

# Juliamengen als Sierpińskikurven

**Dissertation**

zur Erlangung des Grades eines Doktors der  
Naturwissenschaften

Der Fakultät für Mathematik  
der Technischen Universität Dortmund

im März 2009 vorgelegt von

Ingo Bednarek

Ich bedanke mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. Steinmetz für den Vorschlag zu diesem Dissertationsthema und für seine hilfreichen und motivierenden Ratschläge. Außerdem danke ich meiner Familie für ihre Unterstützung während meiner gesamten Ausbildung.

Eingereicht im März 2009

Tag der mündlichen Prüfung: 14.7.2009

Prüfungskommission:

Vorsitzender:	Prof. Dr. J. Stöckler
Erster Gutachter:	Prof. Dr. N. Steinmetz
Zweiter Gutachter:	PD Dr. M. Stiemer
Weiterer Prüfer:	Prof. Dr. M. Voit
Wiss. Mitarbeiter:	Dr. P. Furlan

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlegende Eigenschaften</b>	<b>7</b>
1.1	Die dynamische Ebene – elementare Eigenschaften . . . . .	7
1.2	Eine Rekursionsfolge . . . . .	11
1.3	Die Parameterebene – elementare Eigenschaften . . . . .	13
1.4	Exkurs: Modulfunktionen und $R_1$ . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Hilfsmittel</b>	<b>17</b>
2.1	Die Riemann-Hurwitz-Formel . . . . .	17
2.2	Quasikonforme Abbildungen . . . . .	17
2.3	Beltramikoeffizienten und symmetrische Abbildungen . . . . .	21
2.4	Polynom-ähnliche Abbildungen . . . . .	23
2.5	Das $\lambda$ -Lemma . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Die Flucht Komponenten</b>	<b>26</b>
3.1	Die Dynamik in den Flucht Komponenten . . . . .	26
3.2	Parametrisierung der Flucht Komponenten . . . . .	33
3.3	Kernkonvergenz . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Die hyperbolischen Komponenten</b>	<b>50</b>
4.1	Die Dynamik in den hyperbolischen Komponenten . . . . .	50
4.2	Parametrisierung der hyperbolischen Komponenten . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Juliamengen als Sierpińskikurven</b>	<b>61</b>
5.1	Juliamengen als Sierpińskikurven . . . . .	61
5.2	Juliamengen und Quasikreise . . . . .	65
5.3	Dynamische Konjugation . . . . .	67
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>69</b>

# Einleitung

Die Theorie der Iteration einer festen rationalen Funktion  $R$  wurde um 1918 von *Fatou* und *Julia* entwickelt. Sie teilten die Riemannsche Zahlenkugel ein in die *Fatoumenge*, in der die Iteriertenfolge  $(R^n)$  eine normale Familie im Sinne Montels bildet, und ihr Komplement, die *Juliamenge*, in der die Folge ein „chaotisches“ Verhalten zeigt. Auf Fatou gehen bereits die Anfänge der in den 1930er Jahren von *Cremer* vollendeten Klassifikation der stabilen Fixgebiete in die fünf Typen zurück, die heute unter den Namen *Böttchergebiet*, *Schrödergebiet*, *Leaugebiet*, *Siegelscheibe* und *Arnol'd-Herman-Ring* bekannt sind. Schon aus Arbeiten des 19. Jahrhunderts von *Böttcher*, *Schröder*, *Koenigs* und *Leau* über die Lösungen gewisser Funktionalgleichungen ergibt sich im Wesentlichen die Tatsache, dass jedes Böttcher-, Schröder- und Leaugebiet einen kritischen Punkt enthalten muß. Dies unterstreicht bereits die besondere Rolle der kritischen Punkte.

Die größten Fortschritte auf dem Gebiet der rationalen Iteration wurden danach erst viele Jahre später in den 1980er Jahren erzielt, namentlich *Sullivans* Beweis, dass es keine wandernden Gebiete gibt, und *Shishikuras* Abschätzung der maximalen Anzahl der verschiedenen Zyklen. Beide Beweise beruhen auf den Methoden der *quasikonformen Chirurgie*, deren Grundlagen im zweiten Kapitel dieser Arbeit beschrieben werden.

Ebenfalls in den 1980er Jahren wurden mit Hilfe von Computern die ersten Bilder von Juliamengen erzeugt, wie sie heute in ihrer besonderen Schönheit nicht nur gleichermaßen Motivation und Hilfsmittel für mathematische Überlegungen sind, sondern auch bei „Nichtmathematikern“ Begeisterung hervorrufen können. *Mandelbrot* programmierte ein Bild der heute nach ihm benannten Mandelbrotmenge  $\mathcal{M}$ . Diese besteht aus den Parametern  $c$ , für die die Juliamenge des Polynoms  $P_c(z) = z^2 + c$  zusammenhängend ist; das sind genau die Parameter, für die der Orbit des einzigen kritischen Punktes 0 des Polynoms  $P_c$  beschränkt bleibt. 1982 zeigten *Douady* und *Hubbard*, dass  $\mathcal{M}$  zusammenhängend ist. In späteren Jahren folgten dann Arbeiten zur Polynomfamilie  $z^d + c$  mit  $d \geq 2$  und zu weiteren Familien rationaler Funktionen. Eine Grundidee dabei ist, die Dynamik jeder einzelnen Funktion im Kontext

„verwandter Funktionen“ besser verstehen zu können. Erwähnt sei hier die von *Devaney*, *Roesch*, *Steinmetz* und anderen betrachtete *McMullen-Familie*  $R_c(z) = z^m + \frac{c}{z^l}$  mit  $m \geq 2$  und  $l \geq 1$ , sowie die von *Steinmetz* untersuchte *Morosawa-Pilgrim-Familie*  $R_c(z) = c \left( 1 + \frac{4/27 z^3}{1-z} \right)$ . All diese Familien zeichnen sich dadurch aus, dass sie einen Parameter  $c$  und einen „überschaubaren“ kritischen Orbit haben. Die Parameterebene ( $c$ -Ebene) wird nach dem Verhalten der (freien) kritischen Punkte eingeteilt und ist stets selbst ein interessant zu studierendes Objekt.

In dieser Arbeit soll nun die Familie

$$R_c(z) = c \frac{4}{27} \frac{(z^2 - z + 1)^3}{z^2(1-z)^2}$$

mit Parameter  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  betrachtet werden. Dazu werden in Kapitel 1 zunächst die grundlegenden dynamischen Eigenschaften der Funktion  $R_c$  und die Folge  $Q_n(c) = R_c^n(c)$ , die den Orbit des einzigen „freien“ kritischen Wertes  $c$  beschreibt, untersucht. Schließlich wird die Parameterebene eingeteilt in die Mengen  $\Omega_n$  der Parameter, für die der „freie“ kritische Wert  $c$  unter Iteration nach  $n$  Schritten im Außengebiet landet (also „flüchtet“), und die Menge  $\Omega_\infty$  der Parameter, für die der Orbit von  $c$  beschränkt ist.

Einige mathematische Methoden, die in dieser Arbeit angewendet werden, stellen wir im zweiten Kapitel kurz vor. Den Schwerpunkt bildet dabei die Theorie der quasikonformen Abbildungen mit dem Satz von Ahlfors-Bers und die quasikonforme Chirurgie mit ihren Anwendungen beim  $\lambda$ -Lemma und den polynom-ähnlichen Abbildungen.

Das dritte Kapitel ist nun den *Fluchtkomponenten*, den zusammenhängenden Komponenten von  $\Omega_n$ , gewidmet. Zunächst wird die Dynamik von  $R_c$  für  $c \in \Omega_n$  näher untersucht und wir erhalten, dass für  $c \in \Omega_0$  die Juliamenge eine Cantormenge ist, während sie für  $c \in \Omega_n$ ,  $n \geq 1$ , eine Kurve ist. Im zweiten Abschnitt wird dann gezeigt, dass alle Fluchtkomponenten  $\Omega$  einfach zusammenhängend sind, indem eine eigentliche Abbildung  $\Psi : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  konstruiert wird. Ferner erhalten wir, dass jede Komponente von  $\Omega_n$  genau eine Polstelle von  $Q_n$ , ihr *Zentrum*, enthält, und können damit die Anzahl der Komponenten bestimmen. Das Aussehen der Komponente  $\Omega_0$  lässt sich weiter dadurch beschreiben, dass die Böttchergebiete der Funktionen  $Q_n$  um  $\infty$  im Sinne der Kernkonvergenz nach *Carathéodory* gegen  $\Omega_0$  konvergieren.

Die Komponenten von  $\Omega_\infty$ , in denen  $R_c$  einen beschränkten, (super-) attraktiven Zyklus der Länge  $n$  hat, werden im vierten Kapitel betrachtet. Wir nennen diese Komponenten die *hyperbolischen Komponenten*. Für Para-

meter  $c$  aus diesen Komponenten sind alle stabilen Gebiete einfach zusammenhängend und die Juliamenge ist eine Kurve. Darüber hinaus werden die hyperbolischen Komponenten wie üblich durch die Multiplikatorabbildung parametrisiert. Die Bilder, die wir in der dynamischen Ebene für Parameter aus  $\Omega_\infty$  erhalten, sind oft besonders schön, vergleiche etwa das Bild unten.

Im letzten Kapitel wird schließlich bewiesen, dass für Parameter  $c \in \Omega_n$ ,  $n \geq 1$ , die Juliamenge  $\mathcal{J}_c$  eine *Sierpińskikurve* ist; für kleine Parameter ist sogar  $\partial U_\infty$  ein Quasikreis. Juliamengen als Sierpińskikurven wurden 1993 als erstes von *John Milnor* und *Tan Lei* in der Familie  $f(z) := a(z + \frac{1}{z}) + b$  entdeckt. Später konnten unter anderem Devaney, Morosawa und Steinmetz zeigen, dass Juliamengen als Sierpińskikurven auch in der McMullen-Familie und der Morosawa-Pilgrim-Familie auftreten, ja sogar „eher die Regel als die Ausnahme“ sind. Dies ist ebenso in der hier untersuchten Familie der Fall. Ferner wird untersucht, in welchen Fällen zwei Funktionen der Familie, deren Juliamengen Sierpińskikurven sind, dynamisch konjugiert zueinander sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn die beiden zugehörigen Parameter derselben Fluchtkomponente oder zwei spiegelbildlichen Fluchtkomponenten entstammen.

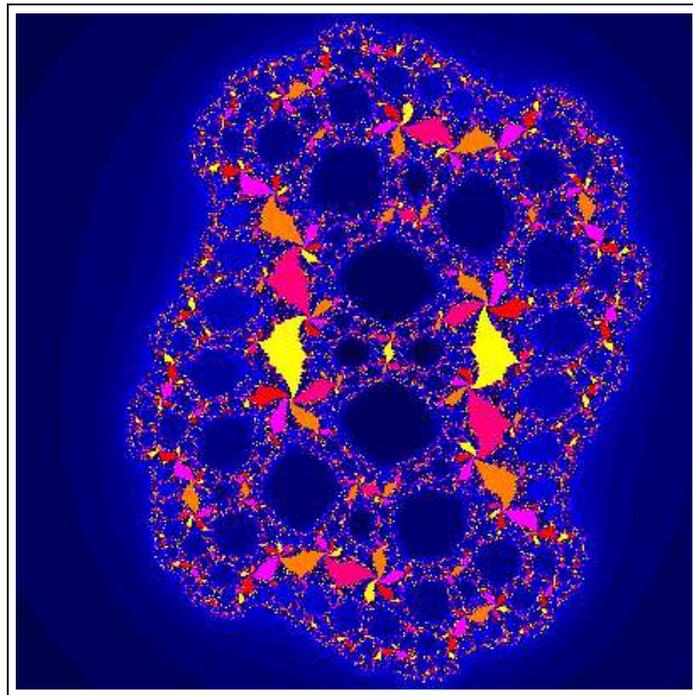


Abbildung 1: Ein attraktiver Fünferzyklus, hier für  $c = -1,4 + 0,7i$

# Notationen

An dieser Stelle geben wir eine Übersicht über die in dieser Arbeit verwendeten Notationen.

$\mathbb{C}^*$	$= \mathbb{C} \setminus \{0\}$
$\mathbb{D}$	$= \{z \in \mathbb{C} :  z  < 1\}$
$\sharp G$	$=$ Zusammenhangszahl des Gebiets $G$
$R_c(z)$	$= \frac{4}{27} c \frac{(z^2 - z + 1)^3}{z^2(z - 1)^2}$
$Q_n(c)$	$= R_c^n(c)$
$U_\infty(c)$	$=$ stabiles Gebiet von $R_c$ um $\infty$
$U_0(c)$	$=$ stabiles Gebiet von $R_c$ um $0$
$U_1(c)$	$=$ stabiles Gebiet von $R_c$ um $1$
$\alpha(z)$	$= 1 - z$
$\beta(z)$	$= \frac{1}{z}$
$\Sigma$	$=$ von $\alpha$ und $\beta$ erzeugte Gruppe
$\Omega_0$	$= \{c \in \mathbb{C}^* : c \in U_\infty(c)\}$
$\Omega_n$	$= \{c \in \mathbb{C}^* : R_c^n(c) \in U_\infty(c), R_c^{n-1}(c) \notin U_\infty(c)\}$
$\Omega_\infty$	$= \{c \in \mathbb{C}^* : R_c^n(c) \notin U_\infty(c) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}$
$\mathcal{H}_n$	$=$ Menge der Parameter mit beschränktem Zykel der Länge $n$

# Kapitel 1

## Grundlegende Eigenschaften

### 1.1 Die dynamische Ebene – elementare Eigenschaften

Wir untersuchen in dieser Arbeit die Parameterfamilie

$$R_c(z) = \frac{4}{27} c \frac{(z^2 - z + 1)^3}{z^2(z-1)^2}, \quad c \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

deren grundlegende Eigenschaften wir im ersten Kapitel zusammenfassen. Vorab sei jedoch bemerkt, dass die Funktion  $R_1$  auch in der Theorie der Modulformen eine besondere Rolle spielt; dies wird in einem Exkurs am Ende dieses Kapitels kurz erläutert. Es ist  $R_c$  eine rationale Funktion vom Grad 6. Sie hat also sieben Fixpunkte und zehn kritische Punkte, entsprechend ihrer Vielfachheiten gezählt.  $0, 1$  und  $\infty$  sind jeweils doppelte Polstellen, also einfache kritische Punkte. Insbesondere ist  $\infty$  ein superattraktiver Fixpunkt. Es ist  $z^2 - z + 1 = (z - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}))(z - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))$ . Demnach sind die beiden Punkte  $z_+ := \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$  und  $z_- := \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$  dreifache Nullstellen von  $R_c$  und damit doppelte kritische Punkte. Ihr Verhalten unter Iteration ist offensichtlich unabhängig von der Wahl des Parameters  $c$ .

Weiter gilt:

$$R'_c(z) = \frac{-8}{27} c \frac{(z^2 - z + 1)^2}{z^3(z-1)^3} \left( z - \frac{1}{2} \right) (z+1)(z-2)$$

Also sind  $-1, 2$  und  $\frac{1}{2}$  einfache kritische Punkte. Sie haben mit  $R_c(-1) = R_c(2) = R_c(\frac{1}{2}) = c$  denselben kritischen Wert, nämlich gerade  $c$ . Dessen Verhalten unter Iteration bestimmt also im Wesentlichen das dynamische Verhalten von  $R_c$ . Wir sprechen im Folgenden bei  $-1, 2$  und  $\frac{1}{2}$  auch von den

„freien kritischen Punkten“, da ihr Verhalten unter Iteration von der Wahl des Parameters abhängig ist.

Bei der Untersuchung des dynamischen Verhaltens einer Funktion  $R_c$  spielt also der Vorwärtsorbit des Punktes  $c$  die zentrale Rolle. Beispielsweise ist  $R_c$  hyperbolisch, falls  $c$  von einem attraktiven Fixpunkt angezogen wird. Einen Schwerpunkt dieser Arbeit bildet die Untersuchung der Parameter, für die  $c$ , und somit alle kritischen Punkte, vom superattraktiven Fixpunkt  $\infty$  angezogen werden.

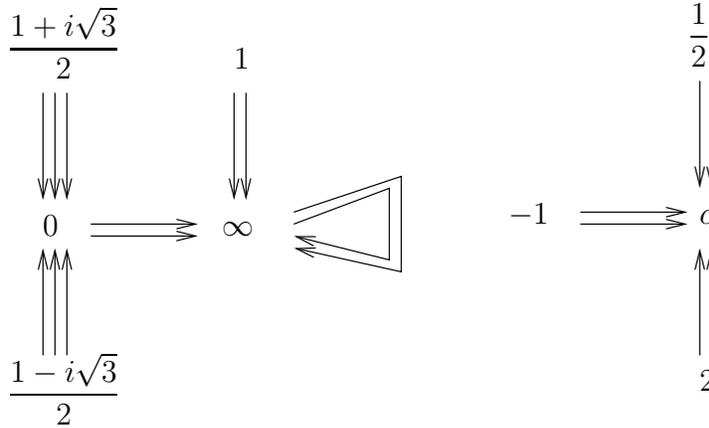


Abbildung 1.1: Der kritische Orbit

Im Folgenden bezeichne  $\mathcal{J}_c$  die Juliamenge,  $\mathcal{F}_c$  die Fatoumenge und  $U_a(c)$  das stabile Gebiet von  $R_c$ , welches den Punkt  $a$  enthält. Wenn bei Überlegungen, die die dynamische Ebene betreffen, ein fester Parameter  $c$  betrachtet wird und keine Verwechslungsgefahr besteht, lassen wir den Zusatz  $c$  in den Bezeichnungen auch weg und schreiben kurz  $U_\infty$  statt  $U_\infty(c)$  und entsprechend.

**Satz 1.1 (Symmetrie)** *Es sei  $\alpha(z) := 1 - z$ ,  $\beta(z) := \frac{1}{z}$  und  $\Sigma$  die von  $\alpha$  und  $\beta$  erzeugte Untergruppe der Gruppe der Möbiustransformationen. Dann sind die Juliamenge  $\mathcal{J}_c$  und die Fatoumenge  $\mathcal{F}_c$  von  $R_c$  invariant unter  $\Sigma$ .*

**Beweis:** Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$R_c(\alpha(z)) = \frac{4}{27}c \frac{((1-z)^2 - (1-z) + 1)^3}{(1-z)^2(1-(1-z))^2} = \frac{4}{27}c \frac{(1-2z+z^2+z)^3}{z^2(1-z)^2} = R_c(z)$$

und

$$R_c(\beta(z)) = \frac{4}{27}c \frac{(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1)^3}{\frac{1}{z^2}(1-\frac{1}{z})^2} = R_c(z).$$

Damit folgt die Behauptung. □

**Bemerkung 1.2** Die Gruppe  $\Sigma$  ist isomorph zur *symmetrischen Gruppe*  $S_3$  und heißt auch die *anharmische Gruppe* (vergleiche [Cha]). Es ist gerade

$$\Sigma = \left\{ id, z \mapsto 1 - z, z \mapsto \frac{1}{z}, z \mapsto \frac{1}{1 - z}, z \mapsto 1 - \frac{1}{z}, z \mapsto \frac{z}{z - 1} \right\}.$$

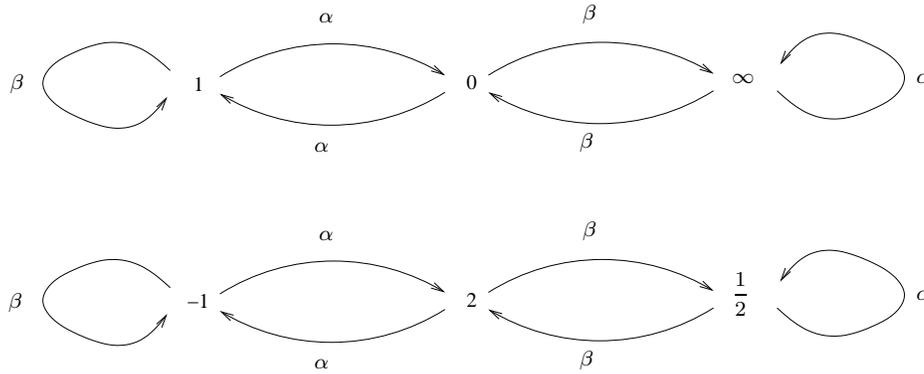


Abbildung 1.2: Die Symmetrie

**Lemma 1.3** Es gilt entweder  $U_0 = U_1 = U_\infty$  oder  $U_0, U_1$  und  $U_\infty$  sind paarweise verschieden.

**Beweis:**  $\mathcal{F}$  ist invariant unter  $\Sigma$ , also bilden  $\alpha$  und  $\beta$  stabile Gebiete auf stabile Gebiete ab. Im Einzelnen gelten die folgenden Implikationen:

$$U_0 = U_\infty \Rightarrow U_1 \stackrel{\alpha(0)=1}{=} \alpha(U_0) = \alpha(U_\infty) \stackrel{\alpha(\infty)=\infty}{=} U_\infty$$

$$U_0 = U_1 \Rightarrow U_\infty \stackrel{\beta(0)=\infty}{=} \beta(U_0) = \beta(U_1) \stackrel{\beta(1)=1}{=} U_1$$

$$U_1 = U_\infty \Rightarrow U_0 \stackrel{\alpha(1)=0}{=} \alpha(U_1) = \alpha(U_\infty) \stackrel{\alpha(\infty)=\infty}{=} U_\infty$$

Wenn also zwei der drei Polstellen von  $R_c$  im selben stabilen Gebiet liegen, so enthält dieses auch die dritte Polstelle von  $R_c$ .  $\square$

**Lemma 1.4** Es sei  $r_c := \max \left\{ 6, 3 + \frac{27}{4|c|} \right\}$  und  $K_c := \{z : |z| > r_c\}$ .

Dann ist die Kreisscheibe  $K_c$  vorwärts invariant unter  $R_c$ ; es gilt sogar  $R_c(\overline{K}_c) \subseteq K_c$ . Insbesondere ist also  $\overline{K}_c = \{z : |z| \geq r_c\} \subseteq U_\infty(c)$ .

Der Radius  $r_c$  ist nicht „optimal“, aber das ist für unsere Überlegungen auch nicht erforderlich. Entscheidend ist, dass der Term  $\frac{1}{|c|}$  auftritt, der sich nicht

vermeiden läßt.

**Beweis:** Wir betrachten zunächst nur die Funktion  $R(z) := \frac{(z^2 - z + 1)^3}{z^2(z - 1)^2}$ .

Polynomdivision liefert  $R(z) = z^2 - z + \frac{3z^4 - 6z^3 + 6z^2 - 3z + 1}{z^4 - 2z^3 + z^2}$ . Also gilt

$|R(z)| \geq |z|^2 - |z| - \left| \frac{3z^4 - 6z^3 + 6z^2 - 3z + 1}{z^4 - 2z^3 + z^2} \right|$  und wir erhalten für  $|z| \geq 6$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \frac{3z^4 - 6z^3 + 6z^2 - 3z + 1}{z^4 - 2z^3 + z^2} \right| &= \left| \frac{3 - 6/z + 6/z^2 - 3/z^3 + 1/z^4}{1 - 2/z + 1/z^2} \right| \\ &\leq \frac{3 + 6/|z| + 6/|z|^2 + 3/|z|^3 + 1/|z|^4}{1 - 2/|z| - 1/|z|^2} \\ &\leq \frac{3 + 16/|z|}{1 - 3/|z|} = \frac{3|z| + 16}{|z| - 3} < \frac{6|z|}{|z| - 3} \leq 2|z| \end{aligned}$$

Somit gilt für alle  $z$  mit  $|z| \geq 6$  die Abschätzung  $|R(z)| > |z|^2 - 3|z|$ . Für  $|z| \geq r_c$  erhalten wir

$$|R_c(z)| > \frac{4}{27} |c| |z| (|z| - 3) \geq \frac{4}{27} |c| r_c (r_c - 3) \geq r_c$$

Die letzte Ungleichung folgt dabei aus

$$\frac{4}{27} |c| (r_c - 3) \geq 1 \Leftrightarrow r_c \geq \frac{27}{4|c|} + 3.$$

Das Außengebiet eines Kreises mit Radius  $r_c = \max \left\{ 6, 3 + \frac{27}{4|c|} \right\}$  ist also unter Iteration von  $R_c$  vorwärtsinvariant und gehört damit zum Attraktionsgebiet des superattraktiven Fixpunktes  $\infty$ .  $\square$

**Folgerung 1.5** Für alle Parameter  $c$  mit  $|c| \geq 6$  gilt: Die freien kritischen Punkte  $-1$ ,  $2$  und  $\frac{1}{2}$  liegen in  $U_0 \cup U_1 \cup U_\infty$ .

**Beweis:** Aus  $|c| \geq 6 \geq \max \left\{ 6, 3 + \frac{27}{4|c|} \right\} = r_c$  folgt nach Lemma 1.4 sicherlich  $c \in U_\infty(c)$ . Mit  $R_c(-1) = R_c(2) = R_c(\frac{1}{2}) = c$  ergibt sich dann die Behauptung, da  $R_c^{-1}(U_\infty) = U_0 \cup U_1 \cup U_\infty$ .  $\square$

## 1.2 Eine Rekursionsfolge

Bei der Untersuchung des Verhaltens einer rationalen Funktion unter Iteration spielt der Vorwärtsorbit der kritischen Punkte stets die zentrale Rolle. Bei unserer Familie gibt es nur einen freien kritischen Wert, so dass es genügt, dessen Vorwärtsorbit zu betrachten. Dessen Abhängigkeit vom Parameter  $c$  wird durch die rekursiv definierte Folge beschrieben, die wir in diesem Kapitel etwas näher betrachten wollen und auf die wir später noch mehrfach zurückgreifen werden.

**Lemma 1.6** *Wir betrachten die rekursiv definierte Folge rationaler Funktionen mit*

$$Q_0(c) := c, \quad Q_{n+1}(c) := R_c(Q_n(c)) \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann gilt für  $n \geq 1$ :

$$Q_n(c) = R_c^n(c) = \left(\frac{4}{27}\right)^{\alpha_n} \frac{1 p_n(c)}{c q_n(c)}$$

mit zwei teilerfremden Polynomen  $p_n$  und  $q_n$ , wobei gilt

- $p_n(0) = q_n(0) = 1$
- $\deg Q_n = \deg p_n = 6^n$
- $\deg q_{n+1} = 4 \cdot \deg p_n + 2 \cdot \deg q_n < \deg p_{n+1} - 1$
- $\alpha_n = 2^n - 1$

**Beweis:** Wir beweisen das Lemma mit vollständiger Induktion.  
Induktionsanfang:

$$Q_1(c) = \frac{4}{27} \frac{(1 - c + c^2)^3}{c(1 - c)^2}$$

Es gilt also:

$$p_1(c) = (1 - c + c^2)^3, \quad \deg p_1 = 6$$

$$q_1(c) = (1 - c)^2, \quad \deg q_1 = 2$$

$p_1$  und  $q_1$  sind teilerfremd.

$$p_1(0) = q_1(0) = 1$$

$$\alpha_1 = 1$$

Induktionsschluß:

$$\begin{aligned}
 Q_{n+1}(c) &= \frac{4}{27} c \frac{(1 - Q_n(c) + (Q_n(c))^2)^3}{Q_n(c)^2 \cdot (1 - Q_n(c))^2} \\
 &= \frac{4}{27} c \frac{\left(1 - \left(\frac{4}{27}\right)^{\alpha_n} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{p_n(c)}{q_n(c)} + \left(\frac{4}{27}\right)^{2\alpha_n} \frac{1}{c^2} \cdot \frac{(p_n(c))^2}{(q_n(c))^2}\right)^3}{\left(\frac{4}{27}\right)^{2\alpha_n} \cdot \frac{1}{c^2} \frac{(p_n(c))^2}{(q_n(c))^2} \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{27}\right)^{\alpha_n} \cdot \frac{1}{c} \frac{p_n(c)}{q_n(c)}\right)^2} \\
 &= \left(\frac{4}{27}\right)^{2\alpha_n+1} \frac{\left((p_n(c))^2 - \left(\frac{4}{27}\right)^{-\alpha_n} p_n(c) c q_n(c) + \left(\frac{4}{27}\right)^{-2\alpha_n} c^2 (q_n(c))^2\right)^3}{c (p_n(c))^2 (q_n(c))^2 \left(p_n(c) - \left(\frac{4}{27}\right)^{-\alpha_n} c q_n(c)\right)^2}
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir also:

$$\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 1$$

$$\begin{aligned}
 p_{n+1}(c) &= \left( (p_n(c))^2 - \left(\frac{4}{27}\right)^{-\alpha_n} p_n(c) c q_n(c) + \left(\frac{4}{27}\right)^{-2\alpha_n} c^2 (q_n(c))^2 \right)^3 \\
 q_{n+1}(c) &= (p_n(c))^2 (q_n(c))^2 \left( p_n(c) - \left(\frac{4}{27}\right)^{-\alpha_n} c q_n(c) \right)^2
 \end{aligned}$$

Wegen

$$p_{n+1}(c) = \left( \left( p_n(c) - \left(\frac{4}{27}\right)^{-\alpha_n} c q_n(c) \right)^2 + p_n(c) \left(\frac{4}{27}\right)^{-\alpha_n} c q_n(c) \right)^3$$

ist dies die gesuchte Darstellung und es gilt  $p_{n+1}(0) = q_{n+1}(0) = 1$ . Es ist  $\deg p_{n+1} = 6 \cdot \deg p_n$  und  $\deg q_{n+1} = 4 \cdot \deg p_n + 2 \cdot \deg q_n$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

**Lemma 1.7** *Es gilt für  $n \geq 1$ :  $\deg q_n = 2^n(3^n - 2)$ .*

**Beweis:** Wir zeigen durch Induktion, dass  $\deg p_n - \deg q_n = 2^{n+1}$ . Der Induktionsanfang ist trivial. Es gilt  $\deg p_{n+1} - \deg q_{n+1} = 6 \deg p_n - 4 \deg p_n - 2 \deg q_n = 2(\deg p_n - \deg q_n) = 2^{n+2}$ . Damit folgt dann die Behauptung.  $\square$

### 1.3 Die Parameterebene – elementare Eigenschaften

Ein wesentlicher Teil dieser Arbeit besteht in der Untersuchung der Parameterebene der Familie  $(R_c)$ ,  $c \in \mathbb{C}^*$ . In diesem Abschnitt wollen wir erste Ergebnisse vorstellen.

Wir teilen nun die Parameterebene („ $c$ -Ebene“) ein:

**Definition 1.8** Es sei

$$\Omega_0 := \{c \in \mathbb{C}^* : c \in U_\infty(c)\},$$

$$\Omega_n := \{c \in \mathbb{C}^* : R_c^n(c) \in U_\infty(c), R_c^{n-1}(c) \notin U_\infty(c)\} \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und}$$

$$\Omega_\infty := \{c \in \mathbb{C}^* : R_c^n(c) \notin U_\infty(c) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Die zusammenhängenden Komponenten von  $\Omega_n$ ,  $n \geq 0$ , nennen wir *Flucht-komponenten* der Ordnung  $n$  (vergleiche auch [Roe]).

Für Parameter in den Flucht-komponenten „flüchten“ also alle kritischen Punkte nach  $\infty$ , insbesondere kann es keine anderen periodischen Komponenten der Fatoumenge als das Außengebiet  $U_\infty$  geben.

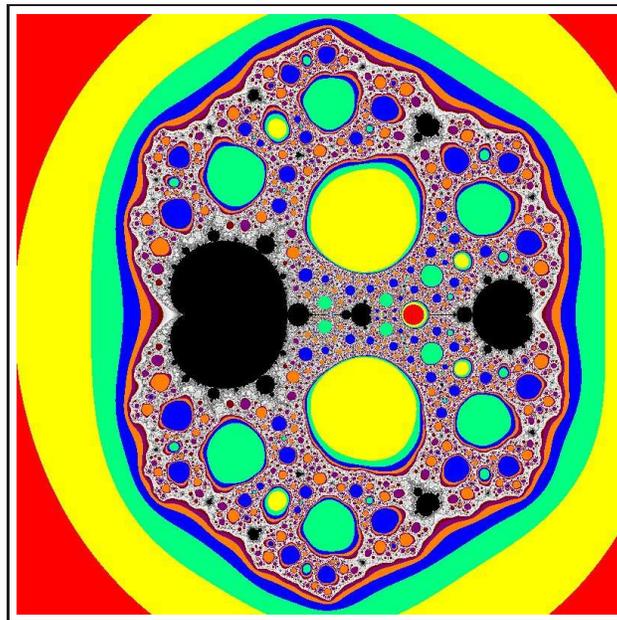


Abbildung 1.3: Die Flucht-komponenten

**Bemerkung 1.9 (Legende)** In Bild 1.3 läßt sich an der „zentralen“ Farbe jeder Flucht Komponente ihre Ordnung ablesen: Die beschränkte Komponente, die in der Mitte rot gefärbt ist, ist die Flucht Komponente erster Ordnung. Die Komponenten, die in ihrer Mitte gelb sind, sind die 8 Komponenten zweiter Ordnung. Zwei von ihnen sind so klein, dass sie auf dem Bild nicht zu erkennen sind. Die Komponenten, die in der Mitte hellgrün sind, sind die Komponenten dritter Ordnung; die Komponenten, die in der Mitte blau sind, sind die Komponenten vierter Ordnung und so weiter (vergleiche auch Satz 3.19 und Folgerung 3.20).

**Lemma 1.10** *Es gilt  $\{c \in \mathbb{C}^* : |c| \geq 6\} \subseteq \Omega_0$ .*

**Beweis:** Die Behauptung ergibt sich direkt aus Folgerung 1.5, da  $|c| \geq r_c$  für  $|c| \geq 6$ .  $\square$

**Bemerkung 1.11** Da für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Lösungen von  $Q_n(c) = R_c^n(c) = c$  in  $\Omega_\infty$  liegen, ist  $\Omega_\infty \neq \emptyset$ .

**Satz 1.12**  $\Omega_\infty \cup \{0\}$  *ist kompakt.*

**Beweis:** Wir betrachten wieder die in Lemma 1.6 definierte Folge rationaler Funktionen  $(Q_n)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \Omega_\infty &= \{c \in \mathbb{C}^* : R_c^n(c) \notin U_\infty(c) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\} \\ &\stackrel{\text{Lemma 1.4}}{=} \{c \in \mathbb{C}^* : |R_c^n(c)| \leq 6 + \frac{27}{4|c|} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{c \in \mathbb{C}^* : |Q_n(c)| \leq 6 + \frac{27}{4|c|} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \left\{ c \in \mathbb{C}^* : |Q_n(c)| \leq 6 + \frac{27}{4|c|} \right\} \end{aligned}$$

Da die Funktion  $c \mapsto |Q_n(c)| - \frac{27}{4|c|}$  chordal stetig in  $\mathbb{C}^*$  ist, ist  $\Omega_\infty$  als Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen in  $\mathbb{C}^*$ . Nach obigem Lemma 1.10 ist  $\Omega_\infty \subseteq \{c : |c| < 6\}$  und somit beschränkt. Damit folgt die Behauptung.  $\square$

Der folgende Satz stellt lediglich eine Übertragung von Theorem 4.6 in [McM1], Seite 60, dar:

**Satz 1.13** *Für  $c \in \mathbb{C}^*$  gilt:*

$$c \in \partial\Omega_\infty \Leftrightarrow \{Q_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ ist nicht normal in } c.$$

**Beweis:** Für jedes  $c \in \Omega_\infty^\circ$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $|Q_n(c)| \leq 6 + \frac{27}{4|c|}$ . Insbesondere gibt es also zu jedem  $c_0 \in \Omega_\infty^\circ$  einen Radius  $\rho_0$ , so dass  $|Q_n(c)| \leq \rho_0$  für alle  $c$  in einer Umgebung von  $c_0$  und alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Damit ist die Familie  $\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$  normal in  $\Omega_\infty^\circ$ .

In  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Omega_n$  gilt  $Q_n(c) \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) und somit ist die Familie  $\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$  auch normal in  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Omega_n$ .

Sei nun  $c_0 \in \partial\Omega_\infty$ . Dann gibt es in jeder Umgebung von  $c_0$  Parameter  $c$  mit  $Q_n(c) \rightarrow \infty$  und solche, für die  $(Q_n(c))_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist. Somit ist die Familie  $\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$  nicht normal in  $c_0$ .  $\square$

**Bemerkung 1.14** Wir übernehmen die Bezeichnung von McMullen und nennen  $\mathbb{C}^* \setminus \partial\Omega_\infty$  die Menge der „*J-stabilen Parameter*“ und  $\partial\Omega_\infty$  die *Bifurkationsmenge*.

**Lemma 1.15**  $\Omega_\infty$  ist symmetrisch bezüglich Spiegelung an der reellen Achse.

**Beweis:** Es ist  $R_{\bar{c}}(\bar{z}) = \frac{4}{27} \bar{c} \frac{(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1)^3}{\bar{z}^2(\bar{z} - 1)^2} = \overline{R_c(z)}$  für alle  $c \in \mathbb{C}^*$  und alle  $z \in \mathbb{C}$ . Nutzt man  $R_{\bar{c}}^{n+1}(\bar{z}) = R_{\bar{c}}(R_{\bar{c}}^n(\bar{z})) = R_{\bar{c}}(\overline{R_c^n(z)}) = \overline{R_c(R_c^n(z))} = \overline{R_c^{n+1}(z)}$  aus, so erhält man mit Induktion für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$Q_n(\bar{c}) = \overline{Q_n(c)}$$

Dies liefert die Behauptung.  $\square$

## 1.4 Exkurs: Modulfunktionen und $R_1$

Dieser Exkurs orientiert sich im Wesentlichen an der Darstellung von Chandrasekharan ([Cha], Seite 81-121); man vergleiche auch die Monographie von Schoeneberger ([Sch]). Im Folgenden sei  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  die obere Halbebene. Die Gruppe  $\Gamma := \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$

heißt die *Modulgruppe*. Sie ist die von  $z \mapsto \frac{1}{-z}$  und  $z \mapsto 1 + z$  erzeugte Untergruppe der Gruppe der Möbiustransformationen.

**Definition 1.16** Die meromorphe, nicht konstante Funktion  $f : \mathbb{H} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  heißt *Modulfunktion*, wenn sie invariant unter der Modulgruppe ist, das heißt wenn  $f(Mz) = f(z)$  für alle  $M \in \Gamma$  gilt.

Häufig werden etwas allgemeiner auch solche Funktionen als Modulfunktionen bezeichnet, die invariant unter einer Untergruppe der Modulgruppe sind.

Für  $\text{Im } \frac{\omega_1}{\omega_2} > 0$  verwenden wir die üblichen Bezeichnungen

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = 60 \sum (m\omega_1 + n\omega_2)^{-4}$$

und

$$g_3(\omega_1, \omega_2) = 140 \sum (m\omega_1 + n\omega_2)^{-6}.$$

Dabei ist über alle Paare  $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\}$  zu summieren.

Für  $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$  definieren wir nun die *absolute Invariante* durch

$$J(\tau) := \frac{(g_2(\omega_1, \omega_2))^3}{(g_2(\omega_1, \omega_2))^3 - 27(g_3(\omega_1, \omega_2))^2}.$$

Die Funktion  $J$  ist dann eine Modulfunktion, und es gilt sogar der folgende Satz:

**Satz 1.17**

*Der Körper der Modulfunktionen ist gleich dem Körper  $\mathbb{C}(J)$ .*

Es sei  $\wp$  die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion sowie  $e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$ ,  $e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$  und  $e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$ . Dann sind  $e_1$ ,  $e_2$  und  $e_3$  paarweise verschieden und wir können durch

$$\lambda(\tau) = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}$$

eine in  $\text{Im } \tau > 0$  holomorphe Funktion definieren. Diese ist invariant unter der Gruppe  $\Gamma(2)$ , die von den beiden Möbiustransformationen  $z \mapsto \frac{z}{1-2z}$  und  $z \mapsto z + 2$  erzeugt wird. Diese Gruppe enthält gerade die Elemente der Modulgruppe, bei denen  $a$  und  $d$  gerade sind, während  $b$  und  $c$  ungerade sind. Ferner ist unsere Gruppe  $\Sigma$  (bis auf Isomorphie) gleich der Faktorgruppe  $\Gamma/\Gamma(2)$ .

Der besondere Zusammenhang zu der in dieser Arbeit betrachteten Familie besteht darin, dass die Funktion  $R_1$  gerade die Funktionen  $J$  und  $\lambda$  ineinander überführt vermöge

$$J(\tau) = R_1(\lambda(\tau))$$

für  $\text{Im } \tau > 0$  (vergleiche [Cha], Seite 117).

# Kapitel 2

## Hilfsmittel

### 2.1 Die Riemann-Hurwitz-Formel

Eines der am häufigsten benutzten Hilfsmittel in der Theorie der Iteration rationaler Funktionen ist die Formel von Riemann-Hurwitz (vergleiche zum Beispiel [St1], Seite 7, oder [St2]):

**Satz 2.1 (Riemann-Hurwitz-Formel)** *Es seien  $D, G$  zwei Gebiete mit endlicher Zusammenhangszahl. Weiter sei  $f : D \rightarrow G$  eine eigentliche Abbildung vom Grad  $k$ , die in  $D$  genau  $r$  kritische Punkte habe (entsprechend deren Vielfachheit gezählt). Dann gilt:*

$$\#D - 2 = k \cdot (\#G - 2) + r$$

### 2.2 Quasikonforme Abbildungen

Ein wichtiges Hilfsmittel in der komplexen Dynamik ist die Methode der quasikonformen Chirurgie und der polynom-ähnlichen Abbildungen, wie sie 1985 von Douady und Hubbard (vergleiche [DouHub]) entwickelt und später unter anderem von Shishikura ([Shi]) weiterentwickelt wurde. Die Grundlage hierfür bildet die Theorie der quasikonformen Abbildungen, die schon seit den Zwanziger Jahren des letzten Jahrhunderts untersucht worden sind. Wesentliche Beiträge haben hier Grötzsch (1928, zu regulär quasikonformen Abbildungen), Teichmüller, Morrey (1938, zur analytischen Definition und der Beltramigleichung), Ahlfors (1954, zur geometrischen Definition), Mori, Bers und andere geliefert. Die Theorie ist in der Monographie von O. Lehto und K.I. Virtanen (vergleiche [LehVir]) umfassend dargestellt. Wir geben hier nur eine kurze Übersicht über die wichtigsten in dieser Arbeit verwendeten Begriffe und Resultate.

Im Folgenden sei  $D$  stets ein Gebiet in  $\mathbb{C}$ . Für eine differenzierbare Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  seien

$$f_z := \frac{1}{2}(f_x - if_y) \text{ und } f_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(f_x + if_y)$$

die Wirtinger-Ableitungen und

$$J_f := |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$$

die Jacobi-Determinante von  $f$ .

Dann gelten für differenzierbare Funktionen  $f, g, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $h = f \circ g$  die Kettenregeln

$$h_z = (f_w \circ g) g_z + (f_{\bar{w}} \circ g) g_{\bar{z}}$$

und

$$h_{\bar{z}} = (f_w \circ g) g_{\bar{z}} + (f_{\bar{w}} \circ g) \overline{g_z}.$$

Ferner ist  $f$  genau dann holomorph, wenn  $f_{\bar{z}} = 0$ .

**Definition 2.2** Eine differenzierbare Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *regulär  $K$ -quasikonform*, wenn gilt:

1.  $J_f > 0$  in  $D$
2.  $f$  ist injektiv in  $D$
3.  $\frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} \leq K$  in  $D$ .

**Bemerkung 2.3** Bezeichnen wir für  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit

$$\partial_\alpha f(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z + te^{i\alpha}) - f(z)}{t} = e^{i\alpha} f_z(z) + e^{-i\alpha} f_{\bar{z}}(z)$$

die Richtungsableitung von  $f$ , so kann die dritte Bedingung durch

$$\max_\alpha |\partial_\alpha f(z)| \leq K \min_\alpha |\partial_\alpha f(z)| \text{ in } D$$

ersetzt werden.

**Definition 2.4** Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar mit  $J_f > 0$ . Dann heißt  $\mu_f := \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$  der *Beltrami-Koeffizient* (oder die *komplexe Dilatation*) von  $f$ .

Ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus  $f$  ist genau dann regulär  $K$ -quasikonform, wenn  $|\mu_f| \leq \frac{K-1}{K+1}$  ist.

Ist weiterhin  $g$  konform und  $h = f \circ g$ , so gilt die Kettenregel  $\mu_h = (\mu_f \circ g) \frac{\overline{g'}}{g'}$ .

**Definition 2.5 (Die geometrische Definition)** Ein orientierungserhaltender Homöomorphismus  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt  $K$ -quasikonform, wenn für jedes Ringgebiet  $\mathcal{R}$  mit  $\overline{\mathcal{R}} \subseteq D$  gilt:

$$\text{mod } f(\mathcal{R}) \leq K \text{ mod } \mathcal{R}$$

Quasikonforme Abbildungen lassen sich jedoch nicht nur durch ihre geometrischen Eigenschaften charakterisieren, sondern auch durch ihre analytischen Eigenschaften. Dies soll im Folgenden kurz skizziert werden.

**Definition 2.6** Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *absolut stetig*, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass folgendes gilt:

Ist  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \leq x_1 < x_1^* \leq x_2 < x_2^* \leq \dots \leq x_n < x_n^* \leq b$  mit

$$\sum_{k=1}^n (x_k^* - x_k) < \delta, \text{ so ist } \sum_{k=1}^n |f(x_k^*) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

**Definition 2.7** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *absolut stetig auf Geraden* (kurz: *ACL*), wenn für jedes Rechteck  $[a, b] \times [c, d] \subseteq D$  gilt:

1. Für fast alle  $y \in [c, d]$  ist  $x \mapsto f(x + iy)$  absolut stetig in  $[a, b]$ .
2. Für fast alle  $x \in [a, b]$  ist  $y \mapsto f(x + iy)$  absolut stetig in  $[c, d]$ .

**Definition 2.8** Die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  hat die *verallgemeinerte Ableitung*  $\Phi \in L([a, b], \mathbb{C})$ , wenn für jede *Testfunktion*  $\omega \in C^\infty([a, b], \mathbb{C})$  mit  $\omega(a) = \omega(b) = 0$  gilt:

$$\int_a^b \Phi(x) \omega(x) dx = - \int_a^b f(x) \omega'(x)$$

Für verallgemeinerte Ableitungen gilt also die Regel der partiellen Integration. Besitzt  $f$  die verallgemeinerte Ableitung  $\Phi$ , so ist diese fast überall eindeutig bestimmt und wir schreiben auch  $f' = \Phi$ .

**Definition 2.9** Es sei  $C_0^k(D)$  die Menge aller Funktionen  $\omega \in C^k(D)$  mit kompaktem Träger  $T := \{z : \omega(z) \neq 0\} \subseteq D$ . Entsprechend sei  $C_0^\infty(D)$  die Menge aller Funktionen  $\omega \in C^\infty(D)$  mit kompaktem Träger.

$C_0^\infty(D)$  ist dicht in  $L^p(D)$ ; nach dem Satz von Gauß gilt für  $f \in C^1(D)$  und  $\omega \in C_0^\infty(D)$ :

$$\int f_z \omega = - \int f \omega_z \quad \text{und} \quad \int f_{\bar{z}} \omega = - \int f \omega_{\bar{z}}$$

Dies motiviert die folgende Definition:

**Definition 2.10** Die Funktion  $f \in C_0(D)$  hat die *verallgemeinerten Ableitungen*  $g, h \in L_{loc}^p(D)$ , wenn für alle *Testfunktionen*  $\omega \in C_0^\infty(D)$  gilt:

$$\int g \omega = - \int f \omega_z \quad \text{und} \quad \int h \omega = - \int f \omega_{\bar{z}}$$

$g$  und  $h$  sind dann fast überall eindeutig bestimmt und wir schreiben wieder  $g = f_z$  und  $h = f_{\bar{z}}$ .

Dabei sei  $h \in L_{loc}^p(D)$ , wenn  $h^p$  über jeder kompakten Teilmenge von  $D$  integrierbar ist.

**Lemma 2.11** Jede quasikonforme Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  hat verallgemeinerte Ableitungen  $f_z, f_{\bar{z}} \in L_{loc}^2(D)$  und es ist  $J_f > 0$  fast überall.

**Satz 2.12 (Die analytische Definition)** Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  ein orientierungserhaltender Homöomorphismus. Dann ist  $f$  genau dann  $K$ -quasikonform, wenn gilt:

1.  $f$  ist absolut stetig auf Geraden.
2.  $f$  ist fast überall differenzierbar und es gilt die Abschätzung

$$\max_{\alpha} |\partial_{\alpha} f(z)| \leq K \min_{\alpha} |\partial_{\alpha} f(z)|.$$

(Vergleiche hierzu etwa [LehVir], Seite 170-176)

Regulär quasikonforme Abbildungen erfüllen die *Beltramigleichung*

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z,$$

und quasikonforme Abbildungen erfüllen diese Gleichung ebenfalls im Sinne verallgemeinerter Ableitungen.

Das für uns wichtigste Resultat der Theorie ist nun der *Existenzsatz von Ahlfors und Bers* (auch als „*Measurable Riemann Mapping Theorem*“ bezeichnet), der es erlaubt, zu einem beliebig vorgegebenen Beltramikoeffizienten eine quasikonforme Abbildung zu konstruieren:

**Satz 2.13 (Satz von Ahlfors-Bers)** Zur meßbaren Funktion  $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $|\mu(z)| \leq k = \frac{K-1}{K+1} < 1$  gibt es eine quasikonforme Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f_{\bar{z}} = \mu(z)f_z \text{ fast überall.}$$

Die Ableitungen sind hier als verallgemeinerte Ableitungen im Sinne der Definition 2.10 zu verstehen. Dieser Satz findet sich in [LehVir] auf Seite 204 und in [St4].

**Bemerkung 2.14** Die Lösung der Beltramigleichung ist eindeutig bestimmt durch die Normierung  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  und  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ .

**Definition 2.15** Es sei  $G \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$  ein Gebiet. Eine Abbildung  $f : G \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  heißt  $K$ -quasiregulär, wenn  $f$  sich lokal als  $g \circ \varphi$  mit einer analytischen Abbildung  $g$  und einer  $K$ -quasikonformen Abbildung  $\varphi$  schreiben läßt.

**Definition 2.16** Es sei  $G \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$  ein Gebiet. Eine Abbildung  $f : G \rightarrow G$  heißt *gleichmäßig*  $K$ -quasiregulär, wenn  $f$  und alle Iterierten  $f^n$ ,  $n \geq 1$ ,  $K$ -quasiregulär sind mit einem festen  $K > 1$ .

**Definition 2.17** Es seien  $U, V \subseteq \mathbb{C}$  Gebiete,  $f : U \rightarrow V$  eine quasireguläre Abbildung und  $\mu : V \rightarrow \mathbb{C}$  ein Beltramikoeffizient. Dann heißt

$$f^*\mu := \frac{\mu_f + (\mu \circ f) \cdot \frac{\bar{f}_z}{f_z}}{1 + \overline{\mu_f} \cdot (\mu \circ f) \cdot \frac{\bar{f}_z}{f_z}}$$

das *Pull-Back* von  $\mu$  unter  $f$  (vergleiche [Gey2], Seite 10).

**Bemerkung 2.18** Die *Kettenregel für Beltramikoeffizienten* besagt, dass für jede quasireguläre Abbildung  $g$  mit  $\mu_g = \mu$  gerade  $f^*\mu = \mu_{g \circ f}$  ist. Insbesondere ist  $f^*\mu$  wieder ein Beltramikoeffizient.

Ist  $f$  holomorph, so vereinfacht sich die Darstellung zu  $f^*\mu = (\mu \circ f) \frac{\bar{f}}{f}$  (vergleiche zum Beispiel [St4], Seite 22, für rationales  $f$ ).

## 2.3 Beltramikoeffizienten und symmetrische Abbildungen

In den folgenden Kapiteln soll die Parameterebene („ $c$ -Ebene“) der Familie  $R_c(z) = \frac{4}{27} c \frac{(z^2 - z + 1)^3}{z^2(z-1)^2}$ ,  $c \in \mathbb{C}^*$ , untersucht werden. Dazu wird als ein

wesentliches Hilfsmittel die Methode der quasikonformen Chirurgie dienen. Da die zu untersuchende Familie symmetrisch ist unter den Abbildungen  $\alpha(z) := 1 - z$  und  $\beta(z) := \frac{1}{z}$  (vergleiche Satz 1.1), benötigen wir eine Aussage darüber, wie diese Symmetrien bei quasikonformer Konjugation erhalten bleiben. Hierzu benötigen wir die folgenden vier Lemmata. Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass ein entsprechendes Resultat auch in [Roe] verwendet wird (dort für die Symmetrien  $z \mapsto iz$  und  $z \mapsto -z$ ).

**Lemma 2.19** *Es sei  $f \in C^1(\mathbb{C})$  und es gelte  $f(z) = f(1 - z)$  für  $z \in \mathbb{C}$ . Dann gilt auch für den Beltramikoeffizienten  $\mu_f(z) = \mu_f(1 - z)$ .*

**Beweis:** Es sei  $\alpha(z) := 1 - z$  und  $h(z) := f(\alpha(z)) = f(1 - z)$ . Dann gilt nach der Kettenregel für den Beltramikoeffizienten:

$$\mu_f(z) = \mu_h(z) = (\mu_f \circ \alpha)(z) \frac{\overline{\alpha'(z)}}{\alpha'(z)} = \mu_f(1 - z)$$

□

**Lemma 2.20** *Es sei  $f \in C^1(\mathbb{C})$  und es gelte  $f(z) = f(1/z)$  für  $z \in \mathbb{C}$ . Dann gilt für den Beltramikoeffizienten  $\mu_f(z) = \mu_f(1/z) \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .*

**Beweis:** Es sei  $\beta(z) := \frac{1}{z}$  und  $h(z) := f(\beta(z))$ . Dann folgt die Behauptung wie im Beweis des vorigen Lemmas. □

**Lemma 2.21** *Es sei  $\mu$  ein Beltramikoeffizient mit  $\mu(z) = \mu(1 - z)$  und  $\varphi$  die Lösung der zugehörigen Beltramigleichung  $\varphi_{\bar{z}} = \mu(z)\varphi_z$  mit der Normierung  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = 1$  und  $\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \infty$ . Dann gilt*

$$\varphi(z) = 1 - \varphi(1 - z).$$

**Beweis:** Wir setzen  $\psi(z) := 1 - \varphi(1 - z)$ . Dann löst auch  $\psi$  die Beltramigleichung für  $\mu$  und die Behauptung folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung (siehe [LehVir], Seite 193). □

**Lemma 2.22** *Es sei  $\mu$  ein Beltramikoeffizient mit  $\mu(z) = \mu(1/z) \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$  und  $\varphi$  die Lösung der zugehörigen Beltramigleichung  $\varphi_{\bar{z}} = \mu(z)\varphi_z$  mit der Normierung  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = 1$  und  $\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \infty$ . Dann gilt*

$$\varphi(z) = \frac{1}{\varphi(1/z)}.$$

**Beweis:** Wir setzen  $\psi(z) := \frac{1}{\varphi(1/z)}$  und  $\zeta(z) := \varphi(1/z)$ . Dann gilt  $\zeta = \varphi \circ \beta$  und nach der Kettenregel ergibt sich

$$\zeta_z = (\varphi_w \circ \beta) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) + (\varphi_{\bar{w}} \circ \beta) \cdot 0$$

$$\zeta_{\bar{z}} = (\varphi_w \circ \beta) \cdot 0 + (\varphi_{\bar{w}} \circ \beta) \cdot \overline{\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

Weiter gilt  $\psi = \beta \circ \zeta$  und wir erhalten mit nochmaliger Anwendung der Kettenregel

$$\psi_z = (\beta_w \circ \zeta) \zeta_z + 0 = \frac{-1}{(\zeta(z))^2} \zeta_z$$

$$\psi_{\bar{z}} = (\beta_w \circ \zeta) \zeta_{\bar{z}} + 0 = \frac{-1}{(\zeta(z))^2} \zeta_{\bar{z}}$$

Damit folgt nun

$$\frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi_z}(z) = \frac{\zeta_{\bar{z}}}{\zeta_z}(z) = \frac{\varphi_{\bar{w}}(1/z)}{\varphi_w(1/z)} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = \mu(1/z) \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = \mu(z)$$

Auch  $\psi$  erfüllt die Normierung  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi(1) = 1$  und  $\lim_{z \rightarrow \infty} \psi(z) = \infty$ . Die Eindeigkeitsaussage aus dem Satz von Ahlfors-Bers liefert nun  $\psi = \varphi$  wie im vorigen Lemma.  $\square$

## 2.4 Polynom-ähnliche Abbildungen

Polynomähnliche Abbildungen wurden 1985 von A. Douady und J.H. Hubbard eingeführt (siehe [DouHub] und [Dou]). In ihrer Arbeit finden sich auch die hier aufgeführten Resultate.

**Definition 2.23** Eine *polynom-ähnliche Abbildung* vom Grad  $d$  ist ein Tripel  $(f, D_1, D_2)$ , wobei  $D_1, D_2$  einfach zusammenhängende, analytisch berandete Gebiete in  $\mathbb{C}$  mit  $\overline{D_1} \subseteq D_2$  sind, und  $f : D_1 \rightarrow D_2$  eine eigentliche Abbildung vom Grad  $d$  ist.

Wir bezeichnen dann  $\mathcal{K}_f := \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(D_1)$  als die *aufgefüllte Juliamenge* von  $f$  und  $\partial\mathcal{K}_f$  als die *Juliamenge* von  $f$ .

**Definition 2.24** Es seien  $(f, D_1, D_2)$  und  $(g, \tilde{D}_1, \tilde{D}_2)$  zwei polynom-ähnliche Abbildungen.  $f$  und  $g$  heißen *quasikonform äquivalent*, wenn es einen quasikonformen Homeomorphismus  $\varphi$  von einer Umgebung von  $\mathcal{K}_f$  auf eine Umgebung von  $\mathcal{K}_g$  gibt, so dass dort  $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ .

Das wichtigste Resultat über polynom-ähnliche Abbildungen ist der folgende Satz von Douady und Hubbard (vergleiche [DouHub]), nach dem jede polynom-ähnliche Abbildung quasikonform äquivalent zu einem Polynom ist.

**Satz 2.25 (Straightening Theorem)** *Jede polynom-ähnliche Abbildung  $f : D_1 \rightarrow D_2$  vom Grad  $d$  ist quasikonform äquivalent zu einem Polynom  $P$  vom Grad  $d$ .*

## 2.5 Das $\lambda$ -Lemma

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Ideen finden ihren Ursprung in der Arbeit von Mañé, Sad und Sullivan (vergleiche [MSS]). Die Resultate finden sich ebenfalls in der Monographie von C. McMullen (vergleiche [McM1], Seite 53-63). Wir geben Sie hier nur für den Fall einer über einem Gebiet der komplexen Ebene parametrisierten Familie wieder, da dies für unsere Arbeit ausreichend ist.

**Definition 2.26** Es sei  $X$  ein Gebiet in  $\mathbb{C}$ . Eine nach  $X$  parametrisierte holomorphe Familie rationaler Abbildungen ist eine holomorphe Abbildung  $f : X \times \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , bezeichnet mit  $f_\lambda(z)$ , wobei  $\lambda \in X$  und  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ , so dass  $f_\lambda : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  eine rationale Abbildung ist.

Ist nun  $x \in X$  ein fester Basispunkt, so verstehen wir unter einer *holomorphen Bewegung* einer Menge  $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$  parametrisiert nach  $(X, x)$  eine Familie  $\Phi_\lambda : E \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  injektiver Abbildungen, so dass  $\Phi_\lambda(e)$  für jedes feste  $e$  eine holomorphe Funktion von  $\lambda$  ist und  $\Phi_x = id$ .

**Beispiel 2.27** Die Abbildung  $R : \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ ,  $(c, z) \mapsto \frac{4}{27} c \frac{(z^2 - z + 1)^3}{z^2(z-1)^2}$  ist eine holomorphe Familie rationaler Abbildungen.

**Lemma 2.28 (Das  $\lambda$ -Lemma)** *Eine holomorphe Bewegung von  $E$  hat eine eindeutige Fortsetzung zu einer holomorphen Bewegung von  $\overline{E}$ . Die fortgesetzte Bewegung liefert eine stetige Abbildung  $\Phi : X \times \overline{E} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ . Für jedes  $\lambda$  läßt sich die Abbildung  $\Phi_\lambda : E \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  zu einer quasikonformen Selbstabbildung von  $\widehat{\mathbb{C}}$  fortsetzen.*

(Vergleiche hierzu [McM1], Seite 54, und [MSS].) Aus diesem Lemma ergibt sich der folgende Satz:

**Satz 2.29** *Es sei  $f_\lambda$  eine nach  $X$  parametrisierte holomorphe Familie rationaler Abbildungen und  $x \in X$ . Weiter seien  $c_i : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  holomorphe*

Abbildungen, die die kritischen Punkte von  $f_\lambda$  parametrisieren. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- Die Anzahl der (super-)attraktiven Zyklen von  $f_\lambda$  ist lokal konstant in  $x$ .
- Die maximale Periode eines (super-)attraktiven Zyklus von  $f_\lambda$  ist lokal beschränkt in  $x$ .
- Die Juliamenge  $\mathcal{J}(f_\lambda)$  hängt in einer Umgebung von  $x$  in der Hausdorff-Topologie stetig von  $\lambda$  ab.
- Für jedes  $i$  bilden die Funktionen  $\lambda \mapsto f_\lambda^n(c_i(\lambda))$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , eine normale Familie in  $x$ .
- Es gibt eine Umgebung  $U$  von  $x$ , so dass für alle  $\lambda$  in  $U$  gilt:

$$c_i(\lambda) \in \mathcal{J}(f_\lambda) \Leftrightarrow c_i(x) \in \mathcal{J}(f_x)$$

# Kapitel 3

## Die Fluchtkomponenten

### 3.1 Die Dynamik in den Fluchtkomponenten

In diesem Abschnitt soll zunächst das dynamische Verhalten der rationalen Funktion  $R_c$  für  $c \in \Omega_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , untersucht werden. Anschließend wenden wir das  $\lambda$ -Lemma von Mañé, Sad und Sullivan an und zeigen, dass die Mengen  $\Omega_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , alle offen sind.

Es sei zunächst bemerkt, dass für  $c \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Omega_n$  die Fatoumenge  $\mathcal{F}_c$  nur aus  $U_\infty(c)$  und den sukzessiven Urbildern besteht. Wir unterteilen die Menge  $\Omega_0$  nun weiter:

**Definition 3.1** Es sei

$$\Omega_0^{(0)} := \{c \in \Omega_0 : U_0(c) = U_1(c) = U_\infty(c)\}$$

die Menge der Parameter, für die der kritische Wert  $c$  und alle seine kritischen Urbilder im Außengebiet enthalten sind und

$$\Omega_0^{(1)} := \{c \in \Omega_0 : U_0(c), U_1(c) \text{ und } U_\infty(c) \text{ sind paarweise verschieden} \}$$

die Menge der Parameter, für die zwar der kritische Wert  $c$  im Außengebiet enthalten ist, aber nicht alle seine Urbilder.

**Bemerkung 3.2** Nach Lemma 1.3 gilt natürlich  $\Omega_0 = \Omega_0^{(0)} \cup \Omega_0^{(1)}$ . Später werden wir zeigen, dass  $\Omega_0^{(1)} = \emptyset$  ist, also  $\Omega_0 = \Omega_0^{(0)}$ .

**Satz 3.3 (Dynamik in  $\Omega_0$ )**

a) Für  $c \in \Omega_0^{(0)}$  gilt:

$\mathcal{F}_c = U_\infty(c)$  ist zusammenhängend,  $\sharp U_\infty(c) = \infty$

$\mathcal{J}_c = \partial U_\infty(c)$  ist total unzusammenhängend, also eine Cantormenge.

b) Für  $c \in \Omega_0^{(1)}$  gilt:

$\mathcal{F}_c$  besteht aus unendlich vielen stabilen Gebieten,  $\sharp U_\infty(c) = \infty$

$\mathcal{J}_c$  besteht aus überabzählbar vielen Zusammenhangskomponenten.

Für ein Gebiet  $G$  sei dabei mit  $\sharp G$  die Zusammenhangszahl des Gebietes  $G$  bezeichnet. Die Aussage in b) ist hier rein hypothetisch, da wir später zeigen, dass  $\Omega_0^{(1)} = \emptyset$  ist. Wir nutzen jedoch vorher im Beweis von Satz 3.9 und Bemerkung 3.10 die Tatsache, dass sich die Dynamik in (etwaigen) Komponenten von  $\Omega_0^{(1)}$  qualitativ von der Dynamik in anderen Fluchtkomponenten unterscheidet, um zu zeigen, dass alle Fluchtkomponenten offen sind.

**Beweis:** Sei zunächst  $c \in \Omega_0^{(0)}$ . Dann ist  $U_\infty(c)$  vollständig invariant und enthält alle kritischen Punkte. Dann ist  $\mathcal{J}_c = \partial U_\infty(c)$  und  $\mathcal{J}_c$  ist total unzusammenhängend (vergleiche Satz 3, Seite 40, und Satz 2, Seite 121, in [St1]).

Sei nun  $c \in \Omega_0^{(1)}$ . Dann ist  $R_c(-1) = R_c(2) = R_c(\frac{1}{2}) = c \in U_\infty(c)$  und somit  $-1, 2, \frac{1}{2} \in R_c^{-1}(U_\infty(c)) = U_0(c) \cup U_1(c) \cup U_\infty(c)$ . Aus der Symmetrie der Fatoumenge unter  $\Sigma$  (vergleiche Satz 1.1 und die Abbildung 1.1, Seite 9) folgt nun  $\frac{1}{2} \in U_\infty(c)$ ,  $-1 \in U_1(c)$  und  $2 \in U_0(c)$ .

Die Riemann-Hurwitz-Formel liefert  $\sharp U_\infty(c) = \infty$ . Es folgt, dass die Julia-menge nicht zusammenhängend ist und somit aus überabzählbar vielen Zusammenhangskomponenten besteht.  $\square$

Wir wissen schon aus Lemma 1.10, dass  $\{c \in \mathbb{C}^* : |c| \geq 6\} \subseteq \Omega_0$  ist. Dies wollen wir nun noch etwas präzisieren, wobei wir nur elementare Methoden anwenden. Später werden wir sehen, dass  $\Omega_0^{(0)} = \Omega_0$  und somit nach Lemma 1.10 die Kreisscheibe  $\{c \in \mathbb{C}^* : |c| \geq 6\}$  in  $\Omega_0^{(0)}$  enthalten ist.

**Lemma 3.4** *Es gibt ein  $r_0 > 0$  mit:  $\{c \in \mathbb{C}^* : |c| \geq r_0\} \subseteq \Omega_0^{(0)}$*

**Beweis:** Zum Beweis betrachten wir wieder die Funktion  $R(z) = \frac{(z^2 - z + 1)^3}{z^2(z - 1)^2}$ .

Dann gilt (wie im Beweis von Lemma 1.4 gezeigt) für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \geq 6$  die Ungleichung

$$|R(z)| \geq |z|^2 - 3|z| \geq |z| \geq 6.$$

Nun ist aber die Funktion  $z \mapsto |R(z)|$  stetig auf  $\left\{\frac{3}{2} \leq |z| \leq 6\right\}$ , und nimmt, da sie dort positiv ist, ein Minimum  $m > 0$  an. Es folgt insgesamt

$$|R(z)| \geq \min\{m, 6\} =: \tilde{m}$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \geq \frac{3}{2}$ . Ist nun aber  $|c| \geq r_0 := \frac{81}{8\tilde{m}}$ , so folgt für diese  $z$ :

$$|R_c(z)| \geq \frac{4}{27}|c|\tilde{m} \geq \frac{4}{27} \cdot \frac{81}{8\tilde{m}} \cdot \tilde{m} = \frac{3}{2}$$

Insbesondere gilt also  $\left\{z : |z| \geq \frac{3}{2}\right\} \subseteq U_\infty(c)$ . Das Aussengebiet enthält also den freien kritischen Punkt  $z = 2$  und somit folgt nach den Überlegungen im Beweis von Satz 3.3, dass  $c \in \Omega_0^{(0)}$ .  $\square$

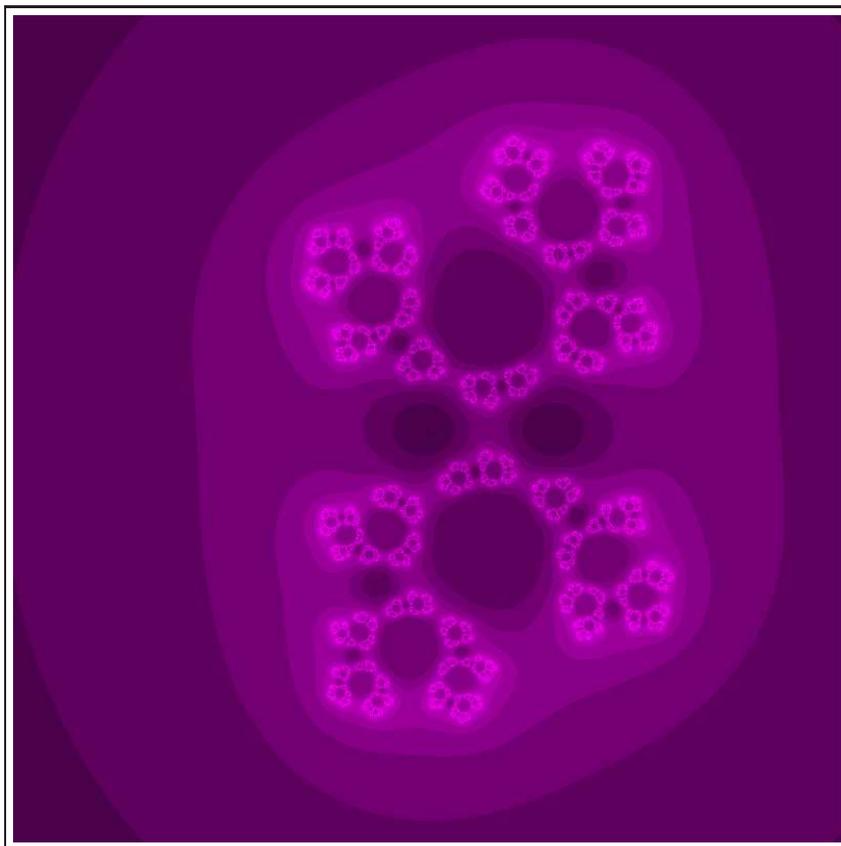


Abbildung 3.1: Juliamenge als Cantormenge ( $c=2,5+2,5i$ )

Auch die Menge  $\Omega_1$  soll weiter unterteilt werden:

**Definition 3.5** Es sei

$$\Omega_1^{(0)} := \{c \in \Omega_1 : c \in U_0(c)\}$$

die Menge der Parameter, für die der kritische Wert  $c$  im (vom Außengebiet verschiedenen) stabilen Gebiet um 0 liegt und

$$\Omega_1^{(1)} := \{c \in \Omega_1 : c \in U_1(c)\}$$

die Menge der Parameter, für die der kritische Wert  $c$  im (vom Außengebiet verschiedenen) stabilen Gebiet um 1 liegt.

**Bemerkung 3.6** Offensichtlich gilt  $\Omega_1 = \Omega_1^{(0)} \cup \Omega_1^{(1)}$ . Später werden wir zeigen, dass  $\Omega_1^{(0)} = \emptyset$ , also  $\Omega_1 = \Omega_1^{(1)}$ .

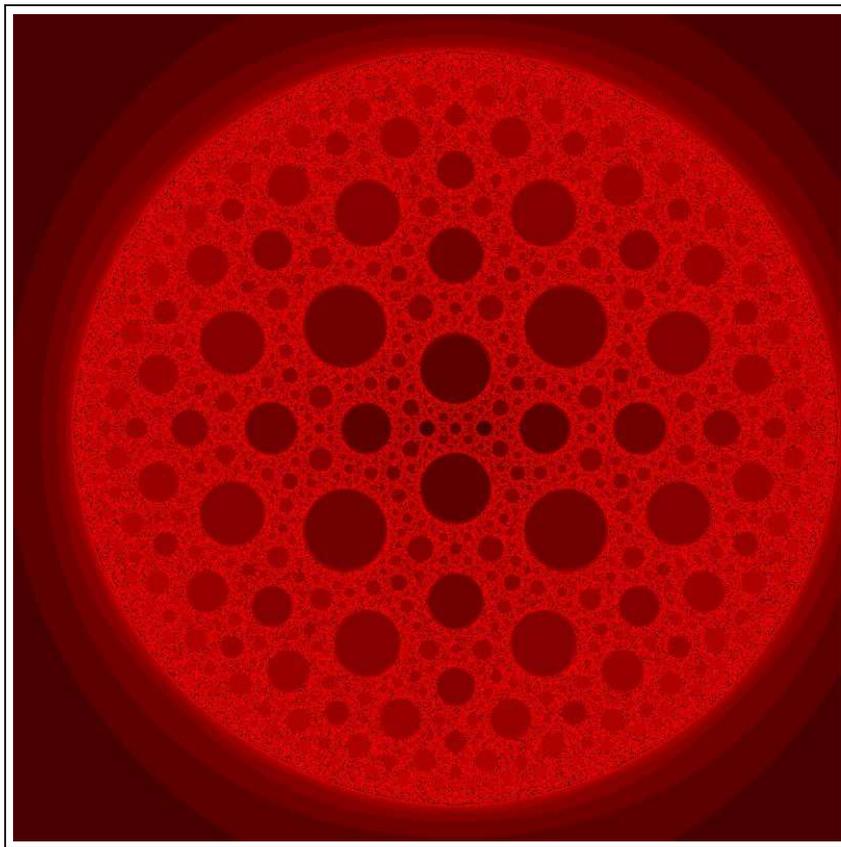


Abbildung 3.2: Juliamenge für  $c=1$

**Satz 3.7 (Dynamik in  $\Omega_1$ )**

a) Für  $c \in \Omega_1^{(0)}$  gilt:

$\mathcal{F}_c$  besteht aus unendlich vielen stabilen Gebieten.

$$\#U_\infty(c) = \#U_0(c) = \#U_1(c) = 1$$

Die fünf weiteren kritischen Punkte  $-1, 2, \frac{1}{2}, z_+, z_-$  liegen im einzigen Urbildgebiet  $U$  von  $U_0$  und es gilt  $\#U = 3$ .

b) Für  $c \in \Omega_1^{(1)}$  gilt:

- Die Fatoumenge  $\mathcal{F}_c$  besteht aus unendlich vielen stabilen, einfach zusammenhängenden Gebieten.
- Das Außengebiet  $U_\infty(c)$  hat genau 2 Urbildgebiete der Ordnung 1, 5 Urbildgebiete der Ordnung 2 und  $5 \cdot 6^{k-2}$  Urbildgebiete der Ordnung  $k$ ,  $k \geq 3$ .
- Die Juliamenge  $\mathcal{J}_c$  ist zusammenhängend und sogar lokal zusammenhängend.

Wie in Satz 3.3 ist hier die Aussage in a) rein hypothetischer Natur.

**Beweis:** Für  $c \in \Omega_1$  gilt:  $R_c(c) \in U_\infty(c)$ , aber  $c \notin U_\infty(c)$ . Insbesondere gilt nach Lemma 1.3, dass die stabilen Gebiete  $U_0(c)$ ,  $U_1(c)$  und  $U_\infty(c)$  paarweise disjunkt sind. Damit enthält  $U_\infty(c)$  neben  $\infty$  keinen weiteren kritischen Punkt und ist deshalb einfach zusammenhängend (vergleiche Satz 4, Seite 65, in [St1]).

**Behauptung:**  $\#U_0 = \#U_1 = 1$

**Beweis:** Da 0 und 1 doppelte Polstellen sind, bildet  $R_c$  die beiden Gebiete  $U_0$  und  $U_1$  als eigentliche Abbildung vom Grad 2 auf  $U_\infty$  ab:

$$R_c : U_j \xrightarrow{2:1} U_\infty \quad (j = 0, 1)$$

Die Riemann-Hurwitz-Formel liefert nun:  $(\#U_j - 2) = 2(\#U_\infty - 2) + r_j$  und somit  $\#U_j = r_j$ , wobei  $r_j$  die Anzahl der kritischen Punkte von  $R_c$  in  $U_j$  bezeichne.

Nehmen wir nun an, eines der beiden Gebiete  $U_0$  bzw.  $U_1$  enthalte neben 0 bzw. 1 einen weiteren kritischen Punkt, so ergibt sich in jedem Fall ein Widerspruch: Wäre  $z_\pm \in U_j$ , so wäre  $U_\infty = R_c(U_j) = U_0$  und wäre  $-1, 2, \frac{1}{2} \in U_j$ , so wäre  $c \in R_c(U_j) = U_\infty$ . Somit ist  $r_j = 1$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.

Sei nun zunächst  $c \in \Omega_1^{(0)}$ .

Es gilt dann  $-1, 2, \frac{1}{2} \in R_c^{-1}(U_0) = U_{z_+} \cup U_{z_-}$ , wobei  $U_{z_+}$  und  $U_{z_-}$  die stabilen

Gebiete seien, die die beiden Nullstellen  $z_+ = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  bzw.  $z_- = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$  von  $R_c$  enthalten. Wir nutzen nun wieder die Symmetrie unter  $\Sigma$  aus. Es gilt  $\alpha(z_+) = z_-$ ,  $\beta(z_+) = z_-$ ,  $\alpha(z_-) = z_+$  und  $\beta(z_-) = z_+$ . Damit folgt nach Satz 1.1:

$$-1 \in U_{z_+} \Rightarrow -1 = \beta(-1) \in \beta(U_{z_+}) = U_{z_-} \Rightarrow U_{z_+} = U_{z_-}$$

und analog  $-1 \in U_{z_-} \Rightarrow U_{z_+} = U_{z_-}$ . Somit enthält  $U := U_{z_+} = U_{z_-}$  die drei freien kritischen Punkte  $-1, 2$  und  $\frac{1}{2}$  und

$$R_c : U \xrightarrow{6:1} U_0$$

Die Riemann-Hurwitz-Formel liefert dann  $(\#U - 2) = 6(\#U_0 - 2) + 7$ , also  $\#U = 3$ .

Sei nun  $c \in \Omega_1^{(1)}$ :

Also ist  $c \in U_1(c)$ . Wir bezeichnen für  $j = -1, 2, \frac{1}{2}$  mit  $U_j$  das stabile Gebiet, das den Punkt  $j$  enthält und mit  $r_j$  die Anzahl der kritischen Punkte in  $U_j$ . Wir wissen dann, dass  $R_c$  das Gebiet  $U_2$  eigentlich als  $(k : 1)$ -Abbildung auf  $U_1$  abbildet mit  $2 \leq k \leq 6$ :

$$R_c : U_2 \xrightarrow{k:1} U_1$$

Mit der Riemann-Hurwitz-Formel ergibt sich  $(\#U_2 - 2) = k(\#U_1 - 2) + r_2$ , also  $\#U_2 = 2 - k + r_2$ . Einsetzen der möglichen Werte für  $r_2$  liefert, dass  $U_2$  einfach zusammenhängend ist und genau einen kritischen Punkt (nämlich 2) enthält. Ferner ist  $R_c : U_2 \xrightarrow{2:1} U_1$  eine  $2 : 1$ -Abbildung. Die entsprechenden Überlegungen gelten analog auch für  $-1$  und  $\frac{1}{2}$ . Somit sind die Gebiete  $U_{-1}$ ,  $U_2$  und  $U_{\frac{1}{2}}$  paarweise verschieden und alle einfach zusammenhängend.

Außerdem gilt:

$$R_c : U_{z_+} \xrightarrow{k:1} U_0, \quad k \in \{3, 6\}$$

Die Riemann-Hurwitz-Formel liefert hier wieder, dass  $U_{z_+}$  neben  $z_+$  keinen weiteren kritischen Punkt enthält und dass gilt  $\#U_{z_+} = 1$ . Entsprechendes gilt für  $U_{z_-}$ .

Mit der Riemann-Hurwitz-Formel folgt weiterhin, dass auch alle weiteren Urbildgebiete von  $U_\infty$  unter  $R_c^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , einfach zusammenhängend sind.

$\mathcal{J}_c$  ist somit zusammenhängend und, da  $R_c$  hyperbolisch ist, sogar lokal zusammenhängend (vergleiche [Mat],[LeiYon]).  $\square$

**Satz 3.8 (Dynamik in  $\Omega_n$ ,  $n \geq 2$ )** *Es sei  $c \in \Omega_n = \{c \in \mathbb{C}^* : R_c^n(c) \in U_\infty(c), R_c^{n-1}(c) \notin U_\infty(c)\}$  für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Dann gilt:*

- Die Fatoumenge  $\mathcal{F}_c$  besteht aus unendlich vielen stabilen, einfach zusammenhängenden Gebieten.

- Das Außengebiet  $U_\infty(c)$  hat genau 2 Urbildgebiete der Ordnung 1, 8 Urbildgebiete der Ordnung 2,  $8 \cdot 6^{k-2}$  Urbildgebiete der Ordnung  $k$  für  $3 \leq k \leq n$ ,  $8 \cdot 6^{n-1} - 3$  Urbildgebiete der Ordnung  $n+1$  und  $(8 \cdot 6^{n-1} - 3)6^{k-n-1}$  Urbildgebiete der Ordnung  $k$  für  $k \geq n+2$ .
- Die Juliamenge  $\mathcal{J}_c$  ist zusammenhängend und lokal zusammenhängend.

**Beweis:** Für  $c \in \Omega_n$ ,  $n \geq 2$  gilt:  $c \notin U_\infty \cup U_0 \cup U_1$ . Wie oben folgt mit der Riemann-Hurwitz-Formel, dass  $U_\infty$ ,  $U_0$  und  $U_1$  alle einfach zusammenhängend sind und keine weiteren kritischen Punkte enthalten. Es ist  $R_c^n(c) \in U_\infty$ ,  $R_c^{n-1}(c) \notin U_\infty$ .

**Behauptung:** Für  $k = 3, \dots, n$  hat  $U_\infty$  genau  $8 \cdot 6^{k-2}$  Urbildgebiete der Ordnung  $k$ . Diese sind alle einfach zusammenhängend. Wir bezeichnen sie hier mit  $U_j^{[k]}$ ,  $j = 1, \dots, 8 \cdot 6^{k-2}$ .

**Beweis:** Wie bei  $\Omega_1^{(1)}$  folgt:  $U_{z_+} \neq U_{z_-}$  und  $\#U_{z_+} = \#U_{z_-} = 1$ . Ist  $U$  ein Urbildgebiet von  $U_1$ , so gilt

$$R_c : U \xrightarrow{m:1} U_1$$

und mit der Riemann-Hurwitz-Formel folgt  $(\#U - 2) = m(\#U_1 - 2) + 0$ , da  $U$  keinen kritischen Punkt enthält. Somit ergibt sich  $\#U = 2 - m$  und damit  $m = 1$  und  $\#U = 1$ . Damit hat  $U_1$  genau 6 direkte Urbildgebiete und  $U_\infty$  hat insgesamt genau 8 Urbildgebiete der Ordnung 2.

Analog erhalten wir, dass  $R_c : U_j^{[k+1]} \xrightarrow{1:1} U_j^{[k]}$  und  $\#U_j^{[k+1]} = 1$ , solange kein kritischer Punkt in  $U_j^{[k+1]}$  liegt, also mindestens für  $k \leq n$ . Damit ist die erste Behauptung gezeigt.

**Behauptung:**  $U_\infty$  hat genau  $8 \cdot 6^{n-1} - 3$  Urbildgebiete der Ordnung  $n+1$ .

**Beweis:** In einem Urbildgebiet  $U_j^{[n]}$  liegt der kritische Wert  $c$ . O.B.d.A. sei dies  $U_1^{[n]}$ . Dann haben die  $U_j^{[n]}$ ,  $j = 2, \dots, 8 \cdot 6^{n-2}$  je 6 einfach zusammenhängende Urbildgebiete. Ferner gilt (mit der Notation von oben):

$$R_c : U_2 \xrightarrow{m:1} U_1^{[n]}$$

und mit der Riemann-Hurwitz-Formel folgt:  $(\#U_2 - 2) = m(\#U_1^{[n]} - 2) + r_2$  und somit  $\#U_2 = 2 - m + r_2$ . Einsetzen der möglichen Werte liefert wie oben:

$$r_2 = 1 \Rightarrow m = 2 \text{ und } \#U_2 = 1$$

$$r_2 = 2 \Rightarrow m = 4 \text{ und } \#U_2 = 0 \text{ Widerspruch!}$$

$$r_2 = 3 \Rightarrow m = 6 \text{ und } \#U_2 = -1 \text{ Widerspruch!}$$

Analoge Überlegungen gelten für  $U_{-1}$  und  $U_{\frac{1}{2}}$ . Also hat  $U_1^{[n]}$  genau 3 verschiedene Urbildgebiete, nämlich  $U_2$ ,  $U_{-1}$  und  $U_{\frac{1}{2}}$ . Diese sind jeweils einfach zusammenhängend und  $R_c$  bildet sie eigentlich vom Grad 2 auf  $U_1^{[n]}$  ab. Damit folgt die zweite Behauptung.

**Behauptung:** Für  $k > n + 1$  hat  $U_\infty$  genau  $(8 \cdot 6^{n-1} - 3) \cdot 6^{k-(n+1)}$  Urbildgebiete der Ordnung  $k$ . Diese sind alle einfach zusammenhängend.

**Beweis:** Der Beweis verläuft analog zu oben.

$\mathcal{J}_c$  ist damit zusammenhängend und sogar lokal zusammenhängend (vergleiche [Mat],[LeiYon]).  $\square$

**Satz 3.9** Die Mengen  $\Omega_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , sind offen.

**Beweis:** Die Menge  $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$  ist offen nach Satz 1.12. Jetzt sei  $\Omega$  eine zusammenhängende Komponente von  $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ . Wegen  $\overline{O^+(c)} \cap \mathcal{J}_c = \emptyset$  für  $c \in \Omega$

ist  $(R_c)_{c \in \Omega}$  eine hyperbolische einparametrische Familie. Nach dem  $\lambda$ -Lemma von Mañé, Sad und Sullivan (Lemma 2.28, vergleiche Satz B in [MSS] oder [McM1], Seite 54) folgt, dass je zwei Funktionen  $R_c$  dieser Familie  $(R_c)_{c \in \Omega}$  auf ihren Juliamengen quasikonform konjugiert zueinander sind. Aus obiger Betrachtung der  $\Omega_n$  sehen wir nun, dass  $\Omega$  nicht zwei Werte  $c_1$  und  $c_2$  enthalten kann, die zu verschiedenen Mengen  $\Omega_n$  gehören. Dies zeigt, dass alle Mengen  $\Omega_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , offen sind.  $\square$

**Bemerkung 3.10** Die Argumentation liefert auch, dass  $\Omega_0^{(0)}$ ,  $\Omega_0^{(1)}$ ,  $\Omega_1^{(0)}$  und  $\Omega_1^{(1)}$  offen sind, da  $R_c$  und  $R_{\tilde{c}}$  nicht quasikonform konjugiert zueinander sind, falls  $c \in \Omega_0^{(0)}$  und  $\tilde{c} \in \Omega_0^{(1)}$  bzw. falls  $c \in \Omega_1^{(0)}$  und  $\tilde{c} \in \Omega_1^{(1)}$ .

## 3.2 Parametrisierung der Fluchtkomponenten

Das Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, dass alle Fluchtkomponenten einfach zusammenhängend sind. Ferner wollen wir zeigen, dass jede Fluchtkomponente der Ordnung  $n$  genau eine Polstelle von  $Q_n$  enthält (ihr „Zentrum“). Dadurch läßt sich dann die Anzahl der Fluchtkomponenten der Ordnung  $n$  angeben.

Als erste Beobachtung erhalten wir das folgende

**Lemma 3.11** *Es sei  $n \in \mathbb{N}$ .*

- a) *Ist  $c$  eine Nullstelle oder eine Einsstelle von  $Q_{n-1}$ , so gilt  $c \in \Omega_0^{(0)} \cup \Omega_n$ .*
- b) *Ist  $\Omega$  eine Fluchtkomponente der Ordnung  $n \geq 1$ , so hat  $Q_{n-1}$  mindestens eine Nullstelle oder eine Einsstelle in  $\Omega$ .*
- c) *Ist  $\Omega$  eine beschränkte Komponente von  $\Omega_0$ , so gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$ , so dass  $Q_k$  mindestens eine Nullstelle oder eine Einsstelle in  $\Omega$  hat.*

**Beweis:** zu a): Es sei  $c$  eine Null- oder Einsstelle von  $Q_{n-1}$ . Nach Lemma 1.3 sind entweder  $U_0(c)$ ,  $U_1(c)$  und  $U_\infty(c)$  paarweise verschieden oder es ist  $U_0(c) = U_1(c) = U_\infty(c)$ . Im ersten Fall folgt, dass  $Q_k(c) \notin U_\infty$  für alle  $k \leq n-1$ , aber  $Q_n(c) \in U_\infty$ . Also gilt  $c \in \Omega_n$ . Im zweiten Fall gilt sicherlich  $c \in \Omega_0^{(0)}$ .

zu b): Für alle  $c \in \partial\Omega$ ,  $c \neq 0$ , und alle  $m \in \mathbb{N}$  gilt  $|Q_m(c)| \leq 6 + \frac{27}{4|c|}$ . Dies liefert aber für alle  $c \in \partial\Omega$  und alle  $m \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $|cQ_m(c)| \leq 6|c| + \frac{27}{4}$ . Nach Lemma 1.10 gilt  $\{c : |c| \geq 6\} \subseteq \Omega_0$  und somit folgt für alle  $c \in \partial\Omega$  und alle  $m \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $|cQ_m(c)| \leq 36 + \frac{27}{4} \leq 43$ .

Wenn nun kein  $Q_m$  eine Polstelle in  $\Omega$  hat, so folgt nach dem Maximumprinzip  $|cQ_m(c)| \leq 43$  für alle  $c \in \Omega$  und alle  $m \in \mathbb{N}$ . Dies liefert aber  $\Omega \subseteq \Omega_\infty$  und somit einen Widerspruch.

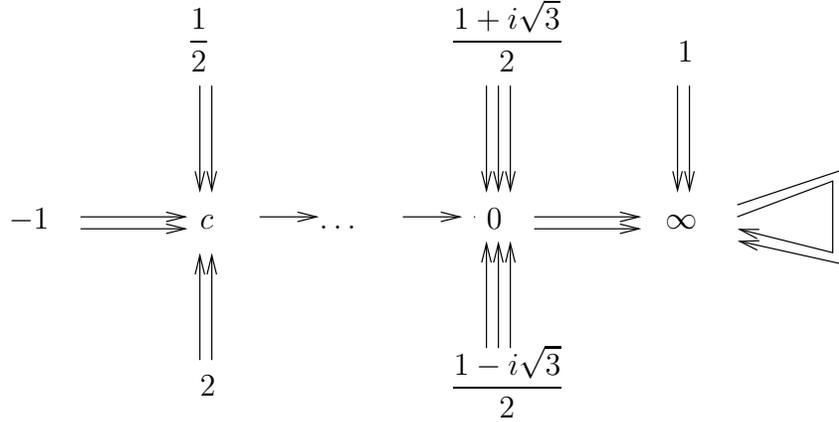
Also gibt es ein minimales  $m \in \mathbb{N}$ , so dass  $Q_m$  eine Polstelle  $c_0$  in  $\Omega$  hat. Aus a) erhalten wir, dass  $m = n$  gelten muss.

zu c): Die gleichen Überlegungen wie in b) lassen sich auch hier anwenden.  $\square$

**Satz 3.12** *Die Menge  $\Omega_0$  besteht nur aus der unbeschränkten Komponente, ist also insbesondere zusammenhängend. Ferner ist  $\Omega_0^{(1)} = \emptyset$  und  $\Omega_0$  enthält keine Null- oder Einsstelle von  $Q_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ .*

**Beweis:** Es sei zunächst  $c \in \Omega_0$  fest. Dann ist  $c \in U_\infty(c) = U_\infty$ ,  $U_\infty$  ist vollständig invariant und unendlichfach zusammenhängend (vergleiche Satz 3.3). Wir wählen eine Kreisscheibe  $D_0 \subseteq U_\infty$  um  $\infty$  mit  $R_c(\overline{D_0}) \subseteq D_0$ , also zum Beispiel  $D_0 = \left\{z : |z| \geq 6 + \frac{27}{4|c|}\right\}$ . Nun schöpfen wir  $U_\infty$  aus. Dazu sei rekursiv  $D_{n+1}$  als die Komponente von  $R_c^{-1}(D_n)$ , die  $D_0$  enthält, definiert. Dann ist  $U_\infty = \bigcup_{n \geq 0} D_n$  und  $R_c : D_{n+1} \rightarrow D_n$  eine eigentliche Abbildung.

Wir nehmen nun an,  $c$  wäre eine Nullstelle von einem  $Q_{n-1}$ ,  $n \geq 2$ . Dann ergibt sich der folgende kritische Orbit:



Entsprechend sieht der kritische Orbit aus, wenn  $c$  eine Einsstelle von einem  $Q_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ , wäre. Insbesondere gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $0 \in D_{m+1}$  oder  $1 \in D_{m+1}$ , so dass  $D_m$  keine endlichen kritischen Punkte enthält. Die Riemann-Hurwitz-Formel liefert dann

$$\#D_{m+1} - 2 = k(\#D_m - 2)r \text{ bzw. } \#D_{m+1} = 2 + r - k,$$

wobei  $R_c : D_{m+1} \rightarrow D_m$  eigentlich vom Grad  $k$  sei und  $r$  die Anzahl der kritischen Punkte von  $R_c$  in  $D_{m+1}$  bezeichne. Da  $D_{m+1}$  zwei oder drei der kritischen Punkte  $0, 1$  und  $\infty$  enthält, ist entweder  $r = 2$  und  $k = 4$  oder aber  $r = 3$  und  $k = 6$ . Im ersten Fall wäre  $\#D_{m+1} = 0$ , im zweiten Fall  $\#D_{m+1} = -1$ , also ergibt sich in jedem Fall ein Widerspruch.

Da also  $\Omega_0$  keine Nullstelle von  $Q_{n-1}$ ,  $n \geq 2$ , enthält, hat  $\Omega_0$  nach Lemma 3.11 c) keine beschränkte Komponente. Nach Lemma 3.4 gibt es ein  $r_0 > 0$  mit  $\{c \in \mathbb{C}^* : |c| \geq r_0\} \subseteq \Omega_0^{(0)}$ . Damit ist also  $\Omega_0^{(1)} = \emptyset$  und die Menge  $\Omega_0 = \Omega_0^{(0)}$  ist zusammenhängend.  $\square$

**Bemerkung 3.13** Aus diesem Satz und dem vorhergehenden Lemma folgt, dass für  $n \in \mathbb{N}$  einerseits jede Null- oder Einsstelle von  $Q_{n-1}$  in einer Flucht-komponente der Ordnung  $n$  liegt, und andererseits jede Flucht-komponente der Ordnung  $n$  *mindestens* eine Null- oder Einsstelle von  $Q_{n-1}$  enthält. Im Folgenden zeigen wir unter anderem, dass jede Flucht-komponente der Ordnung  $n$  *genau* eine Null- oder Einsstelle von  $Q_{n-1}$  enthält. Diese nennen wir dann das *Zentrum* der Komponente.

**Satz 3.14** *Es ist  $\Omega_1^{(0)} = \emptyset$*

**Beweis:** Aus Lemma 3.11 folgt, dass  $\Omega_1$  höchstens eine Zusammenhangskomponente besitzen kann und diese enthält dann den Parameter  $c = 1$ . Offensichtlich gilt (vergleiche die Definition auf Seite 29)  $1 \notin \Omega_1^{(0)}$ . Dies liefert also  $\Omega_1^{(0)} = \emptyset$  und  $\Omega_1 = \Omega_1^{(1)}$ .  $\square$

Nun treffen wir zunächst weitere Vorbereitungen für die Parametrisierung der Fluchtkomponenten der Ordnung  $n \geq 1$ :

**Bemerkung 3.15** Für  $c \in \Omega_n$ ,  $n \geq 1$ , haben wir bereits gezeigt, dass  $U_\infty(c)$  einfach zusammenhängend ist und neben  $\infty$  keine weiteren kritischen Punkte von  $R_c$  enthält.  $R_c$  hat um  $\infty$  eine Entwicklung der Form  $R_c(z) = \frac{4}{27}cz^2 + \dots$ . Nach [St1], Seite 60ff, hat die *Böttcher-Funktionalgleichung*

$$\varphi_c(R_c(z)) = \frac{4}{27}c \cdot (\varphi_c(z))^2$$

mit der Normierung

$$\varphi_c(z) = z + \dots \text{ um } \infty$$

eine eindeutige Lösung und es ist

$$\varphi_c : U_\infty(c) \rightarrow \left\{ w : |w| > \frac{27}{4|c|} \right\}$$

eine konforme Abbildung.

**Definition 3.16** Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Die Abbildung

$$\Psi_n : \Omega_n \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

$$\Psi_n(c) := \frac{4}{27}c \cdot \varphi_c(Q_n(c))$$

heißt *Parametrisierungsabbildung von  $\Omega_n$* .

Nach obiger Bemerkung ist  $\Psi_n$  wohldefiniert. Als nächstes wollen wir zeigen, dass  $\Psi_n$  jede Fluchtkomponente der Ordnung  $n \geq 1$  eigentlich auf  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  abbildet.

**Lemma 3.17** *Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist die Parametrisierungsabbildung  $\Psi_n$  lokal konform in  $\Omega_n \setminus \{\text{Polstellen von } Q_n\}$ .*

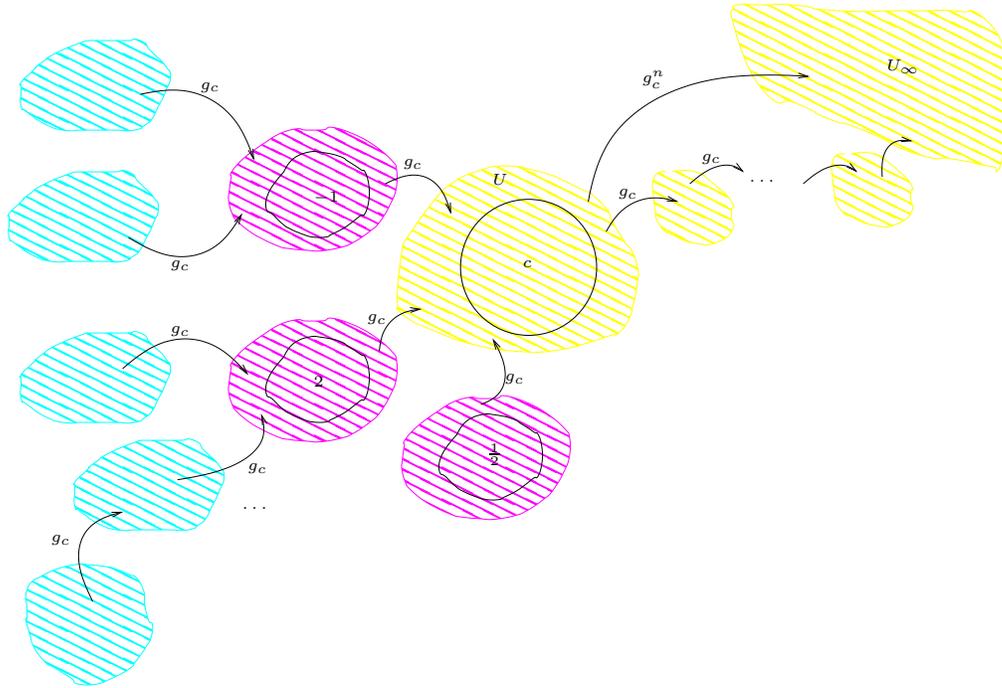


Abbildung 3.3: Die Definition des Beltramikoeffizienten

**Beweis:** (a) Es sei zunächst  $c_* \in \Omega_n$  fest gewählt und keine Polstelle von  $Q_n$ . Zur Vereinfachung der Darstellung sei im Folgenden  $R := R_{c_*}$  und  $U$  das Fatougebiet von  $R$ , das  $c_*$  enthält. Weiter sei  $\varepsilon > 0$  so gewählt, dass die Kreisscheibe  $\{z : |z - c_*| \leq 3\varepsilon\}$  in  $U$  enthalten ist und keine Polstelle von  $Q_n$  enthält.

Es sei  $(\eta_c)$  eine Familie von Diffeomorphismen  $\eta_c : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , die für  $|c - c_*| < \varepsilon$  analytisch von  $c$  abhängen, mit

$$\eta_c(z) = \begin{cases} z & \text{für } |z - c_*| > 3\varepsilon \\ z - c_* + c & \text{für } |z - c_*| < \varepsilon \end{cases}.$$

Zur Konstruktion solcher Diffeomorphismen vergleiche man zum Beispiel die Arbeit [Roe] von Pascale Roesch. Wir definieren nun die Abbildung  $g_c : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  durch  $g_c := \eta_c \circ R$ . Dann ist  $g_c$  eine quasireguläre Abbildung und es ist  $g_c^k(U) \cap U = \emptyset$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Weiter ist auch  $g_c$  symmetrisch unter  $\Sigma$ , das heißt  $g_c \circ \sigma = g_c$  für alle  $\sigma \in \Sigma$ . In  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus R^{-1}(U)$  ist  $g_c = R$ , also insbesondere analytisch.

(b) Wir definieren nun einen Beltramikoeffizienten  $\mu_c$ , der invariant un-

ter  $g_c$  ist in dem Sinne, dass  $\mu_c(z) = g_c^* \mu_c(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  ( $g_c^* \mu_c$  bezeichne das Pullback von  $\mu_c$  unter  $g_c$ , vergleiche Seite 21). Dies geschieht in mehreren Schritten. Dazu setzen wir zunächst  $\mu_c(z) := 0$  für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} R^{-j}(U_{\infty}(c_*)) =: \mathbb{C} \setminus A_{\infty}$  (der weiße Bereich in der Abbildung 3.2).

Man beachte, dass  $A_{\infty}$  und  $\mathbb{C} \setminus A_{\infty}$  vollständig invariant unter  $g_c$  sind. Somit gilt sicherlich  $\mu_c(z) = g_c^* \mu_c(z)$  für  $z \in \mathbb{C} \setminus A_{\infty}$ .

Wir setzen nun auch  $\mu_c(z) = 0$  für  $z \in U_{\infty}(c_*)$  und definieren sukzessive

$$\mu_c(z) := g_c^* \mu_c(z) = \frac{\mu_{g_c}(z) + \mu_c(g_c(z)) \cdot \frac{\overline{(g_c)_z(z)}}{(g_c)_z(z)}}{1 + \overline{\mu_{g_c}(z)} \cdot \mu_c(g_c(z)) \cdot \frac{\overline{(g_c)_z(z)}}{(g_c)_z(z)}}$$

Da  $g_c^k(U) \cap U = \emptyset$  für alle  $k \geq 1$ , ist  $\mu_c$  in  $\widehat{\mathbb{C}}$  wohldefiniert.

Zum besseren Verständnis seien die folgenden Eigenschaften bemerkt: Da  $g_c$  in  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus R^{-1}(U)$  analytisch ist, gilt für alle  $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus R^{-1}(U)$ :

$$\mu_c(z) = \mu_c(g_c(z)) \cdot \frac{\overline{(g_c)_z(z)}}{(g_c)_z(z)}$$

Insbesondere ist  $\mu_c(z) = 0$  für  $z \in U_{\infty}(c_*), \dots, R(U), U$ , also den in der Abbildung gelb markierten Gebieten. Dagegen ist für  $z \in R^{-1}(U)$ , den in der Abbildung 3.2 rot markierten Gebieten, gerade

$$\mu_c(z) = g_c^* \mu_c(z) = \mu_{g_c}(z) = \mu_{\eta_c \circ R}(z) = \frac{\mu_R(z) + (\mu_{\eta_c} \circ R)(z) \cdot \frac{\overline{R'(z)}}{R'(z)}}{1 + \overline{\mu_R(z)} \cdot (\mu_{\eta_c} \circ R)(z) \cdot \frac{\overline{R'(z)}}{R'(z)}}$$

Dabei nutzen wir aus, dass  $\mu_c(g_c(z)) = 0$  für  $z \in R^{-1}(U)$  sowie die Kettenregel. Da  $\mu_R = 0$ , erhalten wir

$$\mu_c(z) = \mu_{\eta_c}(R(z)) \cdot \frac{\overline{R'(z)}}{R'(z)}$$

für  $z \in R^{-1}(U)$ , oder anders ausgedrückt  $\mu_c(z) = R^* \mu_{\eta_c}(z)$ .

(c) Wir wollen nun zeigen, dass  $\mu_c$  „symmetrisch“ ist. Es ist offensichtlich  $\mu_c(z) = \mu_c(1-z) = \mu_c(1/z) \cdot \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 = 0$  für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus A_{\infty}$ , da  $A_{\infty}$  invariant ist unter  $\Sigma$ . Für  $z \in A_{\infty}$  gilt, da  $g_c(z) = g_c(1-z)$ , nach Lemma 2.19 (siehe Seite 22):

$$\mu_c(1-z) = g_c^* \mu_c(1-z) = \frac{\mu_{g_c}(1-z) + \mu_c(g_c(1-z)) \cdot \frac{\overline{(g_c)_z(1-z)}}{(g_c)_z(1-z)}}{1 + \overline{\mu_{g_c}(1-z)} \cdot \mu_c(g_c(1-z)) \cdot \frac{\overline{(g_c)_z(1-z)}}{(g_c)_z(1-z)}}$$

$$= \frac{\mu_{g_c}(z) + \mu_c(g_c(z)) \cdot \frac{\overline{(g_c)_z(z)}}{(g_c)_z(z)}}{1 + \overline{\mu_{g_c}(z)} \cdot \mu_c(g_c(z)) \cdot \frac{\overline{(g_c)_z(z)}}{(g_c)_z(z)}} = \mu_c(z)$$

und analog unter Verwendung von  $g_c(1/z) = g_c(z)$  mit Lemma 2.20:

$$\mu_c(1/z) = \mu_c(z) \cdot \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2$$

(d) Nach dem Satz von Ahlfors-Bers (Satz 2.13) hat die Beltramigleichung  $(h_c)_{\bar{z}} = \mu_c(z)(h_c)_z$  eine eindeutige quasikonforme Lösung  $h_c$  mit der Normierung  $h_c(0) = 0$ ,  $h_c(1) = 1$  und  $h_c(\infty) = \infty$ . Nach Lemma 2.21 und 2.22 ist  $h_c(z) = h_c(1-z) = \frac{1}{h_c(1/z)}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Wir definieren nun die Abbildung  $G_c = h_c \circ g_c \circ h_c^{-1}$  und wollen zeigen, dass  $G_c$  in  $\widehat{\mathbb{C}}$  analytisch ist, also eine rationale Funktion. Dazu zeigen wir, dass  $\mu_{G_c} = 0$  fast überall in  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Da  $h_c$  eine quasikonforme Abbildung ist, ist dazu äquivalent:  $\mu_{G_c} \circ h_c = 0$  fast überall in  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Es ist

$$\mu_{G_c} \circ h_c(z) = \frac{\mu_{G_c \circ h_c}(z) - \mu_c(z)}{1 - \overline{\mu_c(z)} \mu_{G_c \circ h_c}(z)} \cdot \frac{(h_c)_z(z)}{(h_c)_{\bar{z}}(z)} = \frac{\mu_{h_c \circ g_c}(z) - \mu_c(z)}{1 - \overline{\mu_c(z)} \mu_{h_c \circ g_c}(z)} \cdot \frac{(h_c)_z(z)}{(h_c)_{\bar{z}}(z)}.$$

Nach der Kettenregel ist  $\mu_{h_c \circ g_c}(z) = (g_c^* \mu_c)(z)$ , also ist nach Konstruktion  $\mu_{h_c \circ g_c}(z) = \mu_c(z)$ . Dies liefert also  $(\mu_{G_c} \circ h_c)(z) = 0$  fast überall in  $\mathbb{C}$ .

(e) Als nächstes wollen wir zeigen, dass  $G_c = R_{\tau(c)}$ , also die Funktion  $G_c$  wieder zu unserer Ausgangsfamilie gehört. Dazu sei zunächst bemerkt, dass nach Konstruktion offensichtlich 0, 1 und  $\infty$  doppelte Polstellen von  $G_c$  sind und dieses sind die einzigen Polstellen von  $G_c$ . Insbesondere ist  $G_c$  eine rationale Funktion vom Grad 6.

Wir nutzen nun intensiv die Symmetrien aus: Aus  $h_c(1/z) = 1/h_c(z)$  folgt direkt  $h_c(-1)^2 = 1$  und somit (da ja  $h_c(1) = 1$  als Normierung festgelegt wurde)  $h_c(-1) = -1$ . Durch entsprechende Überlegungen erhalten wir auch, dass  $h_c(2) = 2$  und  $h_c(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ . Insbesondere folgt, dass  $-1$ , 2 und  $\frac{1}{2}$  kritische Punkte von  $G_c$  sind.

Wir setzen nun  $\omega_+ := h_c(z_+)$  und  $\omega_- := h_c(z_-)$ . Aus  $G_c = h_c \circ \eta_c \circ R \circ h_c^{-1}$  folgt, dass  $\omega_+$  und  $\omega_-$  jeweils dreifache Nullstellen von  $G_c$  sind. Somit hat  $G_c$  die Form

$$G_c(z) = \gamma_c \frac{(z - \omega_+)^3 (z - \omega_-)^3}{z^2 (z - 1)^2},$$

Wegen der Symmetrie gilt weiterhin  $G_c(-1) = G_c(2) = G_c\left(\frac{1}{2}\right) =: \tilde{\gamma}_c$  und  $-1, 2$  und  $\frac{1}{2}$  sind doppelte  $\tilde{\gamma}_c$ -Stellen von  $G_c$ . Berechnung von  $G'_c(z)$  und einsetzen von  $G'_c(-1) = 0$  ergibt (unter Berücksichtigung von  $\omega_+, \omega_- \neq -1$ ):  $2 + \omega_+ + \omega_- = (1 + \omega_+)(1 + \omega_-)$ , also  $\omega_+\omega_- = 1$ . Andererseits erhalten wir aus  $G'_c\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ , dass  $\omega_+ + \omega_- = 1$ . Insgesamt erhalten wir also  $\{\omega_+, \omega_-\} = \{z_+, z_-\}$  und es gilt  $G_c = R_{\tau(c)}$  für ein geeignetes  $\tau(c)$ .

(f) Als nächsten Schritt wollen wir zeigen, dass  $\tau$  analytisch von  $c$  abhängt. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}\tau(c) &= R_{\tau(c)}(2) = R_{\tau(c)}(h_c(2)) = G_c(h_c(2)) \\ &= h_c(g_c(2)) = h_c(\eta_c(R(2))) = h_c(\eta_c(c_*)) = h_c(c)\end{aligned}$$

$h_c$  hat um  $z = \infty$  eine Entwicklung  $h_c(z) = \sigma_c z + O(1)$ , wobei  $\sigma_c$  für  $|c - c_*| < \varepsilon$  analytisch von  $c$  abhängt. (Man beachte, dass auch der „O-Term“ von  $c$  abhängt.) Aus  $R_{\tau(c)} \circ h_c = G_c \circ h_c = h_c \circ g_c = h_c \circ R$  um  $z = \infty$  folgt

$$\tau(c) (\sigma_c z + O(1))^2 = \sigma_c (c_* z^2 + O(z)) + O(1) \text{ für } z \rightarrow \infty.$$

Mit Koeffizientenvergleich erhalten wir dann, dass  $\tau(c) = \frac{c_*}{\sigma_c}$ . Insbesondere hängt  $\tau(c)$  für  $|c - c_*| < \varepsilon$  analytisch von  $c$  ab.

(g) Es sei nun  $\varphi_c$  die Lösung der Böttcher-Funktionalgleichung zum Parameter  $c$ , vergleiche Seite 36, und  $\varphi_* := \varphi_{c_*}$ . Wir zeigen, dass in einer Umgebung von  $\infty$  die Identität  $\varphi_{\tau(c)} = \sigma_c \varphi_* \circ h_c^{-1}$  gilt. Dazu setzen wir  $\Phi := \sigma_c \varphi_* \circ h_c^{-1}$ . Dann hat  $\Phi$  um  $z = \infty$  eine Entwicklung der Form  $\Phi(z) = z + \dots$ .

Weiter gilt in einer geeigneten Umgebung von  $\infty$ :

$$\begin{aligned}\Phi \circ R_{\tau(c)}(z) &= \Phi \circ G_c(z) &&= \sigma_c \varphi_* \circ h_c^{-1} \circ G_c(z) \\ &= \sigma_c \varphi_* \circ g_c \circ h_c^{-1}(z) &&= \sigma_c \varphi_* \circ R \circ h_c^{-1}(z) \\ &= \sigma_c \frac{4}{27} c_* (\varphi_* (h_c^{-1}(z)))^2 &&= \frac{4}{27} \frac{c_*}{\sigma_c} (\sigma_c \varphi_* \circ h_c^{-1}(z))^2 \\ &= \frac{4}{27} \tau(c) \Phi^2(z)\end{aligned}$$

$\Phi$  ist also die Lösung der Böttcher-Funktionalgleichung zum Parameter  $\tau(c)$ . Die Eindeutigkeit der Lösung liefert unsere Behauptung.

Damit erhalten wir für  $|c - c_*| < \varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\Psi_n(\tau(c)) &= \frac{4}{27} \tau(c) \varphi_{\tau(c)}(Q_n(\tau(c))) &&= \frac{4}{27} c_* \varphi_* (h_c^{-1}(R_{\tau(c)}^n(\tau(c)))) \\ &= \frac{4}{27} c_* \varphi_* (h_c^{-1}(R_{\tau(c)}^n(h_c(c)))) &&= \frac{4}{27} c_* \varphi_* (g_c^n(c)) \\ &= \frac{4}{27} c_* \varphi_* (R^n(c))\end{aligned}$$

Da  $c_*$  keine Polstelle von  $Q_n$  ist, hat  $R^n(c)$  für  $|c - c_*|$  hinreichend klein nach Konstruktion keine kritischen Punkte. Also ist  $\Psi_n$  lokal konform in  $c_*$ .  $\square$

**Lemma 3.18** *Ist  $\Omega$  eine Fluchtkomponente der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$ , so ist die Parametrisierungsabbildung  $\Psi_n : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  eine eigentliche Abbildung.*

**Beweis:** Wir betrachten zunächst  $\tilde{R}_c(z) := cR_c\left(\frac{z}{c}\right)$ . Weiter sei  $\tilde{U}_\infty(c)$  das Attraktionsgebiet von  $\infty$  für  $\tilde{R}_c$ , also  $\tilde{U}_\infty(c) = cU_\infty(c)$ . Insbesondere ist

$$\tilde{D}_0 := \{z : |z| \geq 43\} \subseteq \left\{z : |z| \geq 6|c| + \frac{27}{4}\right\} \subseteq \tilde{U}_\infty(c)$$

und  $\tilde{R}_c\left(\overline{\tilde{D}_0}\right) \subseteq \tilde{D}_0$  für alle  $c \in \mathbb{C}^* \setminus \Omega_0$ . Wir bilden nun wieder eine Ausschöpfung von  $\tilde{U}_\infty(c)$ . Dazu sei  $\tilde{D}_{q+1}(c)$  die zusammenhängende Komponente von  $\tilde{R}_c^{-1}(\tilde{D}_q)$ , die  $D_0$  enthält.

Es sei nun  $\Omega$  eine Fluchtkomponente der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $c \in \Omega$  sei  $k(c)$  die kleinste ganze Zahl  $k$  mit  $\tilde{Q}_n(c) := \tilde{R}_c^n(c^2) \in \tilde{D}_k(c)$ . Das heißt insbesondere  $\tilde{Q}_{n+k}(c) \in \tilde{D}_0$ , aber  $\tilde{Q}_{n+k-1}(c) \notin \tilde{D}_0$ .

Weiter ist  $\tilde{Q}_n(c) = \tilde{R}_c^n(c^2) = cR_c^n(c) = cQ_n(c)$ .

*Behauptung:* Ist  $c_0 \in \partial\Omega$  und  $(c_j)$  eine Folge in  $\Omega$  mit  $c_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} c_0$ , so folgt  $k(c_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ .

*Beweis:* Wir nehmen an, es gelte nicht  $k(c_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ . Dann können wir, ggf. durch Übergang zu einer Teilfolge von  $(c_j)$ , die wir wieder mit  $(c_j)$  bezeichnen, annehmen, die Folge  $k(c_j)$  wäre konstant. Dann gibt es ein festes  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\tilde{Q}_{n+k}(c_j) = \tilde{R}_{c_j}^{n+k}(c_j^2) \in \tilde{D}_0$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ .

1. Fall:  $c_0 \neq 0$

Dann folgt hieraus  $\tilde{Q}_{n+k}(c_0) \in \tilde{D}_0 \subseteq \tilde{U}_\infty(c_0)$ , also ein Widerspruch zu  $c_0 \in \Omega_\infty$ .

2. Fall:  $c_0 = 0$

Dann folgt mit Lemma 1.6:

$$43 \leq |\tilde{Q}_{n+k}(c_j)| = |c_j Q_{n+k}(c_j)| = \left| \left(\frac{4}{27}\right)^{2^{n+k}-1} \frac{p_{n+k}(c_j)}{q_{n+k}(c_j)} \right| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{27}\right)^{2^{n+k}-1}$$

und es ergibt sich auch ein Widerspruch. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Es sei nun  $D_0(c) = \frac{1}{c}\tilde{D}_0$ . Dann ist  $D_0(c) \subseteq U_\infty(c)$  für alle  $c \in \Omega$  und es ist  $Q_k(c) \in D_0(c)$  genau dann, wenn  $\tilde{Q}_k(c) \in \tilde{D}_0$ .

Nun zeigen wir, dass  $\Psi_n : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  eine eigentliche Abbildung ist. Dazu sei  $c_0 \in \partial\Omega \subseteq \Omega_\infty$ . Wir setzen

$$M := \sup \{ |\varphi_c(z)| : z \in D_0(c) \setminus R_c(D_0(c)), |c - c_0| < \delta \} < \infty,$$

wobei  $\delta$  klein genug zu wählen ist. Es gilt also

$$\begin{aligned} \Psi_n(c) &= \frac{4}{27}c \cdot \varphi_c(R_c^n(c)) = \frac{4}{27}c \cdot \sqrt[2^{k(c)}]{\frac{\varphi_c\left(R_c^{k(c)}(R_c^n(c))\right)}{\left(\frac{4}{27}c\right)^{1+\dots+2^{k(c)-1}}}} \\ &= \frac{4}{27}c \cdot \sqrt[2^{k(c)}]{\frac{\varphi_c(Q_{n+k(c)}(c))}{\left(\frac{4}{27}c\right)^{2^{k(c)}-1}}} = \sqrt[2^{k(c)}]{\frac{4}{27}}c \cdot \sqrt[2^{k(c)}]{\varphi_c(Q_{n+k(c)}(c))} \end{aligned}$$

Da für  $c \in \Omega$ ,  $|c - c_0| < \delta$  gilt, dass  $Q_{n+k(c)}(c) \in D_0 \setminus R_c(D_0)$ , folgt hieraus  $|\Psi_n(c)| \leq \sqrt[2^{k(c)}]{\frac{4}{27}}|c| \cdot \sqrt[2^{k(c)}]{M} \rightarrow 1$  für  $c \rightarrow c_0$ ,  $c \in \Omega$ . Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

**Satz 3.19** *Jede Fluchtkomponente  $\Omega$  der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , ist einfach zusammenhängend, enthält genau eine Polstelle von  $Q_n$  (ihr sogenanntes Zentrum) und es ist  $\Psi_n : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  eine eigentliche Abbildung vom Grad 2 oder 6.*

**Beweis:** Es sei  $\Omega$  eine Fluchtkomponente der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$ . Nach Lemma 3.18 ist  $\Psi_n : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  eine eigentliche Abbildung. Nach Lemma 3.11 enthält  $\Omega$  mindestens eine Polstelle von  $Q_n$ . Jede Polstelle von  $Q_n$  ist eine Nullstelle oder eine 1-Stelle von  $Q_{n-1}$ . Es sei nun  $s$  die Anzahl der paarweise verschiedenen Nullstellen von  $Q_{n-1}$  mit Vielfachheiten  $\mu_1, \dots, \mu_s$  in  $\Omega$  und  $\tilde{s}$  die Anzahl der paarweise verschiedenen 1-Stellen von  $Q_{n-1}$  mit Vielfachheiten  $\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_{\tilde{s}}$  in  $\Omega$ . Die Polstellen von  $Q_n$  sind gerade die Null- und Einstellen von  $Q_{n-1}$ , wobei erstere sechsfache und letztere doppelte Polstellen von  $Q_n$  sind. Wir erhalten für den Grad der eigentlichen Abbildung  $\Psi_n : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$

$$\deg \Psi_n = \sum_{j=1}^s 6\mu_j + \sum_{j=1}^{\tilde{s}} 2\tilde{\mu}_j,$$

da alle Nullstellen von  $Q_{n-1}$  sechsfache Polstellen und alle 1-Stellen von  $Q_{n-1}$  doppelte Polstellen von  $Q_n$  sind. (Man beachte: Im Vorwärtsorbit jeder Nullstelle von  $Q_{n-1}$  ist einer der beiden kritischen Punkte  $z_+$  bzw.  $z_-$  enthalten.) Es sei  $r$  die Anzahl der kritischen Punkte von  $\Psi_n$  in  $\Omega$ , die keine Polstellen

sind, entsprechend ihrer Vielfachheiten gezählt. Dann gilt nach der Formel von Riemann-Hurwitz

$$\#\Omega - 2 = \deg \Psi_n (\#(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}) - 2) + \deg \Psi_n - s - \tilde{s} + r,$$

also  $\#\Omega = 2 + r - s - \tilde{s}$ . Nach Lemma 3.17 gilt aber  $r = 0$  und somit  $\#\Omega = 2 - s - \tilde{s}$ .  $\Omega$  ist also einfach zusammenhängend und enthält genau eine Polstelle von  $Q_n$ .  $\square$

Wir erhalten schließlich

**Folgerung 3.20** *Es gibt genau  $\frac{4}{3} \cdot 6^{n-1}$  Fluchtkomponenten der Ordnung  $n \geq 2$ .*

**Beweis:** Die Anzahl der Fluchtkomponenten der Ordnung  $n$ ,  $n \geq 2$ , entspricht also der Anzahl der verschiedenen Nullstellen und Einsstellen von  $Q_{n-1}$ . Nach Lemma 1.6 hat  $Q_{n-1}$  gerade je  $6^{n-1}$  Nullstellen und Einsstellen, entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt. Die Nullstellen sind jedoch alle dreifach. Damit ist die Anzahl der Fluchtkomponenten der Ordnung  $n \geq 2$ , die wir hier mit  $\omega_n$  bezeichnen, gegeben durch

$$\omega_n = \frac{\deg Q_{n-1}}{3} + \deg Q_{n-1} = \frac{4}{3} \cdot 6^{n-1}.$$

$\square$

Wir wollen nun auch noch eine Parametrisierung der *Cantorkomponente*  $\Omega_0$  geben. Dies verläuft ähnlich wie bei den anderen Fluchtkomponenten  $\Omega_n$  mit  $n \geq 1$ .

**Bemerkung 3.21** Für  $c \in \Omega_0$  ist  $U_\infty(c)$  unendlichfach zusammenhängend und  $R_c$  hat um  $\infty$  eine Entwicklung  $R_c(z) = \frac{4}{27}cz^2 + \dots$ . Nach [St1], Seite 60ff, hat die Böttcher-Funktionalgleichung

$$\varphi_c(R_c(z)) = \frac{4}{27}c \cdot (\varphi_c(z))^2$$

$$\varphi_c(z) = z + \dots \text{ um } \infty$$

also zumindest lokal um  $\infty$  eine eindeutige Lösung. Mittels Ausschöpfung (ähnlich wie im Beweis von Satz 3.12) erhalten wir, dass sich die Böttcherfunktion in ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das  $\infty$  und  $c$  enthält, fortsetzen läßt. Dies rechtfertigt die folgende Definition:

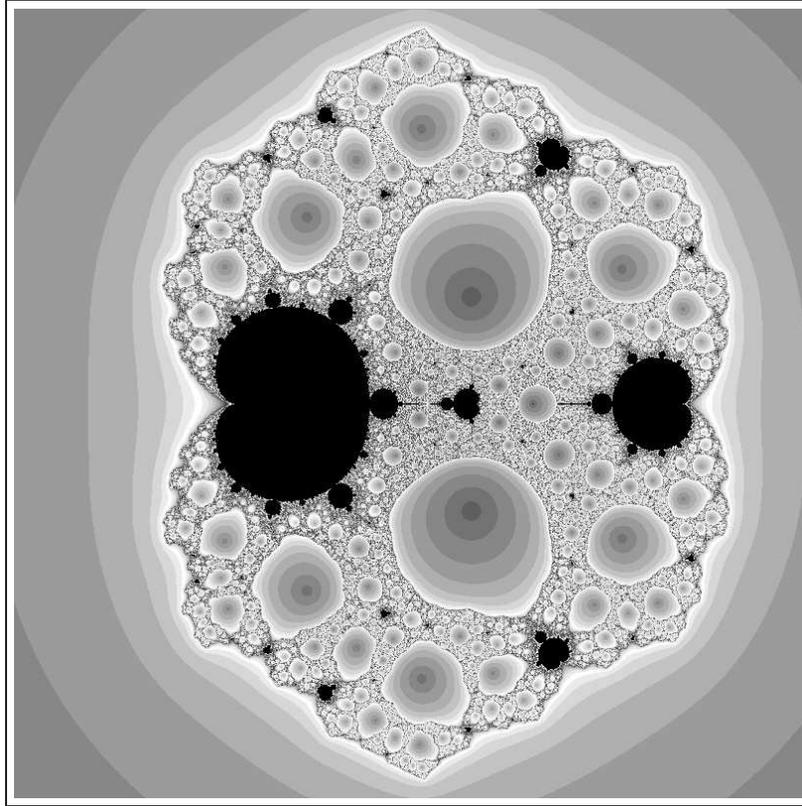


Abbildung 3.4: Die Zentren der Fluchtkomponenten

**Definition 3.22** Die Abbildung

$$\Psi_0 : \Omega_0 \cup \{\infty\} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

$$\Psi_0(c) := \frac{4}{27}c \cdot \varphi_c(c)$$

heißt *Parametrisierungsabbildung* von  $\Omega_0$ .

**Lemma 3.23** Die Abbildung  $\Psi_0$  ist lokal konform in  $\Omega_0$ .

**Beweis:** Der Beweis verläuft im Prinzip analog zum Beweis von Lemma 3.17. Dabei ist zu beachten, dass  $\Omega_0$  nach Satz 3.12 keine Polstellen von einem  $Q_n$  enthält. Ferner ist  $\varepsilon$  hinreichend klein zu wählen, so dass mit  $K := \{z : |z - c_*| \leq 4\varepsilon\}$  die Bedingung  $g_c^k(K) \cap K = \emptyset$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  erfüllt ist.  $\square$

**Lemma 3.24** Die Parametrisierungsabbildung  $\Psi_0 : \Omega_0 \cup \{\infty\} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  ist eine eigentliche Abbildung.

**Beweis:** Ist  $c_0 \in \partial\Omega_0 \setminus \{\infty\}$ , so gilt nach Lemma 1.10 sicherlich  $|c_0| \leq 6$  und somit läßt sich der Beweis von Lemma 3.18 sinngemäß übertragen und wir erhalten

$$|\Psi_0| \rightarrow 1 \text{ für } c \rightarrow \partial\Omega_0 \setminus \{\infty\}$$

Dies liefert dann die Behauptung.  $\square$

Damit folgt schließlich:

**Satz 3.25** *Die Cantorkomponente  $\Omega_0$  ist zusammenhängend,  $\Omega_0 \cup \{\infty\}$  ist einfach zusammenhängend und es ist*

$$\Psi_0 : \Omega_0 \cup \{\infty\} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

eine eigentliche Abbildung vom Grad 2.

**Folgerung 3.26** *Nach dem Monodromiesatz läßt sich jeder Zweig von  $(\Psi_0)^{\frac{1}{2}}$  zu einer konformen Abbildung von  $\Omega_0 \cup \{\infty\}$  auf  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  fortsetzen.*

### 3.3 Kernkonvergenz

**Definition 3.27** Es sei  $(D_n)$  eine Folge von Gebieten, die den Basispunkt  $z_0$  enthalten. Dann ist der *Kern*  $\mathcal{K}$  der Folge  $(D_n)$  bezüglich  $z_0$  definiert als die Vereinigung aller einfach zusammenhängenden Gebiete  $D$ , die  $z_0$  enthalten und für die  $\overline{D} \subseteq D_n$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Falls kein solches Gebiet existiert, so setzen wir  $\mathcal{K} := \{z_0\}$ .

**Definition 3.28** Die Folge  $(D_n)$  *konvergiert gegen  $\mathcal{K}$  im Sinne Carathéodorys*, falls  $\mathcal{K}$  auch der Kern jeder Teilfolge  $(D_{n_k})$  ist.

**Bemerkung 3.29** Es seien alle  $D_n$  einfach zusammenhängend und es sei  $f_n : \mathbb{D} \rightarrow D_n$  die konforme Abbildung mit  $f_n(0) = z_0$  und  $f'_n(0) > 0$ . Weiter sei auch  $\mathcal{K}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{K}$  definiert als die konforme Abbildung mit  $f(0) = z_0$  und  $f'(0) > 0$ .

Dann konvergiert  $(D_n)$  gegen  $\mathcal{K}$  im Sinne Carathéodorys genau dann, wenn  $(f_n)$  lokal gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

**Beispiel 3.30** *Die folgenden Beispiele sollen zur Veranschaulichung des Begriffes dienen:*

- a) *Es sei  $D_n = \{z : |z| > 1 - \frac{1}{n}\}$ . Dann konvergiert die Folge  $(D_n)$  gegen ihren Kern  $\mathcal{K} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  bezüglich  $\infty$ .*

- b) Es sei  $D_{2n} = \{z : |z| > 1 - \frac{1}{n}\}$  und  $D_{2n+1} = \{z : |z - 17| > 1 - \frac{1}{n}\}$ . Dann ist der Kern  $\mathcal{K}$  der Folge  $(D_n)$  bezüglich  $\infty$  gegeben durch  $\mathcal{K} = \{z : |z| > 1, |z - 17| > 1\}$ , aber es ist  $\mathcal{K}_0 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  der Kern der Teilfolge  $(D_{2n})$ . Somit konvergiert die Folge  $(D_n)$  nicht gegen ihren Kern.
- c) Es sei  $D_n = \mathbb{C} \setminus \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi - \frac{1}{n}\}$ . Dann konvergiert die Folge  $(D_n)$  gegen ihren Kern  $\mathcal{K} = \mathbb{D}$  bezüglich  $0$ .

Wir wollen nun das Konzept der Kernkonvergenz auf die Parameter Ebene der zu untersuchenden Familie, insbesondere auf  $\Omega_0$ , anwenden. Jede Abbildung  $Q_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , hat um  $\infty$  eine Entwicklung

$$Q_n(c) = \left(\frac{4}{27}\right)^{2^n-1} c^{2^{n+1}-1} + \dots = \left(\frac{4}{27}\right)^{\alpha_n} c^{\alpha_{n+1}} + \dots$$

$Q_n$  hat also in  $\infty$  einen superattraktiven Fixpunkt mit Böttchergebiet  $U_n$ . Es sei  $\theta_n$  die zugehörige Böttcherfunktion. Diese ist zumindest in einer Umgebung von  $\infty$  definiert und genügt dort der Gleichung

$$\theta_n(Q_n(c)) = \left(\frac{4}{27}\right)^{\alpha_n} (\theta_n(c))^{\alpha_{n+1}}$$

mit der Normierung  $\theta_n(c) = c + \dots$  um  $\infty$ .

Mit einer Rechnung wie im Beweis von Lemma 1.4 und Induktion folgt für  $|c| \geq 6$ , dass auch für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $|Q_n(c)| \geq 6$ . Folglich ist  $\{c : |c| > 6\} \subseteq U_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Insbesondere ist der Kern  $\mathcal{K}$  der Folge  $(U_n)$  ein Gebiet um  $\infty$ .

**Satz 3.31** Die Folge  $\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\theta_n\right)$  konvergiert in  $\Omega_0 \cup \{\infty\}$  lokal gleichmäßig gegen  $(\Psi_0)^{\frac{1}{2}}$ .

Die Folge  $(U_n)$  konvergiert im Sinne Carathéodorys gegen ihren Kern  $\mathcal{K} = \Omega_0 \cup \{\infty\}$  bezüglich  $\infty$ .

**Beweis:** Der Beweis folgt den Ideen von Busse [Bus]. Es sei  $\mathcal{K}$  der Kern der Folge  $(U_n)$  bezüglich  $\infty$ .

Es sei  $c \in \Omega_0$ . Dann gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} Q_k(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} R_c^k(c) = \infty$ . Somit gilt natürlich für  $n \in \mathbb{N}$  auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} Q_k^n(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} R_c^{nk}(c) = \infty$ , also ist  $c$  im Außengebiet  $U_n$  oder einem Urbild enthalten. Da  $\{c : |c| > 6\} \subseteq U_n$ , muß  $\Omega_0 \cup \{\infty\} \subseteq U_n$  gelten. Folglich ist  $\Omega_0 \cup \{\infty\} \subseteq \mathcal{K}$ .

Es sei nun  $D$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit  $\overline{D} \subseteq \Omega_0 \cup \{\infty\}$  und  $\infty \in D$ . Da  $Q_n$  in  $\Omega_0$  weder Null- noch Polstellen hat, ist für hinreichend

großes  $n$  die Böttcherfunktion  $\theta_n$  in  $D$  definiert. Sie erfüllt

$$\theta_n(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n+1}^k \sqrt[2^k]{\frac{Q_n^k(c)}{\left(\frac{4}{27}\right)^{1+\alpha_{n+1}+\dots+\alpha_{n+1}^{k-1}}} = c + \dots$$

zumindest in  $\{c : |c| > 6\}$  (vergleiche [St1], Seite 60). Wir definieren nun die Hilfsfunktion  $h_n(c) := \sqrt[2^{n+1}]{cQ_n(c)}$ . Es ist

$$\begin{aligned} \Psi_0(c) &= \frac{4}{27}c\varphi_c(c) = \frac{4}{27}c \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2^k]{\frac{R_c^k(c)}{\left(\frac{4}{27}c\right)^{1+\dots+2^{k-1}}} \\ &= \frac{4}{27}c \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2^k]{\frac{Q_k(c)}{\left(\frac{4}{27}c\right)^{2^k-1}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2^k]{\frac{4}{27}cQ_k(c)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (h_k(c))^2 \end{aligned}$$

in  $\Omega_0$ . Also folgt  $h_k \rightarrow (\Psi_0)^{\frac{1}{2}}$  gleichmäßig in  $D$ . Da  $Q_n(c) \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) folgt:

$$\left(\frac{4}{27}\right)^{\alpha_n} (\theta_n(c))^{\alpha_{n+1}} = \theta_n(Q_n(c)) = Q_n(c) + O(1)$$

Ferner ist

$$(h_n(c))^{\alpha_{n+1}} = (cQ_n(c))^{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}} = (cQ_n(c))^{1-\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{cQ_n(c)}{h_n(c)},$$

also  $Q_n(c) = \frac{h_n(c)}{c} (h_n(c))^{\alpha_{n+1}}$ . Zusammen ergibt sich

$$\left(\frac{4}{27}\right)^{\alpha_n} (\theta_n(c))^{\alpha_{n+1}} - (h_n(c))^{\alpha_{n+1}} \frac{h_n(c)}{c} = O(1)$$

gleichmäßig in  $D$ . Somit gilt

$$\left(\frac{4}{27}\right)^{\alpha_n/\alpha_{n+1}} \theta_n(c) - h_n(c) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

und bei richtiger Wahl der Wurzel

$$\left(\frac{4}{27}\right)^{\alpha_n/\alpha_{n+1}} = \left(\frac{4}{27}\right)^{\frac{1-\frac{1}{2^n}}{2-\frac{1}{2^n}}} \rightarrow \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Damit erhalten wir:

$$\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\theta_n\right) \rightarrow (\Psi_0)^{\frac{1}{2}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

gleichmäßig in  $D$ . Dies liefert die lokal gleichmäßige Konvergenz in  $\Omega_0$ . Nun sei  $(U_{n_\nu})$  eine Teilfolge von  $(U_n)$  und  $\mathcal{K}_0$  der Kern der Folge  $(U_{n_\nu})$  bezüglich  $\infty$ . Es sei  $D$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit  $\infty \in D$  und  $\overline{D} \subseteq \mathcal{K}_0$ . Dann ist  $D \subseteq U_{n_\nu}$  für alle  $\nu \geq \nu_0$  und es folgt, dass die Folge  $(Q_{n_\nu}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  für  $k \rightarrow \infty$  gleichmäßig in  $D$  gegen  $\infty$  konvergiert. Damit ist  $\theta_{n_\nu}$  für hinreichend großes  $\nu$  in  $D$  definiert. Wegen

$$|\theta_{n_\nu}(c)| \geq \left( \left( \frac{4}{27} \right)^{\alpha_{n_\nu}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_{n_\nu+1}}} \rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

in  $D$  ist die Folge  $(\theta_{n_\nu})_{\nu \geq \nu_0}$  normal in  $D$ . Es gelte nun  $\theta_{n_\nu} \rightarrow \theta$  lokal gleichmäßig in  $D$ . Dann gilt  $|\theta(c)| > \frac{3\sqrt{3}}{2}$  in  $D$  und  $\theta(c) = \frac{3\sqrt{3}}{2} (\Psi_0(c))^{\frac{1}{2}}$  in  $D \cap \Omega_0$ . Wir wissen bereits  $|\Psi_0(c)| \rightarrow 1$  für  $c \rightarrow \partial\Omega_0 \setminus \{\infty\}$  (vergleiche Satz 3.25). Dies liefert  $D \cap \partial\Omega_0 = \{\infty\}$ , also  $D \subseteq \Omega_0 \cup \{\infty\}$ . Folglich ist  $\mathcal{K}_0 \subseteq \Omega_0 \cup \{\infty\}$ .

Also folgt zusammen  $\mathcal{K}_0 \subseteq \Omega_0 \cup \{\infty\} \subseteq \mathcal{K}$  und insbesondere konvergiert die Folge  $(U_n)$  gegen ihren Kern  $\mathcal{K} = \Omega_0 \cup \{\infty\}$ .  $\square$

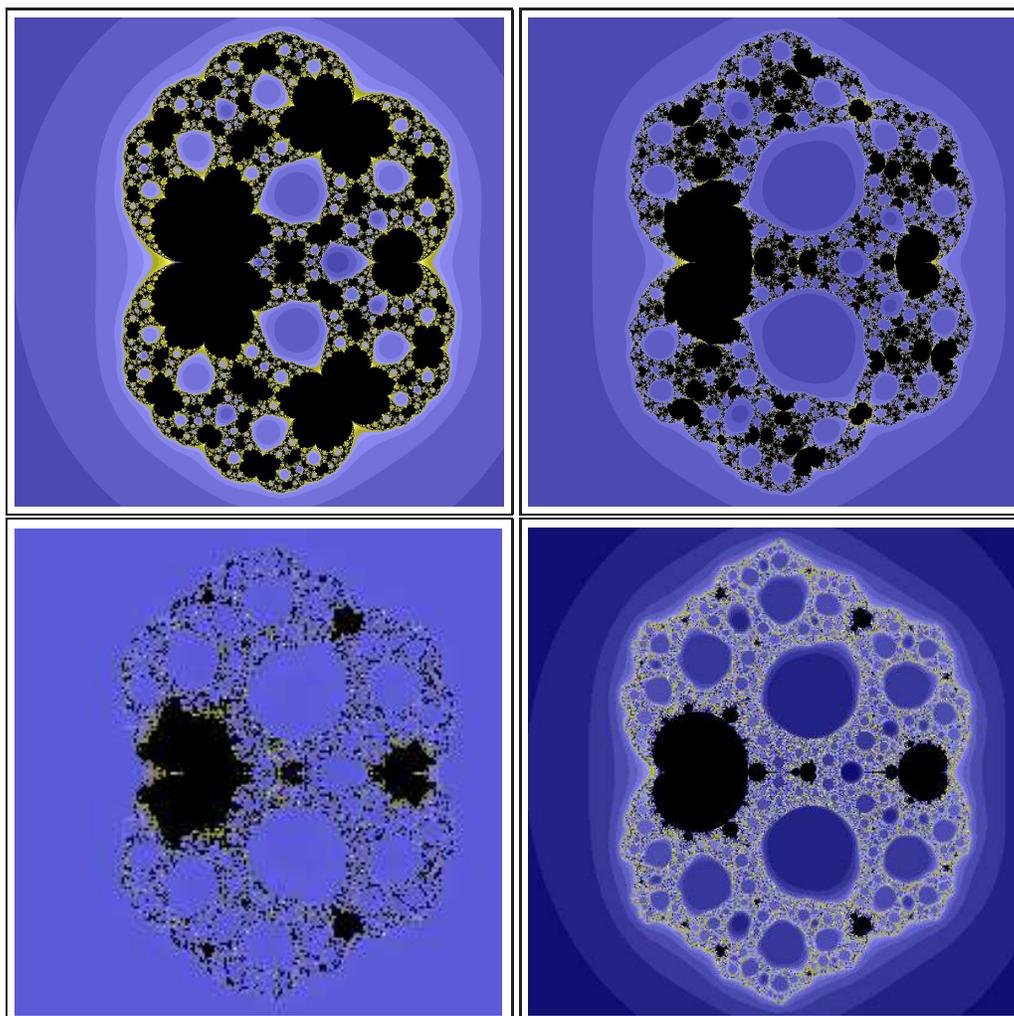


Abbildung 3.5: Die dynamische Ebene von  $Q_1$ ,  $Q_2$  und  $Q_7$  sowie die Parameter Ebene der Familie  $(R_c)$

# Kapitel 4

## Die hyperbolischen Komponenten

### 4.1 Die Dynamik in den hyperbolischen Komponenten

Die rationale Funktion  $R_c$  heißt *hyperbolisch*, wenn  $\mathcal{J}_c \cap \overline{\mathcal{C}_c^+} = \emptyset$ , wobei  $\mathcal{C}_c^+ := \{R_c^n(z_c) : n \in \mathbb{N}, z_c \text{ kritischer Punkt von } R_c\}$  den Vorwärtsorbit der kritischen Punkte bezeichnet. Offensichtlich ist für  $c \in \Omega_n, n \geq 0$ , die Funktion  $R_c$  hyperbolisch. Für  $c \in \Omega_\infty$  ist  $R_c$  genau dann hyperbolisch, wenn  $R_c$  einen (super-)attraktiven Zykel in  $\mathbb{C}$  hat. (Da  $R_c$  nur einen freien kritischen Wert hat, folgt dies analog zu Theorem 4.7 in [McM1], Seite 61.)

Wir beginnen mit einer ersten Beobachtung:

**Lemma 4.1** *Für  $c \in \Omega_\infty$  sind das Außengebiet  $U_\infty(c)$  und alle seine Urbilder einfach zusammenhängend.*

**Beweis:** Nach Lemma 1.3 sind entweder  $U_0, U_1$  und  $U_\infty$  paarweise verschieden oder es gilt  $U_0 = U_1 = U_\infty$ . Im ersten Fall enthält  $U_\infty$  als einzigen kritischen Punkt den Punkt  $\infty$  selbst und ist daher einfach zusammenhängend. Wie schon bei  $\Omega_1$  erhalten wir nun mit Hilfe der Riemann-Hurwitz-Formel, dass alle Urbilder von  $U_\infty$  einfach zusammenhängend sind.

Im zweiten Fall ist offensichtlich  $U_\infty$  vollständig invariant. Dann enthält  $U_\infty$  aber keinen anderen kritischen Punkt als  $\infty$  und seine Urbilder  $0, 1, z_+$  und  $z_-$ . Durch eine Ausschöpfung wie im Beweis von Satz 3.12, vergleiche Seite 34, erhalten wir einen Widerspruch.  $\square$

Nun zerlegen wir die Menge  $\Omega_\infty^\circ$  wie folgt:

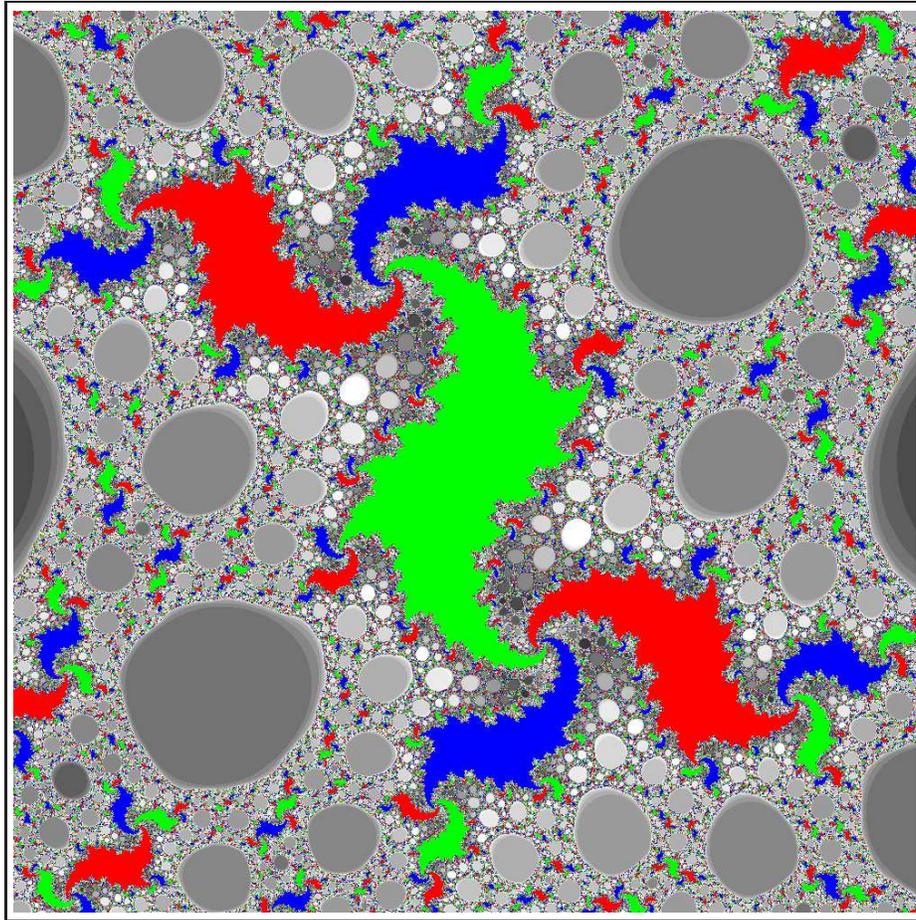


Abbildung 4.1: Ein attraktiver Dreierzyklus, hier für  $c = -0,64 + 0,79i$ , Detailausschnitt um  $z = 0,5$

**Definition 4.2** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{H}_n$  die Menge der Parameter  $c \in \Omega_\infty^\circ$ , für die  $R_c$  hyperbolisch ist und einen beschränkten, (super-)attraktiven Zykel der exakten Länge  $n$  hat. Weiter sei  $\mathcal{X} := \{c \in \Omega_\infty^\circ : R_c \text{ ist nicht hyperbolisch}\}$ .

**Bemerkung 4.3** Nach dem  $\lambda$ -Lemma von Mañé, Sad und Sullivan (vergleiche [MSS] oder [McM1], Seite 54) sind die Mengen  $\mathcal{H}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , alle offen. Ihre zusammenhängenden Komponenten bezeichnen wir im Folgenden als *hyperbolische Komponenten* der Ordnung  $n$ , auch wenn die im vorherigen Kapitel behandelten Fluchtcomponenten selbstverständlich auch alle hyperbolisch sind. Wie bei der Mandelbrotfamilie  $z^2 + c$  ist zu vermuten, dass alle Komponenten von  $\Omega_\infty^\circ$  hyperbolisch sind, also  $\mathcal{X} = \emptyset$ . Auf dieses noch offene Problem werden wir aber hier nicht weiter eingehen können. Wir nennen die Komponenten von  $\mathcal{X}$  die „*exotischen Komponenten*“.

**Satz 4.4 (Dynamik in den hyperbolischen Komponenten)** *Es sei  $c \in \mathcal{H}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit dem beschränkten, (super-)attraktiven Zyklus  $\{z_0, \dots, z_{n-1}\}$  und zugehörigen Fatoukomponenten  $\{V_0, \dots, V_{n-1}\}$ . Dann sind die Gebiete  $V_0, \dots, V_{n-1}$  einfach zusammenhängend und  $V_0 \cup \dots \cup V_{n-1}$  enthält genau einen der drei freien kritischen Punkte  $-1, 2, \frac{1}{2}$ , während die anderen beiden in einem „präperiodischen Urbildgebiet“ liegen. Es gilt für alle  $\sigma \in \Sigma$  und  $j \neq k$ :  $\sigma(V_j) \neq V_k$ . Alle stabilen Gebiete sind einfach zusammenhängend und die Juliamenge  $\mathcal{J}_c$  ist eine Kurve.*

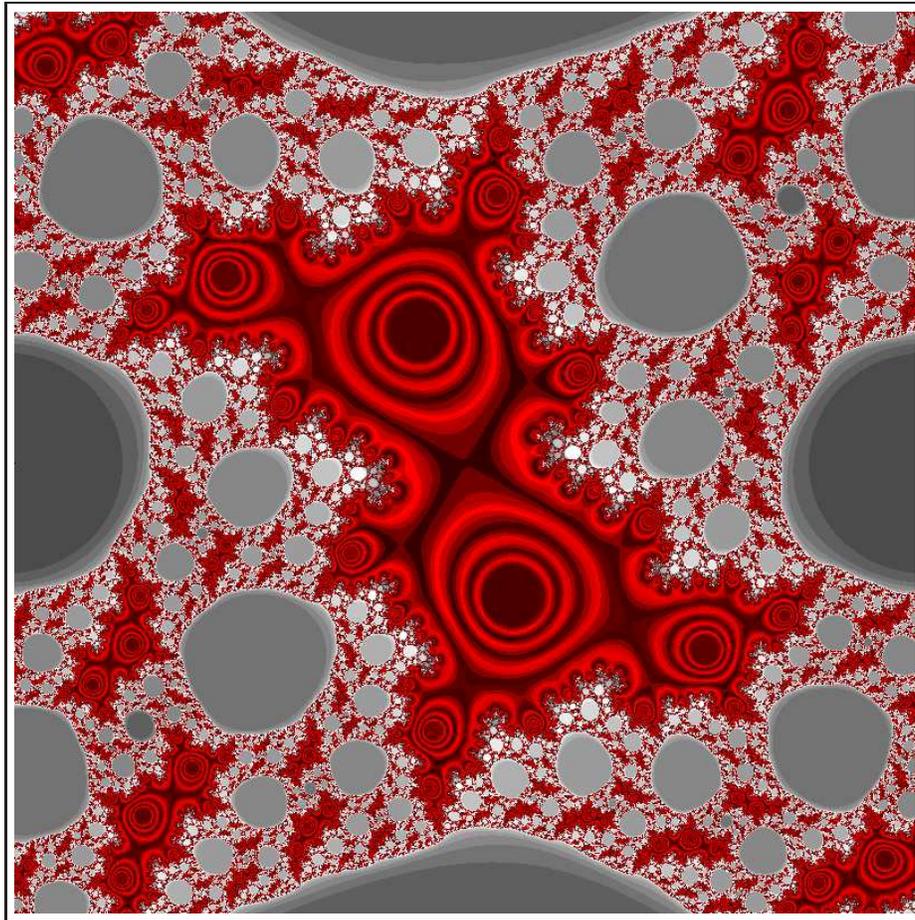


Abbildung 4.2: Stabiles Gebiet um den kritischen Punkt  $z = 0,5$ , hier für  $c = -0,75 + 0,72i$

**Beweis:** Der Gebietszyklus  $\{V_0, \dots, V_{n-1}\}$  enthält mindestens einen der drei freien kritischen Punkte  $-1, 2, \frac{1}{2}$ ; ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege dieser in  $V_0$ . Da  $R_c$  neben  $0$  und  $\infty$  nur den einen kritischen Wert  $c$  hat, enthält der Zyklus außer in  $V_0$  keine kritischen Punkte von  $R_c$ .

Nach Theorem 2, Seite 61, in [St1] und Theorem 2, Seite 68, ebendort, ist  $V_0$  entweder einfach zusammenhängend oder unendlichfach zusammenhängend. Wir wählen nun eine kleine Kreisscheibe  $D_0 \subseteq V_0$  um den Fixpunkt  $z_0$  von  $R_c^n$ . Weiter sei für  $k \geq 0$   $D_{k+1}$  die zusammenhängende Komponente von  $(R_c^n)^{-1}(D_k)$ , die  $D_k$  enthält. Dann bildet  $(D_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  eine reguläre Ausschöpfung von  $V_0$ , da  $R_c^n(\overline{D_0}) \subseteq D_0$  (vergleiche [St1], Seite 63). Nehmen wir nun an,  $V_0$  wäre unendlichfach zusammenhängend. Dann gibt es ein kleinstes  $m \in \mathbb{N}$ , so dass  $D_1, \dots, D_m$  einfach zusammenhängend sind, aber  $D_{m+1}$  mehrfach zusammenhängend ist. Es ist dann  $R_c^n : D_{m+1} \rightarrow D_m$  eine eigentliche Abbildung vom Grad  $k$ . Weiter sei  $r$  die Anzahl der kritischen Punkte von  $R_c^n$  in  $D_{m+1}$ , wobei hierfür nur  $-1, 2, \frac{1}{2}$  in Frage kommen. Dann liefert die Riemann-Hurwitz-Formel  $\#D_{m+1} = 2 - k + r$ , also folgenden Zusammenhang:

$$\begin{array}{rcccc} r & 0 & 1 & 2 & 3 \\ k & 1 & 2 & 4 & 6 \\ \#D_{m+1} & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

Wir erhalten somit in jedem Fall einen Widerspruch und  $V_0$  ist einfach zusammenhängend.

Weiter ist  $R_c^n : V_0 \rightarrow V_0$  eine eigentliche Abbildung vom Grad  $k$ . Es sei nun  $r$  die Anzahl der kritischen Punkte  $R_c^n$  in  $V_0$ . Dann folgt mit der Riemann-Hurwitz-Formel, dass  $V_0$  genau einen der drei freien kritischen Punkte enthält. Nehmen wir nun an, es gibt ein  $\sigma \in \Sigma$ , so dass  $\sigma(V_j) = V_k$ . Sei nun  $z \in V_j$  beliebig. Dann ist  $\sigma(z) \in V_k$  und  $R_c(z) \in V_{j+1}$  (falls  $j \neq n-1$ ) und andererseits  $R_c(z) = R_c(\sigma(z)) \in V_{k+1}$  (falls  $k \neq n-1$ ). Somit erhalten wir  $V_{j+1} = V_{k+1}$  und folglich  $V_j = V_k$ . (Entsprechendes gilt, falls  $j = n-1$  oder  $k = n-1$ ; man ersetze einfach  $V_{j+1}$  bzw.  $V_{k+1}$  durch  $V_0$ .)

Sei nun  $V$  eine Fatoukomponente, die einen der beiden anderen freien kritischen Punkte enthält. Aus der Symmetrie (Satz 1.1) folgt, dass  $V$  dann genau einen kritischen Punkt enthält. Somit ist  $R_c : V \xrightarrow{2:1} V_1$  eine eigentliche Abbildung und es folgt wieder mit der Riemann-Hurwitz-Formel, dass  $V$  einfach zusammenhängend ist (im Falle eines Fixgebietes ( $n = 1$ ) betrachte  $R_c : V \xrightarrow{2:1} V_0$ ). Mit Hilfe der Riemann-Hurwitz-Formel folgt weiter, dass auch alle weiteren Urbilder von  $V_0$  einfach zusammenhängend sind. Nach Lemma 4.1 sind nun alle Fatoukomponenten einfach zusammenhängend, die Julia-menge  $\mathcal{J}_c$  ist zusammenhängend und da  $R_c$  hyperbolisch ist, ist sie sogar lokal zusammenhängend. Damit folgt die letzte Aussage des Satzes.  $\square$

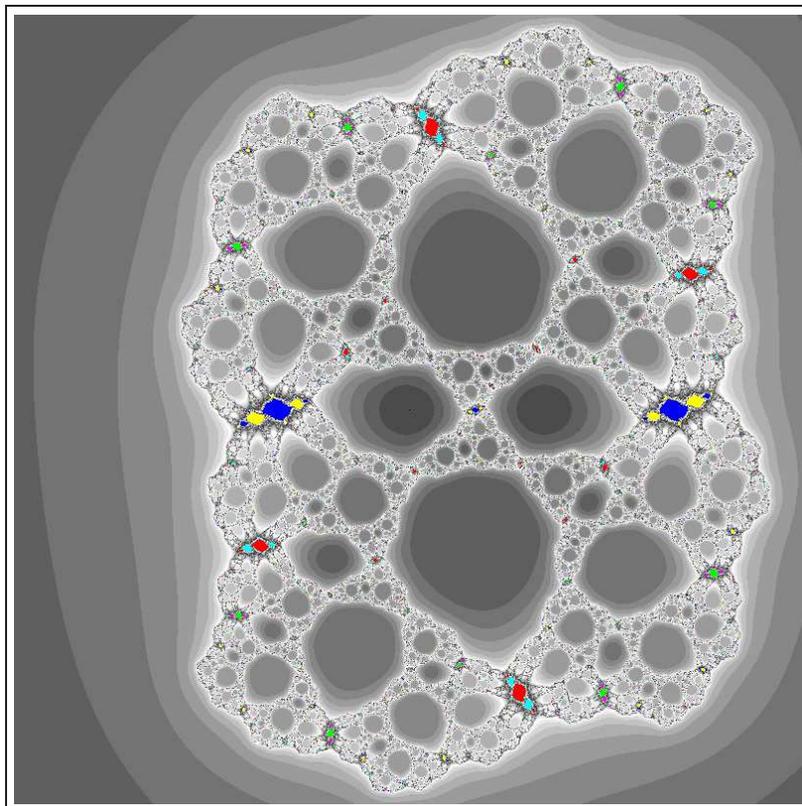


Abbildung 4.3: Ein Sechserzyklus, hier für  $c = 2, 25 - 1, 25i$

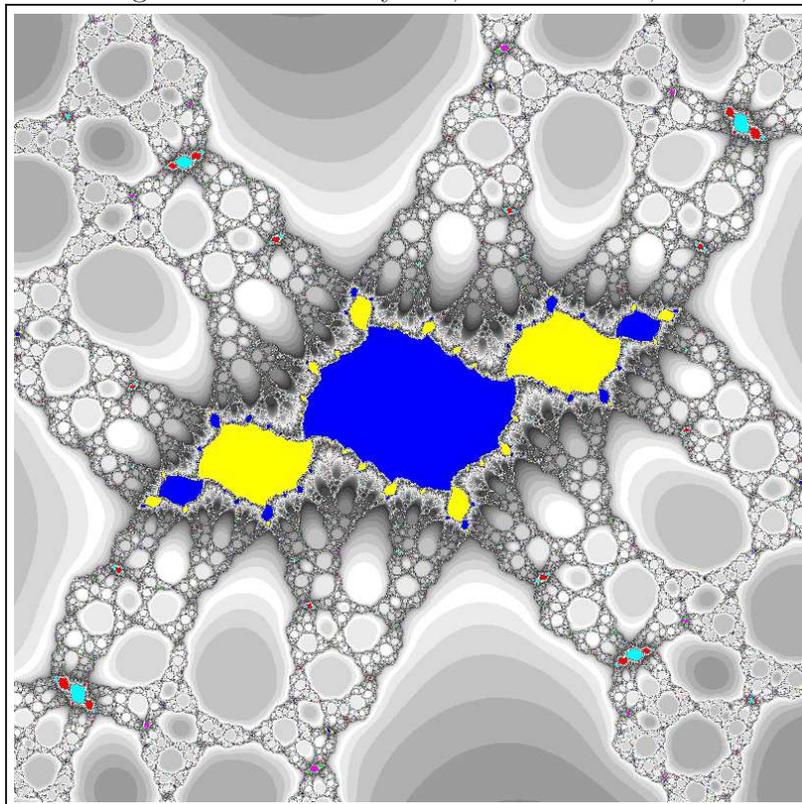


Abbildung 4.4: Detailausschnitt um  $z = 0, 5$

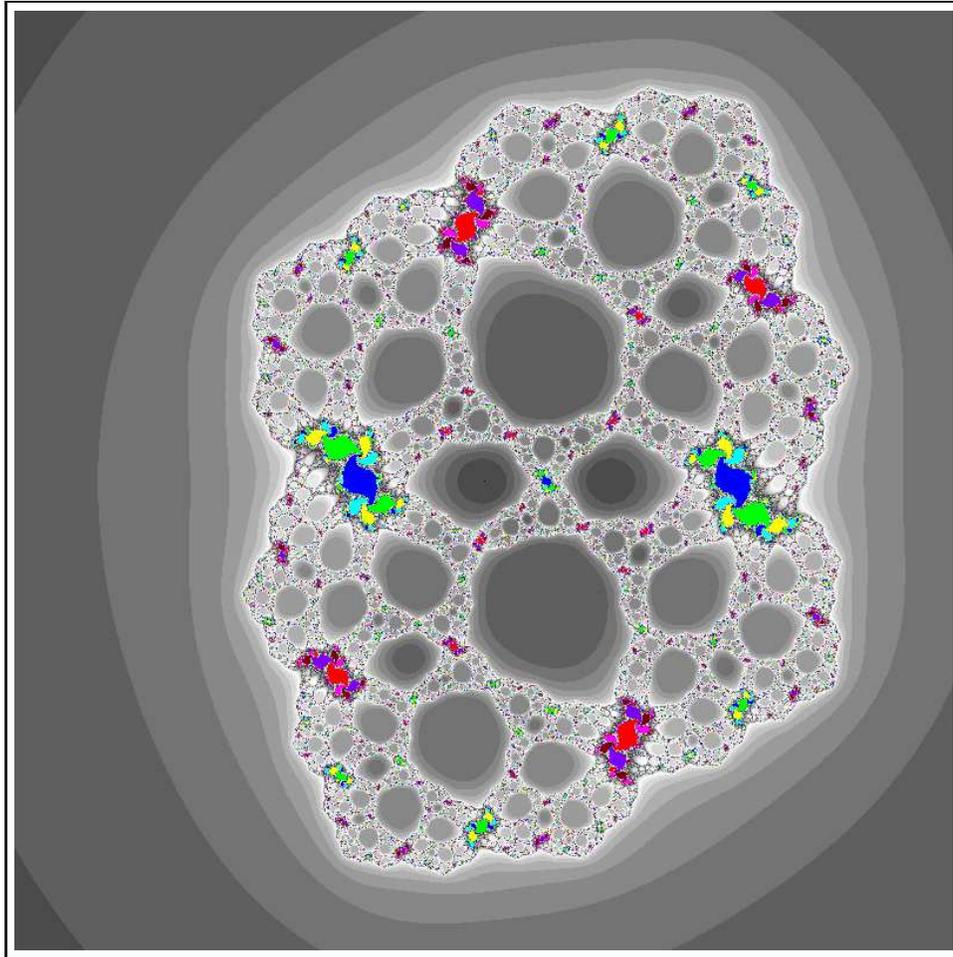


Abbildung 4.5: Ein Achterzyklus, hier für  $c = 1, 3 + 2i$

## 4.2 Parametrisierung der hyperbolischen Komponenten

Es sei  $\lambda : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathbb{D}$ , die *Multiplikatorabbildung*, die jedem Parameter  $c \in \mathcal{H}_n$  den Multiplikator des zugehörigen beschränkten Zyklus (vergleiche Satz 4.4) zuordnet. Das Ziel dieses Kapitels ist es nun, zu zeigen, dass die Multiplikatorabbildung  $\lambda$  jede hyperbolische Komponente konform auf den Einheitskreis  $\mathbb{D}$  abbildet. Wie bei der klassischen Mandelbrotfamilie  $z^2 + c$  kann man zeigen, dass  $\lambda$  jede hyperbolische Komponente, die Null nicht als Randpunkt enthält, eigentlich auf  $\mathbb{D}$  abbildet. Man vergleiche hierzu den Beweis etwa in [St1], Seite 161f, oder in [CarGam], Seite 133f.

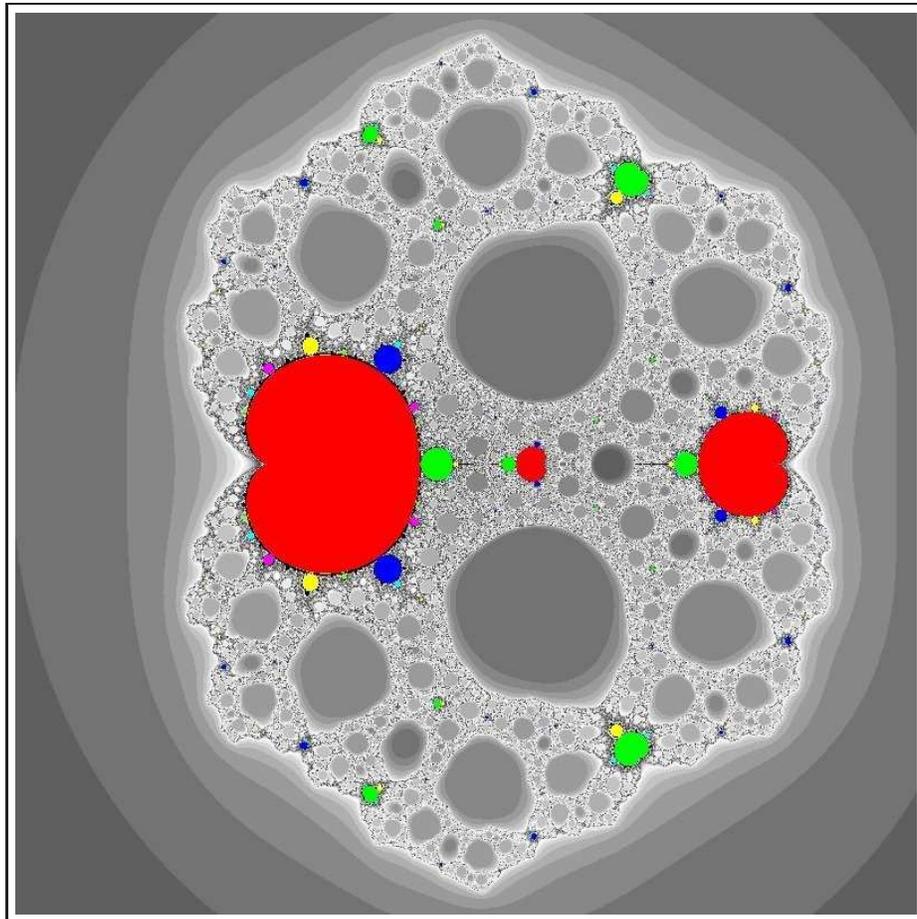


Abbildung 4.6: Die hyperbolischen Komponenten

**Bemerkung 4.5 (Legende)** Die Farben der hyperbolischen Komponenten entsprechen der Länge des beschränkten, (super-)attraktiven Zyklus für alle Parameter aus dieser Komponente: In den roten Komponenten liegen Fixgebiete, in den grünen Komponenten Zweierzykel, in den dunkelblauen Komponenten Dreierzykel, in den gelben Komponenten Viererzykel, in den violetten Komponenten Fünferzykel und in den hellblauen Komponenten Sechserzykel vor.

**Bemerkung 4.6** Es sei  $\mathcal{H}$  eine hyperbolische Komponente mit  $0 \notin \partial\mathcal{H}$ . Dann enthält  $\mathcal{H}$  einen Fixpunkt von  $Q_n$ .

**Beweis:** Weil die Multiplikatorabbildung  $\lambda$  jede Komponente  $\mathcal{H}$  von  $\mathcal{H}_n$  eigentlich auf  $\mathbb{D}$  abbildet, enthält  $\mathcal{H}$  einen Parameter  $c$ , so dass  $R_c^n$  einen superattraktiven Fixpunkt  $z_c$  hat. Es folgt  $(R_c^n)'(z_c) = 0$  und dies liefert

$R_c^k(z_c) \in \left\{-1, 2, \frac{1}{2}\right\}$  für ein  $k = 0, \dots, n-1$ . Dann ist aber auch  $c = R_c(-1) = R_c(2) = R_c\left(\frac{1}{2}\right)$  ein Fixpunkt von  $R_c^n$ , also gilt  $Q_n(c) = c$ .  $\square$

**Satz 4.7 (Parametrisierung der hyperbolischen Komponenten)** *Es sei  $\mathcal{H}$  eine hyperbolische Komponente der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$  mit  $0 \notin \partial\mathcal{H}$ . Dann ist die Multiplikatorabbildung  $\lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{D}$ , die jedem Wert  $c \in \mathcal{H}$  den Multiplikator des zugehörigen periodischen Zyklus zuordnet, eine konforme Abbildung.*

Der Beweis dieses Satzes folgt den Ideen von Carleson, vergleiche [CarGam], Seite 134ff und [St7].

**Beweis:** (a) Es sei  $c \in \mathcal{H}$ . Dann gibt es (vergleiche Satz 4.4) einen Zykel  $V_0(c), \dots, V_{n-1}(c)$  von Fatoukomponenten mit einem  $z_0(c) \in V_0(c)$ , so dass  $R_c^n(z_0(c)) = z_0(c)$  und  $\lambda(c) = (R_c^n)'(z_0(c))$  ist. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gibt es eine konforme Abbildung

$$\Psi_c : V_0(c) \rightarrow \mathbb{D},$$

die  $z_0(c)$  auf 0 abbildet. Wir setzen nun  $B_c := \Psi_c \circ R_c^n \circ \Psi_c^{-1}$ . Dann ist  $B_c : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  ein Blaschkeprodukt vom Grad 2. Durch geeignete Normierung von  $\Psi_c'(z_0)$  erreichen wir  $B_c(\zeta) = \zeta \frac{\zeta + \lambda(c)}{1 + \overline{\lambda(c)}\zeta}$ . Also ist  $\lambda(c) \in \mathbb{D}$  der Multiplikator des Fixpunktes  $z_0(c)$  von  $R_c^n$  und des Fixpunktes 0 von  $B_c$ .

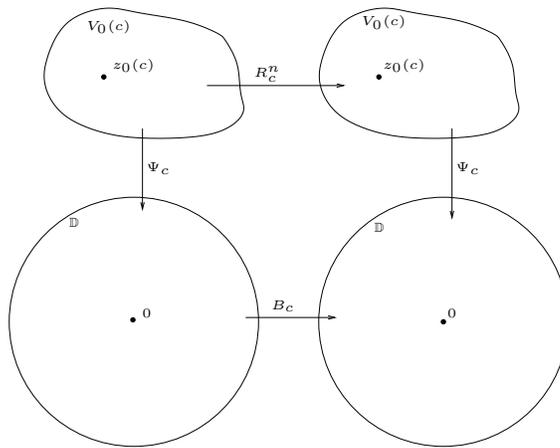


Abbildung 4.7: Die Konstruktion von  $g_a$ , Teil 1

(b) In gewissem Sinne soll diese Konstruktion nun umgekehrt werden. Zunächst sei  $c_* \in \mathcal{H}$  fest mit  $\lambda(c_*) \neq 0$ . Wir setzen  $R := R_{c_*}$  und  $\Psi := \Psi_{c_*}$ ,  $z_0 := z_0(c_*)$ ,  $V_0 := V_0(c_*)$  und  $a_* := \lambda(c_*)$ .

Wir betrachten nun die Familie  $(B_a)_{\{|a| < 1-\varepsilon\}}$  mit

$$B_a(\zeta) = \zeta \frac{\zeta + a}{1 + \bar{a}\zeta},$$

wobei  $\varepsilon > 0$  so gewählt wird, dass  $|a_*| < 1 - \varepsilon$ . Wir wählen nun ein  $r$  mit  $0 < r < 1$ , so dass für alle  $a$  mit  $|a| < 1 - \varepsilon$  die Kreisscheibe  $\Delta := \{\zeta : |\zeta| < r\}$  von  $B_a$  kompakt in sich abgebildet wird, das heißt  $B_a(\overline{\Delta}) \subseteq \Delta$ . Dann ist  $B_a : B_a^{-1}(\Delta) \rightarrow \Delta$  eine eigentliche Abbildung vom Grad 2 und es gilt  $\Delta \subseteq B_a^{-1}(\Delta)$ . Nun setzen wir  $D_0 := \Psi^{-1}(\Delta)$  und  $D'_0 := R^{-n}(D_0) \cap V_0$ . Man beachte, dass das Diagramm in Abbildung 4.2 nicht kommutativ ist.

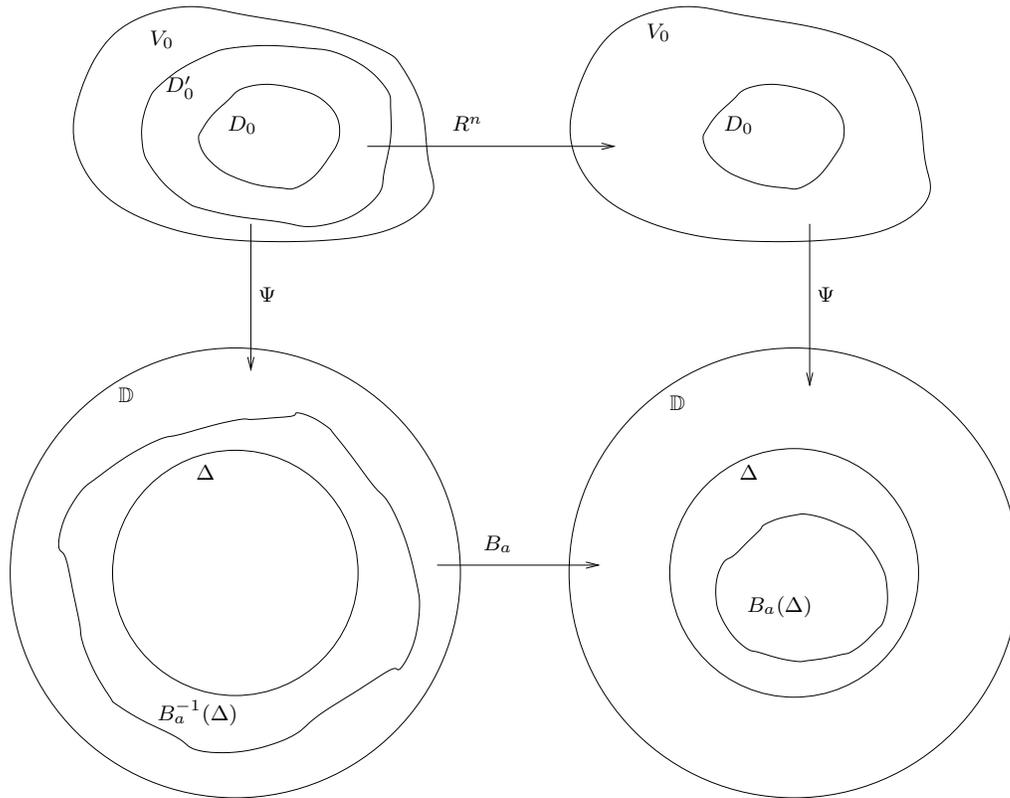


Abbildung 4.8: Die Konstruktion von  $g_a$ , Teil 2

(c) Es sei nun  $(\Phi_a)$  eine Familie von Diffeomorphismen von  $V_0$  mit  $\Phi_a = \Psi$  in  $D_0$  und  $B_a \circ \Phi_a = \Psi \circ R^n$  auf  $\partial D'_0$ . Weiter sei  $\Phi_{a_*} = \Psi$  und  $(\Phi_a)$  hänge stetig vom Parameter  $a$  ab.

Wir definieren nun die Abbildung

$$g_a = R^{-(n-1)} \circ \Psi^{-1} \circ B_a \circ \Phi_a.$$

Man beachte dazu, dass mit  $V_1 := R(V_0)$  und  $D_1 := R^{-(n-1)}(D_0) \cap V_1$  die Abbildung  $R^{n-1} : D_1 \rightarrow D_0$  konform ist. Nach Konstruktion ist dann  $g_a = R$  auf  $\partial D'_0$  und wir setzen  $g_a$  nun fort zu einer stetig differenzierbaren Abbildung  $g_a : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ . Dazu sei  $V_\alpha := \alpha(V_0)$  und  $V_\beta := \beta(V_0)$ . Wir setzen  $g_a$  nun fort durch

$$g_a(z) := \begin{cases} g_a(z), & z \in V_0 \\ g_a(\alpha(z)), & z \in V_\alpha \\ g_a(\beta(z)), & z \in V_\beta \\ R(z), & \text{sonst} \end{cases}$$

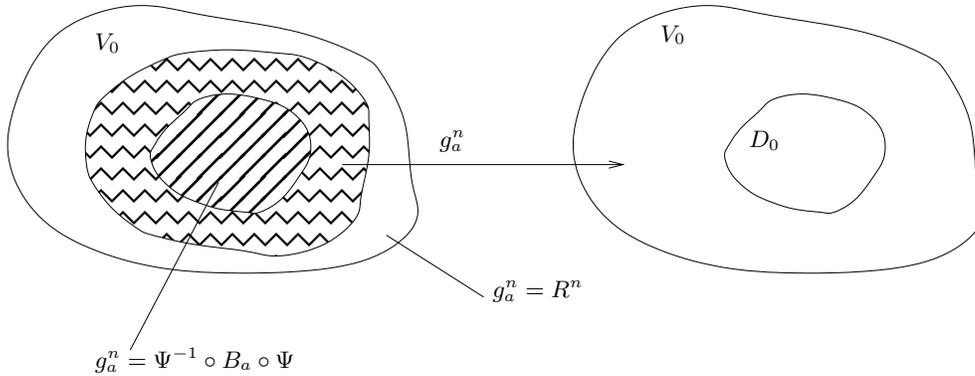


Abbildung 4.9: Die Konstruktion von  $g_a$ , Teil 3

Nach Konstruktion ist  $g_a$  außerhalb von  $(\overline{D'_0} \setminus D_0) \cup \alpha(\overline{D'_0} \setminus D_0) \cup \beta(\overline{D'_0} \setminus D_0)$  analytisch und jede Iterierte  $g_a^k$  hat höchstens einen nicht-analytischen Faktor, die Abbildung  $g_a$  ist also gleichmäßig quasiregulär. Die zweite Aussage folgt, weil mit  $z \in (\overline{D'_0} \setminus D_0) \cup \alpha(\overline{D'_0} \setminus D_0) \cup \beta(\overline{D'_0} \setminus D_0)$  für alle  $k \geq 1$  gilt, dass  $g_a^k(z) \in D_0$ . Ferner ist  $g_a(z) = g_a(\alpha(z)) = g_a(\beta(z))$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Nun wenden wir die Konstruktion wie im Beweis von Lemma 3.17, siehe Seite 36, an. Wir erhalten einen Beltramikoeffizienten  $\mu_a$  mit  $g_a^* \mu_a = \mu_a$ . Es sei wieder  $h_a$  die Lösung der zugehörigen Beltramigleichung  $\mu_a(h_a)_z = (h_a)_{\bar{z}}$  mit der üblichen Normierung. Dann ist  $G_a = h_a \circ g_a \circ h_a^{-1}$  eine rationale Funktion und wir erhalten, dass  $G_a = R_{\tau(a)}$  für eine stetige Abbildung  $\tau$ , also wieder

zu unserer Familie gehört.

(d) Wegen  $g_a^n(z_0) = z_0$  hat auch  $G_{\tau(a)}$  wieder einen Zykel der Länge  $n$ . Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir, dass der Multiplikator dieses Zyklus gerade gleich  $B'_a(0) = a$  ist. Somit ist  $\lambda(\tau(a)) = a$ . Da  $\tau$  stetig von  $c$  abhängt, folgt hieraus, dass  $\lambda$  keine kritischen Punkte hat und somit nach der Riemann-Hurwitz-Formel eine konforme Abbildung ist.  $\square$

**Folgerung 4.8** *Die hyperbolische Komponente  $\mathcal{H}$  enthält genau ein Zentrum, das heißt genau ein  $c$  mit  $Q_n(c) = c$ .*

# Kapitel 5

## Juliamengen als Sierpińskikurven

### 5.1 Juliamengen als Sierpińskikurven

**Definition 5.1** Eine *Sierpińskikurve* ist eine nicht-leere, kompakte, zusammenhängende, lokal zusammenhängende und nirgends dichte Teilmenge der komplexen Ebene, deren Komplementärgebiete durch paarweise disjunkte Jordankurven berandet sind.

Das erste Beispiel einer Juliamenge als Sierpińskikurve stammt von John Milnor und Tan Lei, die gezeigt haben, dass die Juliamenge von  $f(z) := a\left(z + \frac{1}{z}\right) + b$  für geeignete Parameter eine Sierpińskikurve ist (vergleiche [LeiMil]). In vielen untersuchten Familien tauchen Juliamengen als Sierpińskikurven auf und sind oft sogar eher die Regel als die Ausnahme, vergleiche zum Beispiel die Arbeiten von Devaney und Steinmetz ([Dev1], [Dev2], [St6], [St7]). Der Nachweis, dass die Juliamenge eine Sierpińskikurve ist, wird dabei wesentlich erleichtert durch das Lemma von Morosawa (Lemma 5.3, vergleiche [Mor]).

**Bemerkung 5.2** Es ist wohlbekannt (vergleiche zum Beispiel [St1]), dass die Juliamenge  $\mathcal{J}_c$  nicht-leer, kompakt und nirgends dicht ist. Die Sätze 3.7 und 3.8 liefern für  $c \in \Omega_n$ ,  $n \geq 1$ , dass  $\mathcal{J}_c$  zusammenhängend und sogar lokal zusammenhängend ist. Satz 4.4 liefert dies für die hyperbolischen Komponenten. Wenn wir wissen wollen, ob die Juliamenge eine Sierpińskikurve ist, stellt sich also hier für  $c \in \Omega_n$ ,  $n \geq 1$ , nur noch die Frage, ob  $U_\infty(c)$  und alle seine Urbildgebiete durch einfach geschlossene, paarweise disjunkte Kurven berandet sind.

Hierzu benutzen wir die beiden folgenden Lemmata.

**Lemma 5.3 (Lemma von Morosawa)** *Es sei  $R$  eine subhyperbolische, rationale Funktion und  $U$  eine vorwärts invariante Komponente ihrer Fatoumenge  $\mathcal{F}(R)$ . Wenn es eine Komplementärkomponente  $E$  von  $\overline{U}$  und eine Komponente  $D$  von  $\mathcal{F}(R)$  gibt, so dass  $D \cup R^{-1}(D) \subseteq E$ , dann ist der Rand von  $U$  eine Jordankurve.*

Der Beweis dieses Lemmas findet sich in [Mor]. Dabei heißt eine rationale Funktion  $R$  *subhyperbolisch*, wenn gilt:

- (i) Jeder kritische Punkt in der Juliamenge  $\mathcal{J}(R)$  ist präperiodisch.
- (ii) Jeder kritische Punkt in der Fatoumenge  $\mathcal{F}(R)$  wird durch einen (super-) attraktiven Zykel angezogen.

Jede hyperbolische, rationale Funktion ist also subhyperbolisch. Insbesondere ist für  $c \in \Omega_n$  oder  $c \in \mathcal{H}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_c$  sicherlich subhyperbolisch.

**Lemma 5.4** *Es sei  $R$  rational und  $D$  ein Jordangebiet. Wenn  $\partial D$  keine kritischen Werte von  $R$  enthält, dann haben je zwei verschiedene Urbilder von  $D$  disjunkten Abschluß.*

Dieses einfache, aber sehr hilfreiche Lemma ist in [St6] bewiesen worden. Wenn wir also für  $c \in \Omega_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , untersuchen wollen, ob  $\mathcal{J}_c$  eine Sierpińskikurve ist, so genügt es, zu untersuchen, ob  $\partial U_\infty(c)$  eine Jordankurve ist.

**Lemma 5.5** *Die beiden Polstellen 0 und 1 von  $R_c$  liegen in derselben Zusammenhangskomponente von  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}_\infty$ .*

**Beweis:** Wir bezeichnen mit  $W_0$  (bzw.  $W_1$ ) die Zusammenhangskomponente von  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}_\infty$ , die 0 (bzw. 1) enthält. Wir nehmen nun an,  $W_0 \neq W_1$ . Wir wissen bereits nach Satz 1.1, dass die Julia- und Fatoumenge invariant unter  $\alpha(z) = 1 - z$  und  $\beta(z) = \frac{1}{z}$  sind. Nach Definition ist  $\partial W_1 \subseteq \partial U_\infty$ , also

$$\partial(\beta(W_1)) \subseteq \beta(\partial W_1) \subseteq \beta(\partial U_\infty) = \partial U_0.$$

Wir wissen ferner, dass  $W_0$ ,  $W_1$  und alle Komplementärgebiete von  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}_0$  Jordangebiete sind (vergleiche [Why2], Seite 106-107). Dann muß aber entweder  $\beta(W_1) \subseteq W_0$  oder  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{W}_0 \subseteq \beta(W_1)$  gelten. Insbesondere wäre also im ersten Fall  $\beta(1) = 1 \in W_0$ , im Widerspruch zu unserer Annahme. Im zweiten Fall wäre  $\infty \in \beta(W_1)$ , also  $0 \in W_1$ , und wir erhalten auch hier einen Widerspruch.  $\square$

**Lemma 5.6** *Es sei  $c \in \Omega_n$  oder  $c \in \mathcal{H}_n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\partial U_\infty$  eine Jordankurve.*

**Beweis:** Es sei  $W_0$  die Komponente von  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}_\infty$ , die 0 enthält. Dann ist nach Lemma 5.5 auch  $1 \in W_0$ . Ist  $W$  eine beliebige Komponente von  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}_\infty$ , die weder 0 noch 1 enthält, so ist

$$\partial R_c(W) \subseteq R_c(\partial W) \subseteq R_c(\partial U_\infty) = \partial U_\infty \text{ und } W \cap U_\infty = \emptyset.$$

Also bildet  $R_c$  die Komponente  $W$  eigentlich auf eine Komponente  $W'$  von  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}_\infty$  ab. Wir nehmen nun an, die beiden dreifachen Nullstellen  $z_+$  und  $z_-$  liegen nicht in  $W_0$ . Entweder diese beiden liegen in derselben Komponente  $W_\pm$  von  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}_\infty$ , und es ist  $R_c : W_\pm \xrightarrow{6:1} W_0$  eine eigentliche Abbildung vom Grad 6, oder  $z_+$  und  $z_-$  liegen in zwei verschiedenen Komponenten  $W_+$  und  $W_-$ , und es ist  $R_c : W_+ \xrightarrow{3:1} W_0$  sowie  $R_c : W_- \xrightarrow{3:1} W_0$  jeweils eine eigentliche Abbildung vom Grad 3. Im ersten Fall hat jeder Punkt aus  $\partial W_0 = R_c(\partial W_\pm)$  6 verschiedene Urbilder in  $\partial W_\pm$ , da die Juliamenge keine kritischen Punkte enthält. Im zweiten Fall hat jeder Punkt aus  $\partial W_0 = R_c(\partial W_+) = R_c(\partial W_-)$  je drei verschiedene Urbilder in  $\partial W_+$  und in  $\partial W_-$ . Nach Lemma 5.4 sind diese 6 auch paarweise verschieden.

Andererseits ist aber  $\partial W_0 \subseteq \partial U_\infty = R_c(\partial U_0)$ , und somit hat jeder Punkt aus  $\partial W_0$  auch zwei Urbilder in  $\partial U_0$ . Dies sind aber „zu viele“ Urbilder, also ist im ersten Fall  $W_\pm \subseteq W_0$  und im zweiten Fall zumindest  $W_+ \subseteq W_0$  oder  $W_- \subseteq W_0$ . Da aber mit  $\alpha(z) = 1 - z$  gilt  $\alpha(U_\infty) = U_\infty$ , sind auch alle Komplementärgebiete von  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}_\infty$  invariant unter  $\alpha$  oder werden auf Komplementärgebiete von  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}_\infty$  abgebildet. Wegen  $\alpha(0) = 1 \in W_0$ , also  $\alpha(W_0) = W_0$ , ist mit  $z_+ \in W_0$  auch  $z_- = \alpha(z_+) \in W_0$  und umgekehrt. Wir haben also im ersten wie im zweiten Fall gezeigt:  $R_c^{-1}(W_0) \subseteq W_0$ . Das Lemma von Morosawa 5.3 liefert nun, dass  $\partial U_\infty$  eine Jordankurve ist.  $\square$

Nun erhalten wir leicht das folgende Resultat:

**Satz 5.7** *Es sei  $c \in \Omega_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\mathcal{J}_c$  eine Sierpińskikurve.*

**Beweis:** Nach Satz 3.7 bzw. Satz 3.8 ist  $\mathcal{J}_c$  zusammenhängend und lokal zusammenhängend,  $U_\infty$  einfach zusammenhängend und  $\partial U_\infty$  lokal zusammenhängend. Nach Lemma 5.6 ist  $\partial U_\infty$  eine Jordankurve und da  $\mathcal{J}_c$  keine kritischen Punkte enthält, sind auch alle Urbildgebiete von  $U_\infty$  Jordangebiete. Nach Lemma 5.4 folgt schließlich, dass alle Urbildgebiete von  $U_\infty$  disjunkten Abschluß haben. Damit ergibt sich die Behauptung.  $\square$

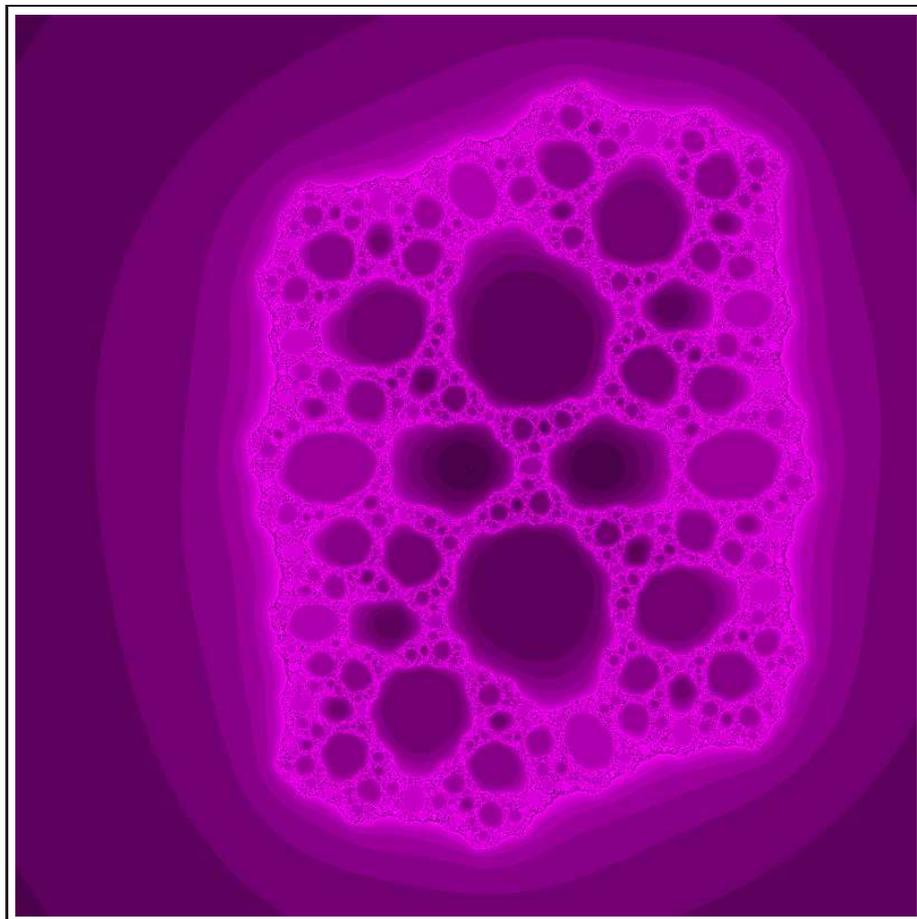


Abbildung 5.1: Juliamenge als Sierpińskikurve ( $c=2+1,6i$ )

**Bemerkung 5.8** Für  $c \in \mathcal{H}_n$ ,  $n \geq 1$ , folgt zumindest, dass  $\partial U_\infty(c)$  eine Jordankurve ist, die Juliamenge ist jedoch im Allgemeinen keine Sierpińskikurve.

## 5.2 Juliamengen und Quasikreise

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass für gewisse Parameter  $c$  die Abbildung  $R_c$  polynom-ähnlich ist. Daraus können wir dann unabhängig vom vorherigen Abschnitt schließen, dass ihre Juliamenge eine Sierpińskikurve ist. Wir betrachten die zu  $R_c$  konjugierte Abbildung

$$\tilde{R}_c : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

$$\tilde{R}_c(z) := \frac{1}{R_c(1/z)} = \frac{27}{4} \frac{1}{c} \frac{z^2(z-1)^2}{(z^2-z+1)^3}$$

Dann ist 0 ein superattraktiver Fixpunkt der konjugierten Funktion  $\tilde{R}_c$ . Es sei  $D_2 := \left\{ w : |w| < \frac{1}{4} \right\}$  und  $D_1$  die Komponente von  $\tilde{R}_c^{-1}(D_2)$ , die 0 enthält.

**Lemma 5.9** Für  $0 < |c| < \frac{10800}{29791} \approx 0,36$  ist  $\tilde{R}_c : D_1 \xrightarrow{2:1} D_2$  quasikonform konjugiert zu  $z^2$ .

**Beweis:** Als erstes zeigen wir, dass  $\overline{D_1} \subseteq D_2$ . Dazu sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = \frac{1}{5}$ . Dann gilt

$$|\tilde{R}_c(z)| = \frac{27}{4} \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \frac{|z|^2 |z-1|^2}{|z^2-z+1|^3} \geq \frac{4 \cdot 25 \cdot 27}{31^3} \cdot \frac{1}{|c|} > \frac{1}{4},$$

wobei wir in der letzten Ungleichung die Einschränkung für  $c$  ausnutzen. Also ist  $\left\{ z : |z| = \frac{1}{5} \right\} \cap D_1 = \emptyset$  und somit  $\overline{D_1} \subset D_2$ .

Als nächstes zeigen wir, dass  $D_1$  einfach zusammenhängend ist. Nehmen wir an,  $D_1$  wäre nicht einfach zusammenhängend. Dann gibt es eine beschränkte Komplementärkomponente  $C$  von  $D_1$ . Auf  $\partial C$  gilt  $|\tilde{R}_c(z)| = \frac{1}{4}$ . Da  $C \subseteq D_2$ , hat  $\tilde{R}_c$  keine Polstelle in  $C$ . Nach dem Maximumprinzip folgt nun, dass  $D_1$  einfach zusammenhängend ist.

Wir wissen, dass  $\tilde{R}_c : D_1 \rightarrow D_2$  eine eigentliche Abbildung ist und dass  $D_1$  genau einen kritischen Punkt von  $\tilde{R}_c$  enthält, nämlich den Nullpunkt. Die Riemann-Hurwitz-Formel liefert nun, dass der Abbildungsgrad  $k = 2$  ist. Dies liefert die Behauptung.  $\square$

**Definition 5.10** Eine Menge  $K \subseteq \mathbb{C}$  heißt *Quasikreis*, wenn es eine quasikonforme Abbildung  $h$  mit  $h(\partial\mathbb{D}) = K$  gibt.

**Folgerung 5.11** Für Parameter  $c \in \Omega_n$ ,  $n \geq 1$ , und  $c \in \mathcal{H}_n$ ,  $n \geq 1$ , mit  $0 < |c| < \frac{10800}{29791}$  ist  $\partial U_\infty(c)$  ein Quasikreis. Für  $c \in \Omega_n$  beweist dies erneut, dass die Juliamenge  $\mathcal{J}_c$  eine Sierpińskikurve ist.

**Folgerung 5.12** Die obigen Überlegungen zeigen für die Cantorkomponente  $\Omega_0$ , dass  $\Omega_0 \subseteq \left\{ c \in \mathbb{C}^* : |c| \geq \frac{10800}{29791} \right\}$ .

**Bemerkung 5.13** Wenn wir für  $c$  mit  $|c| < \frac{13500}{29791} = \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3}{31^3} \approx 0,45$  den äußeren Kreis  $D_2 := \left\{ w : |w| < \frac{1}{5 - \varepsilon} \right\}$  mit  $|c| < (5 - \varepsilon) \cdot \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2}{31^3}$  wählen und  $D_1$  entsprechend, so erhalten wir mit derselben Argumentation wie oben, dass  $\tilde{R}_c : D_1 \xrightarrow{2:1} D_2$  eine polynomähnliche Abbildung ist und somit auch hier  $\partial U_\infty(c)$  ein Quasikreis.

### 5.3 Dynamische Konjugation

Nach Whyburn (vergleiche [Why1]) sind je zwei Sierpińskikurven homeomorph. Dies heißt jedoch nicht, dass für zwei Parameter  $c$  und  $\lambda$ , für die die Juliamengen  $\mathcal{J}_c$  und  $\mathcal{J}_\lambda$  Sierpińskikurven sind, die Funktionen  $R_c$  und  $R_\lambda$  auf ihren Juliamengen topologisch konjugiert zueinander sind: Nach dem  $\lambda$ -Lemma von Mañé, Sad und Sullivan sind  $R_c$  und  $R_\lambda$  quasikonform konjugiert zueinander, wenn  $c$  und  $\lambda$  in derselben Flucht Komponente liegen. Andererseits sind  $R_c$  und  $R_\lambda$  sicher nicht topologisch konjugiert zueinander, wenn  $c$  und  $\lambda$  in Flucht Komponenten verschiedener Ordnung liegen. Es stellt sich hier die Frage, ob und wann zwei Funktionen  $R_c$  und  $R_\lambda$  bei denen  $c$  und  $\lambda$  in *verschiedenen* Flucht Komponenten *derselben* Ordnung liegen, topologisch konjugiert zueinander sind. Eine derartige Fragestellung wurde vermutlich erstmalig in der Arbeit [DevPil] von R. Devaney und K. Pilgrim für die symmetrische McMullen-Familie  $R_c(z) = z^n + \frac{c}{z^n}$  untersucht. Die dortigen Überlegungen werden hier auf die zu untersuchende Familie übertragen.

#### Lemma 5.14

- a) Die Abbildung  $R_c$  ist in  $\widehat{\mathbb{C}}$  nicht konjugiert zu  $R_\lambda$  durch eine Möbiustransformation  $h$ , falls  $\lambda \neq c$ .
- b) Es ist  $R_c$  konjugiert zu  $R_{\bar{c}}$  via  $z \mapsto \bar{z}$ .

**Beweis:** Es sei  $h$  eine Möbiustransformation mit  $R_c = h \circ R_\lambda \circ h^{-1}$  in  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Dann ist  $h(\infty) = \infty$  und  $h(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$ , also  $h(z) = z$  oder  $h(z) = 1 - z$ . Im zweiten Fall folgt für  $z \in \mathbb{C}$  die Identität  $cR(z) = 1 - \lambda R(1 - z) = 1 - \lambda R(z)$ , also  $(c + \lambda)R(z) = 1$ . Dies liefert einen Widerspruch.

Aussage b) folgt unmittelbar aus  $R_c(z) = \overline{R_{\bar{c}}(\bar{z})}$ .  $\square$

#### Satz 5.15

Es seien  $c, \lambda \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ .  $R_c$  ist genau dann topologisch konjugiert zu  $R_\lambda$  auf der Juliamenge, wenn  $c$  und  $\lambda$  in derselben Flucht Komponente  $\Omega$  liegen oder wenn  $c \in \Omega$  und  $\lambda \in \{\mu : \bar{\mu} \in \Omega\}$  mit einer Flucht Komponente  $\Omega$  und der „spiegelbildlichen“ Flucht Komponente  $\{\mu : \bar{\mu} \in \Omega\}$ .

**Beweis:** Ist  $\Omega$  eine Flucht Komponente und  $c \in \Omega$ , so ist  $R_c$  quasikonform konjugiert zum Zentrum  $c_0$  von  $\Omega$  (vergleiche Satz 3.19). Wir können also im Folgenden ohne Einschränkung annehmen, dass  $c$  und  $\lambda$  Zentren von Flucht Komponenten sind. Insbesondere sind  $R_c$  und  $R_\lambda$  dann kritisch endlich, das heißt, der Vorwärtsorbit  $O^+(\mathcal{C})$  der kritischen Punkte ist endlich.

Nun sei  $h : \mathcal{J}_c \rightarrow \mathcal{J}_\lambda$  ein Homeomorphismus mit  $R_c = h^{-1} \circ R_\lambda \circ h$ . Es ist dann  $h(\partial U_\infty(c)) = h(R_c(\partial U_\infty(c))) = R_\lambda(h(\partial U_\infty(c)))$ , also insbesondere  $h(\partial U_\infty(c)) = \partial U_\infty(\lambda)$ . Wir können jetzt davon sprechen, dass  $h$  orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend auf  $\partial U_\infty(c)$  ist. Sei zunächst  $h$  orientierungserhaltend. Da  $\partial U_\infty(c)$  und  $\partial U_\infty(\lambda)$  Jordankurven sind, lassen sich die normierten Böttcherfunktionen  $\tilde{\varphi}_c := \frac{4}{27}c\varphi_c$  bzw.  $\tilde{\varphi}_\lambda := \frac{4}{27}\lambda\varphi_\lambda$  nach dem Satz von Osgood-Carathéodory (vergleiche Satz 16.3a in [Hen], Seite 345ff) zu einer stetigen Abbildung von  $\overline{U_\infty(c)}$  bzw.  $\overline{U_\infty(\lambda)}$  fortsetzen. Wir können also die Funktion  $H : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D}$ ,  $H(z) := \tilde{\varphi}_\lambda \circ h \circ \tilde{\varphi}_c^{-1}$  definieren. Dann ist  $H(z^2) = (H(z))^2$ , also  $H(z) = z$  für  $z \in \partial\mathbb{D}$ .  $H$  läßt sich also trivialerweise nach  $\mathbb{D}$  fortsetzen. Durch diese Fortsetzung erhalten wir eine konforme Abbildung  $h : U_\infty(c) \rightarrow U_\infty(\lambda)$  mit  $R_c = h^{-1} \circ R_\lambda \circ h$ . Konkret ist  $h = \tilde{\varphi}_\lambda^{-1} \circ \tilde{\varphi}_c$  für  $z \in U_\infty(c)$ .

Da  $c$  und  $\lambda$  Zentren von Flucht Komponenten derselben Ordnung  $n \in \mathbb{N}$  sind, ist  $R_c^n(c) = R_\lambda^n(\lambda) = \infty$  und die beiden Abbildungen  $R_c$  und  $R_\lambda$  sind kritisch endlich. Dies erlaubt es uns, die konforme Abbildung  $h$  durch Pull-Back (vergleiche Seite 21) zu einer konformen Abbildung in  $\widehat{\mathbb{C}}$  fortzusetzen. Dann ist aber  $h$  eine Möbiustransformation und Lemma 5.14 a) liefert  $h(z) = z$ .

Ist der Homeomorphismus  $h$  orientierungsumkehrend auf  $\partial U_\infty(c)$ , so ist nach Lemma 5.14 b) die Abbildung  $R_{\bar{c}}$  konjugiert zu  $R_\lambda$  vermöge eines orientierungserhaltenden Homeomorphismus. Dies liefert die Behauptung.  $\square$

# Literaturverzeichnis

- [Ahl] L. V. Ahlfors, *Complex analysis*, 2nd edition, McGraw Hill Book Company, New York 1966
- [Bea] A. F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Springer, New York 1991
- [Bus] N. Busse, *Dynamische Eigenschaften rekursiv definierter Polynomfolgen*, Dissertation, Dortmund 1994
- [CarGam] L. Carleson, Theodore W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer, New York 1993
- [Cha] K. Chandrasekhran, *Elliptic Functions*, Springer, Berlin 1985
- [Dev1] R. Devaney, *Structure of the McMullen domain in the parameter planes for rational maps*, Fundam. Math. 185, N, 2005
- [Dev2] R. Devaney, *A myriad of Sierpiński curve Julia sets*, in: Difference Equations, Special Functions and Orthogonal Polynomials, World Scientific, Seite 131-148, 2007
- [DevPil] R. Devaney, Kevin Pilgrim, *Dynamic Classification of Escape Time Sierpinski Curve Julia Sets*, Preprint 2008, erscheint in Fundamenta Mathematicae
- [DouHub] A. Douady, J. H. Hubbard, *On the dynamics of polynomial-like mappings*, Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série, tome 18, n<sup>o</sup> 2, Seite 287-343, 1985
- [Dou] A. Douady, *Polynomial-like holomorphic mappings*, Oberwolfach Book of abstracts, 1985
- [FJT] N. Fagella, X. Jarque, J. Taixés, *Connectivity of Julia sets of transcendental meromorphic maps*, Preprint 2006, erscheint in Proc. London Math. Soc.

- [Gam] T. W. Gamelin, *Complex Analysis*, Springer, New York 2001
- [Gey1] L. Geyer, *Quasikonforme Deformation in der Iterationstheorie*, Diplomarbeit, TU Berlin 1994
- [Gey2] L. Geyer, *Linearization of analytic maps at irrationally indifferent fixed points*, Dissertation, TU Berlin 1999
- [Hen] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis, Vol. III*, John Wiley and Sons, New York 1986
- [LehVir] O. Lehto, K. I. Virtanen, *Quasiconformal mappings*, Springer, Berlin 1965
- [LeiYon] T. Lei, Y. Yongcheng, *Local connectivity of the Julia set of geometrically finite rational maps*, Science in China A 39, Seite 39-47, 1996
- [LeiMil] T. Lei, J. Milnor, Anhang zu: John Milnor, *Geometry and dynamics of quadratic rational maps*, Experiment. Math., Volume 2, Issue 1, Seite 37-83, 1993
- [Mat] C. Mattler, *Juliamengen und lokaler Zusammenhang*, Dissertation, Universität Dortmund 1996
- [MSS] R. Mañé, P. Sad, D. Sullivan, *On the dynamics of rational maps*, Annales scientifiques de l'É.N.S. 16, Seite 193-217, 1983
- [McM1] C. T. McMullen, *Complex Dynamics and Renormalization*, Princeton University Press, Princeton 1994
- [McM2] C. T. McMullen, *The Mandelbrot set is universal*, in: *The Mandelbrot set, Theme and Variations*, Tan Lei (editor), Cambridge University Press, Cambridge 2000
- [Mil] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, Vieweg Verlag, Braunschweig/ Wiesbaden 1999
- [Mor] S. Morosawa, *Julia Sets of Subhyperbolic Rational Functions*, Complex Variables, Vol.41, Seite 151-162, 2000
- [MNTU] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, T. Ueda, *Holomorphic Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge 2000

- [Roe] P. Roesch, *On capture zones for the family  $f_\lambda(z) = z^2 + \frac{\lambda}{z^2}$* , in: *Dynamics on the Riemann sphere*, A Bodil Branner Festschrift, Poul G. Hjorth, Carsten Lunde Petersen (Hrsg.), Zürich 2006
- [Sch] B. Schoeneberg, *Elliptic Modular Functions*, Springer, Berlin 1974
- [Shi] M. Shishikura, *On the quasiconformal surgery of rational functions*, Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série, tome 20 n<sup>o</sup> 1, Seite 1-29, 1987
- [St1] N. Steinmetz, *Rational Iteration*, de Gruyter, Berlin- New York 1993
- [St2] N. Steinmetz, *The formula of Riemann-Hurwitz and Iteration of Rational Functions*, Complex Variables 22, Seite 203-206, 1993
- [St3] N. Steinmetz, *Komplexe Dynamische Systeme*, Skript, Dortmund 2005
- [St4] N. Steinmetz, *Quasikonforme Abbildungen mit Anwendungen in der komplexen Dynamik*, Skript, Dortmund 2006
- [St5] N. Steinmetz, *On the Dynamics of the McMullen Family  $R(z) = z^m + \frac{\lambda}{z^d}$* , Conformal Geometry and Dynamics, Volume 10, Seite 159-183, 2006
- [St6] N. Steinmetz, *Sierpiński Curve Julia Sets of Rational Maps*, Computational Methods and Function Theory, Volume 6, N<sup>o</sup> 2, Seite 317-327, 2006
- [St7] N. Steinmetz, *Sierpiński and non-Sierpiński Curve Julia Sets in Families of Rational Maps*, Journal London Math. Soc. 78, Seite 290-304, 2008
- [Why1] G.T. Whyburn, *Topological characterization of the Sierpiński curve*, Fundam. Math. 45, Seite 320-324, 1958
- [Why2] G.T. Whyburn, *Analytic Topology*, in AMS Colloquium Publications, Vol. XXIII, Rhode Island, 1942, Auflage 1963, 2. Druck 1967