


Bild 113: Normalkräfte in Abhängigkeit vom Bezugsbewehrungsgrad $\rho_{s,St}$

9.3.2 Durchbiegungen unter q_{perm}

Die Durchbiegungen werden als Grenzfälle sowohl an einem horizontal frei verschieblichen (System_frei) als auch an einem horizontal unverschieblichen System (System_fix) untersucht. Da durch das Kriechen die Verformungen stark zunehmen, werden im Folgenden nur die Rechenschritte mit Berücksichtigung des Kriechens ausgewertet (Schritt 3 und Schritt 4). Um die Einflüsse des Schwindens aufzeigen zu können, wird der Schwindanteil separat betrachtet.

Durchbiegungen unter reiner Lastbeanspruchung

Durch die unter reiner Lastbeanspruchung entstehenden Drucknormalkräfte sind die Durchbiegungen am System_fix etwas kleiner als am System_frei. Die unter Lastbeanspruchung entstehenden Druckkräfte werden schon bei kleinen Verformungseinwirkungen abgebaut. Daher werden die Durchbiegungen unter Lastbeanspruchung nachfolgend auf der sicheren Seite liegend für das System_frei analysiert. Sie lassen sich entweder in Abhängigkeit vom Bezugsbewehrungsgrad $\rho_{s,St}$ (Bild 114) oder in Abhängigkeit von der Schlankheit L/d darstellen (Bild 115).

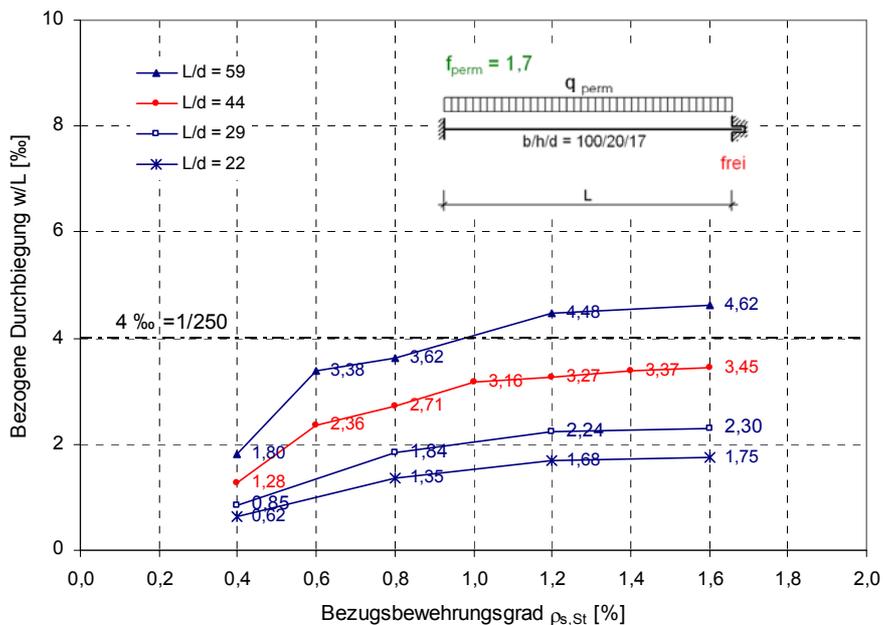


Bild 114: Bezogene Durchbiegungen (q_{perm} + Kriechen) in Abhängigkeit vom Bezugsbewehrungsgrad

Es ergibt sich eine Abhängigkeit der Durchbiegungen von beiden Parametern. Die bezogenen Durchbiegungen nehmen infolge zunehmender Querbewehrung mit dem Bezugsbewehrungsgrad und der Schlankheit zu. Dabei ist die Schlankheit bei der Beurteilung der zu erwartenden Durchbiegungen im Gebrauchszustand der Parameter mit dem größeren Einfluss. Die in die Schlankheit eingehende Querschnittshöhe h bzw. d bestimmt maßgebend die Biegesteifigkeit des Querschnitts sowohl im Zustand I als auch im Zustand II. In Verbindung mit der Stützweite – ausgedrückt durch den Quotienten von L und h bzw. d – ergeben sich die bezogenen Durchbiegungen unabhängig von den absoluten Systemabmessungen. Bei gleichem Bezugsbewehrungsgrad $\rho_{s,St}$ ergibt sich eine lineare Funktion in Abhängigkeit von der Schlankheit.

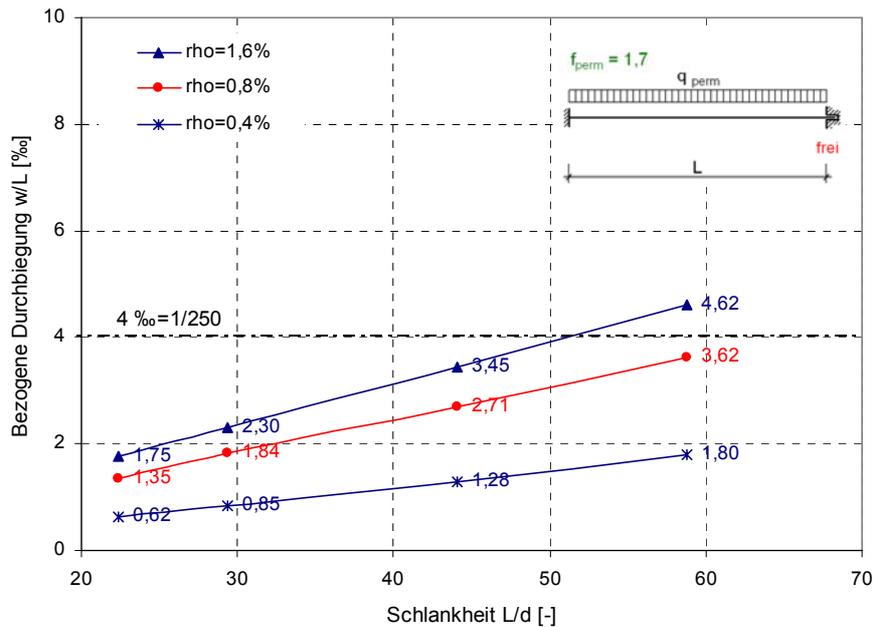


Bild 115: Bezogene Durchbiegungen (q_{perm} + Kriechen) in Abhängigkeit von der Schlankheit L/d

Durchbiegungen unter q_{perm} + Kriechen + Schwinden

Unter zusätzlicher Berücksichtigung des Schwindens ergeben sich deutlich größere Durchbiegungen. Beim horizontal frei verschieblichen System beträgt der allein aus der Schwindkrümmung resultierende Zuwachs ca. 40 bis 100% (Bild 115 und Bild 116). Damit ist der Anteil des Schwindens an der Gesamtverformung so groß, dass er bei der Durchbiegungsberechnung immer berücksichtigt werden muss. Besonders stark wirkt sich das Schwinden bei Systemen mit geringem Bezugsbewehrungsgrad aus. Bei diesen Systemen sind allerdings die Absolutwerte der bezogenen Durchbiegungen von Haus aus klein.

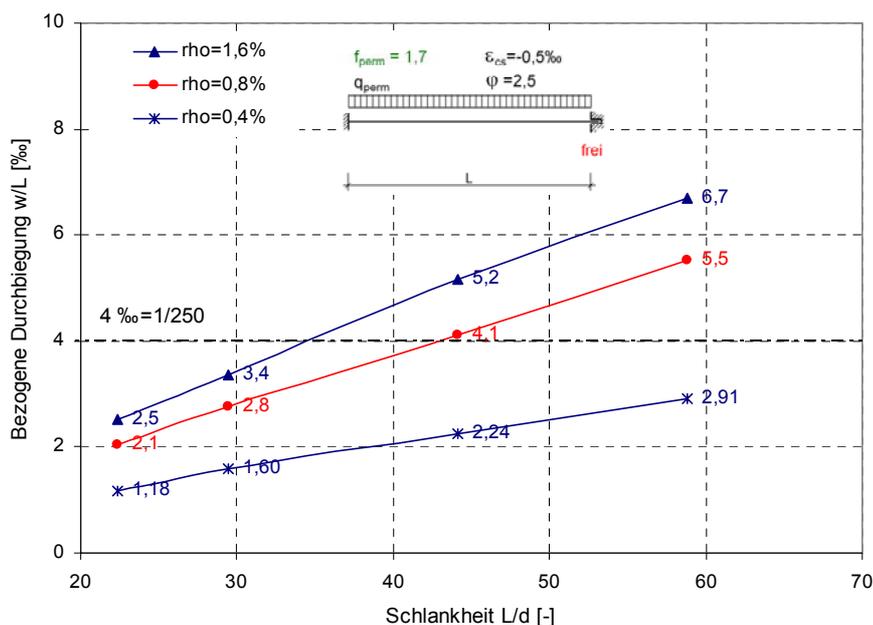


Bild 116: Bezogene Durchbiegungen (q_{perm} + Kriechen + Schwinden) System_frei

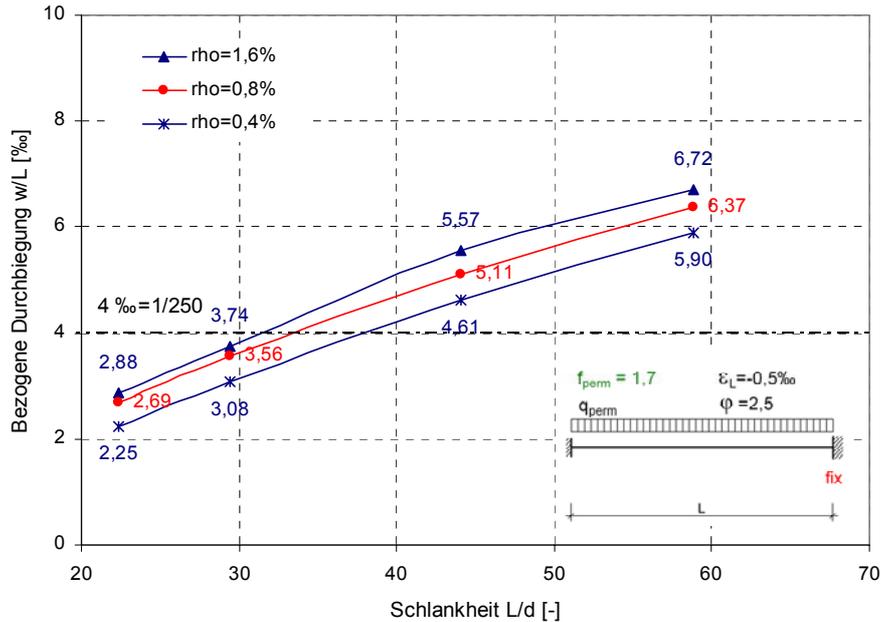


Bild 117: Bezogene Durchbiegungen (q_{perm} + Kriechen + Schwinden) System_fix

Beim horizontal unverschieblichen System (System_fix) kann der Einfluss des Schwindens infolge der aus behinderter Dehnung entstehenden Zwangzugkraft wesentlich größer sein (z. B. $4,6/1,28=3,6$ beim System $L/d=44$, $\rho_{s,St}=0,4\%$) (Bild 115 und Bild 117). Diese führt – insbesondere bei Systemen mit niedrigen Bewehrungsgraden – zu einer Vergrößerung der gerissenen Bereiche. Die dadurch abfallende Biegesteifigkeit bewirkt eine Vergrößerung der Durchbiegungen. Die Kurve für $\rho_{s,St}=0,4\%$ rückt sehr viel näher an die beiden Kurven der anderen Bewehrungsgrade (Bild 117).

Der Einfluss des Bewehrungsgrades auf die Durchbiegungen geht somit bei Berücksichtigung des Schwindens zurück. Dies liegt daran, dass ab einer ausreichend großen Verformungseinwirkung das Bauteil – unabhängig vom Bewehrungsgrad – nahezu über die ganze Bauteillänge in den gerissenen Zustand II übergeht und somit die Steifigkeiten im Zustand II maßgeblich die Durchbiegungen bestimmen.

Zusammenhang zwischen der bezogenen Durchbiegung und der Schlankheit

Unter der Annahme, dass sich ein Bauteil überwiegend im gerissenen Zustand II befindet, kann man näherungsweise nachfolgenden Zusammenhang herleiten. Die Durchbiegung unter Querbelastung des beidseitig eingespannten Trägers mit konstanter Biegesteifigkeit beträgt:

$$w_{perm} = \frac{1}{384} \cdot \frac{q_{perm} \cdot L^4}{EI} \quad (9.29)$$

Mit einer mittleren Biegesteifigkeit über die ganze Bauteillänge im Zustand II ohne Mitwirkung des Betons aus Zug ergibt sich somit für die bezogene Durchbiegung:

$$\frac{w_{perm}}{L} = \frac{1}{384} \cdot \frac{q_{perm} \cdot L^3}{EI_{sec}^{II} (i.M.)} \quad (9.30)$$

Die Belastung q_{perm} sowie die Biegesteifigkeit EI_{sec}^{II} stehen in annähernd linearem Zusammenhang mit dem Bewehrungsgrad.

$$q_{perm} = \frac{\mu_{Ed}(Stütze)}{f_{perm}} \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{12}{L^2} \quad \mu_{Ed} \approx 20 \cdot \rho_{s,St} \quad (9.31) \quad (9.32)$$

$$q_{perm} = \text{Konstante1} \cdot \rho_{s,St} \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{L^2} \quad (9.33)$$

$$EI_{sec}^{II}(Stütze) = E_s \cdot \rho_{s,St} \cdot b \cdot d \cdot z \cdot (d - x) \quad (9.34)$$

$$EI_{sec}^{II}(Feld) = E_s \cdot 0,5 \cdot \rho_{s,St} \cdot b \cdot d \cdot z \cdot (d - x) \quad (9.35)$$

$$\text{Mit } b \cdot d \cdot z \cdot (d - x) \approx 0,9 \cdot (1 - 0,35) \cdot b \cdot d^3 = 0,585 \cdot b \cdot d^3 \quad (9.36)$$

$$EI_{sec}^{II}(i.M.) = \text{Konstante2} \cdot \rho_{s,St} \cdot b \cdot d^3 \quad (9.37)$$

Damit ergibt sich die bezogene Durchbiegung zu einer linearen Funktion von der Schlankheit:

$$\frac{w_{perm}}{L} = \text{Konstante3} \cdot \frac{\rho_{s,St} \cdot b \cdot d^2}{L^2} \cdot \frac{L^3}{\rho_{s,St} \cdot b \cdot d^3} = \text{Konstante3} \cdot \frac{L}{d} \quad (9.38)$$

Schwindverformung $w_{s,perm}$

Um den Anteil der Schwinddurchbiegung der beiden Grenzfälle (System_frei und System_fix) besser miteinander vergleichen zu können, ist es sinnvoll die Schwinddurchbiegungen (Zuwachs der Durchbiegung infolge Schwindens) separat darzustellen (Bild 118 und Bild 119).

$$w_{s,perm} = w_{\infty}(q_{perm} + c + s) - w_{\infty,perm} \quad (9.39)$$

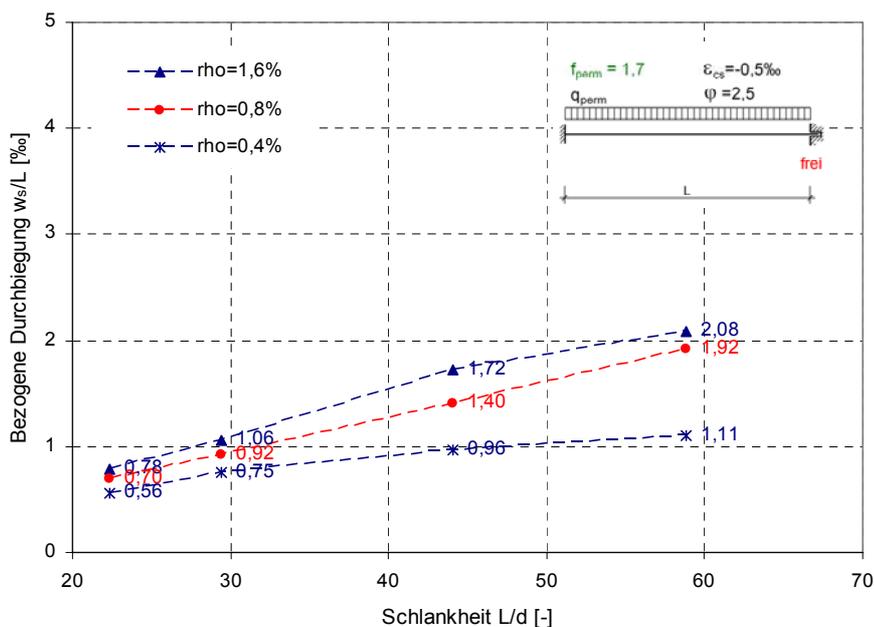


Bild 118: Bezogene Durchbiegungen (nur Schwindanteil) System_frei

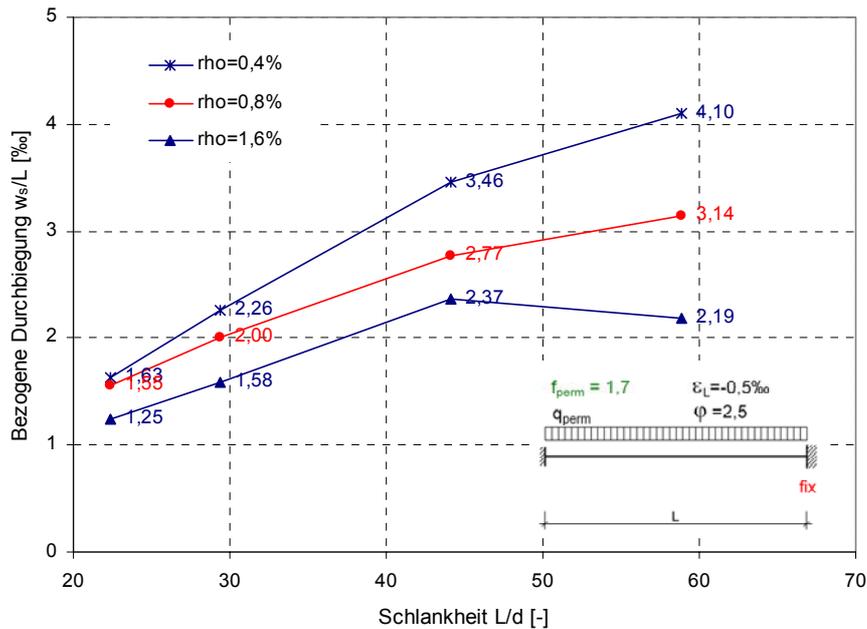


Bild 119: Bezogene Durchbiegungen (nur Schwindanteil) System_fix

Der durch die Schwindkrümmung verursachte Zuwachs an Durchbiegung nimmt mit der Schlankheit linear zu und ist bei beiden Grenzfällen gleich groß. Durch die nur beim horizontal unverschieblichen System auftretende Zwangzugkraft infolge Dehnung und der damit verbundenen Steifigkeitsreduzierung sind die Schwinddurchbiegungen beim System_fix größer. Dies gilt insbesondere für Systeme mit niedrigem Bezugsbewehrungsgrad.

Bei schlanken Systemen führt die zusätzlich zur Last und Schwindkrümmung eingegebene Dehnung und die damit verbundene Normalkraft nicht mehr zu einem Anwachsen der Durchbiegungen. Die Zugkräfte können durch die Effekte nach Theorie II. Ordnung eine Versteifung des Systems und damit ein Gleichbleiben oder sogar eine Reduzierung der Durchbiegungen zur Folge haben. Daher ist beim System_fix der Kurvenverlauf im Bereich großer Schlankheiten nicht mehr linear. Bei der Kurve für den Bezugsbewehrungsgrad $\rho_{s,St}=1,6\%$ ergibt sich sogar ein abfallender Ast (Bild 119).

9.3.3 Rissbreiten

Die Berechnung der Rissbreite erfolgt mit der Zugkraft in der Bewehrung im Rissquerschnitt, welche von der Zwangnormalkraft und dem zugehörigen Moment abhängt. Bei der Variation der Schlankheit kann man feststellen, dass die Rissbreiten genau wie die Zwangnormalkräfte – bei der hier gewählten Betrachtungsweise mit definierten Belastungsniveaus – unabhängig von der Schlankheit sind. Dies gilt sowohl bei reiner Lastbeanspruchung, als auch bei kombinierter Beanspruchung.

Wie schon in Abschnitt 9.2 (Parameterstudie Bezugsbewehrungsgrad) gezeigt, nimmt die Rissbreite mit zunehmendem statisch erforderlichen Bewehrungsgrad ab. Auf Grund der höheren Steifigkeit im Zustand II ergeben sich bei hohen Bewehrungsgraden zwar absolut größere Zugkräfte, die zugehörigen Stahlspannungen sind jedoch auf Grund der größeren Bewehrungsquerschnittsfläche kleiner und damit auch die Rissbreiten.

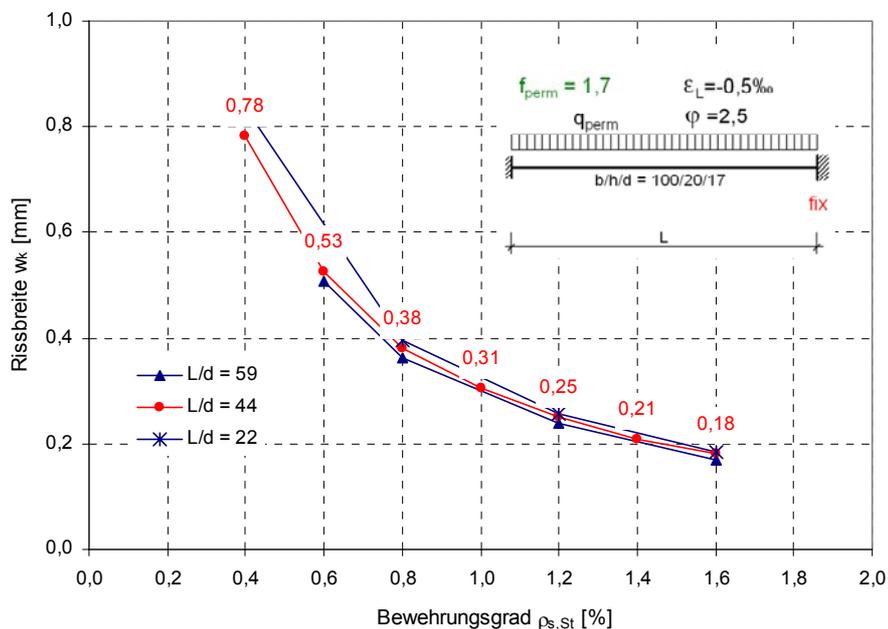


Bild 120: Rissbreiten (Stütze) unter q_{perm} + Kriechen + Zwang

9.4 Parameterstudie Tragsystem

Zur Untersuchung des Einflusses der Randbedingungen des statischen Systems auf die Durchbiegungen und die Rissbreiten werden die Systeme gemäß Bild 121 untersucht. Bei allen Untersuchungen wird eine Variation des Bewehrungsgrades vorgenommen. Bezugswert für den Bewehrungsgrad bei den Systemen D und F ist der Bewehrungsgrad über der Stütze ($\rho_{s,St}$), beim System B der statisch erforderliche Bewehrungsgrad im Feld ($\rho_{s,F}$).

Für die Untersuchungen zur Durchbiegung wird zusätzlich die Schlankheit variiert. Die Berechnungen werden dabei auch an den zugehörigen horizontal frei verschieblichen Systemen (A, C, E) durchgeführt.

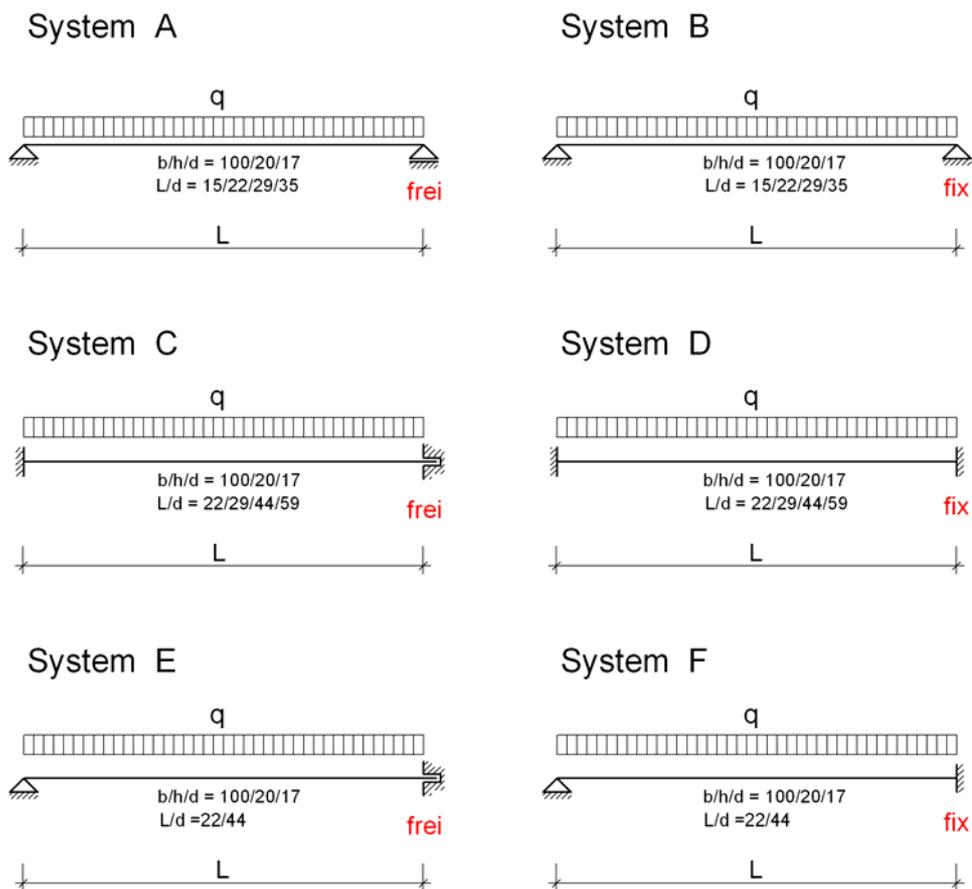
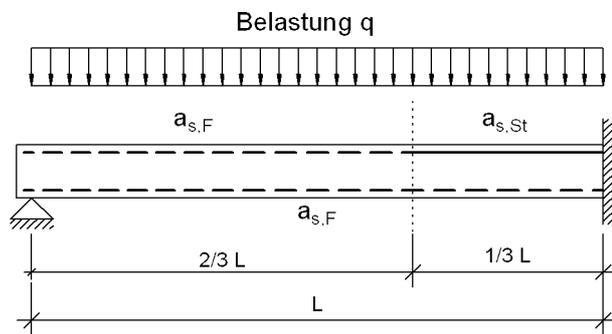


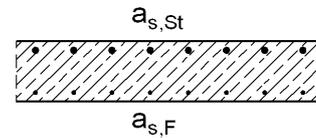
Bild 121: Statische Systeme für die Parameterstudie Tragsystem

9.4.1 System E und F (einseitig starr eingespannt)

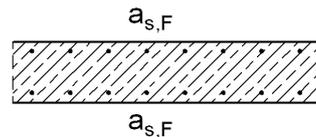
Die Systemparameter und Bewehrungsanordnung für das einseitig eingespannte System sind in Bild 122 dargestellt. Die Bewehrung im Einspannbereich wird über ein Drittel der Trägerlänge geführt. Unten und im übrigen Bereich oben wird die Hälfte der Stützbewehrung angeordnet. Bezugsbewehrungsgrad bei den Systemen E und F ist der erforderliche Bewehrungsgrad $\rho_{s,St}$ über der Stütze.

System F $b/h/d=100/20/17$ **BSt 500****C 30/37**

Stützquerschnitt



Feldquerschnitt

Systemlänge: $L = 7,50 \text{ m}$ $L_i = 6,00 \text{ m}$ Schlankheit: $L/d = 44$ $L_i/d = 35$

Belastung:

$$q_{Ed} = 12,6 \text{ kN/m}$$

$$q_{perm} = 7,4 \text{ kN/m} \quad (f_{perm} = 1,7)$$

Querschnitt/Bewehrungsgrade:

$$\rho_{s,St} = 0,8 \% \quad \rho_{s,St,eff} = 1,81\%$$

$$\rho_{s,F} = 0,56 \cdot \rho_{s,St} = 0,45 \%$$

Materialparameter:

$$E_{c0m} = 31900 \text{ MN/m}^2$$

$$f_{ctm} = 3,0 \text{ MN/m}^2$$

$$f_{ctm}(\infty) = 2,1 \text{ MN/m}^2$$

$$\varphi_{\infty} = 2,5$$

$$\varepsilon_{cs}(\infty) = -0,5\%$$

Bild 122: System F, ($\rho_{s,St}=0,8\%$)**Normalkräfte und Rissbreiten unter q_{perm}**

Die Ermittlung der Normalkräfte und Rissbreiten erfolgt unter reiner Lastbeanspruchung (q +Kriechen) sowie unter einer kombinierten Beanspruchung mit dem Lastfall (q +Kriechen+Zwangbeanspruchung) für das horizontal unverschieblich gelagerte System.

Auf Grund des geringeren mittleren Bewehrungsgrades ergeben sich unter reiner Lastbeanspruchung q_{perm} etwas größere Druckkräfte und unter der kombinierten Beanspruchung etwas kleinere Zugkräfte als beim zuvor untersuchten System D.

Da die Normalkräfte die Rissbreiten signifikant beeinflussen, nimmt die Rissbreite im Grenzfall der vollen Dehnungsbehinderung (System F_{fix}) durch eine Dehnung von $\varepsilon_L = -0,5\%$ um das Doppelte bis Dreifache zu. Wie beim Bezugssystem sind Bauteile mit niedrigem Bewehrungsgrad kritisch.

Die entstehenden Zwangnormalkräfte und Rissbreiten infolge der horizontal behinderten Verformung werden für alle Systeme in Abschnitt 9.4.3 eingehender untersucht.

Durchbiegungen unter q_{perm}

Die Auswertung der Durchbiegungen für das System F erfolgt zunächst für den Rechenschritt 4 (q+Kriechen+Schwinden) unter der Belastung q_{perm} . Dabei werden die beiden Grenzfälle System_frei und System_fix gegenübergestellt (Bild 123 und Bild 124).

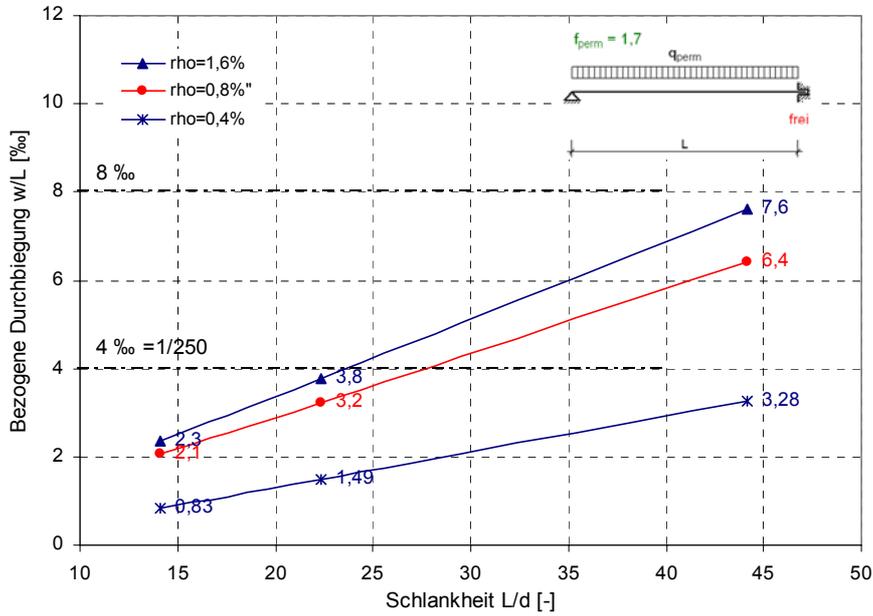


Bild 123: System E (frei): Bezogene Durchbiegungen (q_{perm} + Kriechen + Schwinden)

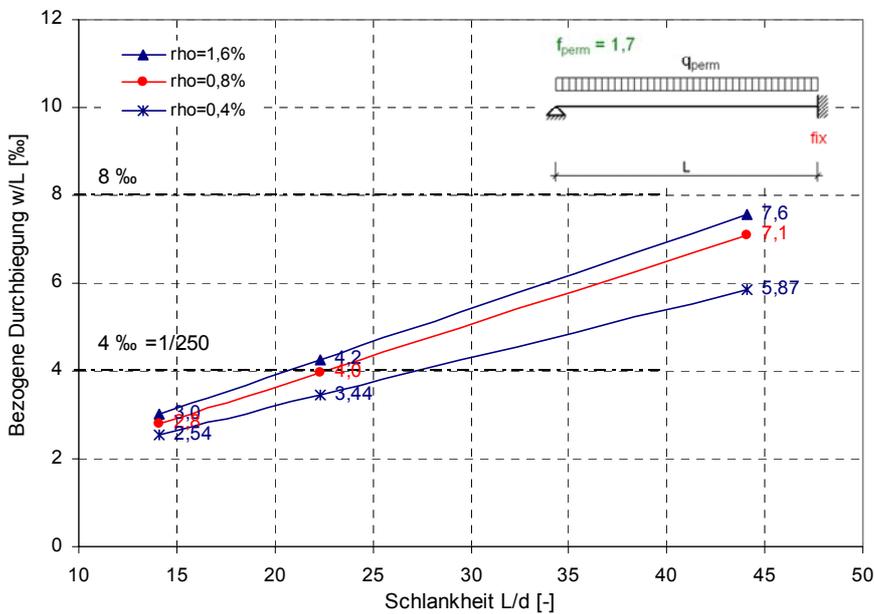


Bild 124: System F (fix): Bezogene Durchbiegungen (q_{perm} + Kriechen + Schwinden)

Beim horizontal unverschieblichen System sind die bezogenen Durchbiegungen auf Grund der Zwangzugkräfte insbesondere bei geringen statisch erforderlichen Bewehrungsgraden größer.

$$w_{\infty} (q_{perm} + c + s) / L \approx 0,8 \text{ ‰ bis } 7,6 \text{ ‰} \quad (\text{System E_frei}) \quad (9.40)$$

$$w_{\infty} (q_{perm} + c + s) / L \approx 2,5 \text{ ‰ bis } 7,6 \text{ ‰} \quad (\text{System F_fix}) \quad (9.41)$$

Schwinddurchbiegung $w_{s,perm}$

Die sich aus der Differenz der Lastfälle (q_{perm} +Kriechen) und (q_{perm} +Kriechen+Schwinden) ergebenden Schwindanteile der beiden horizontal frei verschieblichen Systeme A und C sind gleich groß und ergeben sich – je nach Schlankheit – zu:

$$w_{s,perm} / L \approx 0,5 \text{ ‰ bis } 2 \text{ ‰} \quad (\text{System E_frei}) \quad (9.42)$$

Wird die horizontale Verformung vollständig behindert (System_fix), so vergrößert sich der Schwindanteil infolge der Dehnung in der Schwerlinie und der damit verbundenen Steifigkeitsreduzierung:

$$w_{s,perm} / L \approx 1 \text{ ‰ bis } 4 \text{ ‰} \quad (\text{System F_fix}) \quad (9.43)$$

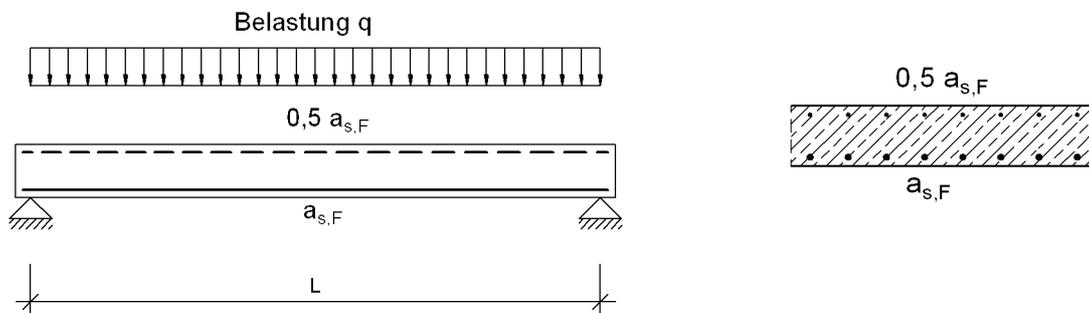
Auch diese Werte liegen in der gleichen Größenordnung wie beim zuvor untersuchten Bezugssystem D. Die Vergrößerung der Schwindanteile der horizontal unverschieblich gelagerten Systeme betrifft insbesondere Systeme mit niedrigem Bezugsbewehrungsgrad ($\rho_{s,St}=0,4\%$). Durch die auftretenden Zwangnormalkräfte gehen diese vom nahezu ungerissenen Zustand I in den weitestgehend gerissenen Zustand II über.

9.4.2 System A und B (beidseitig gelenkig gelagert)

Für die Untersuchungen am Einfeldträger wird der Querschnitt beibehalten und die Spannweite auf 3,75 m reduziert, damit die Biegeschlankheit des Systems im zulässigen Bereich liegt. Somit liegt immer noch ein relativ schlankes System vor (Bild 125).

Der Bezugsbewehrungsgrad ist der statisch erforderliche Bewehrungsgrad im Feld, der hier zu $\rho_{s,F}=0,8\%$ gewählt wird. Wie an den Belastungen im GZT und GZG zu sehen ist, kann es ein Vielfaches seines Eigengewichtes noch als Verkehrslast aufnehmen. Für die obere Bewehrung wird zur Aufnahme des zentrischen Zwangs die Hälfte der statisch erforderlichen Feldbewehrung gewählt.

System B $b/h/d=100/20/17$ **BSt 500** **C 30/37**



Systemlänge: $L = L_i = 3,75 \text{ m}$

Schlankheit: $L/h = 19$
 $L/d = 22$

Belastung:

$$q_{Ed} = 50 \text{ kN/m}$$

$$q_{perm} = 30 \text{ kN/m} \quad (f_{perm} = 1,7)$$

Querschnitt/Bewehrungsgrade:

$$\rho_{s,F} = 0,8\% \quad \rho_{s,F,eff} = 1,81\%$$

$$0,5 \cdot \rho_{s,F} = 0,4\%$$

Materialparameter:

$$E_{c0m} = 31900 \text{ MN/m}^2$$

$$f_{ctm} = 3,0 \text{ MN/m}^2$$

$$f_{ctm}(\infty) = 2,1 \text{ MN/m}^2$$

$$\varphi_{\infty} = 2,5$$

$$\varepsilon_{cs}(\infty) = -0,5\text{‰}$$

Bild 125: System B (fix), ($\rho_{s,F}=0,8\%$)

Normalkräfte und Rissbreiten unter q_{perm}

Die beim beidseitig gelenkig gelagerten Einfeldträger entstehenden Zugkräfte unter kombinierter Beanspruchung sind etwas größer als beim System D, da beim untersuchten Einfeldträger der mittlere Bewehrungsgrad größer ist.

Im Fall geringer statisch erforderlicher Bewehrungsgrade ($\rho_{s,F} < 0,2\%$), befindet sich das Bauteil auf der ganzen Länge im Zustand I. Da unter Lastbeanspruchung die Dehnungen in der Schwerachse in etwa gleich Null sind, entstehen keine Druckkräfte (Bild 126). Bei kombinierter Beanspruchung ergibt sich bei einem theoretischen Bezugsbewehrungsgrad von $\rho_{s,F} = 0\%$ ($q = 0$, reine Zwangbeanspruchung) die Rissnormalkraft $N_{cr} = 420$ kN.

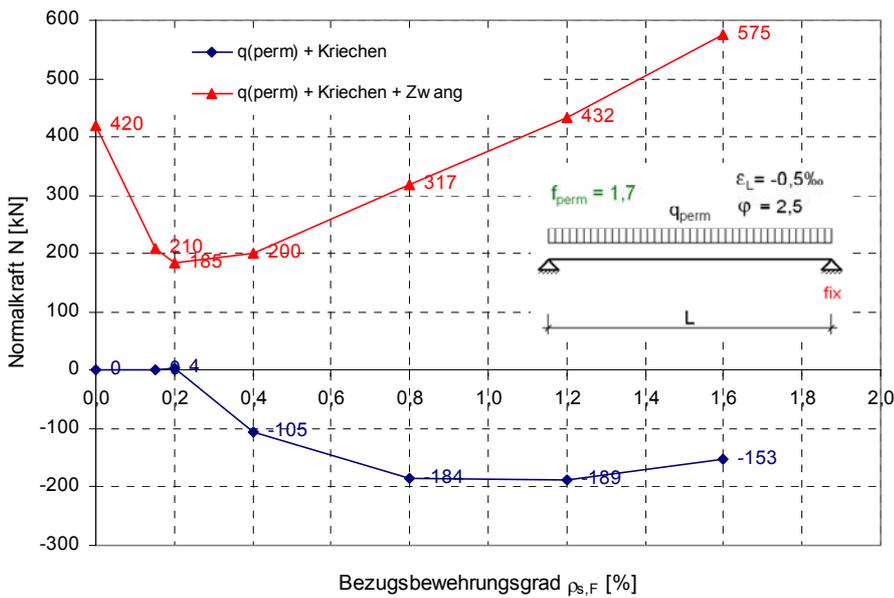


Bild 126: System B (fix): Normalkräfte unter q_{perm}

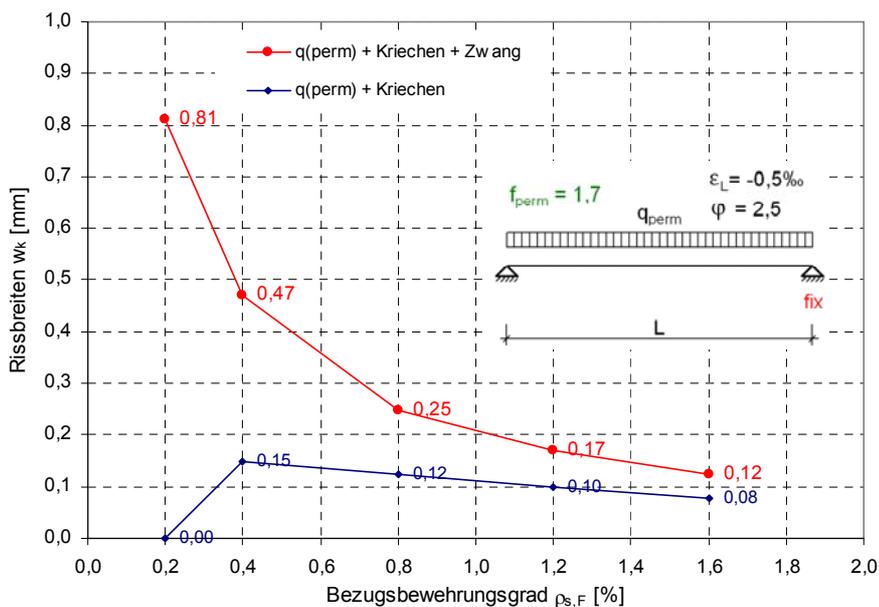


Bild 127: System B (fix): Rissbreiten (Feld) unter q_{perm}

Durchbiegungen unter q_{perm}

Bei der Analyse der Durchbiegungen wird ebenfalls das zwangfreie System A untersucht. Während sich die Durchbiegungen ohne Berücksichtigung des Schwindens von System A und B kaum unterscheiden, sind die Unterschiede bei Berücksichtigung des Schwindens – insbesondere bei niedrigen Bewehrungsgraden – groß.

Bild 128 und Bild 129 zeigen die bezogenen Durchbiegungen für den Lastfall (q+Kriechen+Schwinden). Es ergibt sich, wie bei den anderen Systemen, ein linearer Zusammenhang zwischen der Schlankheit und der bezogenen Durchbiegung.

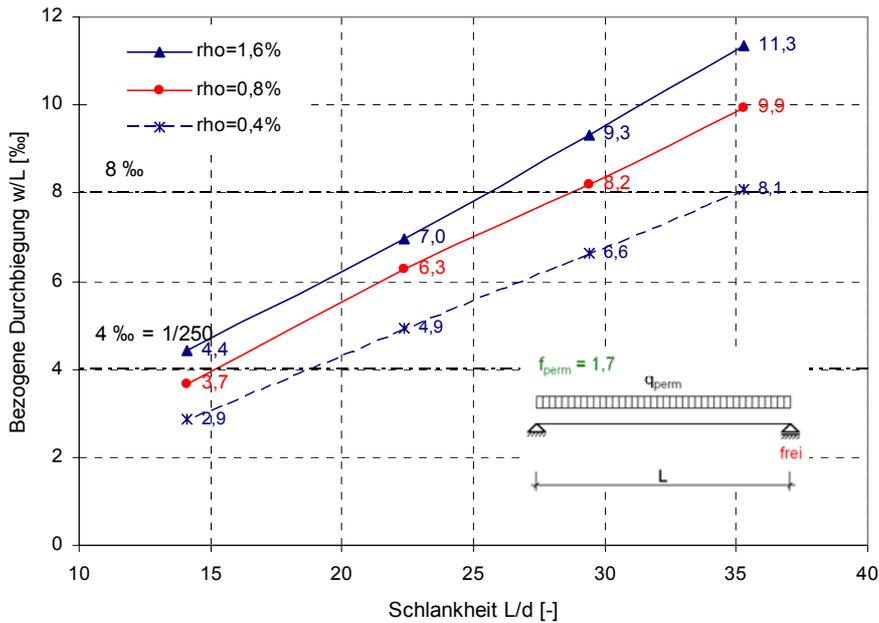


Bild 128: System A (frei): Bezogene Durchbiegungen (q_{perm} + Kriechen + Schwinden)

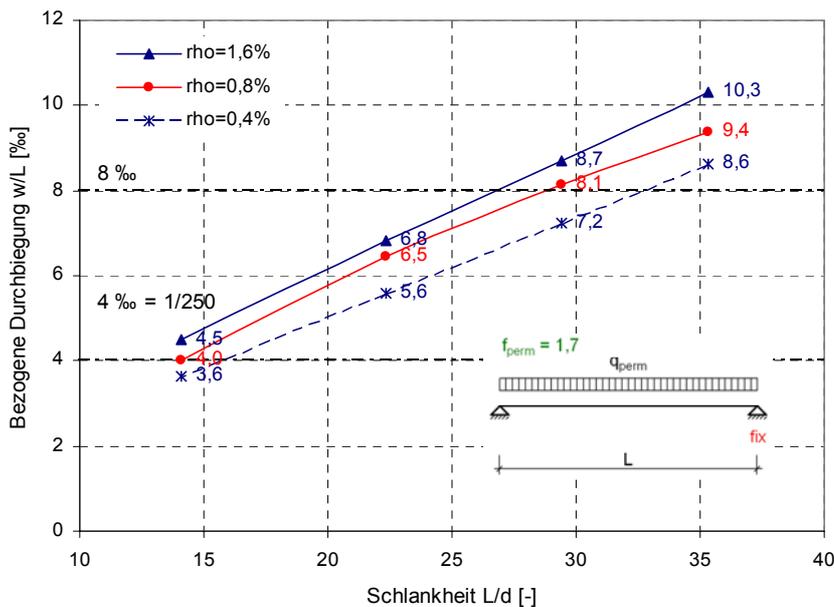


Bild 129: System B (fix): Bezogene Durchbiegungen (q_{perm} + Kriechen + Schwinden)

Für nahezu alle berechneten Systeme wird der Grenzwert von $w/L=1/250=4\text{‰}$ überschritten, so dass eine Überhöhung des Bauteils vorgesehen werden muss. Die zu erwartenden bezogenen Durchbiegungen unter Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens betragen:

$$w_{\infty}(q_{perm} + c + s) / L = 2,9\text{‰ bis } 11,3\text{‰} \quad (\text{System A_frei}) \quad (9.44)$$

$$w_{\infty}(q_{perm} + c + s) / L = 3,6\text{‰ bis } 10,3\text{‰} \quad (\text{System B_fix}) \quad (9.45)$$

Schwinddurchbiegung $w_{s,perm}$

Um den Einfluss des Schwindens auf die Durchbiegungen aufzuzeigen, werden in Bild 130 wiederum nur die Schwindanteile dargestellt. Beim zwangsfreien System resultiert die zusätzliche Schwindverformung rein aus der Schwindkrümmung im Zustand II. Da sich das System A horizontal frei verformen kann, ergibt sich bei einer zusätzlichen Dehnung $-\varepsilon_L$ nur eine horizontale Verschiebung am freien Auflager, jedoch keine Zunahme der Durchbiegung in Feldmitte.

$$\max.w_{s,perm} / L = 1\text{‰} - 2,7\text{‰} \quad (\text{System A_frei}) \quad (9.46)$$

$$\max.w_{s,perm} / L = 1,2\text{‰} - 3,6\text{‰} \quad (\text{System B_fix}) \quad (9.47)$$

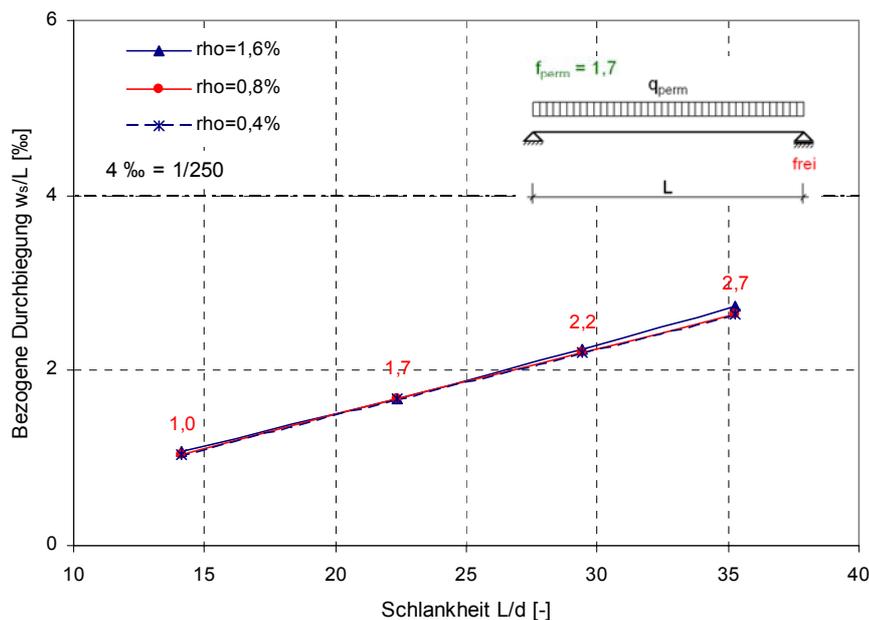


Bild 130: System A (frei): Bezogene Durchbiegungen w_s/L (nur Schwindanteil)

9.4.3 Vergleich der Tragsysteme bei gleicher Schlankheit $L/d=22$

Der Vergleich der drei statischen Systeme mit unterschiedlichen Randbedingungen erfolgt an dieser Stelle für Systeme gleicher Schlankheit $L/d=22$.

Normalkräfte

Die Normalkräfte aller horizontal unverschieblich gelagerten Systeme B, D und F liegen in der gleichen Größenordnung. Dies gilt sowohl für die Druckkräfte, als auch die Zugkräfte.

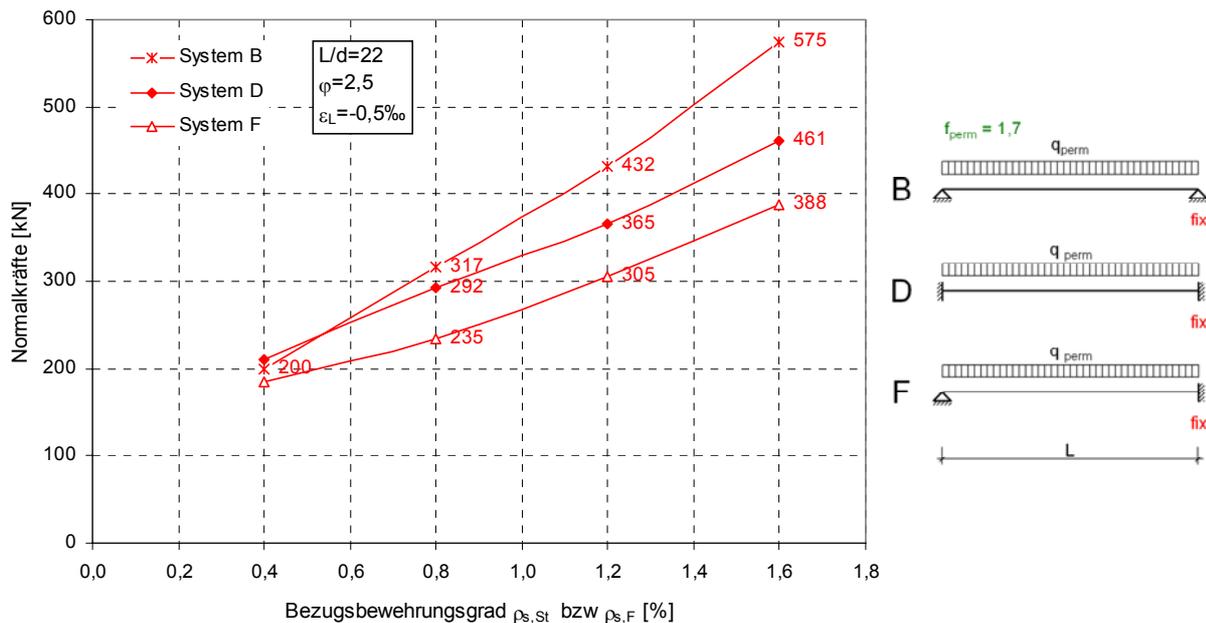


Bild 131: Systeme B, D, F: Normalkräfte unter kombinierter Beanspruchung: $q_{perm} + \text{Kriechen} + \varepsilon_L$

Die in Bild 131 erkennbaren Unterschiede bezüglich der Zwangzugkräfte stehen im Zusammenhang mit dem etwas unterschiedlichen mittleren Bewehrungsgrad der Systeme. Aus der unterschiedlichen Bewehrungsverteilung resultieren nachfolgende mittlere Bewehrungsgrade in Abhängigkeit vom Bezugsbewehrungsgrad.

$$\text{System B: } \rho_s(i.M.) = 1,20\% \cdot \rho_{s,F} \quad (9.48)$$

$$\text{System D: } \rho_s(i.M.) = 1,07\% \cdot \rho_{s,St} \quad (9.49)$$

$$\text{System F: } \rho_s(i.M.) = 0,93\% \cdot \rho_{s,St} \quad (9.50)$$

Rissbreiten

Da die Zwangnormalkräfte über die Stahlspannungen einen wesentlichen Einfluss auf die Rissbreiten haben, ergeben sich bei ähnlich großer Normalkraft der drei Systeme sowohl unter reiner Last- als auch unter kombinierter Beanspruchung ähnliche Rissbreiten (Bild 132). Mit zunehmendem Bezugsbewehrungsgrad nehmen die Rissbreiten ab. Während die Systeme D und F sowohl im Einspannbereich als auch im Feldbereich gut miteinander vergleichbar sind, können beim System B nur die Rissbreiten im Feld verglichen werden.

Systembedingt ist der mittlere Bewehrungsgrad im Feld doppelt so groß wie bei den beiden anderen Systemen. Zusätzlich macht sich der Einfluss aus Theorie II. Ordnung bemerkbar, so dass die Rissbreiten beim System B – trotz der höheren Zwangzugkraft – deutlich geringer sind.

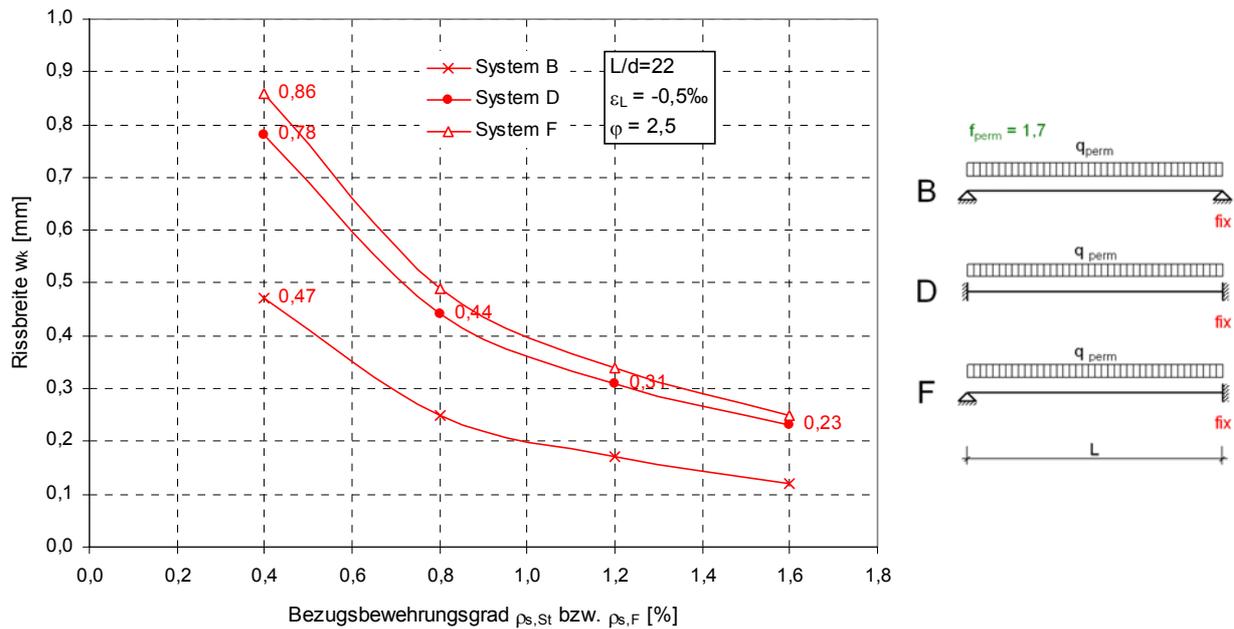


Bild 132: Systeme B, D, F: Rissbreiten im Feld ($q_{perm} + \text{Kriechen} + \text{Zwang}$)

Durchbiegungen unter reiner Lastbeanspruchung

Die bezogenen Durchbiegungen unter reiner Lastbeanspruchung der horizontal frei verschieblichen Systeme A, C und E mit gleicher Schlankheit $L/d=22$ sind in Bild 133 dargestellt. Obwohl die Schlankheit das erste Kriterium zur Beurteilung der zu erwartenden Durchbiegungen ist, erfolgen nachfolgende Betrachtungen in Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad. So kann der Einfluss der Aufweitung der gerissenen Bereiche aufgezeigt werden.

Der gelenkig gelagerte Einfeldträger weist mit Abstand die größten bezogenen Durchbiegungen auf. Alle drei Systeme bleiben bei einem Bewehrungsgrad von $\rho_{s,St}=0,2\%$ bzw. $\rho_{s,F}=0,2\%$ über die ganze Bauteillänge im Zustand I. Die genaue Lage des Punktes verändert sich mit der Variation der Zugfestigkeit.

$$M_{perm}(0,2\%) = 14kNm = M_{cr} \tag{9.51}$$

Vereinfacht können die Kurvenverläufe durch drei lineare Geraden charakterisiert werden. Jeder Ast der Kurve beschreibt die Bereiche a) ungerissen, b) Rissbildung und c) abgeschlossenes Rissbild.

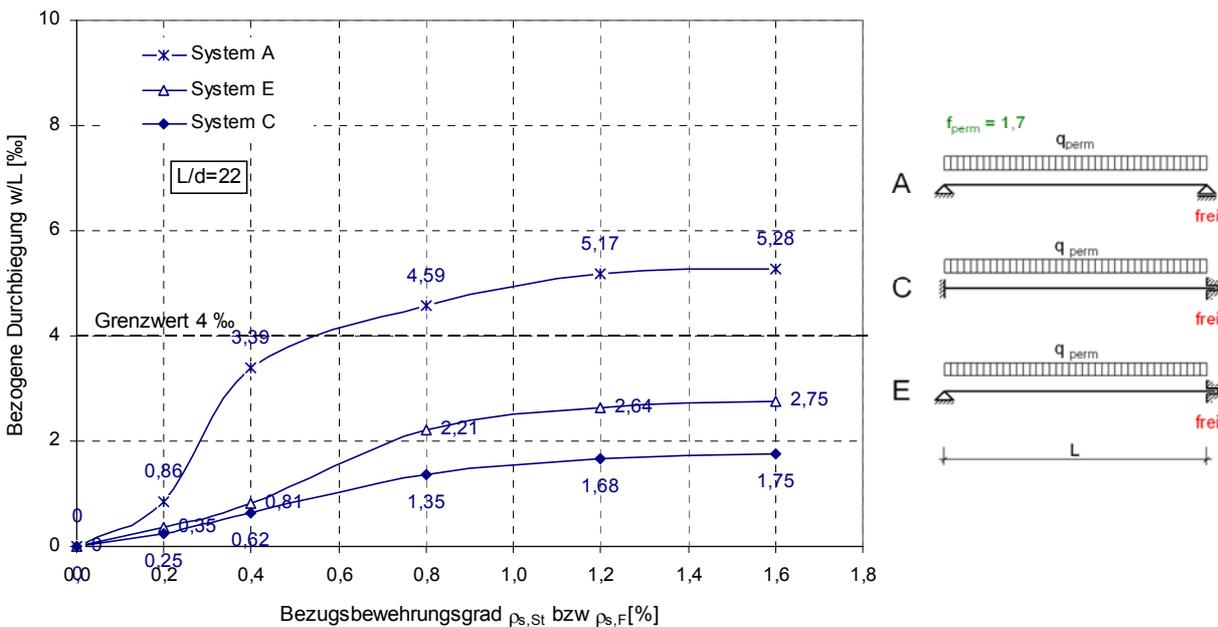


Bild 133: Systeme A, C, E: Bezogene Durchbiegungen (q_{perm} + Kriechen)

Durchbiegungen unter Last und Schwinden

Unter Berücksichtigung des Schwindens nehmen die Durchbiegungen deutlich zu (Bild 135). Während bei den horizontal frei verschieblichen Systemen A, C und E (frei) nur die Schwindkrümmungen im Zustand II eine Vergrößerung der Durchbiegungen bei Systemen im Zustand II bewirken, führen vor allem die Zwangzugkräfte der horizontal unverschieblich gelagerten Systeme B, D und F (fix) zu einer Erhöhung der Durchbiegungen unter Verformungseinwirkung. Betroffen sind insbesondere Bauteile mit niedrigem erforderlichen Bewehrungsgrad. Beim Bewehrungsgrad $\rho_{s,F}=0,2\%$ (Bauteil über die ganze Länge im

Zustand I) führt die zusätzliche Verformungseinwirkung zur Rissbildung. Durch die daraus resultierende geringere Biegesteifigkeit nehmen die Durchbiegungen deutlich zu (Bild 133). Beim zwangsfreien System (Bild 134) verbleibt das Bauteil hingegen mehr im Zustand I. Der Einfluss aus der Zunahme der gerissenen Bereiche geht mit ansteigendem Bezugsbewehrungsgrad zurück.

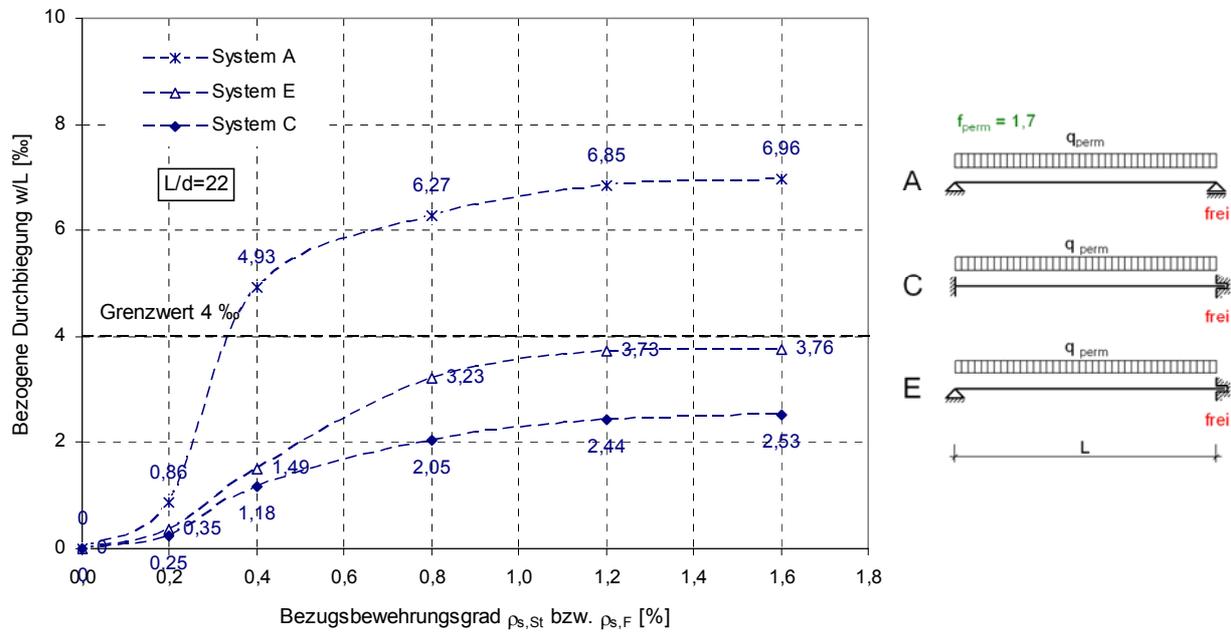


Bild 134: Systeme A, C, E: Bezogene Durchbiegungen (q_{perm} + Kriechen + Schwinden)

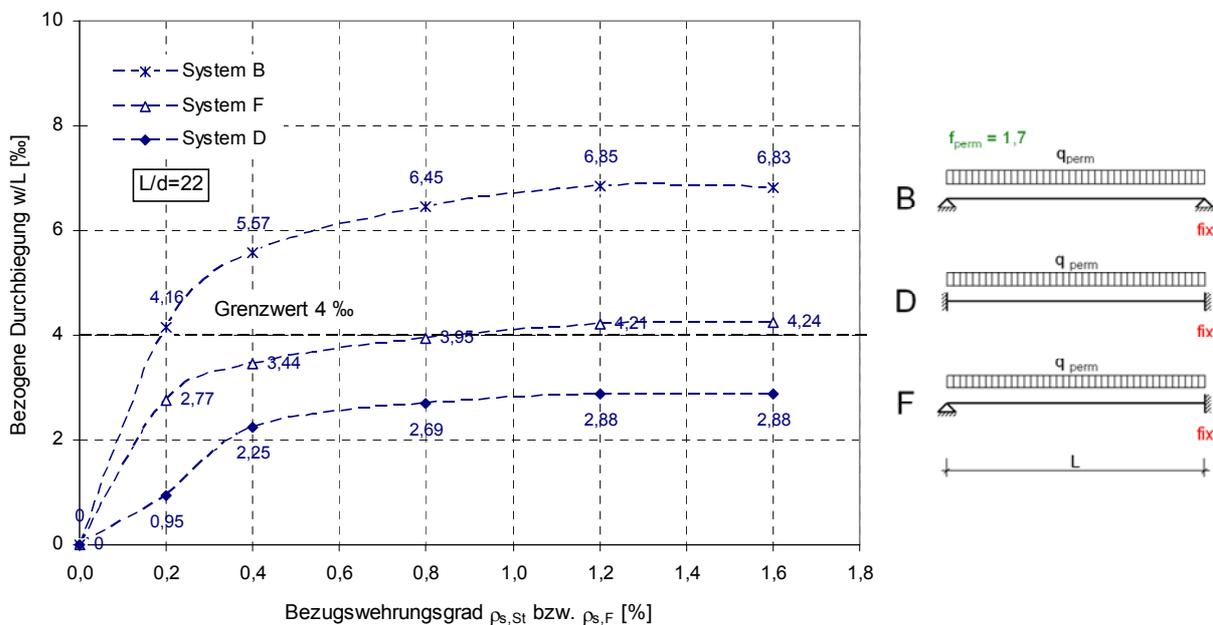


Bild 135: Systeme B, D, F: Bezogene Durchbiegungen (q_{perm} + Kriechen + Schwinden)

9.5 Parameterstudie Bewehrungsanordnung

9.5.1 Anordnung von symmetrischer Bewehrung

Wird die aus der behinderten Dehnung resultierende Zugkraft im Vergleich zur Zugkraft in der Bewehrung aus Lastbeanspruchung groß, so kann es sinnvoll sein, nur die Feldbewehrung zu erhöhen, da die Rissbreiten im Feld auf Grund des geringeren Bewehrungsgrades stärker ansteigen als im Einspannbereich (Bild 94). Der Bewehrungsgrad an der Einspannstelle wird beibehalten. Die Bewehrungsgrade unten sowie im Feldbereich oben werden verdoppelt. Dadurch ergibt sich eine symmetrische Bewehrungsverteilung über die ganze Länge und der Bewehrungsgrad entspricht überall dem statisch erforderlichen Bewehrungsgrad über der Stütze (Bild 136).

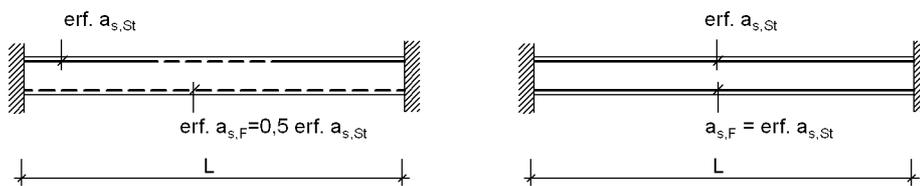


Bild 136: Bewehrungsanordnung BW0 und BW(symm)

Durch die Erhöhung des mittleren Bewehrungsgrades ergeben sich deutlich größere Zwangkräfte (Bild 137).

Der mittlere Bewehrungsgrad des symmetrisch bewehrten Systems ist wesentlich größer als der der bislang untersuchten Systeme mit statisch erforderlicher Bewehrung (Bewehrungsanordnung BW0).

$$\text{BW0:} \quad \rho_s (i.M.) = 1,33 \cdot \rho_{s,St} = 1,07\% \quad (9.52)$$

$$\text{BW(symm):} \quad \rho_s (i.M.) = 2,0 \cdot \rho_{s,St} = 1,6\% \quad (9.53)$$

Das Diagramm zur Ermittlung der Zwangnormalkräfte bei symmetrischer Bewehrungsanordnung zeigt Bild 137. Es ergeben sich auf Grund des höheren mittleren Bewehrungsgrades deutlich größere Zwangkräfte als beim System mit Bewehrungsanordnung BW0. Der Bewehrungsgrad an der Einspannstelle des symmetrisch bewehrten Systems bleibt unverändert und ist daher so groß wie der Bezugsbewehrungsgrad $\rho_{s,St}$, der den Belastungsgrad des Bauteils symbolisiert.

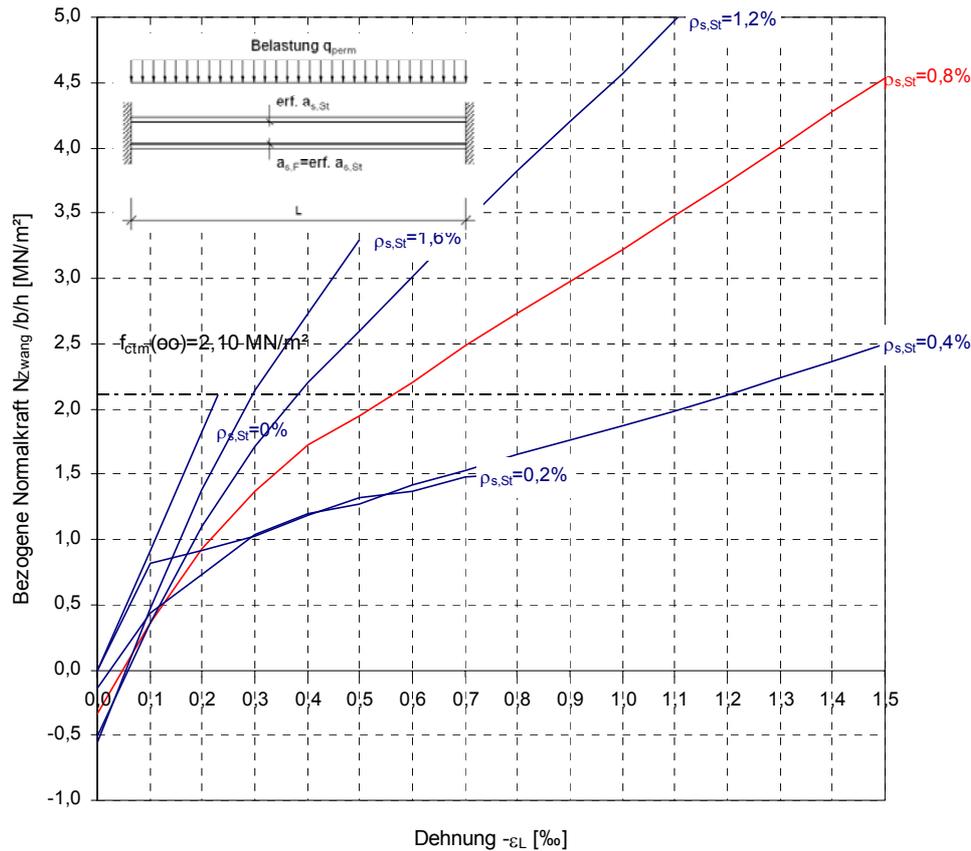


Bild 137: Bezogene Zwangnormalkräfte bei symmetrischer Bewehrung BW(symm)

Gleicher mittlerer Bewehrungsgrad

Nachfolgend werden zwei Systeme unter kombinierter Beanspruchung mit gleichen mittleren Bewehrungsgraden, jedoch unterschiedlicher Querbelastung, verglichen (Bild 138).

BW0: $\rho_{s,St} = 0,6\%$ $q_{perm} = 9,2kN / m$ $\rho_s(i.M.) = 0,8\%$

BW(symm): $\rho_{s,St} = 0,4\%$ $q_{perm} = 6,2kN / m$ $\rho_s(i.M.) = 0,8\%$

Durch die geringere Belastung beim System mit symmetrischer Bewehrungsanordnung verbleibt das Bauteil unter reiner Lastbeanspruchung mehr im Zustand I, so dass nahezu keine Druckkräfte auftreten. Dies führt zunächst im Bereich kleiner zusätzlicher Verformungseinwirkungen bei kombinierter Beanspruchung zu höheren Zwangzugkräften. Der Einfluss des Belastungsgrades geht bei großen Verformungseinwirkungen zurück und es ergeben sich – auf Grund des gleichen mittleren Bewehrungsgrades – gleich große Zwangkräfte für beide Systeme.

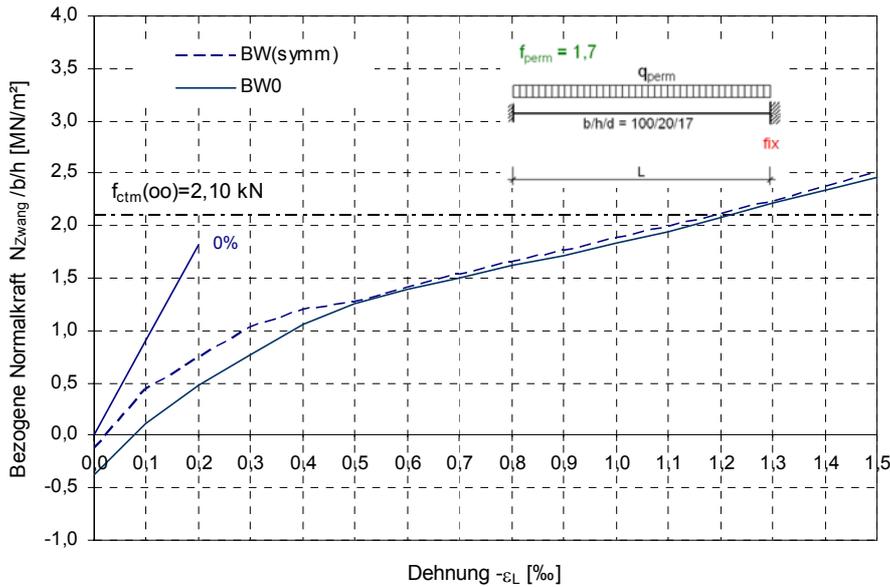


Bild 138: Vergleich der bezogenen Zwangnormalkräfte bei Variation der Bewehrungsanordnung

Rissbreiten

Anhand des Bezugssystems ($\rho_{s,St}=0,8\%$) wird im Folgenden aufgezeigt, welchen Einfluss die Erhöhung der Feldbewehrung auf die Rissbreiten hat. Die Rissbreiten werden für einen konkreten Querschnitt mit der ermittelten Normalkraft berechnet und können daher nicht dimensionslos angegeben werden.

Bild 139 zeigt die Rissbreiten im Feld und im Einspannbereich zweier Systeme unter gleicher Belastung, jedoch mit unterschiedlichem mittleren Bewehrungsgrad auf Grund der unterschiedlichen Bewehrungsverteilung BW0 und BW(symm).

BW 0: $\rho_{s,St} = 0,8\%$ $q_{perm} = 11kN / m$ $\rho_s(i.M.) = 1,07\%$

BW(symm): $\rho_{s,St} = 0,8\%$ $q_{perm} = 11kN / m$ $\rho_s(i.M.) = 1,6\%$

Die Rissbreiten im Feld werden im System mit symmetrisch angeordneter Bewehrung deutlich kleiner. Unter kombinierter Beanspruchung mit einer Dehnung von $\epsilon_L=-0,8\%$ ergibt sich im Feld eine Rissbreite von nur noch $w_k=0,2\text{mm}$.

Die Rissbreiten im Einspannbereich beider Systeme bleiben nahezu gleich. Sie werden beim System mit symmetrischer Bewehrungsanordnung im Bereich großer Verformungseinwirkungen sogar größer. Letzteres ergibt sich dadurch, dass bei gleich bleibender Bewehrung im Einspannbereich durch die Erhöhung des mittleren Bewehrungsgrades größere Zwangkräfte auftreten, welche eine Vergrößerung der Rissbreite zur Folge haben.

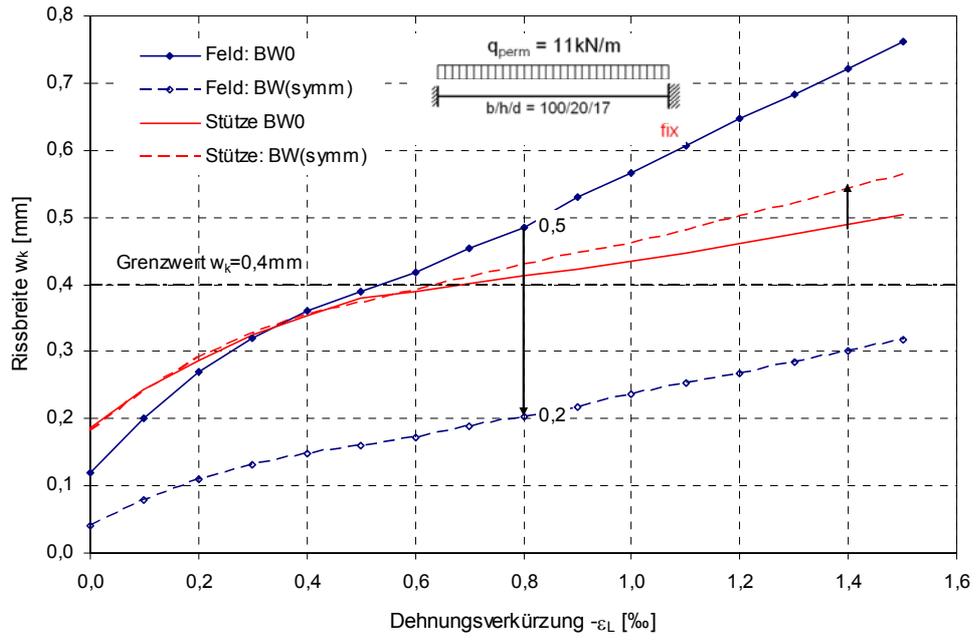


Bild 139: Rissbreiten des Bezugssystems ($\rho_{s,St}=0,8\%$) bei symmetrischer Bewehrungsanordnung

9.6 Normierte Normalkraft infolge Zwang

Während die Durchbiegung sich als bezogene Größe w/L mit den Parametern $\rho_{s,St}$ und L/d beschreiben lässt, wurde in den vorangehenden Studien die Normalkraft bisher i. d. R. als Absolutwert angegeben. Da die Querschnittsabmessungen nicht variiert wurden, sondern einheitlich mit $b/h/d=100/20/17$ angenommen wurden, ergab sich die Zwangskraft in Abhängigkeit vom Bezugsbewehrungsgrad $\rho_{s,St}$ und der Verformungseinwirkung ε_L in gleicher Höhe. Es liegt nahe, die Zwangkräfte für beliebige Querschnittsabmessungen b/h , für Rechteckquerschnitte in bezogener Form darzustellen:

$$n_{Zwang} = \frac{N_{Zwang}}{b \cdot h} \quad (9.54)$$

Bei Darstellung der Zwangkräfte in Abhängigkeit von der Dehnung ε_L ergibt sich je Bewehrungsgrad eine Kurve. Bei der nachfolgenden Studie wurden der Bezugsbewehrungsgrad ($\rho_{s,St}=0,8\%$) und die Stützweite beibehalten und der Rechteckquerschnitt in der Höhe und in der Breite variiert. Die in Kombination mit der Verformungseinwirkung angesetzte Querbelastung ist aus der statisch erforderlichen Bewehrung im GZT abgeleitet (siehe Abschnitt 9.2.1) und daher für die betrachteten Systeme unterschiedlich.

$b/h/d = 100/40/37$

$b/h/d = 100/30/27$

$b/h/d = 100/20/17$ (Bezugsquerschnitt)

$b/h/d = 50/30/27$

Da – wie in Abschnitt 9.3 gezeigt – die Schlankheit keinen Einfluss auf die Zwangskraft hat, können die Systeme trotz unterschiedlicher Schlankheiten miteinander verglichen werden.

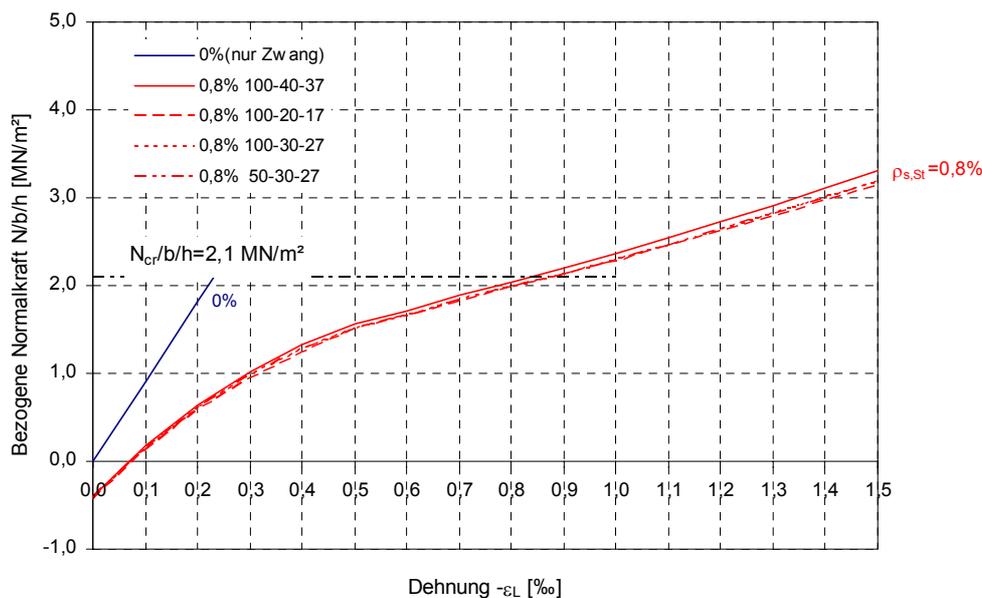


Bild 140: Ergebnisse der Querschnittsvariation für $\rho_{s,St} = 0,8\%$

Wie Bild 140 zeigt, ergeben sich für alle Querschnitte die gleichen bezogenen Normalkräfte. Somit kann die Ermittlung der Zwangnormalkraft beim beidseitig eingespannten System für Rechteckquerschnitte – unabhängig von den absoluten Querschnittsabmessungen - mit dem in Bild 141 dargestellten Diagramm erfolgen. Die sich ergebenden Zwangkräfte sind eine obere Abschätzung und ergeben sich in voller Größe nur im Grenzfall des horizontal unverschieblichen Systems. Bei der Erstellung des Diagramms gehen folgende Parameter als feste Größen ein:

- Zugfestigkeit des Betons beim Erreichen der Risschnittgrößen:
 $f_{ctm,\infty} = 70\% \cdot f_{ctm} = 2,1 \text{ MN} / \text{m}^2$
- Zugfestigkeit des Betons im Bereich der abgeschlossenen Rissbildung:
 $0,25 \cdot f_{ctm} = 0,25 \cdot 3,0 \text{ MN} / \text{m}^2$
- Bewehrungsverteilung gemäß linear elastischer Berechnung für q_{perm}
- Belastungsfaktor: $f_{perm} = 1,7$

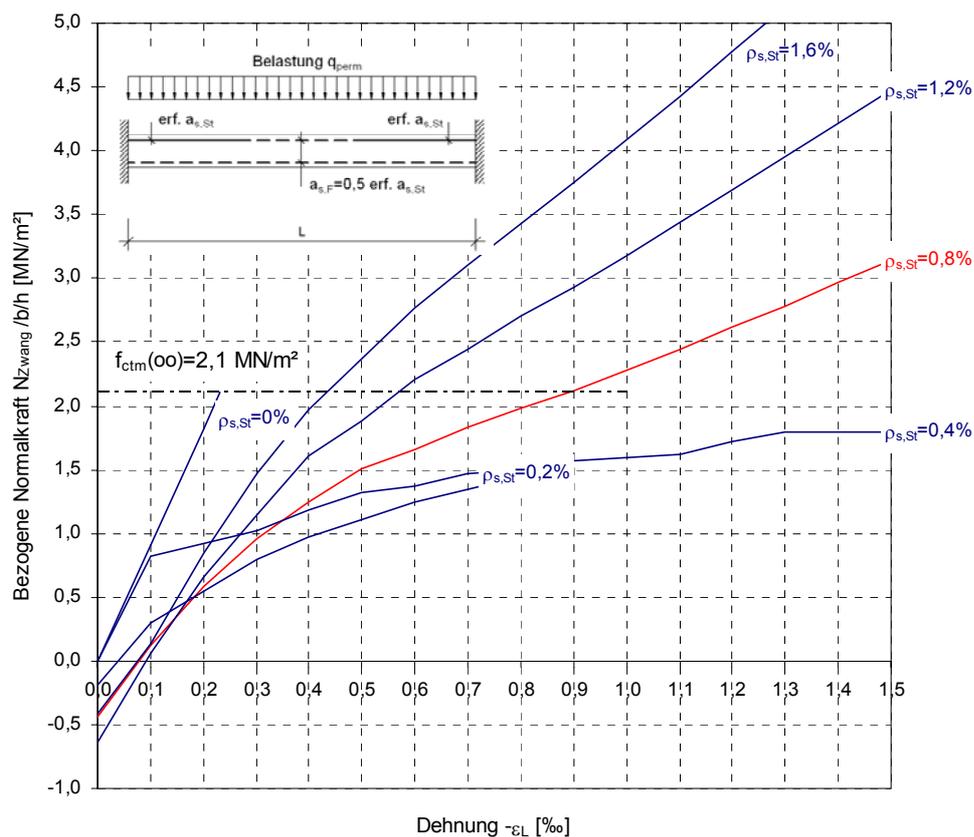


Bild 141: Dimensionsloses Diagramm zur Ermittlung der Zwangnormalkraft
 Bezugswert der Betonzugfestigkeit: $f_{ctm} = 3,0 \text{ MN} / \text{m}^2$

9.7 Zusammenfassung der numerischen Untersuchungen

Mit Hilfe der numerischen Simulation konnten die Parameter, die die Durchbiegungen und Rissbreiten entscheidend bestimmen, herausgefunden werden. Dabei ergaben sich für die Durchbiegungen andere relevante Parameter als für die Rissbreiten.

Die Studie beruht auf dem Ansatz, über die vom Bauteil vorgegebenen Parameter auf die zu erwartenden Durchbiegungen und Rissbreiten zu schließen. Der statisch erforderliche Bewehrungsgrad im Grenzzustand der Tragfähigkeit (GZT) wird als Bezugsbewehrungsgrad definiert und ist der wichtigste Parameter zur Beschreibung des Belastungsgrades. Der Bezugsbewehrungsgrad und die damit verbundene Größe der Belastung spiegelt die Ausdehnung der gerissenen und ungerissenen Bereiche wider. Über ihn wird mit Hilfe des in dieser Arbeit hergeleiteten Belastungsfaktors f_{perm} auf das quasi-ständige Belastungsniveau geschlossen.

Durchbiegungen

Zur Ermittlung der größten zu erwartenden Durchbiegungen müssen neben dem Steifigkeitsabfall infolge der Rissbildung die zeitabhängigen Einflüsse aus dem Kriechen und Schwinden des viskoelastischen Betons immer berücksichtigt werden. Die in der numerischen Simulation berechneten Durchbiegungen sind Endwerte, die erst auftreten, wenn sich die zeitabhängigen Verformungen des viskoelastischen Werkstoffs Beton in ihrer nahezu vollen Größe eingestellt haben.

Bei der hier einheitlich gewählten Kriechzahl von $\varphi=2,5$ vergrößern sich die Durchbiegungen des gerissenen Stahlbetonbauteils um den Faktor 2 bis 3 bezogen auf die Durchbiegungen zum Zeitpunkt $t=0$.

Der Einfluss des Schwindens auf die Durchbiegungen ist relativ groß und muss deswegen bei der Durchbiegungsberechnung immer mit berücksichtigt werden. Die bezogenen Schwindverformungen nehmen mit der Schlankheit zu. Mit dem hier einheitlich angenommenen Endschwindwert von $\varepsilon_{cs}(\infty)=-0,5\text{‰}$ ergeben sich nahezu unabhängig vom untersuchten Tragsystem bezogene Schwindverformungen von $w_{s,perm}/L=(1-2)\text{‰}$ beim horizontal frei verschieblichen System und $w_{s,perm}/L=(1-4)\text{‰}$ im Grenzfall des horizontal unverschieblich gelagerten Bauteils. Beim horizontal unverschieblich gelagerten System führt insbesondere die durch Dehnungsbehinderung hervorgerufene Zwangnormalkraft zu einer weiteren Reduzierung der Steifigkeit. Besonders stark wirkt sich das Schwinden auf gedrungene Systeme mit niedrigem Bezugsbewehrungsgrad aus. Diese Systeme haben von Haus aus jedoch viel kleinere bezogene Durchbiegungen als schlanke Systeme mit hohem Bezugsbewehrungsgrad.

Die Durchbiegungen werden im Wesentlichen durch die Parameter Tragsystem (statische Randbedingungen), Schlankheit und Belastungsgrad (Bezugsbewehrungsgrad + Belastungsfaktor) beeinflusst. Die absolute Systemlänge hat keinen Einfluss auf die bezogene Durchbiegung w/L . Die zu erwartenden Durchbiegungen sind beim beidseitig gelenkig gelagerten Einfeldträger naturgemäß am größten.

Nach dem Tragsystem ist die Schlankheit das wichtigste Kriterium zur Beurteilung der zu erwartenden Durchbiegungen. Mit zunehmender Schlankheit nehmen die Durchbiegungen des

Biegebauteils deutlich zu. Bei gleichem Bezugsbewehrungsgrad und Belastungsfaktor ist der Zusammenhang zwischen der Schlankheit und den bezogenen Durchbiegungen in Feldmitte linear.

Die beim horizontal unverschieblich gelagerten System_fix entstehenden Zwangnormalkräfte vergrößern die Durchbiegungen unter kombinierter Beanspruchung deutlich und sind daher nicht vernachlässigbar. Mit zunehmender Zwangskraft erreichen die bezogenen Durchbiegungen einen Maximalwert und nehmen danach wieder ab. Sehr große Zugkräfte wirken sich infolge der Einflüsse nach Theorie II. Ordnung positiv auf die Durchbiegungen aus.

Die Zwangnormalkräfte können infolge einer behinderten Dehnung aus Schwinden, aus Temperatureinwirkung (zentrische Abkühlung) oder durch eine Kombination aus beidem entstehen. Zum Zeitpunkt $t=0$ werden die Durchbiegungen durch eine zusätzliche Temperatureinwirkung deutlich größer, während zum Zeitpunkt $t=\infty$ der Zuwachs an Durchbiegung infolge der gleichen Temperatureinwirkung geringer ist.

Rissbreiten

Die Untersuchungen zur Rissbreite erfolgen am beidseitig starr eingespannten System, welches stellvertretend für ein Mittelfeld eines Durchlaufträgers steht. Dabei erfolgt die Auswertung immer für den Grenzfall des horizontal unverschieblichen Systems (System_fix). Im Mittelpunkt stehen die ausreichend genaue Ermittlung der zu erwartenden Zwangnormalkraft unter kombinierter Beanspruchung und deren Auswirkung auf die Rissbreiten.

Der Bewehrungsgrad und die Größe der Verformungseinwirkung sind die wesentlichen Parameter bei der Berechnung der Zwangnormalkräfte. Die Schlankheit hat keinen, die Randeinspannung und das Kriechen haben nur einen untergeordneten Einfluss auf die Zwangnormalkraft.

Mit zunehmendem Bewehrungsgrad und zunehmender Verformungseinwirkung (zentrische Dehnung) nehmen die Zwangnormalkräfte stark zu.

Die Zwangnormalkraft erreicht nur bei hohen Bezugsbewehrungsgraden und bei großen zusätzlichen Verformungseinwirkungen die Rissnormalkraft entsprechend einer reinen Normalkraftbeanspruchung (Bild 141). In solchen Fällen ist die Gefahr einer Trennrissbildung in Bereichen der Momentennullpunkte gegeben.

Bei geringen statisch erforderlichen Bewehrungsgraden ($\rho_{s,St}=0,2\%$ und $\rho_{s,St}=0,4\%$) wird die Rissnormalkraft N_{cr} nicht erreicht, wenn lediglich die statisch erforderliche Bewehrung im GZT angeordnet wird. Die kombinierte Beanspruchung aus Last und Zwang führt zu einem starken Anstieg der Rissbreiten (Bild 112) und kann ein Fließen der Bewehrung zur Folge haben. Bauteile mit niedrigem Bezugsbewehrungsgrad sind somit hinsichtlich einer Überschreitung der zulässigen Rissbreiten besonders gefährdet.

Eine Bewehrungserhöhung erhöht zwar die Zwangnormalkräfte, wirkt sich dennoch günstig auf die Rissbreiten aus und ist daher ein wirksames Mittel zur Einhaltung der geforderten Rissbreiten. Sie wird vor allem im Feld, bei hohen Anforderungen an die Rissbreite aber auch im Einspannbereich erforderlich. Dadurch erhöht sich der mittlere Bewehrungsgrad ρ_s (i. M.) und – bei Bewehrungserhöhung nur im Feldbereich – auch die Bewehrungsverteilung.

10 Vergleich mit den Regelungen der DIN 1045-1

10.1 Vereinfachter Nachweis der Durchbiegungsbegrenzung über die Begrenzung der Biegeschlankheit

Die Begrenzung der Verformungen eines Tragwerks im Gebrauchszustand dient zur Gewährleistung der Gebrauchstauglichkeit, der Funktionsfähigkeit sowie eines optisch ansprechenden Erscheinungsbildes. Bei Deckenplatten des üblichen Hochbaus hat insbesondere die Vermeidung von Schäden an angrenzenden Bauteilen (z.B. Trennwände) eine wichtige Bedeutung. Zulässige Grenzwerte, welche im Hinblick auf Durchbiegungen und Rissbreiten für ein Bauwerk unbedenklich sind, können nicht einheitlich angegeben werden, da sie von der Art und den Anforderungen an das Tragwerk und des Ausbaus abhängen. Daher sind Grenzwerte im Einzelfall – gegebenenfalls in Rücksprache mit den übrigen am Bau Beteiligten – zu spezifizieren.

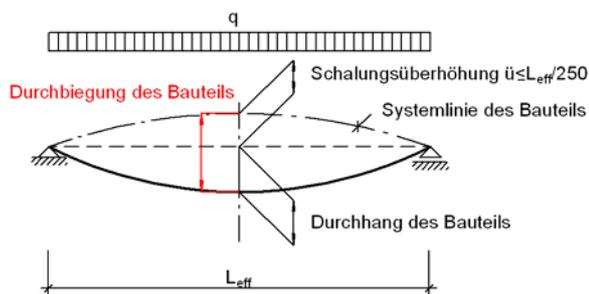
Als Anhaltspunkte können dennoch die in DIN 1045- 1 [DIN 8] angegebenen Grenzwerte dienen. Dabei handelt es sich um eine Anwendungsregel, welche als Empfehlung für Standardfälle zu sehen ist. Es kann sein, dass eine Überschreitung der Grenzwerte nicht zwangsläufig zu Mängeln führt, wohingegen es auch Fälle geben kann, in denen es trotz Einhaltung der Grenzwerte zu Schäden kommt. Daher sind die zulässigen Grenzwerte im Einverständnis zwischen dem Bauherrn, dem Tragwerksplaner und den übrigen Planungsbeteiligten festzulegen.

Die in DIN 1045–1 angegebenen Grenzwerte für den Durchhang eines Bauteils unter quasi-ständiger Belastung werden im Rahmen dieser Arbeit nicht auf ihre Gültigkeitsgrenzen hin überprüft, sondern zunächst vorausgesetzt.

Grenzwerte nach DIN 1045-1:

$$w / L = 1 / 250 = 4\text{‰} \quad (\text{allgemein}) \quad (10.1)$$

$$w / L = 1 / 500 = 2\text{‰} \quad (\text{für erhöhte Anforderungen}) \quad (10.2)$$



Der Nachweis der Begrenzung der Durchbiegung im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit (GZG) kann gemäß DIN 1045-1 (11.2) über eine rechnerische Ermittlung der Durchbiegungen unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination unter Begrenzung auf die in Gl. 10.1 und 10.2 angegebenen Werte geführt werden. Es entspricht dem Stand der Technik, die Durchbiegung unter Berücksichtigung des teilweisen Übergangs des Bauteils in den gerissenen Zustand II sowie unter Berücksichtigung der Langzeiteinflüsse aus Kriechen und Schwinden

des Betons zu ermitteln. Dies kann mit einer numerischen nichtlinearen Berechnung oder mit Hilfe eines geeigneten Näherungsverfahrens erfolgen.

Da die rechnerische Ermittlung der Durchbiegungen aufwendig ist, bietet DIN 1045-1 unter gewissen Voraussetzungen für Standardfälle ein vereinfachtes Nachweisverfahren an. Nach DIN 1045-1, Abschnitt 11.3 darf die Begrenzung der Durchbiegung für Stahlbetonbauteile vereinfacht über die Begrenzung der Biegeschlankheit L_i/d nachgewiesen werden.

Grenzwerte für die Biegeschlankheit:

$$L_i / d \leq 35 \quad (\text{allgemein}) \quad (10.3)$$

$$L_i^2 / d \leq 150 \quad (\text{für erhöhte Anforderungen}) \quad (10.4)$$

mit L_i in m $L_i = L_{eff}$ (für den beidseitig gelenkig gelagerten Einfeldträger)

Bei der Begrenzung der Biegeschlankheit handelt es sich um ein einfaches Näherungsverfahren, das in den 1960er Jahren rein empirisch auf der Grundlage einer Schadensstatistik entwickelt wurde [May 48]. Aus diesen Untersuchungen wurde insbesondere das zweite Kriterium für die erhöhten Anforderungen abgeleitet. Seitdem wurden sowohl die Bemessungsverfahren als auch die Baustofffestigkeiten weiterentwickelt, so dass die Voraussetzungen für das Näherungsverfahren heute nicht mehr streng gültig sind. Die Baustoffe werden heutzutage höher ausgenutzt, so dass die Krümmungen und die Durchbiegungen größer sind als früher. Daher stellt sich die Frage, unter welchen Randbedingungen das Verfahren über die Begrenzung der Biegeschlankheit noch ausreichend zuverlässige Bemessungsergebnisse liefert und welche Auswirkungen eine zusätzliche zentrische Zwangbeanspruchung auf die Größe der Durchbiegungen hat.

10.1.1 Grenzwert der Biegeschlankheit $L_i/d = 35$

Die numerische Simulation ergibt, dass die bezogene Durchbiegung w/L in erster Linie eine Funktion von der Biegeschlankheit L/d ist. Bei konstantem Bezugsbewehrungsgrad ergibt sich ein linearer Zusammenhang. Daher erscheint es prinzipiell sinnvoll, anstelle der Begrenzung der bezogenen Durchbiegung eine Begrenzung der Biegeschlankheit L_i/d vorzunehmen.

Bei der numerischen Untersuchung sind die angesetzten Parameter so gewählt, dass sie die Verhältnisse eines Bauteils im Mittel repräsentieren. Die wichtigsten bei der Untersuchung fest eingehenden Parameter sind:

Material:	C 30/37:	$f_{ctm} = 3,0MN / m^2$	$E_{c0m} = 31900MN / m^2$
	BSt 500	$E_s = 200000MN / m^2$	

Kriechen und Schwinden: $\varphi = 2,5$ $\varepsilon_{cs}(\infty) = -0,5\%$

Belastung: $f_{perm} = q_{Ed} / q_{perm} = 1,7$

Liegen im Einzelfall davon deutlich abweichende Randbedingungen vor, können sich abweichende Durchbiegungen gegenüber den hier durchgeführten Berechnungen ergeben. Die Einflüsse aus Kriechen und Schwinden sind separat analysiert, so dass die Einflüsse aus stark abweichenden Kriech- und Schwindbeiwerten abgeschätzt werden können.

Zur Überprüfung des Grenzwertes $L_i/d=35$ werden die in der numerischen Simulation untersuchten Tragsysteme bei gleichem Bezugsbewehrungsgrad (Bild 101) $\rho_{s,St}=0,8\%$ bzw. $\rho_{s,F}=0,6\%$ verglichen. Dabei wird grundsätzlich zwischen den horizontal frei verschieblichen Systemen (System_frei) ohne zentrischen Zwang und den horizontal unverschieblich gelagerten Systemen (System_fix) mit zentrischem Zwang unterschieden, die zwei Grenzfälle darstellen. Der Vergleich erfolgt für den Lastfall permanente Lasten unter Berücksichtigung der zeitabhängigen Verformungen des Betons ($q_{perm} + \text{Kriechen} + \text{Schwinden}$).

Systeme A, C und E (System_frei) ohne zentrischen Zwang

(Bild 142) zeigt die bezogenen Durchbiegungen unter Lastbeanspruchung für die horizontal frei verschieblichen Systeme unter Berücksichtigung der Rissbildung, des Kriechens und Schwindens. Der beidseitig gelenkig gelagerte Einfeldträger (System A) ist das empfindlichste Tragsystem bezüglich der Durchbiegungen, was mit daran liegt, dass systemabhängig die Ausdehnung der gerissenen Bereiche beim beidseitig gelenkig gelagerten Bauteil am größten ist (Bild 103). Bei einem Bezugsbewehrungsgrad von $\rho_{s,F}=0,8\%$ liegen die bezogenen Durchbiegungen weit über dem Grenzwert $w/L=1/250=4\text{‰}$, so dass eine Überhöhung des Bauteils vorgesehen werden muss. Im Bereich großer Schlankheiten ($L/d > 30$) sind die Durchbiegungen selbst bei maximal zulässiger Überhöhung gegenüber den empfohlenen Grenzwerten nach DIN 1045-1 unzulässig groß (Bild 142). Im Vergleich zum Einfluss aus dem Tragsystem (Randbedingungen) ist der Einfluss des Bezugsbewehrungsgrades gering (siehe Bild 128).

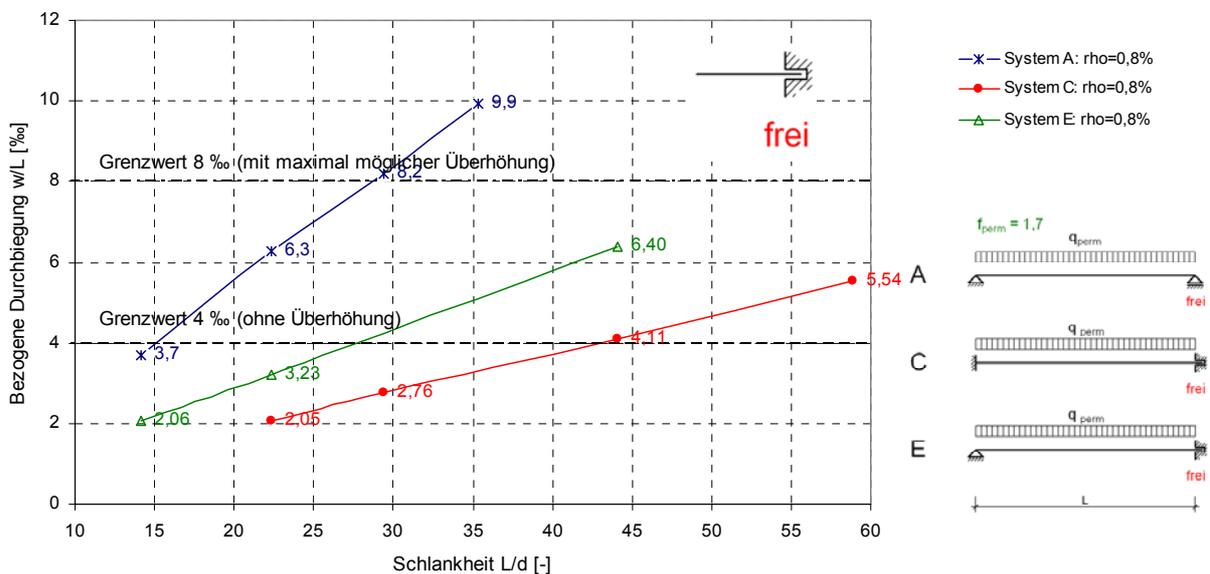


Bild 142: Systeme A, C, E ($\rho_{s,St}=0,8\%$ bzw. $\rho_{s,F}=0,8\%$):
 Bezogene Durchbiegungen ($q_{perm} + \text{Kriechen} + \text{Schwinden}$)

System B, D und F (System_fix) mit zentrischem Zwang

Für die horizontal unverschieblichen Systeme sind die Durchbiegungen für den Lastfall ($q_{perm} + \text{Kriechen} + \text{Schwinden}$) durch den zentrischen Zwang infolge der behinderten Schwindverkürzung etwas größer (Bild 143). Beim beidseitig gelenkig gelagerten Einfeldträger ist die Ausdehnung der gerissenen Bereiche unter Lastbeanspruchung schon so ausgeprägt, dass die Steifigkeiten bei einer zusätzlichen behinderten Verformungseinwirkung infolge zentrischen Zwangs nicht mehr stark reduziert werden. Daher ergeben sich für die Systeme A und B nahezu die gleichen bezogenen Durchbiegungen (Bild 143).

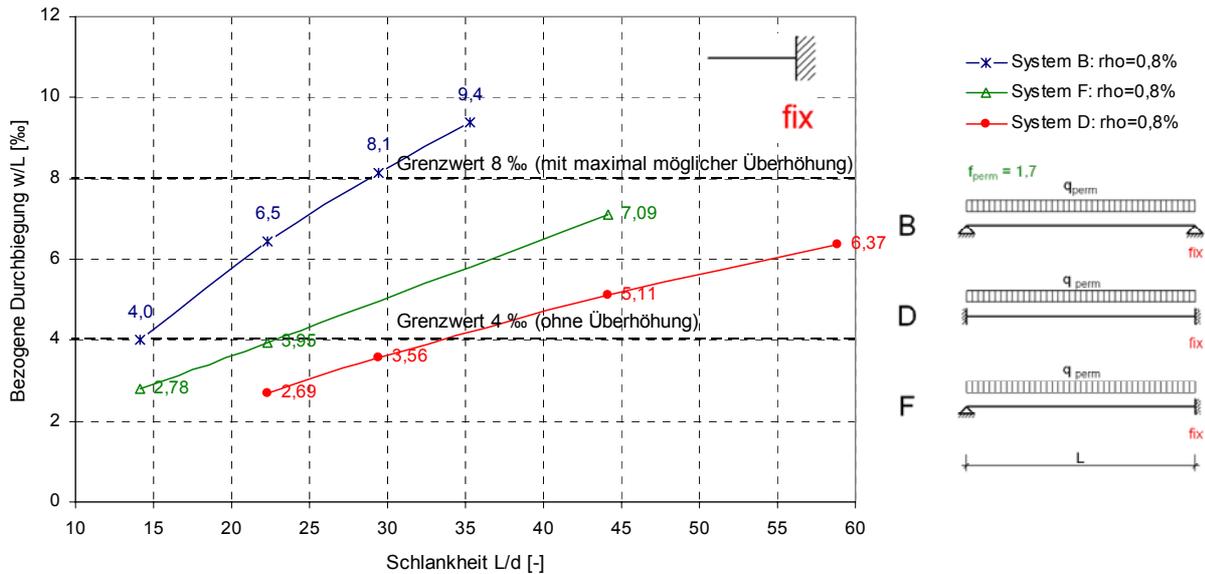


Bild 143: Systeme B, D, F ($\rho_{s,St} = 0,8\%$ bzw. $\rho_{s,F} = 0,8\%$): Bezogene Durchbiegungen ($q_{perm} + \text{Kriechen} + \text{Schwinden}$)

Übertragung auf Systeme mit Randeinspannung

Um den vereinfachten Nachweis über die Begrenzung der Biegeschlankheit auch für den Systemeinfluss aus einseitiger oder beidseitiger Randeinspannung führen zu können, wird in der DIN 1045-1 die Ersatzstützweite L_i eingeführt. Damit werden Systeme mit Randeinspannung auf das System eines Einfeldträgers als Ersatzträger mit äquivalenter Stützweite zurückgeführt.

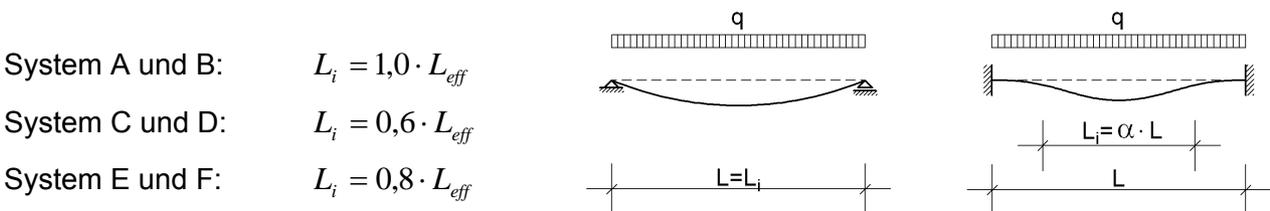


Bild 144: Ersatzstützweite L_i

Die zur Ermittlung der Ersatzstützweite in Tabelle 22 der DIN 1045-1 angegebenen Beiwerte α werden im Folgenden vergleichend untersucht. Dazu werden die in der numerischen Simulation ermittelten bezogenen Durchbiegungen in Abhängigkeit von L_i/d dargestellt.

Durchbiegungen in Abhängigkeit von L_i/d (Systeme A, C und E ohne Zwang)

Mit den in der DIN 1045-1 angegebenen Beiwerten ergeben sich in Abhängigkeit von L_i/d die in Bild 145 dargestellten bezogenen Durchbiegungen für die Systeme ohne zentrischen Zwang. Die bezogenen Durchbiegungen der Systeme mit Randeinspannung (C bzw. E) liegen immer noch deutlich unter den Werten des beidseitig gelenkig gelagerten Systems A.

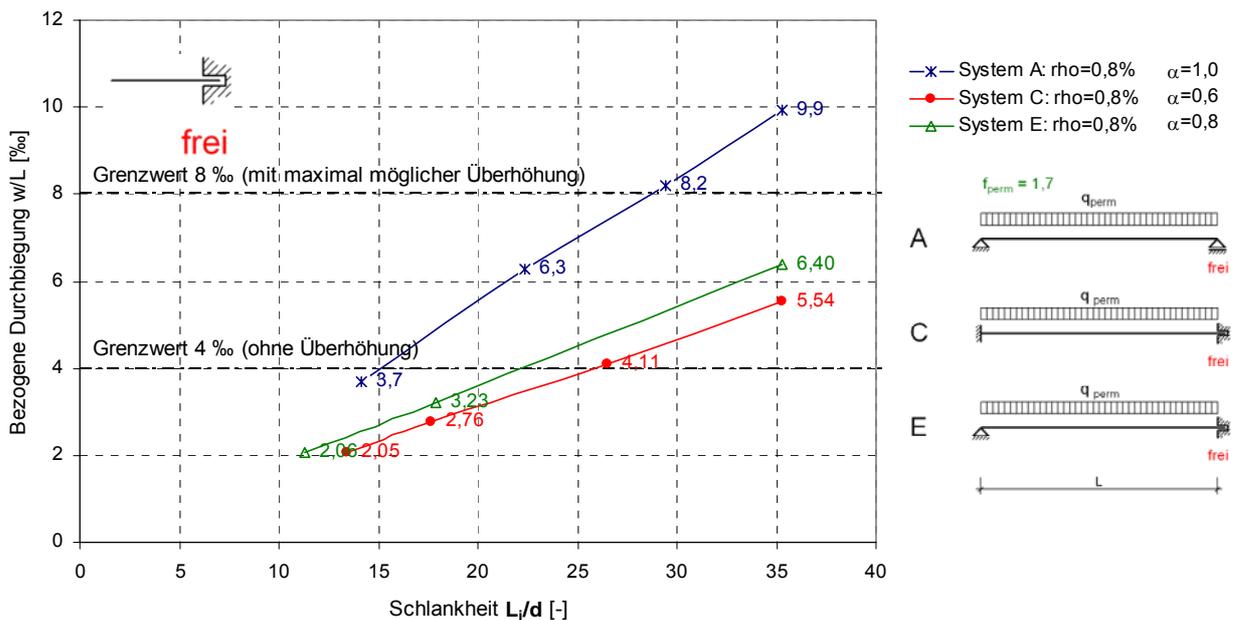


Bild 145: Systeme A, C, E ($\rho_{s,St}=0,8\%$ bzw. $\rho_{s,F}=0,6\%$): Bezogene Durchbiegungen (q_{perm} + Kriechen + Schwinden) in Abhängigkeit von L_i/d

Der Grenzwert $L/250$ wird beim System A mit einer Schlankheit von $L_i/d=35$ selbst bei einer maximalen Überhöhung des Bauteils nicht eingehalten. Daher sollte beim System A der empfohlene Grenzwert $L_i/d=35$ nicht ausgenutzt werden, sondern eher nachfolgender Grenzwert eingehalten werden:

System A ($\rho_{s,F} \leq 0,8\%$): $L_i / d \leq 30$

Bei den Systemen C und E hingegen kann der empfohlene Grenzwert von $4\text{‰} = 1/250$ mit der Begrenzung der Biegeschlankheit auf $L_i/35$ problemlos eingehalten werden. Dabei ist jedoch ab einer bestimmten Schlankheit eine Überhöhung des Bauteils vorzusehen.

Grenzwerte, bei denen eine Schalungsüberhöhung vorgesehen werden muss:

System A ($\rho_{s,F} \leq 0,6\%$): Schalungsüberhöhung ab $L_i/d > 17$

System C ($\rho_{s,St} \leq 0,8\%$): Schalungsüberhöhung ab $L_i/d > 26$

System E ($\rho_{s,St} \leq 0,8\%$): Schalungsüberhöhung ab $L_i/d > 22$

Die hier angegebenen Werte sind im Bereich geringer Bezugsbewehrungsgrade gültig. Damit beschränkt sich der Gültigkeitsbereich des vereinfachten Verfahrens im Wesentlichen auf Decken, da bei Balken im Allgemeinen größere Bezugsbewehrungsgrade vorliegen.

Durchbiegungen in Abhängigkeit von L_i/d (Systeme B, D und F mit Zwang)

Durch den hinzukommenden zentrischen Zwang vergrößern sich die Durchbiegungen des beidseitig gelenkig gelagerten Systems nicht wesentlich. Für die beiden Systeme A und B ergeben sich nahezu die gleichen bezogenen Durchbiegungen.

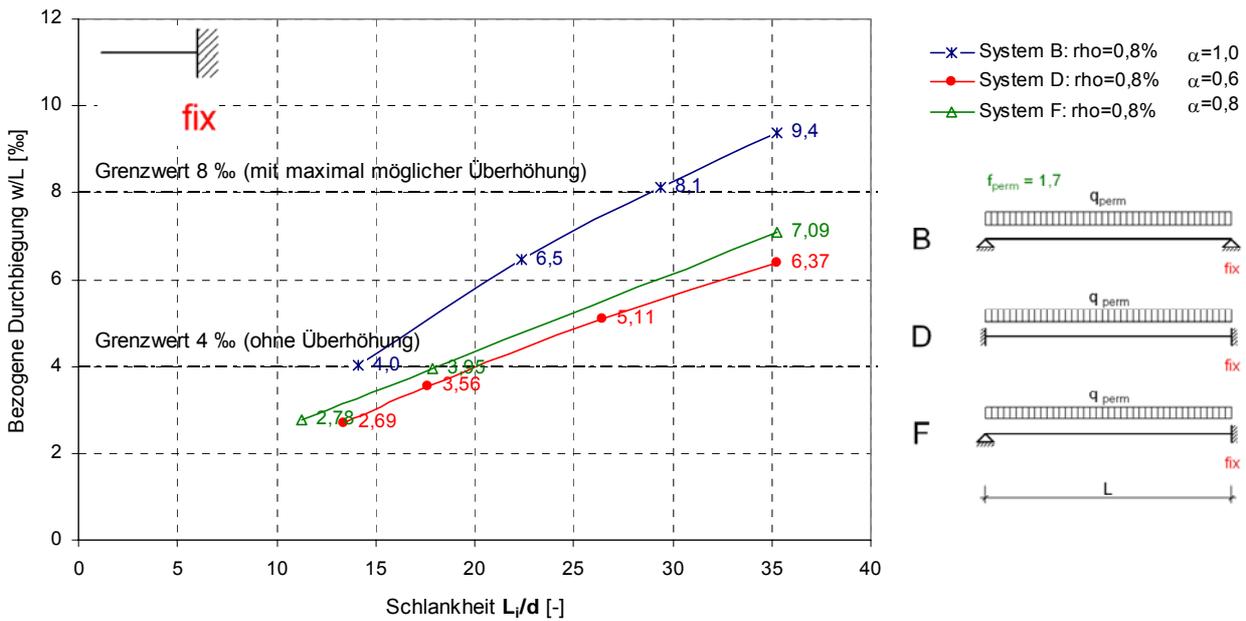


Bild 146: Systeme B, D, F ($\rho_{s,ST}=0,8\%$ bzw. $\rho_{s,F}=0,68\%$):
 Bezogene Durchbiegungen (q_{perm} + Kriechen + Schwinden) in Abhängigkeit von L_i/d

Bei den beiden anderen Systemen (D und F) mit Randeinspannung ist der Zuwachs durch den zentrischen Zwang gering. Diese Systeme haben bei einer Schlankheit von $L_i/d=35$ selbst beim System mit Zwang noch eine „Reserve“ von 1,4‰ bzw. 0,9‰ bis zum Erreichen des oberen Grenzwertes von 8‰. Das Schlankheitskriterium von $L_i/d=35$ sollte dennoch beibehalten werden, da die hier gewählten Grundsysteme häufig als Ersatzsysteme für die Durchbiegungsbegrenzung am Durchlaufträger gewählt werden. Beim Durchlaufträger können durch feldweise Belastung (Lastfall Verkehr) oder durch ungleiche Stützweiten größere Durchbiegungen auftreten. Auf Grund dieser Einflüsse bei Systemen mit elastischen Randeinspannungen und feldweise ungünstiger Belastung ist das Vorhalten einer „Reserve“ sinnvoll.

10.1.2 Grenzwert $L_i^2/d=150$

Der Grenzwert $L_i^2/d=150$ für erhöhte Anforderungen an die Durchbiegungsbegrenzung gilt für den Zuwachs an Durchbiegungen, der ab dem Zeitpunkt entsteht, ab dem verformungsempfindliche Bauteile eingebaut werden. Diese können dadurch bestimmt werden, indem vom Endwert der zu erwartenden Durchbiegungen zum Zeitpunkt $t=\infty$ der bis zum Zeitpunkt t_1 des Ausbaus entstandene Anteil an Durchbiegung abgezogen wird. Für den Fall, dass die verformungsempfindlichen Bauteile leicht sind (z. B. leichte Trennwände), kann der durch die leichten Trennwände selbst entstehende Anteil an der Durchbiegung vernachlässigt werden.

Die aus der Deckenlast entstehende Durchbiegung bis zum Zeitpunkt t_1 setzt sich aus der elastischen Durchbiegung zum Zeitpunkt $t=0$, sowie aus den bis zum Zeitpunkt t_1 entstehenden zeitabhängigen Kriech- und Schwindanteilen zusammen. Sie ist vom Belastungsniveau bis zum Zeitpunkt t_1 sowie vom Zeitpunkt t_1 des Ausbaus abhängig. Wie der zeitliche Verlauf der Kriechzahl zeigt (Bild 17), nimmt die Kriechzahl und damit auch die Durchbiegung in den ersten Tagen am stärksten zu.

Unter der Annahme, dass im Anfangszeitraum bis zum Zeitpunkt t_1 eine Belastung von $0,7 q_{perm}$ vorhanden ist, und zum Zeitpunkt des Ausbaus für den Eigengewichtsanteil eine Kriechzahl von 50% des Endwertes erreicht ist, wird die ab dem Zeitpunkt t_1 entstandene Durchbiegung nachfolgend wie folgt abgeschätzt:

Zuwachs an Durchbiegung ab dem Zeitpunkt t_1 :

$$w_1 = w_\infty (q_{perm} + c + s) - 0,7 \cdot w_{0,perm} - 0,7 \cdot 0,5 \cdot w_{c,perm} - 0 \cdot w_{s,perm} \quad (10.5)$$

w_1 Durchbiegung, die ab dem Zeitpunkt t_1 bis zum Zeitpunkt t_∞ zu erwarten ist

t_1 Zeitpunkt des Einbaus verformungsempfindlicher Bauteile

Da das Schwinden ein allmählicher Prozess ist, wird hier konservativ davon ausgegangen, dass die gesamte Schwindverformung erst nach dem Zeitpunkt t_1 auftritt.

Durchbiegungszuwachs am System A (ohne zentrischen Zwang)

Bild 147 zeigt die so ermittelten bezogenen Durchbiegungen w_1/L für das horizontal frei verschiebliche System A. Für den Zuwachs an Durchbiegung ab dem Zeitpunkt t_1 ergibt sich eine lineare Funktion in Abhängigkeit von der Schlankheit bei gleichem Bezugsbewehrungsgrad. Der Grenzwert von $1/500=2\text{‰}$ ist in allen Fällen überschritten. Die bezogenen Durchbiegungszuwächse ab dem Zeitpunkt t_1 betragen in den hier untersuchten Fällen:

Bezogene Durchbiegungen:

$$w_1 / L \approx (2 - 6) \text{‰} \quad (10.6)$$

Die erhöhten Anforderungen an die Durchbiegungsbegrenzung sind beim Einfeldsystem mit beidseitig gelenkiger Lagerung nur sehr schwer für Deckenplatten mit üblichen Schlankheiten

realisierbar. Es empfiehlt sich in jedem Fall eine rechnerische Ermittlung der Durchbiegungen mit den tatsächlich vorhandenen Parametern.

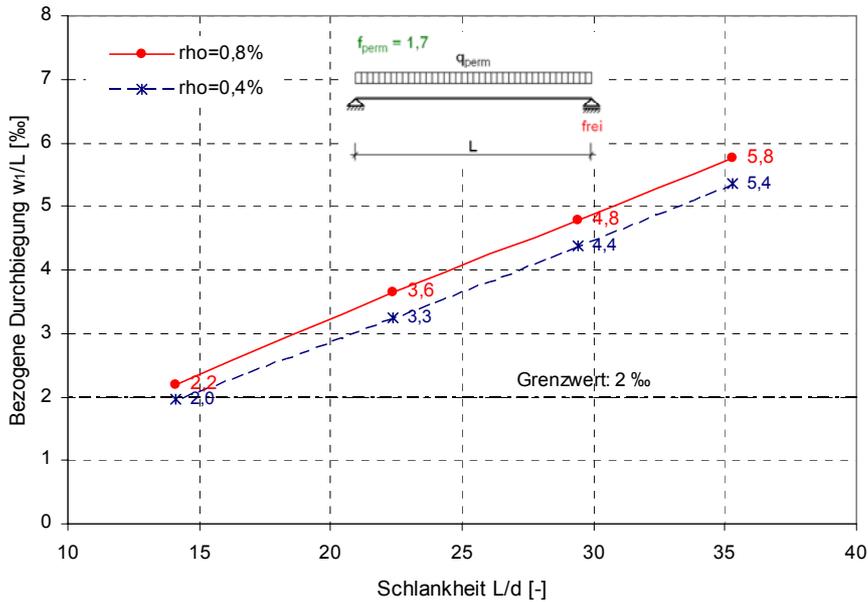


Bild 147: System A: Zuwachs der bezogene Durchbiegungen (ab dem Zeitpunkt t_1 des Ausbaus)

Durchbiegungszuwachs am System C (ohne zentrischen Zwang)

Beim beidseitig eingespannten System C ist der nach Gl. 10.5 ermittelte Durchbiegungszuwachs geringer, jedoch wird der Grenzwert von 2‰ nicht immer eingehalten. Der Durchbiegungszuwachs nimmt mit zunehmender Schlankheit zu, jedoch ist eine deutliche Abhängigkeit von dem zweiten Parameter, dem Bezugsbewehrungsgrad, erkennbar. Bei einem geringen Bezugsbewehrungsgrad von $\rho_{s,St}=0,4\%$ wird der Grenzwert von 2‰ mit der nach DIN 1045-1 zulässigen Biegeschlankheit nach Gl. 10.3 nicht überschritten.

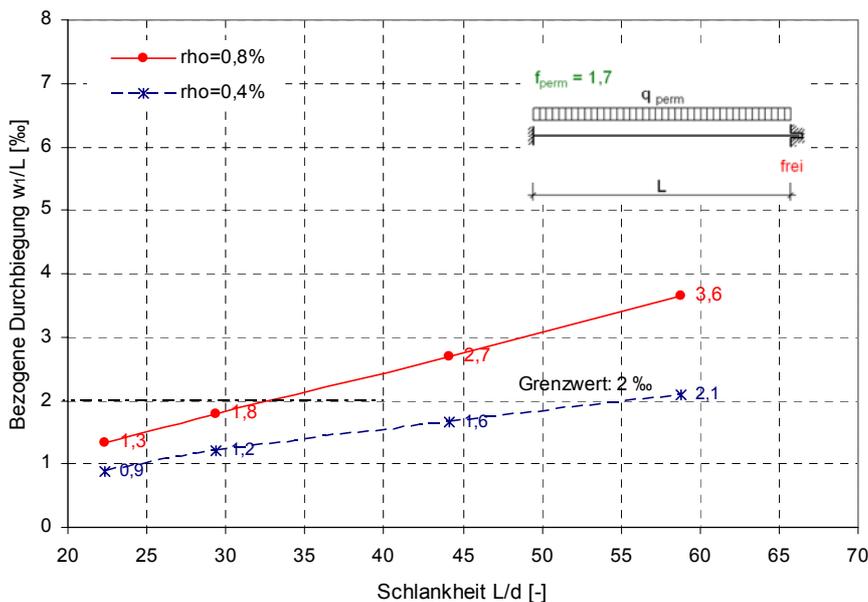


Bild 148: System C: Zuwachs der bezogenen Durchbiegungen (ab dem Zeitpunkt t_1 des Ausbaus)

Bei erhöhten Anforderungen an die Durchbiegungen ergeben sich – in Abhängigkeit vom Bezugsbewehrungsgrad – somit folgende Grenzwerte für die Biegeschlankheit:

System C ($\rho_{s,St}=0,4\%$) $L_i / d = 0,6 \cdot L / d \leq 35$

System C ($\rho_{s,St}=0,8\%$) $L_i / d = 0,6 \cdot L / d \leq 20$

Durchbiegungszuwachs am System B und D (mit zentrischem Zwang)

Bild 149 und Bild 150 zeigen die Durchbiegungszuwächse für Systeme, welche zusätzlich zur Lastbeanspruchung durch zentrischen Zwang beansprucht sind (Grenzfall horizontal unverschiebliche Lagerung).

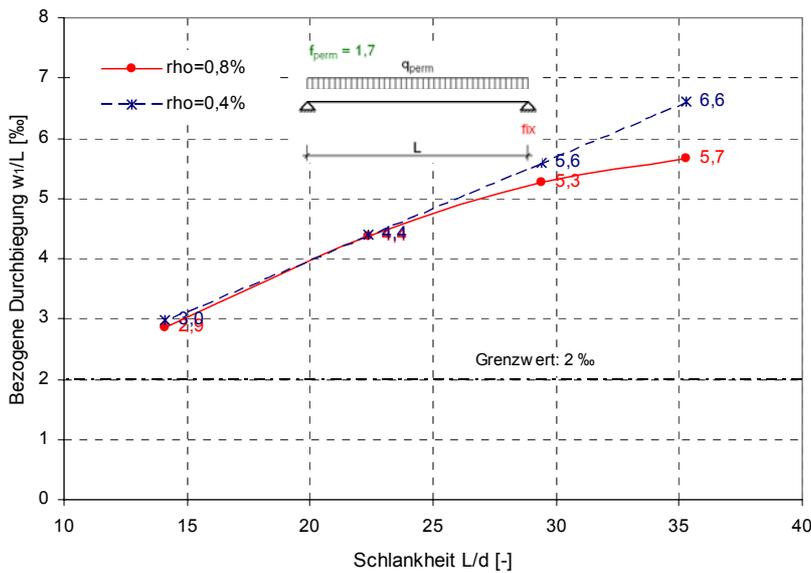


Bild 149: System B: Zuwachs der bezogenen Durchbiegungen (ab dem Zeitpunkt t₁ des Ausbaus)

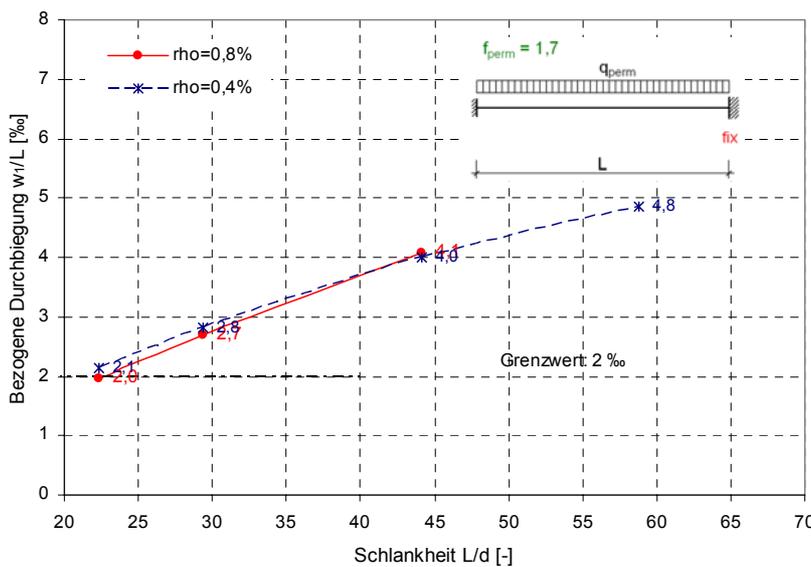


Bild 150: System D: Zuwachs der bezogenen Durchbiegungen (ab dem Zeitpunkt t₁ des Ausbaus)

Bei den Systemen mit zusätzlichem zentrischem Zwang wird der Durchbiegungszuwachs größer, da die Normalkraft eine Aufweitung der gerissenen Bereiche bewirkt. Dies ist insbesondere beim beidseitig eingespannten System D der Fall. Gleichzeitig geht der Einfluss des Bezugsbewehrungsgrades zurück. Die Systeme mit geringem Bezugsbewehrungsgrad ($\rho_{s,F}$ bzw. $\rho_{s,St}=0,8\%$), welche von Haus aus zunächst geringe Durchbiegungen aufweisen, sind genauso kritisch wie die Systeme mit höherem Bezugsbewehrungsgrad ($\rho_{s,F}$ bzw. $\rho_{s,St}=0,8\%$). Während die Anfangsdurchbiegungen sehr klein sind, ist der zeitabhängige Zuwachs durch die Aufweitung der gerissenen Bereiche verhältnismäßig groß.

Gleichung für erhöhte Anforderungen

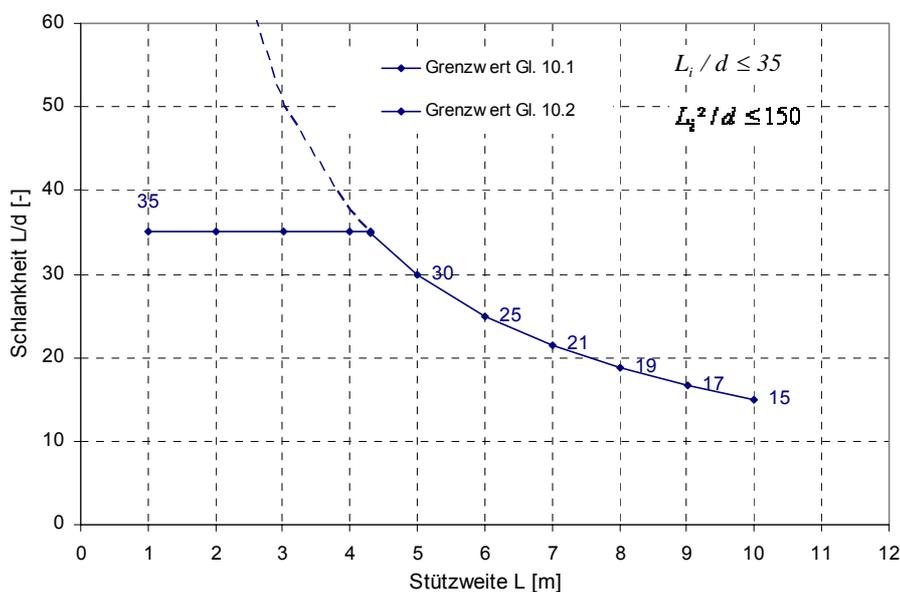


Bild 151: Zulässige Schlankheit nach Gleichung (10.1) und (10.2)

Da die bezogene Durchbiegung vor allem eine lineare Funktion von der Schlankheit L_i/d ist, ist die dimensionsgebundene Begrenzung der Durchbiegung über die Begrenzung des Wertes L_i^2/d zunächst nicht ohne Weiteres mit mechanischem Hintergrund nachvollziehbar. Bei kleinen Spannweiten bis zu $L=4,30\text{m}$ greift Gleichung (10.1), was sinnvoll ist, da auch Systeme mit geringen Spannweiten sich qualitativ genauso verhalten wie Systeme mit absolut großen Spannweiten. Bei großen Spannweiten ergibt Gleichung (10.2) geringere zulässige Schlankheiten als Gleichung (10.1). Bei Systemen, bei denen der Anteil des Konstruktionseigengewichtes groß ist – Grenzfall nur Eigengewicht der Decke – steigen die Belastung und der Bezugsbewehrungsgrad linear mit der Schlankheit an. Somit könnte man Gleichung (10.2) dahingehend interpretieren, dass beide Kriterien – Schlankheit und Bezugsbewehrungsgrad – erfasst werden. Dies hat jedoch nur begrenzte Gültigkeit, da der Bezugsbewehrungsgrad die Durchbiegungen nicht in dem Maße ansteigen lässt wie der Parameter Schlankheit. (Bild 133). Für die Betrachtung des Zuwachses nach dem Zeitpunkt t_1 hat der Belastungsgrad fast keinen Einfluss mehr.

10.2 Getrennte Rissbreitenbegrenzung für Last und Zwang

Für Stahlbetonbauteile sind in DIN 1045-1, Abschnitt 11.2.1 in Abhängigkeit von der Anforderungsklasse nachfolgende Grenzwerte für die Rissbreite unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination einzuhalten:

Anforderungsklasse E: $w_k \leq 0,3 \text{ mm}$

Anforderungsklasse F: $w_k \leq 0,4 \text{ mm}$

Darüber hinaus gibt es in der Praxis jedoch viele Fälle, in denen aus funktionalen oder ästhetischen Gründen (z. B. Dichtigkeit, Sichtbeton) höhere Anforderungen an die Rissbreite gestellt werden.

Erhöhte Anforderungen an die Rissbreite: $w_k \leq (0,1 - 0,2) \text{ mm}$

Diese Grenzwerte sind unter reiner Lastbeanspruchung oder – in den Fällen, in denen Zwang vorliegt – unter der kombinierten Beanspruchung aus Last und Zwang einzuhalten. Die Ermittlung der Zwangkräfte ist bei Stahlbetonbauteilen infolge des teilweisen Übergangs des Bauteils in den gerissenen Zustand II schwierig und aufwendig. Daher kann gemäß DIN 1045-1, Abschnitt 11.2.4 (7) in Fällen, in denen die resultierende Zwangdehnung 0,8‰ nicht überschreitet, an Stelle einer Rissbreitenbegrenzung für die kombinierte Beanspruchung der Nachweis vereinfacht getrennt für Last und Zwang geführt werden.

Um diese Vereinfachung auf ihre Gültigkeitsgrenzen hin zu überprüfen, werden bei den folgenden Untersuchungen der Bewehrungsgrad und die Bewehrungsverteilung so gewählt, dass die eingelegte Bewehrung folgende drei unabhängig voneinander geführten Nachweise erfüllt:

- Nachweis der statisch erforderlichen Bewehrung im GZT für die Lastbeanspruchung (entspricht BW0)
- Nachweis der Begrenzung der Rissbreite im GZG für die Lastbeanspruchung
- Nachweis der Mindestbewehrung zur Begrenzung der Rissbreite (zentrischer Zwang)

Dabei wird jeweils die größere der erforderlichen Bewehrungen angeordnet. Die Untersuchung erfolgt am Bezugssystem ($\rho_{s,St}=0,8\%$) bei einer Querbelastung von $q_{perm}=11 \text{ kN/m}$.

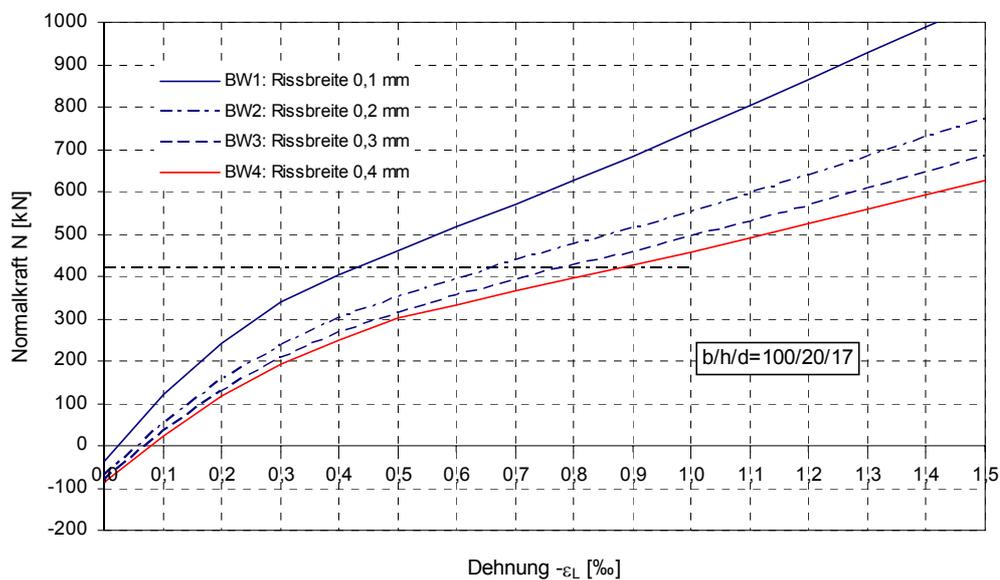
Tabelle 7 zeigt die Bewehrungsgrade der so bemessenen Systeme. In der ersten Zeile der Tabelle ist mit BW0 die statisch erforderliche Bewehrung im GZT angegeben. Der sich aus den drei Nachweisen ergebende maßgebende maximale Bewehrungsgrad ist in Tabelle 7 fett gekennzeichnet. Mit steigenden Anforderungen an die Begrenzung der Rissbreite muss insbesondere im Feld der Bewehrungsgrad erhöht werden. Die Bewehrungserhöhung im Feld ist auf Grund des Nachweises der Mindestbewehrung zur Aufnahme des zentrischen Zwangs erforderlich. Im Einspannbereich führt der Nachweis der Rissbreitenbegrenzung im GZG für die Lastbeanspruchung nur bei hohen Anforderungen an die Rissbreite ($w_k=0,2 \text{ mm}$ bzw. $0,1 \text{ mm}$) zu einer nennenswerten Erhöhung der statisch erforderlichen Bewehrung von 0,8% auf 0,85% bzw. 1,2%. Bei einer Anforderung an die Rissbreite von $w_k=0,4 \text{ mm}$ reicht die statisch erforderliche Bewehrung im GZT aus, um die beiden Nachweise der Begrenzung der Rissbreite im GZG einzuhalten.

Tabelle 7: Bewehrungsgrade des zu untersuchenden Systems:

Bewehrungsgrad Bewehrungsverteilung	$\rho_{s,St}$	$\rho_{s,F}$	$\rho_s (i.M.)$
	[%]	[%]	[%]
BW0: GZT (statisch erforderlich)	0,80	0,40	1,07
	GZT/GZG/Zwang	GZT/GZG/Zwang	
BW1: $w_k = 0,1 \text{ mm}$	0,80/1,20/0,94	0,40/0,57/0,81	1,88
BW2: $w_k = 0,2 \text{ mm}$	0,80/0,85/0,66	0,40/0,41/0,57	1,33
BW3: $w_k = 0,3 \text{ mm}$	0,80/0,69/0,54	0,40/0,34/0,47	1,16
BW4: $w_k = 0,4 \text{ mm}$	0,80/0,60/0,46	0,40/0,29/0,40	1,07

Normalkräfte

Durch die zusätzlichen Anforderungen an die Rissbreite und durch die daraus resultierenden höheren mittleren Bewehrungsgrade sind auch die Zwangzugkräfte größer als beim bislang untersuchten Bezugssystem ($\rho_{s,St}=0,8\%$). Bild 152 zeigt die entstehenden Zwangnormalkräfte bei unterschiedlicher Bewehrungsanordnung. Die Querbelastung unter der kombinierten Beanspruchung ist bei allen Systemen gleich groß.

**Bild 152:** Normalkräfte bei unterschiedlicher Bewehrungsanordnung für das Bezugssystem ($\rho_{s,St}=0,8\%$) unter kombinierter Beanspruchung

Rissbreiten

Die Berechnung der Rissbreiten erfolgt unter Berücksichtigung der in Bild 152 dargestellten Normalkräfte für das horizontal starr gelagerte System in Kombination mit den Momenten infolge der Belastung q_{perm} . Bild 153 und Bild 154 zeigen die damit resultierenden Rissbreiten im Einspannbereich und im Feld. Man erkennt, dass unter der reinen Lastbeanspruchung $\varepsilon_L=0\%$ erwartungsgemäß die Anforderungen an die Rissbreite eingehalten sind. Insbesondere im Feldbereich sind die Rissbreiten unter reiner Lastbeanspruchung durch die Bewehrungserhöhung klein ($w_k \approx 0,1\text{mm}$). Bei zusätzlicher Zwangbeanspruchung nehmen die Rissbreiten insbesondere im Feldbereich deutlich zu.

Bild 153 zeigt die Rissbreiten im Einspannbereich unter kombinierter Beanspruchung aus Last und Zwangbeanspruchung für den Grenzfall der horizontal unverschieblichen Lagerung. Die jeweiligen Anforderungen an die Rissbreitenbegrenzung werden im untersuchten Beispiel unter konstanter Lastbeanspruchung bei folgenden zusätzlichen Dehnungen überschritten.

- BW1: Rissbreite 0,1 mm: $\varepsilon_L = -0 \text{ ‰}$
- BW2: Rissbreite 0,2 mm: $\varepsilon_L = -0,05 \text{ ‰}$
- BW3 : Rissbreite 0,3 mm: $\varepsilon_L = -0,25 \text{ ‰}$
- BW4: Rissbreite 0,4 mm: $\varepsilon_L = -0,77 \text{ ‰}$

Somit ist nicht in jedem Falle bei getrennter Bemessung eine ausreichende „Reserve“ zur Aufnahme der zusätzlichen Verformungseinwirkung ε_L vorhanden.

Wenn für die Bemessung der Bewehrung der Nachweis der Begrenzung der Rissbreiten unter Lastbeanspruchung alleine maßgebend ist, besteht überhaupt keine Reserve für eine zusätzliche Dehnung bei Zwang.

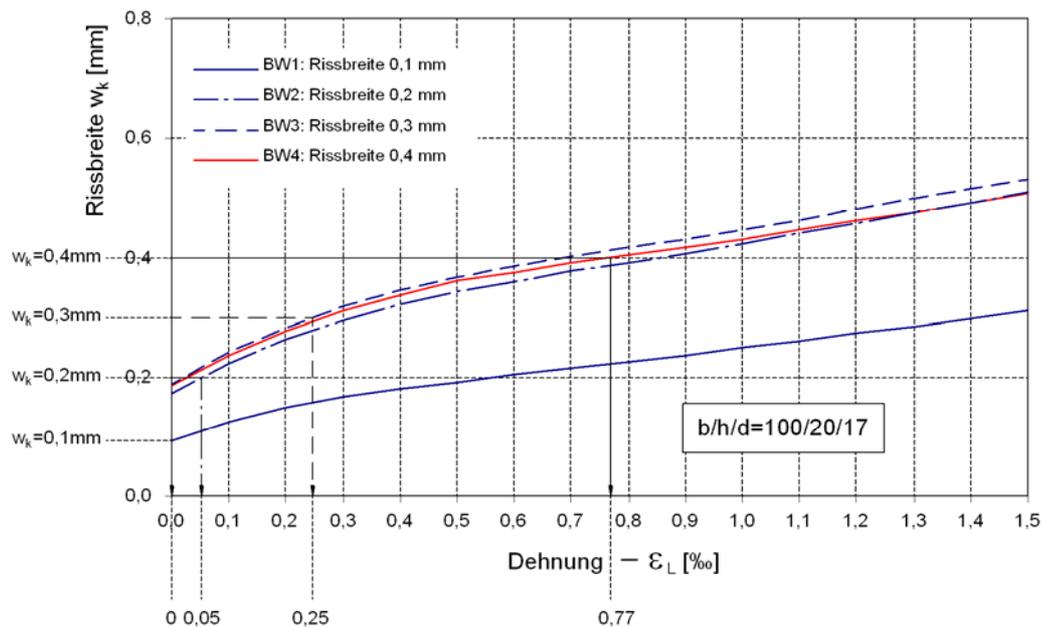


Bild 153: Rissbreiten (Einspannbereich) bei kombinierter Beanspruchung (Grenzfall horizontal unverschiebliche Lagerung)

Im Feldbereich nehmen die Rissbreiten bei zusätzlicher Dehnung stärker zu als im Einspannbereich (Bild 154). An den Knickpunkten kann man den Übergang vom Einzelrissbild zum abgeschlossenen Rissbild erkennen.

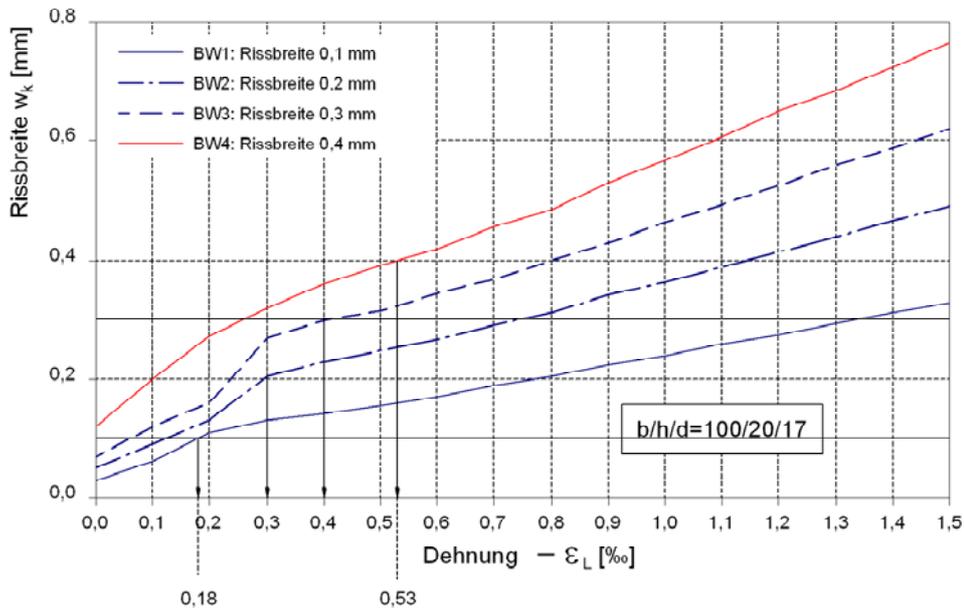


Bild 154: Rissbreiten im Feld bei kombinierter Beanspruchung (Grenzfall horizontal unverschiebliche Lagerung)

Die Anforderungen an die Rissbreitenbegrenzung unter kombinierter Beanspruchung werden im Beispiel bei folgenden Dehnungen überschritten:

BW1: Rissbreite 0,1 mm: $\varepsilon_L = -0,18 \text{ ‰}$

BW2: Rissbreite 0,2 mm: $\varepsilon_L = -0,30 \text{ ‰}$

BW3: Rissbreite 0,3 mm: $\varepsilon_L = -0,40 \text{ ‰}$

BW4: Rissbreite 0,4 mm: $\varepsilon_L = -0,53 \text{ ‰}$

Im Feldbereich zeigt sich, dass durch die Erhöhung der statisch erforderlichen Bewehrung insbesondere bei hohen Anforderungen an die Rissbreite im Vergleich zum Einspannbereich eine größere „Reserve“ zur Aufnahme des zusätzlichen Zwangs vorhanden ist. Bei der geringen Anforderung an die Rissbreite ($w_k=0,4\text{mm}$) wurde die statisch erforderliche Bewehrung nicht erhöht und die zusätzlich aufnehmbare Dehnung ist kleiner als im Einspannbereich. Bei den Ergebnissen ist zu beachten, dass es sich bei dem untersuchten System um den Grenzfall einer horizontal starren Festhaltung handelt.

„Feldbereich, oben“

Bislang wurden immer die Nachweisstellen „Einspannbereich, oben“ und „Feldbereich, unten“ analysiert. Für die Nachweisstelle „Feldbereich, oben“ soll im Folgenden eine Einschätzung gegeben werden, in wie weit dort eine Bewehrungserhöhung notwendig und sinnvoll ist. Im

„Feldbereich, oben“ ist für den Grenzzustand der Tragfähigkeit GZT keine Bewehrung erforderlich. Trotzdem wird bei der Bewehrungsverteilung BW0 davon ausgegangen, dass dort die Hälfte der Stützbewehrung angeordnet wird.

Im „Feldbereich, oben“ erfolgt der Nachweis der Rissbreitenbegrenzung mit der berechneten Zwangzugkraft N_{Zwang} und dem zugehörigen Rissmoment für einen Durchmesser $d_s=12$ mm.

$$M_{F,oben} = M_{cr} = \left(f_{ctm} - \frac{N_{Zwang}}{A} \right) \cdot W \quad (10.7)$$

$$F_s \approx M_{cr} / 0,9 \cdot d + 0,5 \cdot N \quad (10.8)$$

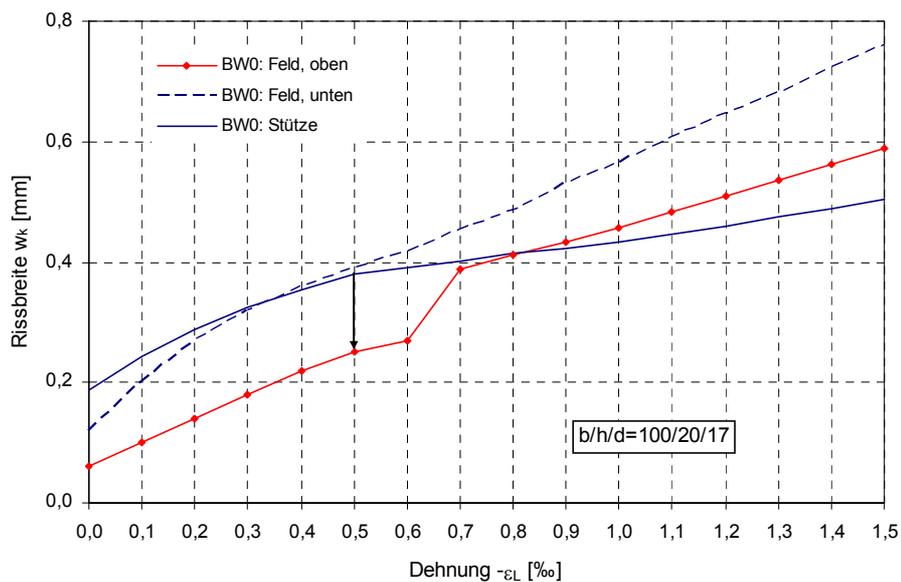


Bild 155: Rissbreiten für die Bewehrungsanordnung BW0

Bild 155 zeigt die berechneten Rissbreiten für das Bezugssystem mit der Bewehrungsanordnung BW0, also für den Fall, dass die statisch erforderliche Bewehrung angeordnet wird, an den drei Nachweisstellen „Einspannbereich, oben“, „Feldbereich, unten“ und „Feldbereich, oben“. Mit der Bewehrungsanordnung BW0 ist zugleich auch die Anforderung an die Mindestbewehrung für zentrischen Zwang bei einer geringen Anforderung an die Rissbreite ($w_k=0,4$ mm) an allen Stellen erfüllt (vgl. Tabelle 7).

Unter der kombinierten Beanspruchung aus Last und Zwang ist die geringe Anforderung an die Rissbreite ($w_k=0,4$ mm) bei einer zusätzlichen Verformungseinwirkung von bis zu einer Verformungseinwirkung von $\varepsilon_L=-0,5$ ‰ an allen drei Stellen erfüllt. Bis zu einer zusätzlichen Dehnung von ca. $\varepsilon_L=-0,7$ ‰ liegt im Feldbereich oben das Einzelrissbild vor. Die Rissbreiten liegen deutlich unter den Rissbreiten der beiden anderen Nachweisstellen. Die „Reserven“ zur Aufnahme einer zusätzlichen Verformungseinwirkung sind größer, so dass im Einzelfall abgewägt werden muss, ob die Mindestbewehrung zur Abdeckung des vollen zentrischen Zwangs tatsächlich erforderlich ist.

10.3 Wertung

10.3.1 Durchbiegungen

Die Begrenzung der Durchbiegungen über die Begrenzung der Biegeschlankheit nach DIN 1045-1 erscheint vom Ansatz her zunächst grundsätzlich sinnvoll. Wegen der Abhängigkeit der bezogenen Durchbiegungen w/L von der Schlankheit L_i/d erscheint die Begrenzung dieses Parameters in Gleichung 10.1 für normale Anforderungen – vom mechanischen Hintergrund her gesehen – sinnvoller als die Begrenzung des Parameters L_i^2/d in Gleichung 10.2 für erhöhte Anforderungen, welcher zudem dimensionsgebunden ist.

Mit der Begrenzung der Biegeschlankheit auf 35 werden bezogene Durchbiegungen, die größer als $(1/250+1/250)=8‰$ sind, in der Regel vermieden. Damit ist es möglich, bei maximal möglicher Überhöhung von 4‰ den im genaueren Nachweis geforderten Grenzwert des Durchhangs auf $1/250=4‰$ einzuhalten. Es ist zu empfehlen den Hinweis hinzuzufügen, dass in der Regel trotz Einhaltung des Grenzwertes von $L_i/d=35$ ab einer bestimmten Schlankheit Schalungsüberhöhung vorgesehen werden muss.

Der Ansatz über die Begrenzung der Biegeschlankheit passt umso besser, je kleiner der Bezugsbewehrungsgrad und der damit verbundene Belastungsgrad sind.

Am empfindlichsten erweisen sich Einfeldsysteme mit beidseitig gelenkiger Lagerung. Hier sollte bei hohen Bezugsbewehrungsgraden ($\rho_{s,F}=0,8‰$ oder größer), die Biegeschlankheit auf $L_i/d = 30$ begrenzt werden.

Die Systeme mit Randeinspannung werden durch die Beiwerte $\alpha=0,6$ und $\alpha=0,8$ auf das System des statisch bestimmten Einfeldträgers als Ersatzträger zurückgeführt. Die Beiwerte erscheinen angemessen und sinnvoll. Bei Systemen mit Randeinspannung sollte ein Bezugsbewehrungsgrad von 0,8‰ nicht überschritten werden. Bei diesem Bezugsbewehrungsgrad wird ab einer Schlankheit von $L/d=26$ bzw. 22 eine Schalungsüberhöhung erforderlich.

Die erhöhten Anforderungen an Stahlbetonbauteile ($w/L < 1/500 = 2‰$) sind bei beidseitig gelenkig gelagerten Einfeldträgern nur bis zu Schlankheiten von $L/d=10$ erfüllt und somit bei Stahlbetonbauteilen schwer einhaltbar. Die Begrenzung über den Parameter $L_i^2/d \leq 150$ liegt häufig auf der unsicheren Seite und stellt eine Begrenzung des Durchbiegungszuwachses auf $L/500$ bei Weitem nicht immer sicher. Auf Grund der zusätzlichen Parameter, welche insbesondere bei der Berechnung des Durchbiegungszuwachses eingehen, ist bei erhöhten Anforderungen an die Durchbiegungsbegrenzung eine Berechnung des zu erwartenden Durchbiegungszuwachses zu empfehlen.

10.3.2 Rissbreiten

Die statisch erforderliche Bewehrung reicht häufig schon aus, um den Nachweis der Rissbreitenbegrenzung bei reiner Lastbeanspruchung zu erfüllen, wenn an die Grenzwerte der zul. Rissbreiten keine erhöhte Anforderungen gestellt werden ($w_k=0,3 - 0,4$ mm). Es ergeben sich im Einspannbereich mit der statisch erforderlichen Bewehrung im Grenzzustand der Tragfähigkeit sehr kleine Rissbreiten ($w_k < 0,2$ mm). Im Feldbereich sind die Rissbreiten ebenfalls

klein ($w_k < 0,15$ mm), wenn die Mindestbewehrung zur Abdeckung des vollen zentrischen Zwangs angeordnet wird.

Die zusätzliche einwirkende Dehnung bei horizontaler Verformungsbehinderung (Grenzfall: System_fix) wirkt sich stark auf die Rissbreiten aus. Die entstehenden Zwangkräfte vergrößern die unter reiner Lastbeanspruchung geringen Rissbreiten schon im Bereich kleiner Dehnungen signifikant. Die bestehenden „Reserven“ werden bei kleinen Dehnungen aufgebraucht. Auf Grund des geringeren Bewehrungsgrades im Feld ist der Anstieg der Rissbreiten durch die Zwangnormalkraft viel größer als im Stützbereich. Im Feldbereich wird durch die Anordnung einer Mindestbewehrung zur Abdeckung des vollen zentrischen Zwangs dem Anstieg der Rissbreite entgegengewirkt. Dennoch ist der Feldbereich kritischer als der Einspannbereich. Je höher die Anforderungen an die Rissbreitenbegrenzung sind (z. B. $w_k = 0,1$ mm), desto kleiner ist die zusätzlich aufnehmbare Dehnung.

Im „Feldbereich, oben“ sind die „Reserven“ zur Aufnahme einer zusätzlichen Dehnung unter Einhaltung der Anforderungen an die Rissbreitenbegrenzung größer. Durch die Anordnung von Mindestbewehrung für den vollen zentrischen Zwang ergeben sich zum Teil höhere Bewehrungsgrade als für die kombinierte Beanspruchung erforderlich sind.

Die hier durchgeführte Untersuchung zeigt, dass die Regelung nach DIN 1045-1, Abschnitt 11.2.4 (7), die Rissbreite getrennt für Last- oder Zwangbeanspruchung zu führen, auf der unsicheren Seite liegen kann. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn der Nachweis der Rissbreitenbegrenzung unter Lastbeanspruchung maßgebend wird. Bei mäßigen Anforderungen an die Rissbreite ($w_k = 0,4$ mm) kann die Regelung des getrennten Nachweises bis zu einer Zwangdehnung von $\varepsilon_L = -0,5$ ‰ sinnvoll angewendet werden. Bei hohen Anforderungen an die Rissbreitenbeschränkung ($w_k = 0,1$ mm) sollte die Regelung nicht angewendet werden. In dem Fall empfiehlt es sich, den Nachweis der Begrenzung der Rissbreite auf Grundlage der Schnittgrößen für die kombinierte Beanspruchung zu führen. Dazu kann die Zwangnormalkraft mit Hilfe von Diagrammen (Anhang B) abgeschätzt werden.

11 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Auswirkungen einer kombinierten Beanspruchung aus Last und zentrischem Zwang auf die Durchbiegungen und Rissbreiten von Stahlbetonbauteilen und insbesondere Stahlbetonplatten im Gebrauchszustand. Dabei wird das nichtlineare Verhalten des Stahlbetons auf Grund des teilweisen Übergangs von Bauteilbereichen in den gerissenen Zustand II ebenso berücksichtigt, wie die Einflüsse aus dem Langzeitverhalten des Betons (Kriechen und Schwinden). Aufbauend auf den Berechnungen unter äußerer Lastbeanspruchung wird die Entstehung von Zwangnormalkräften infolge von Dehnungen (Schwinden und Temperatur) bei Verformungsbehinderung und deren Einfluss auf die beiden Nachweise der Durchbiegungs- und Rissbreitenbegrenzung untersucht. Sowohl die Durchbiegungen als auch die Rissbreiten unterliegen starken Streuungen. Auf Grund der unzureichend bekannten und stark streuenden Materialkennwerte und Randbedingungen ist eine genaue Berechnung der Durchbiegungen und Rissbreiten in der Planungsphase eines Bauwerks in der Regel nicht möglich. Daher ist das Ziel dieser Arbeit, basierend auf einer überschaubaren Anzahl von Systemparametern, die zu erwartenden Durchbiegungen und Rissbreiten für in der Praxis häufig vorkommende Systeme ausreichend genau zu bestimmen. Dazu werden die für die Durchbiegungen und Rissbreiten entscheidenden Parameter und deren Einfluss bestimmt. Mit gewissen Vereinfachungen können so Diagramme zur Bestimmung der Durchbiegungen und Zwangnormalkräfte unter quasi-ständiger Belastung hergeleitet werden. Die Durchbiegungen können so direkt bestimmt werden. Die Berechnung der Rissbreiten mit der ermittelten Zwangnormalkraft erfolgt in einem weiteren Schritt auf der Basis der in die DIN 1045-1 übernommenen Risstheorie von *König, Fehling* [Kön 35].

Rechenmodell

Die Schnittgrößen und Verformungen werden mit einem Stabwerkprogramm nichtlinear berechnet. Grundlage bei der Berechnung ist das verschmierte Rissmodell. Zur wirklichkeitsnahen Erfassung des Trag- und Verformungsverhaltens werden Materialmodelle entwickelt, mit denen sich insbesondere das Verhalten eines Stahlbetonbauteils unter kombinierter Beanspruchung aus Last und zentrischem Zwang erfassen lässt. Die Rissbildung, die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen, sowie das Kriechen des Betons erfolgt durch Anpassung und geeignete Modifikation der Materialkennlinien. Die Analyse unterschiedlicher Modellierungen zeigt, dass die Modifizierung der Betonarbeitslinie für die hier durchgeführten Berechnungen unter kombinierter Beanspruchung aus Last und Zwang am besten geeignet ist.

Zur Berücksichtigung des Schwindens wird in dieser Arbeit ein vereinfachter Ansatz hergeleitet. Das Schwinden des Betons wird als Schwindkrümmung und als wirksame Dehnung in der Stabachse des Querschnitts berücksichtigt. Dabei wird zwischen gerissenen und ungerissenen Bauteilbereichen unterschieden.

Das Rechenmodell wurde über umfangreiche Nachrechnungen von repräsentativen und ausreichend dokumentierten Versuchen verifiziert.

Numerische Simulation

In der numerischen Simulation werden die maßgeblichen Einflussparameter auf die Durchbiegungen und Rissbreiten bestimmt. Dabei werden Bauteile unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination mit und ohne Zwang untersucht. Betrachtet werden dazu die beiden Grenzfälle des horizontal frei verschieblichen (System_frei) und des horizontal unverschieblich gelagerten Systems (System_fix). Am System_fix ergeben sich infolge der einwirkenden Dehnungen Zwangnormalkräfte, die die Durchbiegungen und Rissbreiten entscheidend beeinflussen.

Um die Systeme untereinander vergleichen zu können, wird zur Beschreibung des Belastungsgrades des Bauteils als Parameter der „Bezugsbewehrungsgrad“ definiert. Ausgehend von der statisch erforderlichen Bewehrung im Gebrauchszustand wird mit einem zuvor hergeleiteten Belastungsfaktor von $f_{perm}=1,7$ auf das Belastungsniveau unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination geschlossen. Der Bezugsbewehrungsgrad ist definiert als der nach linear-elastischer Berechnung erforderliche Bewehrungsgrad an der Stelle des maximalen Biegemomentes eines Systems. Mit Steigerung des Bezugsbewehrungsgrades wird auch die Belastung q_{perm} und damit der Belastungsgrad des Bauteils gesteigert.

Durchbiegungen

Im Rahmen der numerischen Simulation werden die maximal zu erwartenden Durchbiegungen im Gebrauchszustand auf Basis einer Endkriechzahl von $\varphi=2,5$ und einer Endschwindzahl von $\varepsilon_{cs}(\infty)=-0,5\%$ berechnet. Sie werden als bezogene Durchbiegungen w/L angegeben und den in DIN 1045-1 empfohlenen Grenzwerten von $w/L=1/250=4\%$ und $w/L=1/500=2\%$ gegenübergestellt. Die Untersuchungen zeigen, dass neben der Rissbildung die Einflüsse aus Kriechen, aber auch aus Schwinden immer berücksichtigt werden müssen. Die wesentlichen Einflussparameter für die Durchbiegungen sind das Tragsystem, die Schlankheit und der Belastungsgrad (Bezugsbewehrungsgrad + Belastungsfaktor). Die zu erwartenden Durchbiegungen sind beim beidseitig gelenkig gelagerten Einfeldsystem am größten. Schlanke Systeme mit hohen Bezugsbewehrungsgraden erweisen sich hinsichtlich der Durchbiegungen als am meisten gefährdet. Der Bezugsbewehrungsgrad, der in Analogie zu der Ausdehnung der gerissenen Bereiche steht, verliert mit zunehmender Verformungseinwirkung (zentrische Dehnung) beim gezwängten System an Bedeutung. Die durch Dehnung nur am System_fix hervorgerufene Normalkraft führt zu einer Reduzierung der Steifigkeit, was i. d. R. eine Vergrößerung der Durchbiegungen zur Folge hat. Eine Verringerung der Schlankheit ist das wirksamste Mittel um die Durchbiegungen zu reduzieren.

Rissbreiten

Die Untersuchung der Rissbreiten bezieht sich auf Systeme, die in ihrer horizontalen Verschiebung vollständig behindert sind (System_fix). Die in diesem Grenzfall durch die Dehnungen entstehenden Zwangzugkräfte vergrößern signifikant die Rissbreiten. Die wesentlichen Einflussparameter bei den Rissbreiten sind der Bewehrungsgrad und die Größe der Verformungseinwirkung. Hinsichtlich der Rissbreiten sind Systeme mit niedrigem Bezugsbewehrungsgrad am meisten gefährdet. Das wirksamste Mittel zur Einhaltung der geforderten Rissbreiten ist eine Bewehrungserhöhung.

Wertung der Regelungen der DIN 1045-1

Mit den Erkenntnissen der numerischen Simulation werden nachfolgende zwei Regelungen der DIN1045-1 überprüft und bewertet.

Die Begrenzung der Durchbiegung für Stahlbetonbauteile über die Biegeschlankheit nach DIN 1045-1, Abschnitt 11.3.2 ist im Ansatz eine sinnvolle Regelung. Sie orientiert sich zunächst am beidseitig gelenkig gelagerten Einfeldträger und greift mit der Schlankheit L/d den Haupteinflussparameter für die Durchbiegungen auf. Bei Einhaltung des Kriteriums $L_i/d \leq 35$ liegen die zu erwartenden Durchbiegungen meistens unterhalb des Grenzwertes mit maximal möglicher Überhöhung von 8‰. Die Gültigkeit dieser Regelung sollte jedoch bei beidseitig gelenkig gelagerten Einfeldsystemen auf Systeme mit einem Bezugsbewehrungsgrad von maximal 0,6 % und einer Schlankheit von $L/d=32$ beschränkt werden. Bei Systemen mit Randeinspannung sollte der vereinfachte Nachweis nur bei Bezugsbewehrungsgraden bis zu 0,8% angewendet werden. Damit schränkt sich der Gültigkeitsbereich auf den Bereich von Deckenplatten ein, da bei Balken häufig größere Bezugsbewehrungsgrades vorkommen. Es ist empfehlenswert, einen Hinweis hinzuzufügen, dass trotz Einhaltung des Grenzwertes eine Schalungsüberhöhung schon ab Schlankheiten von $L_i/d=17$ vorgesehen werden muss.

Die erhöhten Anforderungen an die Durchbiegung ($w/L < 1/500 = 2‰$) von den Systemen A und B sind nur bei sehr kleinen Schlankheiten ($L/d < 10$) erfüllt. Das zweiten Kriterium $L_i^2/d \leq 150$ ergibt bei üblichen Spannweiten bis zu 10 m größere zulässige Schlankheiten und ist daher nur bedingt geeignet, um die erhöhten Anforderungen sicherzustellen. Daher ist bei erhöhten Anforderungen an die Durchbiegungen eine Berechnung des Durchbiegungszuwachses zu empfehlen.

Diagramme

Mit den im ANHANG angefügten Hilfsmitteln in Form von Diagrammen lassen sich die zu erwartenden bezogenen Durchbiegungen w/L eines Systems unter quasi-ständiger Belastung für Rechteckquerschnitte unabhängig von den absoluten Querschnittsabmessungen direkt bestimmen.

Die zu erwartenden Zwangnormalkräfte können als bezogene Normalkräfte für Rechteckquerschnitte unabhängig von den absoluten Querschnittsabmessungen ebenfalls mit einem Diagramm ermittelt werden. Mit der so ermittelten Zwangnormalkraft und den entsprechenden Momenten aus äußerer Belastung kann in einem zweiten Schritt die Rissbreite berechnet werden. Gegebenenfalls ist zur Einhaltung der Anforderungen an die Rissbreite ein weiterer Iterationsschritt mit erhöhter Bewehrung erforderlich.

Ausblick

Die Erkenntnisse bezüglich eines geeigneten Rechenmodells für kombinierte Beanspruchungen aus Last und Zwang sowie die in dieser Arbeit aufgezeigten Zusammenhänge zwischen Einflussparameter und Durchbiegungen und Rissbreiten lassen sich im Prinzip auf Flächenelemente mit zweiachsialer Tragwirkung übertragen. Wünschenswert wären weitere Untersuchungen zur Ermittlung der Zwangkraft unter Berücksichtigung des Zwangabbaus in Deckenebene und im Gesamtmodell zur Berücksichtigung der Nachgiebigkeit der verformungsbehindernden Bauteile.

12 Literatur

- [Ala 1]** Alavizadeh-Farhang, A.: Concrete Structures Subjected to Combined Mechanical and Thermal Loading, Doctoral Theses, Stockholm, 2000
- [Baž 2]** Bažant, P.B., Planas J.: Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials, New Directions in Civil Engineering Series, Purdue University, 1998
- [Boc 3]** Bockholt J.; Pfister T.: Die Methode der effektiven Spannungen zur einfachen Berechnung der Kriechverformungen von Stahlbetonträgern, Beton- und Stahlbetonbau (11/2006), Verlag Ernst & Sohn, 2006
- [Boc 4]** Bockholt J.; Pfister T.: Vereinfachte, wirklichkeitsnahe Ermittlung der Durchbiegung von Stahlbetonträgern unter Kriechbeanspruchung, Beton- und Stahlbetonbau (4/2006), Verlag Ernst & Sohn, 2006
- [CEB 5]** CEB-Comité Euro-International du Béton, CEB-FIP Model Code 1990, Bulletin d'Information No. 213/214, Lausanne, 1993
- [Chr 6]** Christiansen, K. : Eight-year deformation tests on reinforced concrete beams, Materials and Structures 21 (1988), S. 172-178
- [Dil 7]** Dilger, W.: Veränderlichkeit der Biege- und Schubsteifigkeit bei Stahlbetontragwerken und Einfluss auf die Schnittkraftverteilung und Traglast bei statisch unbestimmter Lagerung, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 179 der Schriftenreihe, Ernst & Sohn, Berlin, 1966
- [DIN 8]** DIN 1045-1 [07.2001]: Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton, Teil 1: Bemessung und Konstruktion, Beuth Verlag, Berlin, 2001
- [DIN 9]** Erläuterungen zu DIN 1045-1, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 525 der Schriftenreihe, Ernst & Sohn, Berlin, 2003
- [DIN 10]** DIN 1055-100 [03.2001]: Einwirkungen auf Tragwerke, Teil 100 Grundlagen der Tragwerksplanung, Sicherheitskonzept, Beuth Verlag, Berlin, 2001
- [DIN 11]** DIN 1055-7 [11.2002]: Einwirkungen auf Tragwerke, Teil 7: Temperatureinwirkungen, Beuth Verlag, Berlin, 2002
- [DIN 12]** DIN ENV 1992-1: Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1-1, Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau, Beuth Verlag, Berlin, 2005
- [Don 13]** Donaubaue, U.: Rechnerische Untersuchung der Durchbiegung von Stahlbetonplatten unter Ansatz wirklichkeitsnaher Steifigkeiten und Lagerungsbedingungen und unter Berücksichtigung zeitabhängiger Verformungen, Dissertation TU München, 2002
- [Dud 14]** Bruchmechanisches Verhalten von Beton unter monotoner und zyklischer Zugbeanspruchung, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 419 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 1991

- [Dut 15]** Dutulescu, E.: Zur Berechnung der Rissbreite, Beton- und Stahlbetonbau (11/2006), Verlag Ernst & Sohn, 2006
- [Eli 16]** Eligehausen R., Fabritius, E.: Grenzen der Anwendung nichtlinearer Rechenverfahren bei Stabtragwerken und einachsigen gespannten Platten, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 484 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 1997
- [Eli 17]** Eligehausen, R.; Kreller, H., Langer, P.: Einfluss der Stahlkennlinie auf den möglichen Grad der Schnittkraftumlagerung bei Stahlbetontragwerken, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart, 1988
- [Fal 18]** Falkner, H.: Zur Frage der Rissbildung durch Eigen- und Zwängspannungen infolge Temperatur in Stahlbetonbauteilen, Diss., Stuttgart, 1969
- [Feh 19]** Fehling, E., Leutbecher T.: Beschränkung der Rissbreite bei kombinierter Beanspruchung aus Last und Zwang, Beton- und Stahlbetonbau (7/2003), Verlag Ernst & Sohn, 2003
- [Fis 20]** Fischer, M.: Rissbreiten- und Verformungszunahme bei Stahlbeton- und Spannbetontragwerken infolge wiederholter Last- und Zwangbeanspruchung, Forschungsbericht 1998
- [Gil 21]** Gilbert, R. I.: Deflection Calculation for Reinforced Concrete Structures – Why We Sometimes Get It Wrong, ACI Structural Journal, 11/12 1999
- [Gras 22]** Grasser, E.: Darstellung und kritische Analyse der Grundlagen für eine wirklichkeitsnahe Bemessung von Stahlbetonquerschnitten bei einachsigen Spannungszuständen, Dissertation, Technische Hochschule München, 1968
- [Gras 23]** Grasser, E.; Thielen G.: Hilfsmittel zur Berechnung der Schnittgrößen und Formänderungen von Stahlbetontragwerken, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 240 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 1996
- [Grue 24]** Gübl, P.; Weigler, H.; Sieghart, K.: Beton: Arten, Herstellung und Eigenschaften, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 2001
- [Had 25]** Haddad, G. J.: Versuche über das Verhalten von Stahlbetonbalken unter ruhender Dauerbelastung, Dissertation Karlsruhe, 1960
- [Har 26]** Hartl, G.: Die Arbeitslinie „Eingebetteter Stähle“ unter Erst- und Kurzzeitbelastung, Beton- und Stahlbetonbau 8/1983, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1983
- [Hill 27]** Hillerborg, A; Modèer, M.; Petersson, P.E.: “Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements”, Cement and Concrete Research, Vol. 6, 1976, S. 773-782
- [Hil 28]** Hilsdorf, H.K.; Reinhardt, H.W.: Beton in: Beton-Kalender 1999, Bd. I., Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1999
- [Hock 29]** Hock, B.: Über die Verformung und Beanspruchung von Stahlbetonskelettbauten infolge von Temperatur- und Feuchtigkeitsänderungen, Dissertation, Universität Stuttgart, 1984

- [Hock 30]** Hock, B; Schäfer, K.; Schlaich, J.: Fugen und Aussteifungen in Stahlbetonskelettbauten, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 368 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 1986
- [Hol 31]** Holschemacher, K.: Zur Berechnung von Rissbreiten und Zwangsschnittgrößen in Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen, Diss., Leipzig, 1992
- [Jac 32]** Jaccoud, J.; Favre, R.: Flèche des Structures en Béton Armé – Vérification Experimentale d'une Méthode de Calcul, Anales de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Série: Béton 208, 1982
- [Jol 33]** Joleka, J.: Experimental Study Concerning Reinforced Concrete Beams under Thermal and Mechanical Load, Nordic concrete research/Publication Oslo, 04/1985
- [Ker 34]** Kersten, R. Das Reduktionsverfahren der Baustatik, Verfahren der Übertragungsmatrizen, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982
- [Kön 35]** König, G.; Tue, N.-V.: Grundlagen und Bemessungshilfen für die Rissbreitenbeschränkung im Stahlbeton und Spannbeton, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 466 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 1996
- [Kön 36]** König, G., Pommerening, D. Tue, N.-V.: Nichtlineares Last-Verformungsverhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen, Verformungsvermögen und Schnittgrößenermittlung, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 492 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 1999
- [Kön 37]** König, G.; Fehling, E.: Grundlagen zur Rissbreitenbeschränkung im Stahlbetonbau, Beton- und Stahlbetonbau (6/1988 und 7/1988), Verlag Ernst und Sohn, 1988
- [Kor 38]** Kordina K.; Schubert L.; Troitzsch, U.: Kriechen von Beton unter Zugbeanspruchung, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 498 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 2000
- [Kre 39]** Kreller, H.: Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetontragwerken unter Last- und Zwangeinwirkungen, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart, 1989
- [Kri 40]** Krips, M: Rissbreitenbeschränkung im Stahlbeton und Spannbeton, Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Darmstadt, Heft 33, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1985
- [Krü 41]** Krüger, W.; Mertzsch, O.: Zum Trag- und Verformungsverhalten bewehrter Betonquerschnitte im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 533 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 2006

- [Lan 42]** Langer, P.: Verdrehfähigkeit plastizierter Tragwerksbereiche im Stahlbetonbau, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 484 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 1997
- [Mar 43]** Marti, P.; Alvarez, M.; Kaufmann, W.; Sigrist, V.: Tragverhalten von Stahlbeton, Fortbildungskurs für Bauingenieure, ETH Zürich, 1999
- [Mau 44]** Maurer, R.: Grundlagen zur Bemessung des Betongurtes von Stahlverbundträgern, Diss, TU Darmstadt, 1992
- [Mau 45]** Maurer, R.; Haveresch, K.-H.; Arnold, A.: Mindestbewehrung zur Begrenzung der Rissbreiten bei dicken Wänden, Bauingenieur (10/2005), S. 479 – 485, Springer VDI Verlag, 2005
- [Mau 46]** Maurer, R.; Arnold, A.; Djouahra, G.: Einfluss der Zwangsschnittgrößen aus Temperatur im Grenzzustand der Tragfähigkeit bei Tragwerken aus Konstruktionsbeton mit und ohne Vorspannung, DAfStb-Forschungsvorhaben V 438, 2006
- [Mau 47]** Maurer, R., Djouahra, G., Choi, J.-S.: Auflagerverdrehungen im Stahlbetonbau für die Bemessung von Elastomerlagern im Hochbau, DIBt-Forschungsbericht, 12/2006
- [May 48]** Mayer, H.; Rüschi, H.: Bauschäden als Folge der Durchbiegung von Stahlbetonbauteilen, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 193 der Schriftenreihe, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1967
- [Men 49]** Menn, Ch.: Zwang und Mindestbewehrung, Beton- und Stahlbetonbau (4/1986), Verlag Ernst und Sohn, 1986, S. 94-99
- [Mül 50]** Müller, H. S.; Kvitsel, V.: Kriechen und Schwinden von Beton, Grundlagen der neuen DIN und Ansätze für die Praxis, Beton- und Stahlbetonbau (1/2002), Verlag Ernst und Sohn, 2002
- [Ožb 51]** Ožbolt, J.; Mayer U.: Nichtlineare Berechnung von Stabtragwerken aus Stahl- und Spannbeton unter Berücksichtigung von Zeiteinflüssen, Bauingenieur (11/1997), S. 439-445, Springer VDI Verlag, 1997
- [Par 52]** Pardey, A.: Physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonplatten im Vergleich zur Bruchlinientheorie, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 441 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 1994
- [Qua 53]** Quast, U.: Zur Mitwirkung des Betons in der Zugzone, Beton- und Stahlbetonbau (10/1981), Verlag Ernst und Sohn, 1981
- [Pfei 54]** Pfeiffer, U.: Die nichtlineare Berechnung ebener Rahmen aus stahl- und Spannbeton mit Berücksichtigung der durch das Aufreißen bedingten Achsendehnung, Diss., TU Hamburg-Harburg, Cuvillier Verlag Göttingen, 2004
- [Pfe 55]** Pfefferkorn; Steinhilber: Ausgedehnte fugenlose Stahlbetonbauten – Erfahrungsbericht aus drei Jahrzehnten, Betonverlag, 1990
- [Rei 56]** Reinhardt, H.-W.; Cornelissen H.: Zeitstandversuche an Beton. In: Baustoffe 1985, Wiesbaden, Bauverlag, 1985, S. 162-167

- [Röh 57]** Röhling, St.: Zwangspannungen infolge Hydratationswärme, Verlag Bau+Technik GmbH, Düsseldorf, 2005
- [Scha 58]** Schaper, Gerhard: Berechnung des zeitabhängigen Verhaltens von Stahlbetonplatten unter Last- und Zwangbeanspruchung im ungerissenen und gerissenen Zustand, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 338 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin-München, 1982
- [Schä 59]** Schäfer, H.; Schneider, K.; Schäfer, H.-G.: Experimentelle Ermittlung von Steifigkeiten von Stahlbetonplatten, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 345 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 1983
- [Schn 60]** Schnell, J.; Kautsch R.; Noakowski P.; Breddermann M.: Verhalten von Hochbaudecken bei Zugkräften aus Zwang, Beton- und Stahlbetonbau (5/2005), Verlag Ernst und Sohn, 2005
- [Shk 61]** Shkoukani, H.; Walraven, J.: Sustained tensile strength of concrete. IN: IABSE Colloquium Structural Concrete Bd. 62. Stuttgart: IABSE, 1991, S. 725-729
- [Sof 62]** SOFiSTiK Statikprogramme Version 21.0 (Handbuch), Sofistik AG, Oberschleißheim, 2005
- [Tue 63]** Tue, N. V.: Überlegungen zur Anwendung der Werkstoffgesetze bei der Bemessung der Stahlbeton- und Spannbetontragwerke, Habilitation, Darmstadt 1997
- [Tue 64]** Tue, N.: Zwangbeanspruchung in Hochbaukonstruktionen, Universität Leipzig
- [Woi 65]** Woidelko, E.-O.: Zum Tragverhalten nach Traglastverfahren bemessener Stahlbetonplattenbalken
- [Zil 66]** Zilch, K.; Donaubaue, U.: Rechnerische Untersuchung der Durchbiegung von Stahlbetonplatten unter Ansatz wirklichkeitsnaher Steifigkeiten und Lagerungsbedingungen unter Berücksichtigung zeitabhängiger Verformungen, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 533 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 2006

13 Bezeichnungen

Indizes

E_d	unter der Bemessungskombination im GZT
$perm$	unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination
$rare$	unter der seltenen Einwirkungskombination
c	Beton, Kriechen
cs	Schwinden
T	Temperatur
k	charakteristischer Wert
m	Mittelwert
s	Betonstahl
t	Zug
u	Bruchzustand
I	Zustand I
II	Zustand II
i	ideell
eff	effektiv
0	Zeitpunkt ($t=0$), mit den Steifigkeiten für Kurzzeitbelastung
∞	Zeitpunkt ($t=\infty$), mit den Steifigkeiten für Langzeitbelastung

Geometrische Größen

L	Stützweite
L_i	Ersatzstützweite
b	Breite
h	Höhe
h_0	wirksame Bauteildicke
h_{eff}	Höhe der effektiven Randzugzone
d	statische Nutzhöhe
x	Höhe der Druckzone
z	Hebelarm
A	Querschnittsfläche
$A_{c,eff}$	Wirkungszone der Bewehrung
s_r	Rissabstand
ρ_s	geometrischer Bewehrungsgrad

Verformungen

w	Durchbiegung
w_0	Durchbiegung mit den Steifigkeiten für Kurzzeitbelastung
w_∞	Durchbiegungen mit den Steifigkeiten für Langzeitbelastung
$w_{0,perm}$	Durchbiegung unter quasi-ständiger Belastung ($t=0$)
$w_{\infty,perm}$	Durchbiegung unter quasi-ständiger Belastung ($t=\infty$)
$w_{c,perm}$	Kriechdurchbiegung: Zuwachs der Durchbiegung infolge Kriechens unter quasi-ständiger Belastung
$w_{s,perm}$	Schwinddurchbiegung: Zuwachs der Durchbiegung infolge Schwindens unter quasi-ständiger Belastung
$w_{T,perm}$	Temperaturdurchbiegung: Zuwachs der Durchbiegung infolge Temperatureinwirkung unter quasi-ständiger Belastung
$w_{T,perm}(t=0)$	Temperaturdurchbiegung zum Zeitpunkt ($t=0$)
$w_{T,perm}(t=\infty)$	Temperaturdurchbiegung zum Zeitpunkt ($t=\infty$)

Materialkenngrößen

E_c	Elastizitätsmodul des Betons
$E_{c,eff}$	wirksamer Elastizitätsmodul unter Berücksichtigung des Kriechens
E_s	Elastizitätsmodul des Betonstahls
f_c	Betondruckfestigkeit
f_{ct}	zentrische Betonzugfestigkeit
f_{ctm}	Mittelwert der zentrischen Betonzugfestigkeit unter Kurzzeitbelastung
$f_{ct,eff}$	mitwirkende Zugfestigkeit des Betons in der Wirkungszone der Bewehrung
τ_{sm}	Verbundfestigkeit des Betons
f_y	Streckgrenze des Betonstahls
$f_{t,cal}$	Zugfestigkeit des Betonstahls
φ	Kriechzahl des Betons
ε_{cs}	Schwindmaß des Betons
$\varepsilon_{cs}(\infty)$	Endschwindmaß des Betons

Einwirkungen

g	ständige Einwirkung (Eigengewicht)
q	äußere Belastung (Linienlast)
q_{Ed}	Linienlast aus Eigengewicht und Verkehr auf dem Beanspruchungsniveau GZT
q_{perm}	Linienlast aus Eigengewicht und Verkehr auf dem Beanspruchungsniveau der quasi-ständigen Belastung
q_{rare}	Linienlast aus Eigengewicht und Verkehr auf dem Beanspruchungsniveau der seltenen Einwirkungskombination
q_{cr}	Linienlast aus Eigengewicht und Verkehr, welche im Bauteil den ersten Riss erzeugt
$f_{perm} = \frac{q_{Ed}}{q_{perm}}$	Belastungsfaktor für die quasi-ständige Einwirkungskombination
ΔT_N	konstant verteilte Temperatureinwirkung

Schnittgrößen und innere Kräfte

M	Biegemoment
N	Normalkraft
M_{cr}	Rissmoment
N_{cr}	Rissnormalkraft
F_s	Kraft in der Bewehrung im Rissquerschnitt
$F_{cr,eff}$	Randzugkraft in der Wirkungszone der Bewehrung
ΔF_s	Differenzkraft in der Bewehrung zwischen dem Riss und in der Mitte zwischen zwei Rissen
σ_{sr}^{II}	Spannung in der Bewehrung im Rissquerschnitt

Dehnungen und Krümmungen

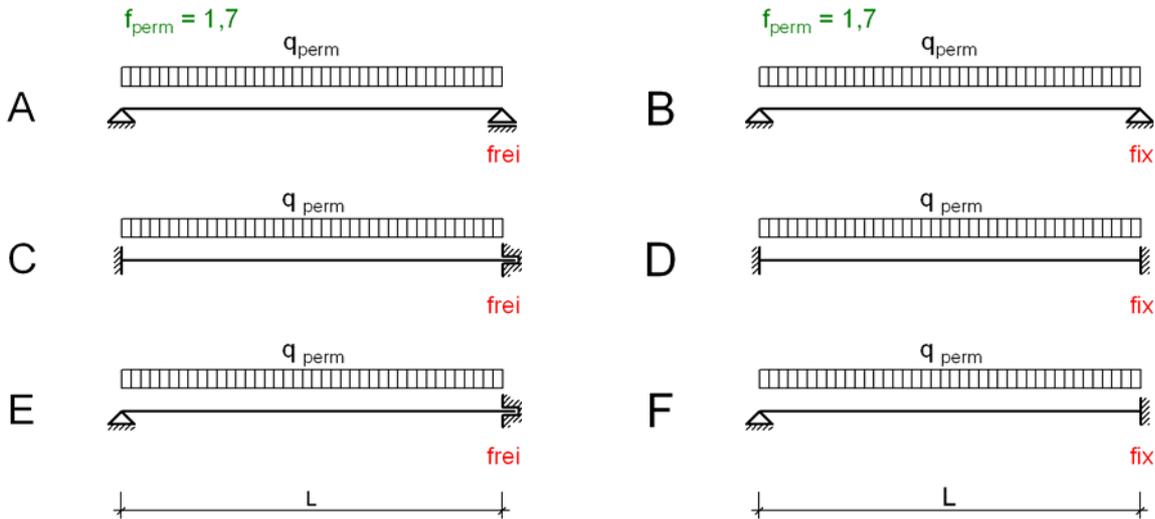
ε	Dehnungen
ε_L	Längsdehnung in der Stabachse eines Querschnitts
ε_{cs}^{II}	Schwindeinwirkung in der Stabachse im Zustand II
ε_{cs}^I	Schwindeinwirkung in der Stabachse im Zustand I
κ	Krümmung
κ_s^I	Krümmungseinwirkung aus Schwinden im Zustand I
κ_s^{II}	Krümmungseinwirkung aus Schwinden im Zustand II

ANHANG

ANHANG A: Bezogene Durchbiegungen

A1: Ausgangsdaten für die Diagramme

Systeme



Querschnitt

Rechteckquerschnitt

Beton C 30/37

$$E_{c0m} = 31900 \text{ MN} / \text{m}^2$$

$$f_{ct0} = 3,0 \text{ MN} / \text{m}^2 \quad f_{cm}(\infty) = 2,1 \text{ MN} / \text{m}^2$$

$$\varphi_{\infty} = 2,5$$

$$\varepsilon_{cs}(\infty) = -0,5\%$$

Belastung

Aus dem Bewehrungsgrad wird die Belastung q_{Ed} des Systems im GZT abgeleitet. Mit Hilfe eines einheitlichen Belastungsfaktors wird dann auf das Gebrauchslastniveau unter quasi-ständiger Belastung geschlossen.

$$M_{Ed} \leq M_{Rd}(\rho_s) = \mu_{Ed} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} \quad q_{Ed} = \frac{M_{Ed} \cdot 12}{L^2} \quad \text{bzw.} \quad q_{Ed} = \frac{M_{Ed} \cdot 8}{L^2}$$

$$q_{perm} = \frac{q_{Ed}}{f_{perm}} \quad f_{perm} = 1,7$$

Eingangswerte für die Diagramme:

- System
- Schlankheit L/d
- Statisch erforderlicher Bewehrungsgrad $\rho_{s,St}$ bzw. $\rho_{s,F}$

A2: Bezogene Durchbiegungen System A und B

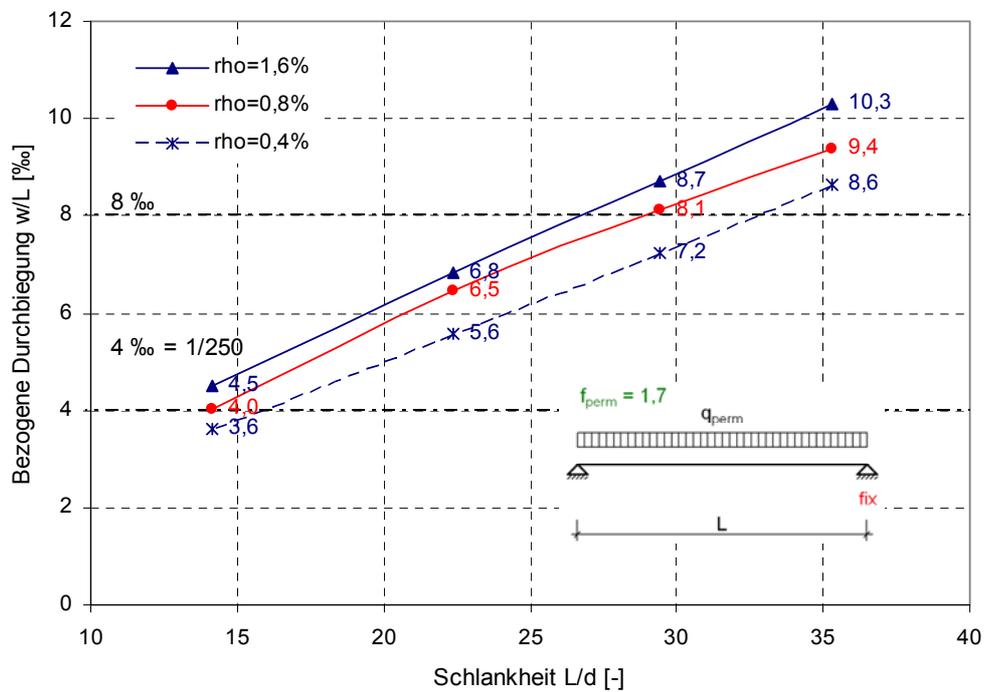
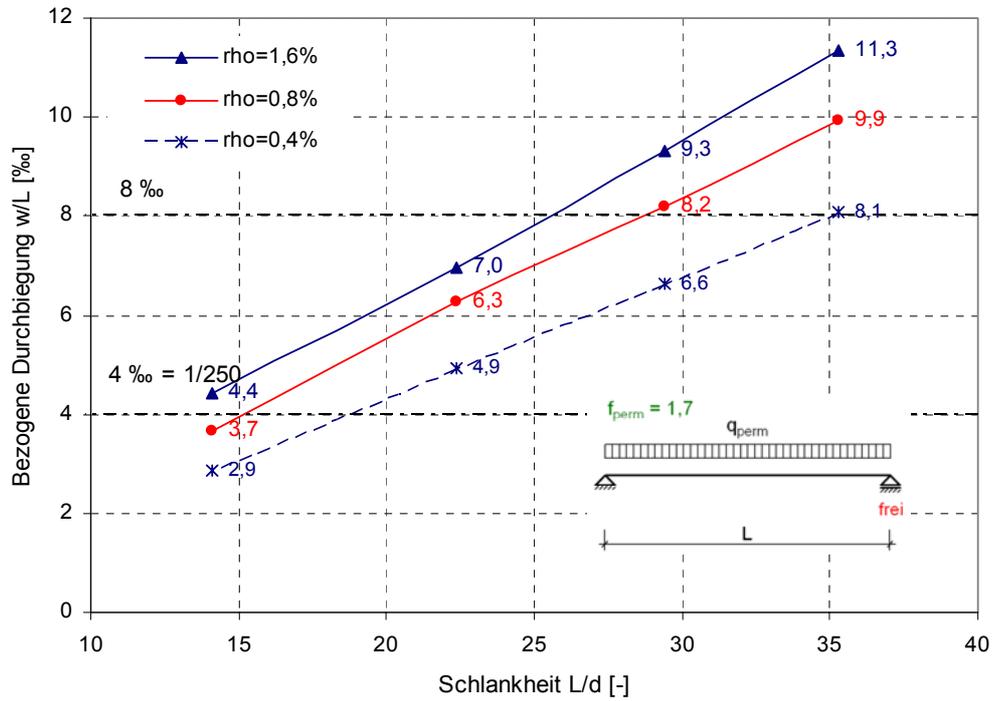


Abb. 1: Bezogene Durchbiegungen w/L in Abhängigkeit von der Schlankheit
 System A: $q_{perm} + \text{Kriechen} + \text{Schwinden}$
 System B: $q_{perm} + \text{Kriechen} + \text{Schwinden}$

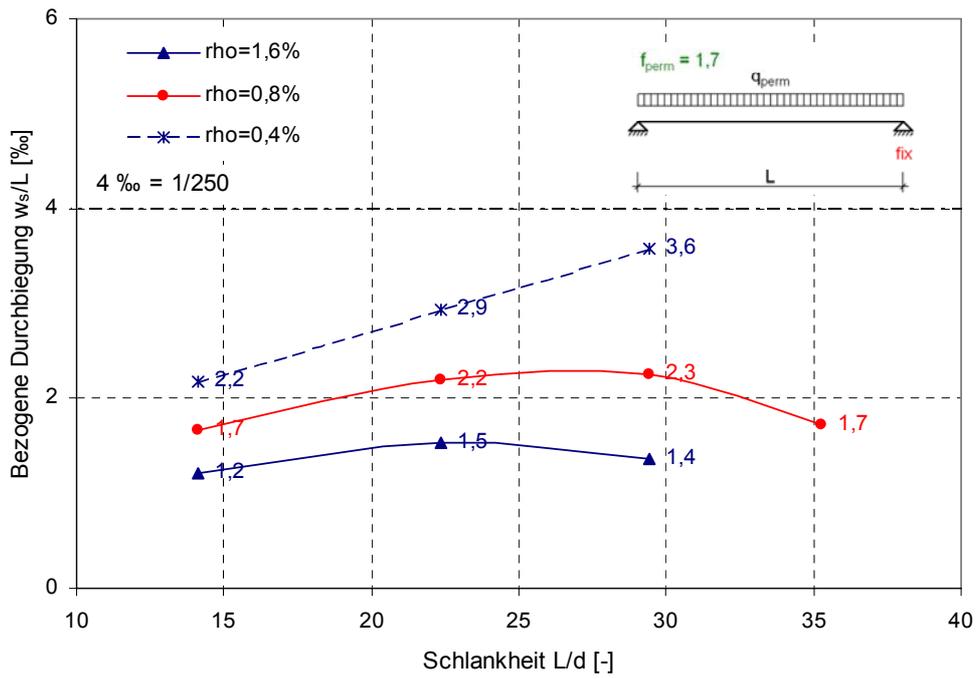
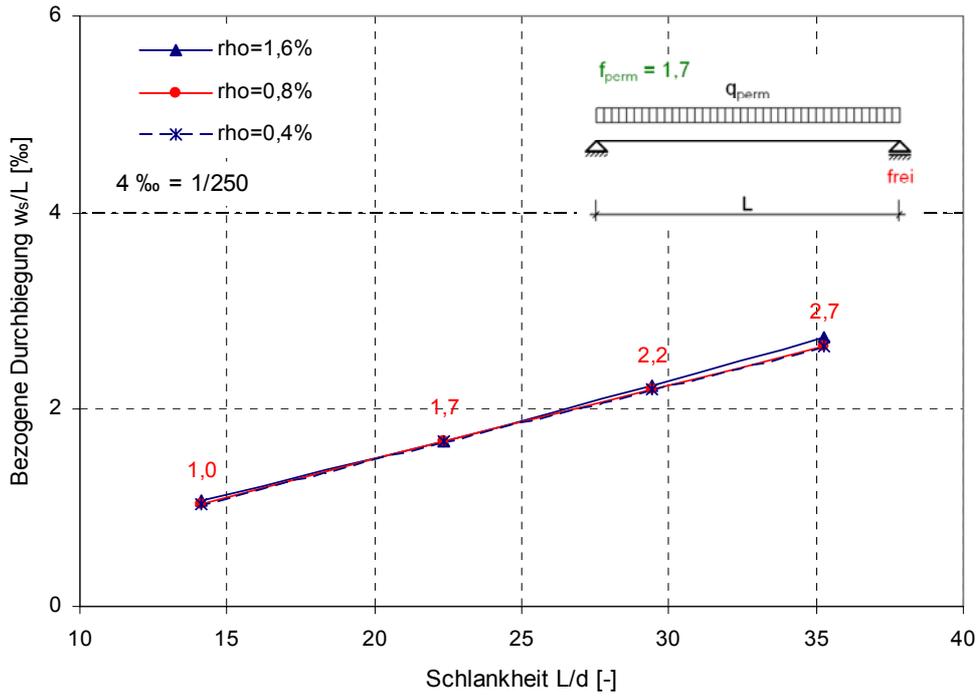


Abb. 2: Bezogene Durchbiegungen w_s/L in Abhängigkeit von der Schlankheit
 System A: nur Schwindanteil unter q_{perm}
 System B: nur Schwindanteil unter q_{perm}

A3: Bezogene Durchbiegungen System C und D

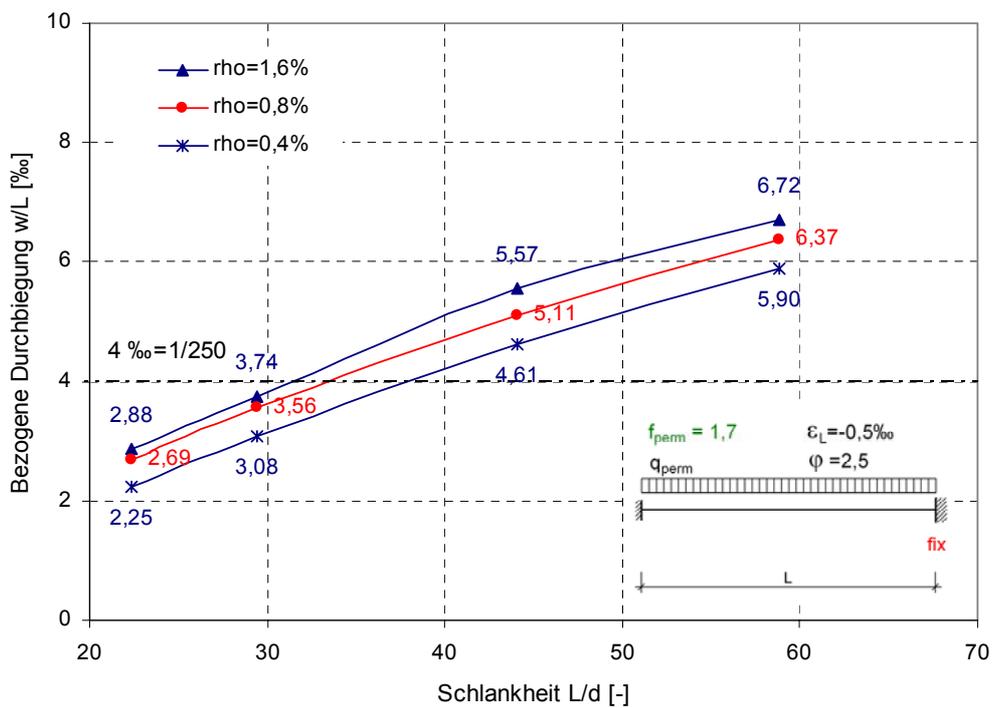
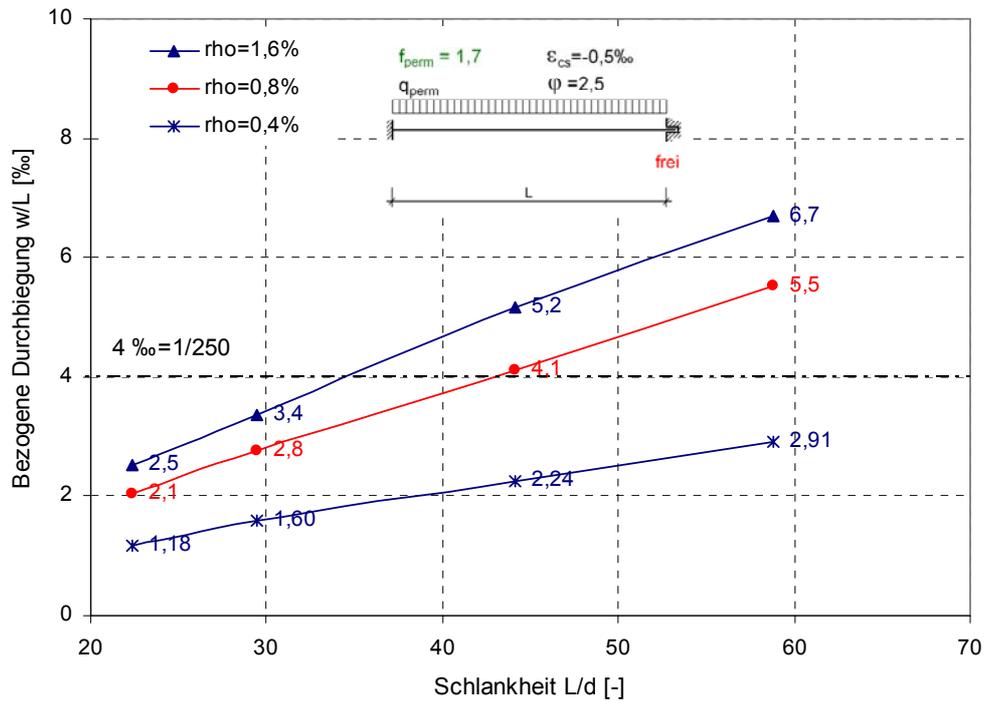


Abb. 3: Bezogene Durchbiegungen w/L in Abhängigkeit von der Schlankheit
 System C: q_{perm} + Kriechen + Schwinden
 System D: q_{perm} + Kriechen + Schwinden

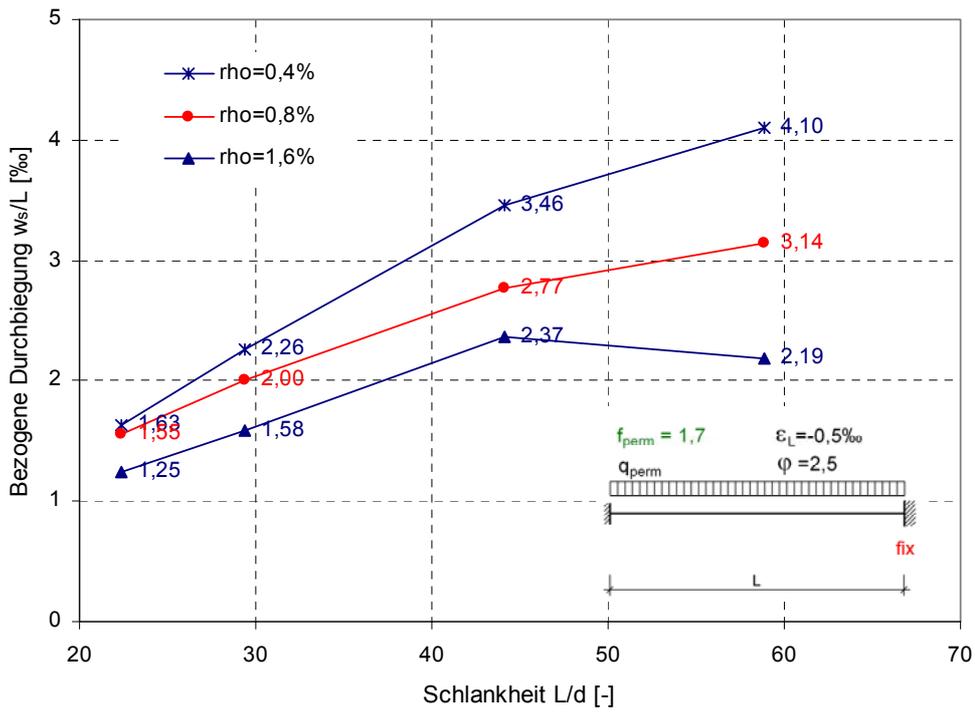
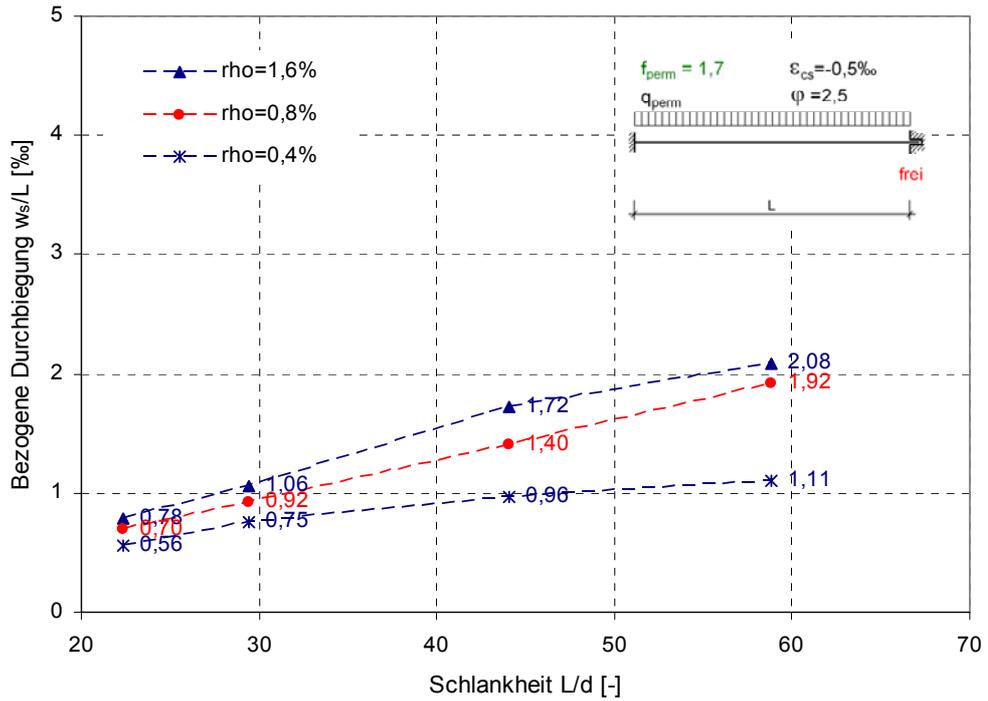


Abb. 4: Bezogene Durchbiegungen w_s/L in Abhängigkeit von der Schlankheit
 System C: Schwindanteil unter q_{perm}
 System D: Schwindanteil unter q_{perm}

A4: Bezogene Durchbiegungen System E und F

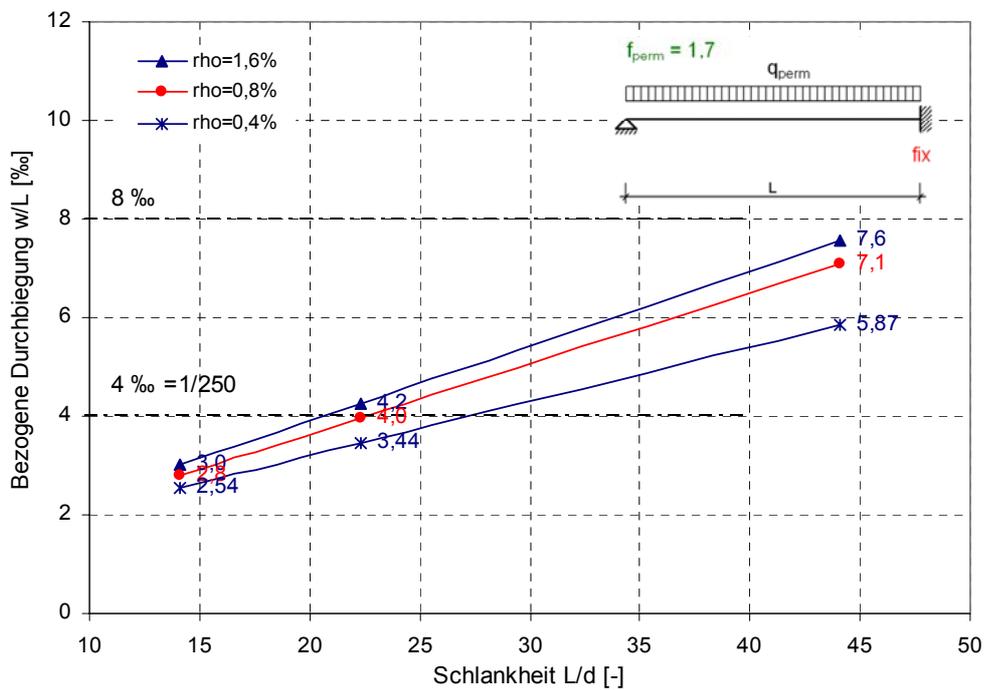
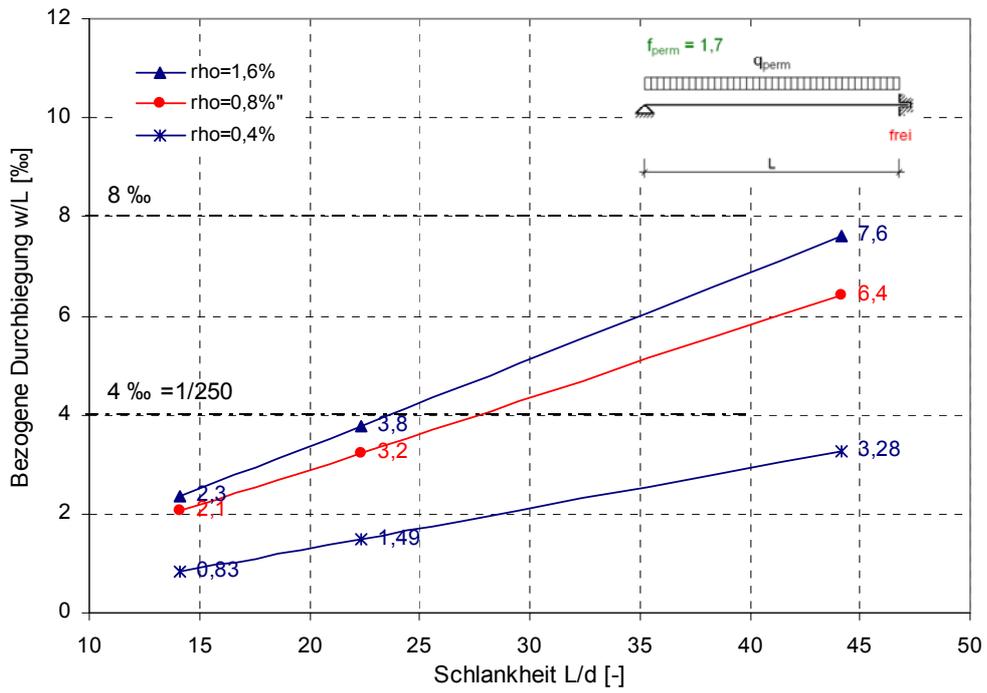


Abb. 5: Bezogene Durchbiegungen w/L in Abhängigkeit von der Schlankheit
 System E: q_{perm} + Kriechen + Schwinden
 System F: q_{perm} + Kriechen + Schwinden

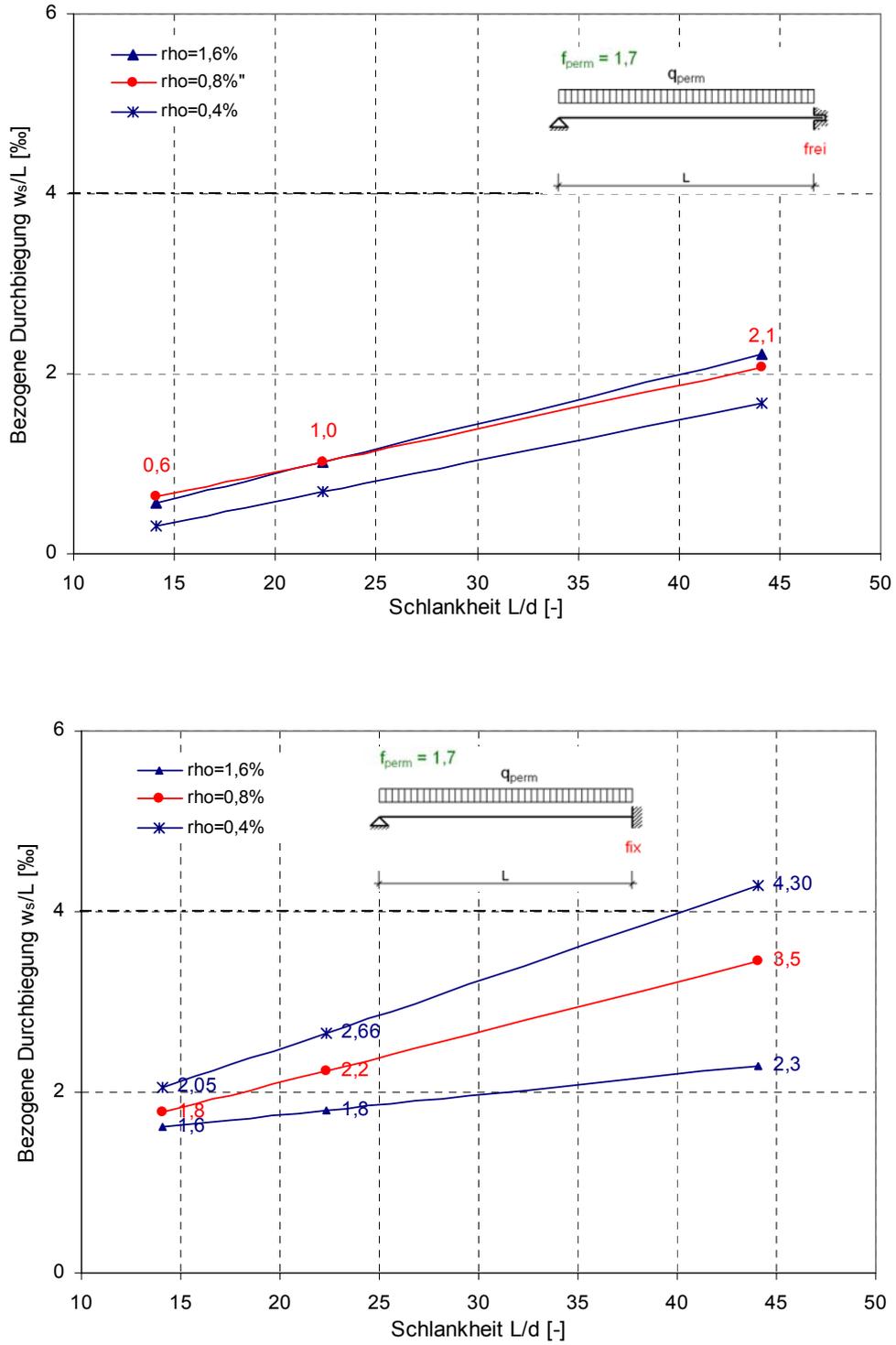
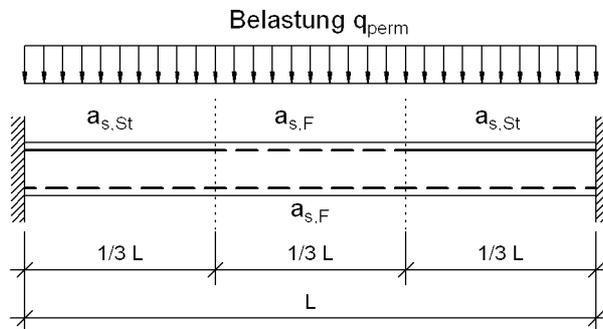


Abb. 6: Bezogene Durchbiegungen w_s/L in Abhängigkeit von der Schlankheit
 System E: nur Schwindanteil unter q_{perm}
 System F: nur Schwindanteil unter q_{perm}

Anhang B: Bezogene Normalkräfte

B1: Ausgangsdaten für die Diagramme

System D (Grenzfall horizontal unverschiebliche Lagerung)



Querschnitt/Bewehrung

Dimensionslos

BW0: gemäß linear-elastischer Berechnung für q_{Ed}

Bewehrung: statisch erf. Bewehrungsgrad über der Stütze $\rho_{s,St}$

Beton C 30/37

$$E_{c0m} = 31900 \text{ MN} / \text{m}^2$$

$$f_{ct0} = 3,0 \text{ MN} / \text{m}^2 \quad f_{cm}(\infty) = 70\% \cdot f_{ct0} = 2,1 \text{ MN} / \text{m}^2$$

$$\varphi_{\infty} = 2,5$$

Belastung

Aus dem Bewehrungsgrad wird die Belastung q_{Ed} des Systems im GZT abgeleitet. Mit Hilfe eines einheitlichen Belastungsfaktors wird dann auf das Gebrauchslastniveau unter quasi-ständiger Belastung geschlossen.

$$M_{Ed} \leq M_{Rd}(\rho_s) = \mu_{Ed} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} \quad ; \quad q_{Ed} = \frac{M_{Ed} \cdot 12}{L^2}$$

$$q_{perm} = \frac{q_{Ed}}{f_{perm}} \quad f_{perm} = 1,7$$

Eingangswerte für das Diagramm

- Bezugsbewehrungsgrad: $\rho_{s,St}$
- Verformungseinwirkung $-\varepsilon_L$

Bestimmung der wirksamen Dehnung aus Schwinden

Für den Lastfall Schwinden ist es erforderlich, in Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad die wirksame Dehnung vorab zu bestimmen. Dazu kann nachfolgendes Diagramm verwendet werden.

Wirksame Schwindverkürzung: $-\varepsilon_{cs}(i.M.) = Wert \cdot \varepsilon_{cs}(\infty)$

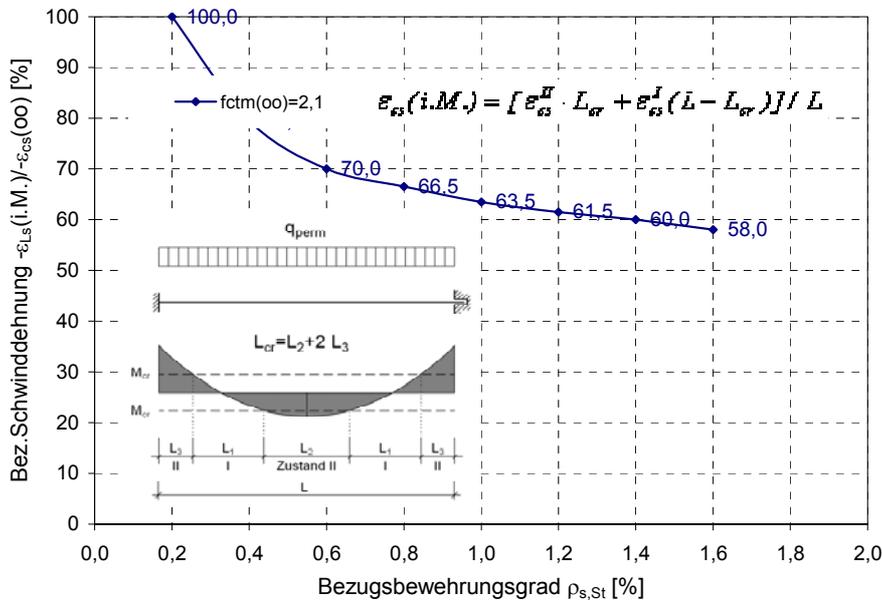


Abb. 7: Diagramm zur Bestimmung der wirksamen Schwindverkürzung

Bestimmung der wirksamen Dehnung aus Temperatureinwirkung ΔT_N

Um die Temperatur als Kurzeiteinwirkung richtig berücksichtigen zu können, muss die Temperatureinwirkung mit einem Anpassungsfaktor k_T multipliziert werden.

ΔT_N	Faktor k_T
[K]	[-]
-0	2,72
-10	2,09
-20	1,84
-30	1,71
-40	1,53
-50	1,47
-60	1,36
-80	1,23
-100	1,19

Wirksame Temperaturverkürzung: $\varepsilon_{LT} = k_T \cdot \Delta T_N [K] \cdot 10^{-5}$

B2: Bezogene Normalkräfte für Bewehrungsanordnung BW0

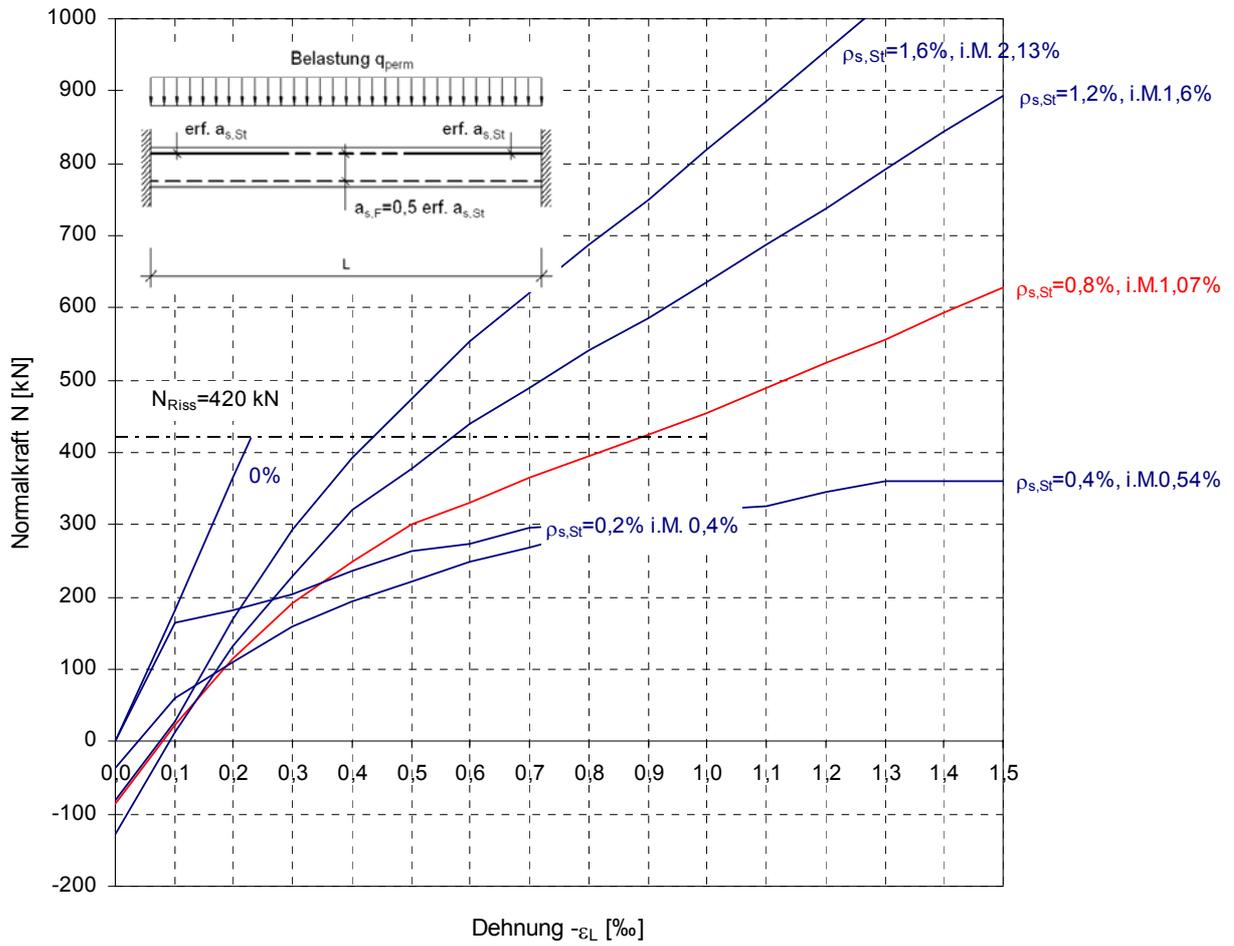


Abb. 8: Dimensionloses Diagramm zur Ermittlung der Zwangnormalkraft bei Bewehrungsanordnung BW0 (=statisch erforderliche Bewehrung im GZT)

B3: Bezogene Normalkräfte für symmetrische Bewehrungsanordnung

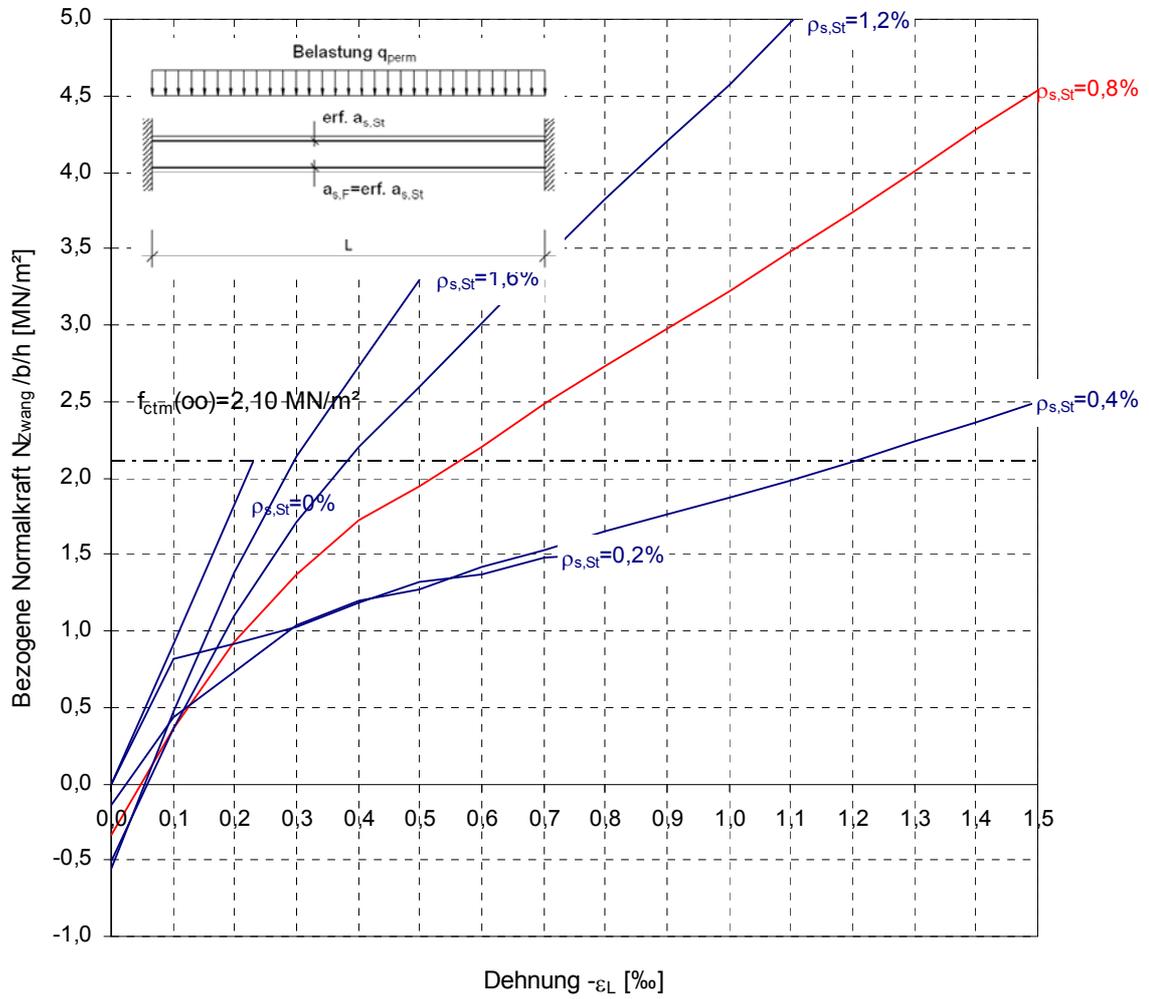


Abb. 9: Dimensionloses Diagramm zur Ermittlung der Zwangnormalkraft bei symmetrischer Bewehrungsanordnung BW(symm)