Zerlegbarkeitseigenschaften von Verteilungen auf lokalkompakten Gruppen

DISSERTATION
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Technischen Universität Dortmund

Dem Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Dortmund
vorgelegt von

Dipl.-Math. Katrin Kosfeld

September 2009

Betreuer: Prof. Dr. Wilfried Hazod

Eingereicht im September 2009

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Dezember 2009

Prüfungskommission:

Vorsitzender: Prof. Dr. H. M. Möller
Erster Gutachter: Prof. Dr. W. Hazod
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. M. Voit
Weiterer Prüfer: Prof. Dr. N. Steinmetz
Wiss. Mitarbeiter: Dr. T. Camps

Für die Anregung zu dieser Arbeit sowie die intensive und engagierte wissenschaftliche Betreuung danke ich Herrn Prof. Dr. W. Hazod sehr herzlich. Die zahlreichen Diskussionen mit ihm waren äußerst wertvoll und haben mich immer auf dem richtigen Weg gehalten.

Für die Durchsicht der Arbeit und ihre Mitwirkung bei der Bekämpfung des Fehlerteufels bedanke ich mich bei Dr. Sonja Menges und Prof. Dr. Peter Kern.

Meiner Familie danke ich für die unermüdliche Unterstützung, besonders in der „heißen Schlussphase“. Rückblickend haben vielleicht auch die gelegentlichen Rückfragen nach dem Stand der Dinge, die ich damals gar nicht so gerne hören wollte, mir manchmal bei der Überwindung des „inneren Schweinehundes“ geholfen. Mein Lebenspartner Henryk Zähle hat die anstrengende Zeit nicht nur mit Geduld und Verständnis durchgestanden, sondern mich auch immer wieder aufgerichtet, wenn es mal notwendig war - auch dafür ein liebes Dankeschön!

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der Wahrscheinlichkeitstheorie interessiert man sich besonders für Grenzwertsätze, deren Grenzverteilungen sich in gewisse Kategorien einordnen lassen. Im $\mathbb{R}^d$ betrachtet man dabei zum Beispiel die möglichen Limiten von zeilenweise aus infinitesimalen Dreieckssystemen gebildeten Summen, die unendlich-teilbaren Verteilungen. Besteht das Dreieckssystem aus normierten, unabhängigen Zufallsvariablen, dann erhält man selbstzerlegbare Verteilungen. Im identisch verteilten Fall spricht man dann von stabilen Verteilungen. Betrachtet man die Konvergenz solcher normierten Summen entlang von speziellen Teilfolgen, so spricht man von Semi-Selbstzerlegbarkeit bzw. Semi-Stabilität. Wichtige Resultate zu diesen Konzepten auf dem Vektorraum liefert beispielsweise die Arbeit von M. Maejima und Y. Naito (s.[19]). R. Shah hat für den Fall homogener Gruppen bereits wichtige Resultate für selbstzerlegbare Verteilungen erzielt, s. [31].

Eine Verallgemeinerung dieser Konzepte liefert eine Normierung durch affine Transformationen an Stelle der Normierung durch eine Folge reeller Zahlen. Man spricht dann von Operator-(Semi-)Stabilität bzw. Operator-(Semi-)Selbstzerlegbarkeit. Dabei bildet die Arbeit von M. Maejima, K. Sato und T. Watanabe, die diese Zerlegbarkeit auf $\mathbb{R}^d$ untersucht (s. auch [20]), eine wichtige Grundlage dieser Arbeit. Darüber hinaus ist die Arbeit von M. Maejima und R. Shah zu erwähnen, s. auch [21], die sich mit Operator-Semi-Selbstzerlegbarkeit auf p-adischen Vektorräumen befasst. C.R.E. Raja hat Operator-Semi-Selbstzerlegbarkeit auf allgemeinen Vektorräumen untersucht, s. auch [27].

Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit ist es, Eigenschaften Operator-(semi-)selbstzerlegbarer Verteilungen auf lokalkompakte Gruppen zu übertragen. Dazu wird der Begriff der τ-Zerlegbarkeit für einen Automorphismus τ auf einer lokalkompakten Gruppe $\mathbb{G}$ benötigt. Stark τ-zerlegbare Verteilungen auf einfach zusammenhängenden nilpotenten Lie-Gruppen wurden von W. Hazod und H.-P. Scheffler bereits 1999 in [11] untersucht. Dies ist ebenfalls eine wichtige Grundlage für diese Arbeit, in der es gelingt, Resultate (vergleiche unter anderem Proposition 3.4 in [11]) vom Fall homogener Gruppen auf den Fall kontrahierbarer, lokalkompakter Gruppen zu verallgemeinern und auf mehrfachzerlegbare Verteilungen zu übertragen.

Im Hinblick auf das Ziel, den angesprochenen Fragestellungen im Kontext von lokalkompakten Gruppen nachzugehen, ist der Inhalt dieser Arbeit wie folgt gegliedert: Kapitel 1 dient der Einführung in die Theorie der lokalkompakten Gruppen, Lie-Gruppen, Lie-Algebren und Hypergruppen. Es werden Definitionen, Zusammenhänge und Resultate bereitgestellt, die in der vorliegenden Arbeit Anwendung finden. Ein Abschnitt widmet sich dabei den Homomorphismen auf Gruppen, ein anderer insbesondere den Gruppen- und Automorphismennormen. Darüber hinaus wird ein kurzer Überblick über unendlich-teilbare Maße, Faltungshalbgruppen und Einbettbarkeit gegeben.

Auch das zweite Kapitel dient der Vorbereitung. Hier wird zunächst ein Überblick über bisherige Arbeiten zu Semi-Selbstzerlegbarkeit und Operator-Semi-Selbstzerlegbarkeit auf $\mathbb{R}^d$ gegeben. Diese Begriffe sind Verallgemeinerungen des klassischen Selbstzerlegbarkeitsbegriffs. Dabei wird vor allem die Arbeit von Maejima und Naito, [19], vorgestellt. Im Anschluss werden Resultate von Maejima, Sato und Watanabe, [20], behandelt. Diese Arbeiten stellen nochmals eine Erweiterung der beiden Verallgemeinerungen von Bunge, siehe auch [4], und Loève, siehe auch [18], dar. Ein interessantes Resultat ist dabei das Theorem 2.4.16. Dieses beschreibt den Zusammenhang zwischen m-facher Zerlegbarkeit und der Existenz logarithmischer Momente.

Dieses Ergebnis lässt sich unter gewissen Zusatzvoraussetzungen auf den Gruppenfall übertragen und liefert in Kapitel 3 die Hauptresultate dieser Arbeit. Wenn Zufallsvariablen eine Rolle spielen, setzen wir dort teilweise voraus, dass die Gruppe das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Im ersten Abschnitt wird dann zunächst wie bereits erwähnt der Begriff der τ-Zerlegbarkeit (und der Semi-τ-Zerlegbarkeit) für einen Automorphismus τ auf einer lokalkompakten Gruppe $\mathbb{G}$ eingeführt. Da wir im Allgemeinen nicht die Kommutativität der Faltung voraussetzen, müssen wir in diesem Kapitel insbesondere auf die Reihenfolge der Faltungsfaktoren Rücksicht nehmen. Dies erfordert also andere Methoden als bei der Untersuchung Operator-selbstzerlegbarer Verteilungen im Vektorraum.

Darüber hinaus benötigen wir im späteren Verlauf dieses Kapitels zum einen die Existenz einer subadditiven Norm auf $\mathbb{G}$. Zum anderen soll zu jeder Kontraktion $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ eine Automorphismennorm $\|.\|$ existieren, so dass bereits $\|\tau\| < 1$. Dieser Fragestellung widmet sich Abschnitt 3.3. Dabei wird die Existenz solcher Gruppen- und Automorphismennormen einerseits für homogene und andererseits für total unzusammenhängende Gruppen nachgewiesen. Den allgemeinen Fall einer kontrahierbaren, lokalkompakten Gruppe kann man auf diese beiden Fälle zurückführen. Im Abschnitt 3.4 widmen wir uns der Äquivalenz gewisser Konvergenzarten von Produkten unabhängiger Zufallsvariabler $X_1, \ldots, X_n$ auf einer lokalkompakten Gruppe $\mathbb{G}$. Anders als im Vektorraum, in dem man für die zugehörigen Partialsummen S_n die Äquivalenz stochastischer Konvergenz, fast sicherer Konvergenz und Konvergenz in Verteilung zur Verfügung hat, gilt dies im allgemeinen Fall einer lokalkompakten, kontrahierbaren Gruppe für das Produkt $\prod_{i=1}^n X_i$ nicht. Für den Fall einer aperiodischen, lokalkompakten Gruppe existiert jedoch eine solche Äquivalenz, worauf im weiteren Verlauf von Abschnitt 3.4 näher eingegangen wird. Stellt man stärkere Voraussetzungen an die Gruppe, erhält man auch für nicht aperiodische Gruppen eine Äquivalenz, dies wird in Satz 3.4.6 gezeigt. Nach diesen Vorbereitungen können wir dann einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz gewisser Faltungsprodukte und der Existenz logarithmischer Momente herstellen, der, wie bereits erwähnt, für den Vektorraumfall bekannt ist, s. Theorem 2.4.16. Unter anderem erreichen wir an dieser Stelle die Verbesserung der Resultate von W. Hazod und H.-P. Scheffler in [11]. Dort wurde nur der Fall homogener Gruppen und $n = 0$ behandelt. Wir erhalten hier zum einen eine Übertragung auf mehrfache Zerlegbarkeit, zum anderen aber für den Fall $n = 0$ auch die Verallgemeinerung von homogenen Gruppen zu kontrahierbaren, lokalkompakten Gruppen.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Selbstzerlegbarkeit von Verteilungen, die stetig einbettbar sind in eine Hemigruppe $(\nu(s,t))_{0 \le s \le t \le 1}$. Betrachten wir den Fall, dass die Faltung kommutativ ist, erhalten wir Einbettbarkeit in eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \ge 0}$. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels soll die Zerlegbarkeit in Termen der Erzeugenden Funktionale beschrieben werden. Dazu wird im Abschnitt 4.2 zunächst die Lévy-Khinchin-Darstellung von unendlich-teilbaren Verteilungen beschrieben und anschließend eine kurze Einführung in die Theorie der Erzeugenden Funktionale auf Vektorräumen gegeben. Im Abschnitt 4.3 werden Erzeugende Funktionale auf einfach zusammenhängenden nilpotenten Lie-Gruppen eingeführt. Dabei wird die sogenannte Übersetzungs-Methode vorgestellt, die eine Eins-zu-Eins-Beziehung zwischen Erzeugenden Funktionalen auf einer Lie-Gruppe $\mathbb{G}$ und auf der zugehörigen Lie-Algebra $\mathbb{V}$ beschreibt. Dies ermöglicht die einfachere Untersuchung Erzeugender Funktionale auf einer nilpotenten Lie-Gruppe. Ähnlich kann man auch den Zusammenhang zwischen kontrahierbaren, total unzusammenhängenden Gruppen und p-adischen Gruppen untersuchen, dies wird im Abschnitt 4.4 beschrieben. Im Abschnitt 4.5 untersuchen wir dann Erzeugende Funktionale τ-zerlegbarer Verteilungen. Dabei betrachten wir insbesondere den Zusammenhang zwischen der n-fachen τ-Zerlegbarkeit einer Faltungshalbgruppe und der n-fachen τ-Zerlegbarkeit des zugehörigen Erzeugenden Funktionals.

Nach der Übertragung einiger Resultate auf lokalkompakte Gruppen stellt sich die Frage, welche Ergebnisse auch auf Hypergruppen richtig bleiben. Das letzte Kapitel 5 widmet sich dieser Fragestellung und gibt einen kurzen Ausblick, welche Resultate sich auf spezielle Hypergruppen übertragen lassen. Dabei schränken wir uns auf die von M. Rösler und M. Voit untersuchten Klassen von Hypergruppen ein (vergleiche [28] und [39]). In den Arbeiten von Rösler und Voit wurde Π_d, der Kegel positiv semidefiniter Operatoren auf $\mathbb{K}^d$, behandelt, dabei ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Zusammen mit einer Faltungsstruktur $*$ hat die Hypergruppe $(\Pi_d, *)$ viele Eigenschaften eines Vektorraums, die für die Übertragung der Resultate aus Kapitel 3 und 4 hilfreich sind.

Kapitel 1

Einführung

In diesem einführenden Kapitel werden wichtige Notationen, Definitionen und Grundlagen zusammengestellt, die in dieser Arbeit Anwendung finden.

1.1 Grundlagen über lokalkompakte Gruppen

Wenn nicht anders erwähnt, bezeichnet $\mathbb{G}$ eine lokalkompakte Gruppe. Wenn wir im Folgenden mit abstrakten Gruppen operieren, schreiben wir die Gruppenoperation als Multiplikation. Nur in Fällen, in denen die Gruppenoperation offensichtlich eine Addition ist (z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^d$), schreiben wir auch eine Addition. Das Symbol e wird im Falle einer multiplikativen Gruppe immer das neutrale Element bezeichnen.

Definition 1.1.1. *Seien I eine endliche Indexmenge und $\{G_i\}_{i\in I}$ eine nichtleere Familie von Gruppen. Sei weiterhin $\bigotimes_{i\in I} G_i$ das kartesische Produkt der Mengen G_i. Für $(x_i)_{i\in I}$ und $(y_i)_{i\in I}$ in $\bigotimes_{i\in I} G_i$ definiere $(x_i)_{i\in I}(y_i)_{i\in I}:=(x_iy_i)_{i\in I}$ in $\bigotimes_{i\in I} G_i$. Dies ist das direkte Produkt der Gruppen G_i. Die einzelnen Gruppen heißen Faktoren. Das neutrale Element in $\bigotimes_{i\in I} G_i$ ist $(e_i)_{i\in I}$, wobei e_i das neutrale Element in G_i bezeichnet.*

Für weitere Details über direkte Produkte von Gruppen sei der Leser auf [13], Kapitel 1, Abschnitt 2 verwiesen.

Definition 1.1.2. *Ein topologischer Raum X heißt*

(a) kompakt, wenn für jede Überdeckung von X durch offene Mengen eine endliche Überdeckung existiert,

(b) *lokalkompakt, wenn jeder Punkt in X eine Umgebung U besitzt, so dass die Hülle $\overline{U}$ kompakt ist.*

Definition 1.1.3. *Sei X ein topologischer Raum.*

(a) *X heißt zusammenhängend, falls X nicht die disjunkte Vereinigung zweier nicht-leerer Mengen ist, die beide offen und abgeschlossen sind.*

(b) *Eine zusammenhängende Teilmenge von X heißt Komponente, falls sie in keiner weiteren zusammenhängenden Teilmenge enthalten ist.*

(c) *X heißt total unzusammenhängend, falls alle Komponenten Punkte sind.*

Diese Definitionen und Eigenschaften von kompakten bzw. zusammenhängenden Räumen sind in [13], Kapitel 1, Abschnitt 3 zu finden. Im Folgenden wird der Begriff einer topologischen Gruppe eingeführt, siehe dazu auch [13], Kapitel 1, Definition 4.1.

Definition 1.1.4. *Sei $\mathbb{G}$ eine Gruppe und gleichzeitig ein topologischer Raum. Es gelte:*

(i) *Die Abbildung $(x, y) \mapsto xy$ von $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ nach $\mathbb{G}$ ist stetig.*

(ii) *Die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ von $\mathbb{G}$ nach $\mathbb{G}$ ist stetig.*

Dann heißt $\mathbb{G}$ topologische Gruppe.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir ausschließlich topologische Gruppen betrachten.

1.2 Homomorphismen

In diesem Abschnitt werden kurz verschiedene Arten von Abbildungen definiert. Für weitere Informationen sei der Leser z. B. auf [7] verwiesen.

Definition 1.2.1. *Eine Abbildung $\tau : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ heißt Homomorphismus zwischen den Gruppen $(\mathbb{G}, \circ, e_{\mathbb{G}})$ und $(\mathbb{H}, \star, e_{\mathbb{H}})$, wenn für alle $x, y \in \mathbb{G}$ gilt*

$$f(x \circ y) = f(x) \star f(y).$$

Bemerkung 1.2.2. Man bezeichnet eine solche Abbildung auch als strukturerhaltend. Aus der Definition folgt sofort, dass $f(e_{\mathbb{G}}) = e_{\mathbb{H}}$ und $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$. $\diamondsuit$

Wir werden uns in dieser Arbeit mit verschiedenen Arten von Homomorphismen beschäftigen, diese werden im Folgenden eingeführt.

Definition 1.2.3. *Ein Homomorphismus $\tau : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ heißt*

(a) Isomorphismus, falls τ bijektiv ist. Dann ist auch τ^{-1} ein Homomorphismus. Wir schreiben $\mathrm{Iso}(\mathbb{G}, \mathbb{H})$ *für die Menge aller Isomorphismen von $\mathbb{G}$ nach $\mathbb{H}$.*

(b) Endomorphismus, falls $\mathbb{G} = \mathbb{H}$. D. h. τ bildet $\mathbb{G}$ in sich selbst ab. Wir schreiben $\mathrm{End}(\mathbb{G})$ *für die Menge aller Endomorphismen auf $\mathbb{G}$.*

(c) Automorphismus, falls τ Isomorphismus und Endomorphismus ist. Wir schreiben $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ *für die Menge aller Automorphismen auf $\mathbb{G}$.*

Bemerkung 1.2.4. Wir wollen noch einige Anmerkungen zur Notation im weiteren Verlauf dieser Arbeit machen.

(a) Mit $\mathrm{End}^+(\mathbb{V})$ bezeichnen wir die Menge der nichtnegativ definiten symmetrischen Operatoren auf einem Vektorraum $\mathbb{V}$.

(b) Im Fall topologischer Gruppen wird stets vorausgesetzt, dass Endomorphismen, Automorphismen, usw. stetig sind. Daher bezeichnen wir im Folgenden mit $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ die Menge der stetigen Automorphismen auf einer lokalkompakten Gruppe $\mathbb{G}$. $\diamondsuit$

Man sagt, ein Automorphismus τ auf $\mathbb{G}$ ist *kontrahierend*, falls für alle $x \in \mathbb{G}$ $\tau^k(x) \to e$ für $k \to \infty$.

Definition 1.2.5. *Eine lokalkompakte Gruppe $\mathbb{G}$ heißt kontrahierbar, falls auf $\mathbb{G}$ ein kontrahierender Automorphismus τ existiert.*

1.3 Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Definition 1.3.1. *Eine (reelle) Lie-Gruppe $(\mathbb{G}, M)$ der Dimension $d \geq 1$ ist eine Gruppe zusammen mit einer (reellen) analytischen Mannigfaltigkeit M, so dass die Abbildung $(x, y) \to xy^{-1}$ von (der Produkt-Mannigfaltigkeit) $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ nach $\mathbb{G}$ analytisch ist.*

Es werden nun unter anderem einige wichtige Definitionen und Resultate zu Lie-Gruppen bereitgestellt, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit benötigt werden. Dabei sei auch auf [36], Kapitel III, verwiesen, wir übernehmen hier die folgenden Notationen. M bezeichne eine analytische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{F}$ die Menge der lokalen Funktionen auf der Gruppe $\mathbb{G}$ (vergleiche Kapitel I, Abschnitt 2 in [36]). Für $p \in M$ bezeichne $\mathcal{F}_p$ die Menge der lokalen Funktionen $f \in \mathcal{F}$, für die $p \in \mathrm{Def}(f)$.

Definition 1.3.2. *Sei $p \in M$. Eine Abbildung $X : \mathcal{F} \to \mathbb{K}$ heißt Tangentenvektor an M in p, wenn gilt:*

(i) Sind $g, f \in \mathcal{F}_p$, $\mathrm{Def}(f) \subset \mathrm{Def}(g)$ und ist $g|_{\mathrm{Def}(f)} = f$, dann gilt $X(f) = X(g)$.

(ii) Ist $\alpha \in \mathbb{K}$ und sind $g, f \in \mathcal{F}_p$, so ist $X(\alpha f + g) = \alpha X(f) + X(g)$.

(iii) Sind $g, f \in \mathcal{F}_p$, so ist $X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g)$.

Der Punkt p heißt Fußpunkt von X. Man nennt den $\mathbb{K}$-Vektorraum (siehe [36], Kapitel III, Abschnitt 1.1)

$$M_p := \{X : X \text{ Tangentenvektor an } M \text{ in } p\}$$

den Tangentialraum an M in p.

Man bezeichnet den Tangentialraum an eine Gruppe $\mathbb{G}$ in deren neutralem Element e mit $\mathring{\mathbb{G}}$. Die Elemente von $\mathring{\mathbb{G}}$ nennt man *Differentialelemente* der Gruppe $\mathbb{G}$. Wir werden später verwenden, dass der Tangentialraum an eine Lie-Gruppe $\mathbb{G}$ eine Lie-Algebra ist. Darüber hinaus werden wir uns mit dem Zusammenhang zwischen den Elementen der Lie-Gruppe und der Lie-Algebra beschäftigen.

Definition 1.3.3. *Sei $\mathbb{K}$ ein kommutativer Körper. Eine Lie-Algebra über $\mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum A zusammen mit einer Abbildung $[\cdot,\cdot] : A \times A \to A$, die folgende Eigenschaften besitzt:*

(i) $[\cdot,\cdot]$ ist bilinear,

(ii) für alle $x \in A$ ist $[x, x] = 0$,

(iii) für alle $x, y, z \in A$ gilt die Jacobi-Identität, d.h. es ist

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0.$$

Die Abbildung $[\cdot,\cdot]$ *heißt der Kommutator in* A.

Definition 1.3.4. *Seien* $\mathbb{G}$ *eine Lie-Gruppe und* $k : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ *die Abbildung, die durch* $k(x,y) := xyx^{-1}y^{-1}$ *definiert wird. Dann schreiben wir den Term 2-ter Ordnung der Taylorentwicklung von* k *in* (e,e) *als* $[x,y]$ *und bezeichnen die Abbildung* $[\ ,\ ] : \mathring{\mathbb{G}} \times \mathring{\mathbb{G}} \to \mathring{\mathbb{G}}$ *mit* $(x,y) \to [x,y]$ *als den Kommutator der Lie-Gruppe* $\mathbb{G}$.

Bemerkung 1.3.5. Wir können also die zu einer Lie-Gruppe gehörige Lie-Algebra beschreiben und auf dieser Automorphismen untersuchen.

(a) Ist $\mathbb{G}$ eine Lie-Gruppe, dann ist der Vektorraum $\mathring{\mathbb{G}}$ zusammen mit dem Kommutator $[x,y]$ eine Lie-Algebra über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Man sagt, $\mathring{\mathbb{G}}$ ist die zu $\mathbb{G}$ gehörige Lie-Algebra oder die Lie-Algebra von $\mathbb{G}$. Für weitere Details sei der Leser auf [36], Kapitel III, Abschnitt 3.1 verwiesen.

(b) Zu einer Lie-Algebra $(\mathbb{V},[\cdot,\cdot])$ bezeichne nun $\mathrm{Aut}(\mathbb{V})$ die Gruppe der Lie-Algebra-Automorphismen, d. h. alle $\tau \in \mathrm{GL}(\mathbb{V})$, für die gilt $\tau([x,y]) = [\tau(x),\tau(y)]$ für alle $x,y \in \mathbb{V}$. $\diamondsuit$

Wir nennen eine Lie-Gruppe $\mathbb{G}$ mit Lie-Algebra $\mathbb{H}$ *exponentiell*, falls die Exponential-Abbildung ein $\mathcal{C}^\infty$-Isomorphismus ist. Es sei angemerkt, dass in der Literatur eine exponentielle Lie-Gruppe nicht immer auf die gleiche Weise definiert wird. Beispielsweise wird eine Lie-Gruppe auch exponentiell genannt, wenn die Exponentialabbildung von der Lie-Algebra auf die Lie-Gruppe bijektiv (siehe [5], Abschnitt 1), ein Homeomorphismus (siehe [24], Definition 1), ein Diffeomorphismus (siehe [17], Kapitel 7, Abschnitt 3.1) oder surjektiv ist (siehe [6], Definition 0.1).

Definition 1.3.6. *Sei* $\mathbb{G}$ *eine exponentielle Lie-Gruppe mit Lie-Algebra* $\mathbb{V}$ *und sei* $\log := \ln := \exp^{-1}$ *(definiert auf* $\mathrm{im}(\exp) \subset \mathbb{G}$*). Für* $a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ *definiert man* $a^\circ : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ *durch*

$$a^\circ(x) = \log(a(\exp(x))), \ \textit{für } x \in \mathbb{V}.$$

Das nachfolgende Theorem beschreibt den Zusammenhang zwischen Automorphismen auf der Lie-Gruppe $\mathbb{G}$ und auf der zugehörigen Lie-Algebra $\mathbb{V}$, für den Beweis siehe [15], Abschnitt XII, Theorem 2.1.

Theorem 1.3.7. *Sei $\mathbb{G}$ eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathbb{V}$, dann wird durch $a \mapsto a^\circ$ ein Isomorphismus von $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ nach $\mathrm{Aut}(\mathbb{V})$ definiert. Insbesondere ist $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ isomorph zu $\mathrm{Aut}(\mathbb{V})$, einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathrm{GL}(\mathbb{V})$, und somit eine Lie-Gruppe.*

Für die folgenden Aussagen über kontrahierende Ein-Parameter-Gruppen sei auf [12], Kapitel I, Abschnitt III verwiesen.

Definition und Proposition 1.3.8. *Sei $E \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$. Für $t \in \mathbb{R}_+^\times$ definiert man $t^E := \exp(\ln(t)E)$. Dann ist $T^E := (t^E)_{t>0}$ eine stetige Ein-Parameter-Untergruppe von $\mathrm{GL}(\mathbb{V})$ mit multiplikativer Parametrisierung $t^E s^E = (ts)^E$ für $t, s > 0$ und*

$$E = \lim_{t \to 1} \frac{1}{t-1}(t^E - I) = \frac{d}{dt} t^E|_{t=1}.$$

Für die Eigenwerte erhält man $\mathrm{Spec}(t^E) = \{t^z : z \in \mathrm{Spec}(E)\}$ für $t \in \mathbb{R}_+^\times \backslash \{1\}$. Die Gruppe T^E ist kontrahierend, falls $\mathrm{Re}(z) > 0$ für alle $z \in \mathrm{Spec}(E)$. Man nennt eine stetige Ein-Parameter-Gruppe $(a_t)_{t>0} \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ kontrahierend, falls $a_t(x) \to e$ für $t \to 0$. Insbesondere ist dann a_t kontrahierend für alle $0 < t < 1$.

Definition 1.3.9. *Sei $\mathbb{G}$ eine Lie-Gruppe. Eine kontrahierende Ein-Parameter-Gruppe $(\delta_t)_{t>0} \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ heißt Gruppe von Dilatationen, wenn der Exponent E von $\{\delta_t^0 = t^E, t > 0\}$ diagonal ist bzgl. einer geeigneten Vektorraum-Basis von $\mathbb{V}$.*

Eine wichtige Klasse von Gruppen sind nilpotente Gruppen. Für die Definition benötigen wir zunächst den Begriff der Zentralreihe von Gruppen, es sei dabei auch auf Kapitel IV, Abschnitt 2 in [36] verwiesen.

Definition 1.3.10. *Sei $\mathbb{G}$ eine topologische Gruppe. Man definiert rekursiv*

$$\overline{C}^0\mathbb{G} := \mathbb{G} \text{ und } \overline{C}^i\mathbb{G} := \overline{(\mathbb{G}, \overline{C}^{i-1}\mathbb{G})},$$

dabei bezeichnet (A, B) die von den Elementen $aba^{-1}b^{-1}$, mit $a \in A$ und $b \in B$, erzeugte Untergruppe und $\overline{(A, B)}$ den Abschluss dieser Untergruppe.
Somit erhält man die Reihe

$$\mathbb{G} = \overline{C}^0\mathbb{G} \rhd \overline{C}^1\mathbb{G} \rhd \dots$$

von abgeschlossenen topologisch charakteristischen Untergruppen (d. h. invariant unter allen Automorphismen) von $\mathbb{G}$. Diese Reihe nennt man die topologisch absteigende Zentralreihe von $\mathbb{G}$.

Nun können wir nilpotente Gruppen definieren, vergleiche auch [36], Kapitel IV, Abschnitt 2, Satz 1 und Definition 3.

Satz 1.3.11. *Eine topologische Gruppe* $\mathbb{G}$ *heißt nilpotent, wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Aussagen gilt:*

(i) Es existiert eine endliche Reihe

$$\mathbb{G} = \mathbb{G}_0 \rhd \mathbb{G}_1 \rhd \ldots \rhd \mathbb{G}_s = \{e\}$$

von abgeschlossenen Normalteilern von $\mathbb{G}$ *mit* $(\mathbb{G}, \mathbb{G}_i) \subset \mathbb{G}_{i+1}$.

(ii) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ *mit* $\mathbb{G} \rhd \overline{C}^1\mathbb{G} \rhd \ldots \rhd \overline{C}^n\mathbb{G} = \{e\}$.

Es sei bemerkt, dass die Exponentialabbildung $\exp : \overset{\circ}{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ im Falle einfach zusammenhängender nilpotenter Lie-Gruppen ein $\mathcal{C}^\infty$-Isomorphismus ist (vergleiche auch [12], Abschnitt 2.1 I).

Definition 1.3.12. *Sei* $\mathbb{G}$ *eine einfach zusammenhängende, nilpotente Lie-Gruppe mit Lie-Algebra* $\mathbb{V} \cong \mathbb{R}^d$. $\mathbb{G}$ *heißt homogene Gruppe, falls auf* $\mathbb{G}$ *eine Gruppe von Dilatationen* $(\delta_t)_{t>0}$ *existiert. Als Vektorraumbasis wird dabei eine an die Zentralreihe adaptierte Basis gewählt.*

Kontrahierbare, zusammenhängende, lokalkompakte Gruppen sind homogene Gruppen, und umgekehrt, siehe dazu auch Abschnitt 2.1 in [12].

Definition 1.3.13. *Eine lokalkompakte Gruppe* $\mathbb{G}$ *heißt aperiodisch, falls* $\mathbb{G}$ *keine (nicht-triviale) kompakte Untergruppe enthält. Aperiodische Gruppen sind Lie-Gruppen (siehe dazu auch [12], Definition 2.0.17).*

1.4 Unendlich-teilbare Maße und Faltungshalbgruppen

In diesem Abschnitt wird ein kurzer Überblick über Unendlich-Teilbarkeit und Faltungshalbgruppen gegeben, vergleiche dazu [1], Abschnitt 29. Dabei bezeichnet $\mathcal{P}(\mathbb{G})$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{G}$.

Definition 1.4.1. *Ein Maß* $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$ *heißt unendlich-teilbar, wenn zu jedem* $n \in \mathbb{N}$ *ein Maß* $\mu_n \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$ *existiert, so dass:*

$$\mu = \mu_n * \ldots * \mu_n =: \mu_n^{*n}.$$

Mit $\mathrm{ID}(\mathbb{G})$ *bezeichnen wir die Menge der unendlich-teilbaren Maße auf* $\mathbb{G}$.

Satz 1.4.2. *Sei $\mathbb{G} = \mathbb{R}^d$. Ist μ unendlich-teilbares Maß in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, so gilt:*

$$\hat{\mu}(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Es gibt genau eine stetige Abbildung $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $L(0) = 0$ und

$$\hat{\mu} = |\hat{\mu}| e^{iL}.$$

Lemma 1.4.3. *Seien μ und ν unendlich-teilbare Verteilungen auf $\mathbb{G}$, dann gilt:*

(a) $\mu_n * \nu_n = \nu_n * \mu_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu * \nu \in \mathrm{ID}(\mathbb{G})$.

(b) Sei T ein Endomorphismus auf $\mathbb{G}$, dann ist $T(\mu)$ unendlich-teilbar.

Definition 1.4.4. *Sei $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{G}$. Gilt dann*

$$\mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s \text{ für alle } s, t \in \mathbb{R}_+,$$

so heißt $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{G}$. Die Faltungshalbgruppe heißt stetig, wenn die Abbildung $t \mapsto \mu_t$ von $\mathbb{R}_+$ in $\mathcal{P}(\mathbb{G})$ vag (und damit auch schwach) stetig ist.
Weiter heißt μ einbettbar, falls eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \geq 0}$ existiert mit $\mu_1 = \mu$. $\mathfrak{E}(\mathbb{G})$ bezeichne die Menge der stetig einbettbaren Maße auf $\mathbb{G}$.

Satz 1.4.5. *Sei $\mathbb{G}$ eine homogene Gruppe, dann ist $\mathrm{ID}(\mathbb{G}) = \mathfrak{E}(\mathbb{G})$ und $\mathfrak{E}(\mathbb{G})$ ist abgeschlossen unter schwacher Konvergenz.*

Beweis. Homogene Gruppen sind gleichgradig wurzelkompakt (siehe [12], Proposition 1.6.10) und somit folgt aus Theorem 2.0.20 in [12], dass $\mathrm{ID}(\mathbb{G}) = \mathfrak{E}(\mathbb{G})$. Da die Menge der unendlich-teilbaren Verteilungen wegen der Wurzelkompaktheit abgeschlossen ist, folgt somit auch die zweite Behauptung. □

Definition 1.4.6. *Sei $(\mu_{s,t})_{s \leq t}$, $s, t \in I \subset [-\infty, \infty]$, I ein Intervall, eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{G}$. Man nennt $(\mu_{s,t})_{s \leq t}$ eine stetige Hemigruppe auf dem Intervall I, falls $(s,t) \to \mu_{s,t}$ stetig ist und $\mu_{s,t} * \mu_{t,r} = \mu_{s,r}$ für alle $s \leq t \leq r$. Wir setzen voraus, dass $\mu_{s,s} = \varepsilon_e$ für alle $s \in I$. Ist $(\mu_t)_{t \geq 0}$ eine stetige Faltungshalbgruppe, dann wird durch $(\mu_{s,t} := \mu_{t-s})_{s \leq t}$ eine stetige Hemigruppe auf $\mathbb{R}$ definiert.*

Proposition 1.4.7. *Für jede Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einer aperiodischen Gruppe $\mathbb{G}$ gilt $\mu_0 = \varepsilon_e$.*

Die Beziehung zu unendlich-teilbaren Verteilungen wird durch folgenden Satz hergestellt:

Satz 1.4.8. *(i) Jedes der Maße einer Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{G}$ ist unendlich-teilbar.*
(ii) Für $\mathbb{G} = \mathbb{R}^d$ gilt: Ist μ ein unendlich-teilbares Maß auf $\mathbb{R}^d$ und t_0 eine positive reelle Zahl, so gibt es genau eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}^d$ mit $\mu_{t_0} = \mu$.

Auf lokalkompakten Gruppen ist eine stetige Faltungshalbgruppe im Allgemeinen nicht eindeutig durch ein einziges Maß $\mu := \mu_1$ bestimmt. Daher verwendet man die Notation $\mu_\bullet := (\mu_t)_{t\geq 0}$ im Gegensatz zur üblichen Schreibweise $(\mu^t)_{t\geq 0}$ im Vektorraum. Im Kapitel 4 werden später Erzeugende Funktionale eingeführt, mit deren Hilfe man stetige Faltungshalbgruppen eindeutig charakterisieren kann, siehe dazu auch Abschnitt 2.0 in [12] und Abschnitt IV, 4.5 in [14].

1.5 Hypergruppen

In diesem Abschnitt wird zunächst die Axiomatik einer Hypergruppe bereitgestellt, dazu sei auch auf [2], Abschnitt 1.1 verwiesen. Für einen lokalkompakten (Hausdorff-) Raum R bezeichne nun $\mathcal{M}(R)$ die *Menge der Radon-Maße* auf R, $\mathcal{M}^b(R)$ die *Menge der beschränkten Radon-Maße* und $\mathcal{P}(R)$ analog zum Gruppenfall die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf R.

Definition 1.5.1. *Es sei R ein lokalkompakter (Hausdorff-) Raum. $(R, *)$ heißt Hypergruppe, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) Auf dem Vektorraum $(\mathcal{M}^b(R), +)$ ist eine weitere binäre Operation gegeben, bezüglich derer $(\mathcal{M}^b(R), +, *)$ eine Algebra ist.

(ii) Für $x, y \in R$ ist $\varepsilon_x * \varepsilon_y \in \mathcal{P}(R)$ und supp$(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$ kompakt.

(iii) Die Abbildung $(\mu, \nu) \mapsto \mu*\nu$ von $\mathcal{P}(R)\times\mathcal{P}(R)$ nach $\mathcal{P}(R)$ ist stetig bezüglich der schwachen Topologie.

(iv) Die Abbildung $(x, y) \mapsto$ supp$(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$ von $R \times R$ nach $\mathcal{C}(R) := \{C \subseteq R : C \neq \emptyset, C \text{ kompakt}\}$ ist stetig. Dabei ist $\mathcal{C}(R)$ mit der Michael-Topologie versehen.

(v) *Es existiert ein (eindeutig bestimmtes) neutrales Element* $e \in R$, *so dass* $\varepsilon_x * \varepsilon_e = \varepsilon_e * \varepsilon_x = \varepsilon_x$ *für alle* $x \in R$ *gilt.*

(vi) *Es existiert eine (eindeutig bestimmte) Involution (d.h. ein Homöomorphismus* $x \mapsto x^-$ *von* R *nach* R *mit der Eigenschaft* $(x^-)^- = x$ *für alle* $x \in R$*), so dass* $(\varepsilon_x * \varepsilon_y)^- = \varepsilon_{y^-} * \varepsilon_{x^-}$ *für alle* $x, y \in R$ *erfüllt ist, wobei* μ^- *das Bildmaß von* μ *unter der Involution bezeichnet.*

(vii) *Für* $x, y \in R$ *gilt genau dann* $e \in supp(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$, *wenn* $x = y^-$.

Die Operation $*$ wird als *Faltung* bezeichnet. Zum Beispiel ist jede lokalkompakte Gruppe $\mathbb{G}$, bei der $\mathcal{M}^b(\mathbb{G})$ die von der Gruppenoperation erzeugte Faltung besitzt, eine Hypergruppe. Man nennt eine Hypergruppe $(R, *)$ *kommutativ*, falls $(M^b(R), +, *)$ eine kommutative Algebra ist. Für weitere Beispiele von Hypergruppen siehe auch [2], Kapitel 1.

Definition 1.5.2. *Ein nichttriviales Maß* $\omega_R \in \mathcal{M}_+(R)$ *heißt linkes (bzw. rechtes) Haarmaß der Hypergruppe* R, *falls* $\varepsilon_x * \omega_R = \omega_R$ *(bzw.* $\omega_R * \varepsilon_x = \omega_R$*) für alle* $x \in R$ *gilt.* ω_R *heißt Haarmaß, falls* ω_R *linkes und rechtes Haarmaß der Hypergruppe ist.*

Dass auf bestimmten Hypergruppen stets Haarmaße existieren, liefert der folgende Satz, dazu sei auf die Theoreme 1.3.15 und 1.3.28 in [2] verwiesen.

Satz 1.5.3. *Sei* R *eine Hypergruppe.*

(a) *Ist* R *kommutativ, so existiert ein Haarmaß* ω_R.

(b) *Ist* R *kompakt, dann existiert ein Haarmaß* ω_R.

1.6 Normen auf lokalkompakten Gruppen

In diesem Abschnitt wird ein kurzer Überblick über Normen auf lokalkompakten Gruppen gegeben. Zunächst werden dazu Gruppen- und Automorphismennormen definiert.

Definition 1.6.1. *Seien* $\mathbb{G}$ *eine lokalkompakte Gruppe mit neutralem Element* e *und* $H \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ *eine Untergruppe.*

(a) $|\cdot| : \mathbb{G} \to \mathbb{R}_+$ *heißt Gruppennorm auf* $\mathbb{G}$, *falls*

(i) $|\cdot|$ *stetig auf* $\mathbb{G}$,

(ii) $|x| = |x^{-1}|$,

(iii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = e$.

Gilt darüber hinaus

(iv) $|xy| \le |x| + |y|$ *für alle* $x, y \in \mathbb{G}$

dann spricht man von einer subadditiven Gruppennorm. In diesem Fall wird durch $\delta : (x, y) \mapsto |xy^{-1}|$ *eine mit der Topologie verträgliche linksinvariante Metrik definiert.*

(b) $\|.\| : H \mapsto \mathbb{R}_+^\times$ *heißt Automorphismennorm, falls*

(i) $\|.\|$ *stetig auf* H,

(ii) $\|.\|$ *submultiplikativ,*

(iii) $\|\sigma\| \ne 0$ *für alle* $\sigma \in H$,

(iv) $|\sigma x| \le \|\sigma\| |x|$.

Wir benötigen im Rahmen dieser Arbeit häufig homogene Normen und deren Eigenschaften, welche im Folgenden dargestellt werden, siehe dazu auch in [12], Abschnitt 2.7 IV, Proposition 2.7.26.

Definition und Proposition 1.6.2. *(a) Sei* $\mathbb{G}$ *eine einfach zusammenhängende nilpotente Lie-Gruppe mit Dilatationen* $(\delta_t)_{t>0}$. *Eine Funktion* $|\cdot| : \mathbb{G} \to \mathbb{R}_+$ *heißt homogene Norm bzgl.* (δ_t), *falls*

(i) $|\delta_t x| = t|x|$ *für* $x \in \mathbb{G}^\times,\ t > 0$,

(ii) $|x| = |x^{-1}|$ *für* $x \in \mathbb{G}$,

(iii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = e$.

Dabei ist wie üblich $\mathbb{G}^\times := \mathbb{G} \backslash \{e\}$.

(b) Für eine Konstante $c > 0$ *gilt dann* $|xy| \le c(|x| + |y|)$.

(c) Auf einer homogenen Gruppe sind alle homogenen Normen bzgl. einer Gruppe von Dilatationen (δ_t) *äquivalent.*

(d) Eine homogene Norm heißt subadditiv, falls $c = 1$, *d. h.* $|xy| \le |x| + |y|$.

(e) *Für eine subadditive homogene Norm wird durch* $d(x,y) := |x^{-1}y|$ *eine rechts-invariante Metrik auf* $\mathbb{G}$ *definiert.*

(f) *Auf einer kontrahierbaren Gruppe mit Dilatationen* $(\delta_t)_{t>0}$ *existiert stets eine homogene subadditive Norm* $|\cdot|$.

Mithilfe homogener Normen kann man nun auch Automorphismennormen konstruieren und deren Eigenschaften untersuchen, siehe auch Abschnitt 2.10 II, Proposition 2.10.15 in [12].

Definition 1.6.3. *Sei* $\mathcal{B} := \mathrm{Cent}((\delta_t)_{t>0}, \mathrm{Aut}(\mathbb{G}))$. *Für* $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ *definiert man eine Automorphismennorm durch:*

$$\|\tau\| := \sup_{x \neq e} \frac{|\tau(x)|}{|x|}.$$

Diese Norm $\|\cdot\|$ *wird kanonische Automorphismennorm zu* $|\cdot|$ *genannt. Falls nichts anderes festgelegt ist, sind Automorphismennormen stets auf ganz* $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ *definiert.*

Bemerkung 1.6.4. Die so definierte Automorphismennorm hat unter anderem die folgenden Eigenschaften:

(a) $\|.\|$ ist ein stetiges submultiplikatives Funktional, das eine linksinvariante Metrik auf $\mathcal{B}$ definiert durch $d(\tau,\sigma) := \log \|\tau^{-1}\sigma\|$.

(b) $|x| \cdot \|\tau^{-1}\|^{-1} \leq |\tau(x)| \leq \|\tau\| \cdot |x|$ für $\tau \in \mathcal{B}$ und $x \in \mathbb{G}$.

(c) Für homogene Gruppen $\mathbb{G}$ und eine Kontraktion $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ existieren Dilatationen $(\delta_t)_{t>0}$ mit zugehöriger subadditiver Norm $|\cdot|$ mit $|\delta_t x| = t|x|$, $x \in \mathbb{G}$, so dass $\tau\delta_t = \delta_t\tau$ für alle $t > 0$, vergleiche 2.1.13 in [12]. $\Diamond$

(d) Für homogene Gruppen $\mathbb{G}$ und eine Kontraktion $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G}) \cap \mathrm{Cent}((\delta_t)_{t>0})$ gilt

$$\|\tau\| = \sup_{x \neq e} \frac{|\tau(x)|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |\tau(x)|.$$

In der folgenden Proposition werden Ungleichungen für Automorphismennormen dargestellt (siehe auch [12], Abschnitt 2.14 VII, 2.14.23), die wir für die Hauptresultate dieser Arbeit benötigen werden.

Proposition 1.6.5. *Sei $\mathbb{G}$ eine kontrahierbare Lie-Gruppe mit Dilatationen (δ_t) und einer subadditiven homogenen Norm $|\cdot|$. Für $\tau, \sigma \in \mathrm{Cent}((\delta_t), \mathrm{Aut}(\mathbb{G}))$ gilt dann*

(a) $\|\tau^{-1}\|^{-n} \cdot |x| \leq |\tau^n(x)| \leq \|\tau^n\| \cdot |x|$,

(b) $\|\sigma\tau\| \leq \|\sigma\| \cdot \|\tau\|$.

(c) Ist $\|\tau\| \leq 1$ und ist $\|\tau^{m_0}\| < 1$ für ein $m_0 \in \mathbb{N}$, dann folgt mit $r := \|\tau^{m_0}\|^{\frac{1}{2m_0}}$

$$|\tau^k(x)| \leq r^k|x| \text{ für } k \geq m_0 \text{ und } |\tau^k(x)| \leq |x| \text{ für } 0 \leq k < m_0$$

Mit $\rho := \|\tau\|$ und $R := \|\tau^{-1}\|$ folgt

$$R^{-n}|x| \leq |\tau^n(x)| \leq \rho^n|x| \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Kapitel 2

Stabile und selbstzerlegbare Verteilungen auf $\mathbb{R}^d$

In diesem Kapitel wird zunächst eine Übersicht über bisherige Arbeiten zu Semi-Selbstzerlegbarkeit und Selbstzerlegbarkeit auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^d$ gegeben. Eine Verteilung $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ heißt selbstzerlegbar, wenn für alle $c \in [0, 1]$ eine Verteilung μ_c existiert, so dass gilt:

$$\mu = c\mu * \mu_c.$$

Dabei bezeichnet $c\mu$ das Bildmaß unter $x \mapsto cx$. Nun gibt es zwei verschiedene Verallgemeinerungen dieser Selbstzerlegbarkeit, und zwar auf der einen Seite die Verallgemeinerung von Bunge und Loève (vergl. dazu [4] und [18]) und auf der anderen Seite die von Maejima und Naito (siehe [19]). In den Arbeiten von Maejima und Naito wurde die Semi-Selbstzerlegbarkeit und später die Operator-Semi-Selbstzerlegbarkeit als eine Erweiterung der Selbstzerlegbarkeit eingeführt. Bunge hingegen hat die so genannte C-Zerlegbarkeit betrachtet, was bereits eine Erweiterung der c-Zerlegbarkeit von Loève war. Hier wird zunächst eine Arbeit von Maejima und Naito, [19], vorgestellt. Im Anschluss werden einige Resultate der Arbeiten von Maejima, Sato und Watanabe, siehe [20], behandelt, die nochmals eine Erweiterung der beiden bereits erwähnten Richtungen sind. Die Bunge-Klassen sind dabei ein Spezialfall.

2.1 (Semi-)Stabilität

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit stabilen Verteilungen, den möglichen Limiten von zeilenweise aus infinitesimalen Dreieckssystemen gebildeten

Summen normierter, unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariabler. Betrachtet man die Konvergenz solcher normierten Summen entlang von speziellen Teilfolgen, so bezeichnet man den Grenzwert als semi-stabile Zufallsvariable. Im Folgenden werden unter anderem (semi-)stabile und Operator-(semi-)stabile Verteilungen definiert, es sei dazu auch auf die Abschnitte 3 und 7 in [22] verwiesen.

Definition 2.1.1. *Ein Maß $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ heißt voll, falls der Träger von μ in keinem echten affinen Unterraum von $\mathbb{R}^d$ liegt.*

Definition 2.1.2. *Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen auf $\mathbb{R}^d$ mit gemeinsamer Verteilung μ. Sei weiterhin Y eine Zufallsvariable mit Verteilung ν und sei ν voll. Dann heißt ν Operator-semistabil, falls lineare Operatoren $(A_n)_{n\geq 0}$ auf $\mathbb{R}^d$, $(k_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{N}$ mit $k_n \to \infty$ und*

$$k_{n+1}/k_n \to r \geq 1$$

und $(b_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}^d$ existieren, so dass

$$A_n(X_1 + \ldots + X_{k_n}) + b_n \xrightarrow{d} Y.$$

Für die Verteilungen bedeutet dies äquivalent

$$A_n(\mu^{*k_n}) * \varepsilon_{b_n} \xrightarrow{w} \nu.$$

Nach [22], Theorem 7.1.1 gilt, dass μ genau dann Operator-semistabil ist, wenn $\mu \in \mathrm{ID}(\mathbb{R}^d)$ und $c \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^d$ und ein Operator $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)$ existieren, so dass

$$\mu^{*c} = A(\mu) * \varepsilon_a.$$

Für $k_n = n$ erhalten wir Operator-stabile Verteilungen, ein Spezialfall von Operator-semistabilen Verteilungen.

Definition 2.1.3. *Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen auf $\mathbb{R}^d$ mit gemeinsamer Verteilung μ. Sei weiterhin Y eine Zufallsvariable mit Verteilung ν und sei ν voll. Dann heißt ν Operator-stabil, falls lineare Operatoren $(A_n)_{n\geq 0}$ auf $\mathbb{R}^d$ und $(b_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}^d$ existieren, so dass*

$$A_n(X_1 + \ldots + X_n) + b_n \xrightarrow{d} Y.$$

Für die Verteilungen bedeutet dies äquivalent:

$$A_n(\mu^{*n}) * \varepsilon_{b_n} \xrightarrow{w} \nu.$$

Nach [22], Theorem 7.2.1 gilt, dass μ genau dann Operator-stabil ist, wenn μ einbettbar ist in eine Faltungshalbgruppe μ^t, so dass für alle $t \geq 0$

$$\mu^t = t^E(\mu) * \varepsilon_{a_t}$$

für geeignete Shifts $a_t \in \mathbb{R}^d$ und $E \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$. Man nennt μ dann (t^E)-stabil. Wir können nun stabile Verteilungen definieren.

Definition 2.1.4. *Sei Y eine Zufallsvariable mit Verteilung ν und sei ν voll. Dann heißt ν (bzw. Y) stabil, falls ν (t^E)-Operator-stabil ist mit $E = aI$ für $a \in \mathbb{R}^\times$. Man nennt $\alpha = 1/a$ den Index von ν.*

Analog kann man auch semistabile Verteilungen bzw. Zufallsvariablen definieren.

Definition 2.1.5. *Sei Y eine Zufallsvariable mit Verteilung ν und sei ν voll. Dann heißt ν (bzw. Y) (b,c)-semistabil, falls ν (B, c) Operator-semistabil ist mit $c > 1$ und $B = bI$ für $b \in \mathbb{R}_+^\times$. Man nennt $\alpha = \log c/ \log b$ den Index von ν.*

Operator-(semi-)stabile Verteilungen sind immer auch unendlich-teilbar, siehe dazu Abschnitt 7 in [22]. Dies gilt auch für (Operator-)selbstzerlegbare Verteilungen, die im nächsten Abschnitt betrachtet werden.

2.2 (Operator-)Selbstzerlegbarkeit

Selbstzerlegbare Verteilungen sind eine Verallgemeinerung von stabilen Verteilungen. Sie treten als Grenzverteilungen normierter Summen unabhängiger Zufallsvariablen auf, die nicht notwendigerweise identisch verteilt sein müssen, aber ein infinitesimales Dreieckssystem bilden. Genauso wie Semi-Stabilität als Erweiterung von stabilen Verteilungen betrachtet wurde, kann man auch Semi-Selbstzerlegbarkeit untersuchen. Dabei sind semi-selbstzerlegbare Verteilungen Grenzverteilungen von Teilfolgen normierter Summen unabhängiger Zufallsvariablen. In diesem Abschnitt werden selbstzerlegbare und Operator-selbstzerlegbare Verteilungen eingeführt.

Definition 2.2.1. *Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariable auf $\mathbb{R}^d$ und habe X_n die Verteilung μ_n. Sei weiterhin Y eine Zufallsvariable mit Verteilung ν und sei ν voll. Dann heißt ν Operator-selbstzerlegbar, falls $(b_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^d$ und beschränkte lineare Operatoren $(A_n)_{n\geq 0}$ auf $\mathbb{R}^d$ existieren, so dass das Dreieckssystem*

$$\{A_n(X_k) : 1 \leq k \leq n, 1 \leq n\}$$

infinitesimal ist und

$$A_n(X_1 + \ldots + X_n) + b_n \xrightarrow{d} Y.$$

Für die Verteilungen bedeutet dies äquivalent:

$$A_n(\mu_1 * \cdots * \mu_n) * \varepsilon_{b_n} \xrightarrow{w} \nu.$$

Um Operator-selbstzerlegbare Verteilungen zu charakterisieren, benötigt man zunächst folgende Definitionen (siehe auch 2.3 und 3.3 in [16]):

Definition 2.2.2. *Seien $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ und $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^d)$.*

(a) Man nennt μ A-zerlegbar, falls eine Verteilung $\mu_A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ existiert, so dass

$$\mu = A\mu * \mu_A.$$

(b) $\mathrm{D}(\mu) := \{A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^d) : \mu$ ist A-zerlegbar$\}$. $\mathrm{D}(\mu)$ heißt Urbanik-Zerlegbarkeits-Halbgruppe von μ.

(c) $\mathcal{A}(\mu) := \{A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^d) : \mu = A\mu * \varepsilon_a$ für einen Vektor $a\}$ heißt Halbgruppe der Symmetrien von μ. Offensichtlich gilt $\mathcal{A}(\mu) \subset \mathrm{D}(\mu)$.

Bemerkung 2.2.3. Offensichtlich gilt:

(a) Jede Verteilung μ ist I- und 0-zerlegbar, wobei mit I und 0 die Identität und der Null-Operator bezeichnet werden.

(b) $\mathrm{D}(\mu)$ ist eine abgeschlossene Halbgruppe, denn für $A, B \in \mathrm{D}(\mu)$ folgt direkt $\mu = (AB)\mu * (A\mu_B * \mu_A)$. Die Abgeschlossenheit folgt aus dem Shift-Kompaktheits-Theorem, siehe Theorem 3.1.9 (es sei auch auf [16], Theorem 1.7.1 bzw. [26], Theorem 2.1 verwiesen). $\Diamond$

Dies führt nun zur Charakterisierung Operator-selbstzerlegbarer Verteilungen durch deren Zerlegbarkeits-Halbgruppen (siehe Abschnitt 3.3.5 in [16]).

Theorem 2.2.4. *Ein Maß $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ist Operator-selbstzerlegbar genau dann, wenn die zugehörige Urbanik Zerlegbarkeits-Halbgruppe $\mathrm{D}(\mu)$ eine Ein-Parameter Halbgruppe $\{\exp(-tQ) : t \geq 0\}$ enthält, wobei Q invertierbar ist und für $t \to \infty$ gilt $\exp(-tQ) \to 0$. Gilt also $\mu = \exp(-tQ)\mu * \mu(t)$ für alle $t \geq 0$, dann ist jeder Kofaktor $\mu(t)$ unendlich-teilbar.*

2.3 Semi-Selbstzerlegbarkeit

In diesem Abschnitt wird im Wesentlichen die Arbeit von Maejima und Naito [19] zitiert, wobei die Notationen geändert wurden. Mit $Ł(\mathbb{R}^d)$ wird im Folgenden die *Menge aller selbstzerlegbaren Verteilungen* bezeichnet, man nennt diese Menge auch *Lévy-Klasse* (siehe [16], Abschnitt 3.9).

Definition 2.3.1. *Seien $H \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ und $0 < b < 1$. Wir sagen, eine Verteilung $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ gehört zu der Klasse $K(H,b)$, falls eine Folge unabhängiger Zufallsvariabler $(X_j)_{j\geq 1}$, $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+^\times$ mit $a_n \nearrow \infty$, $(c_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^d$ und $(k_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{N}$ mit $k_n \nearrow \infty$ existieren, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = b$,

(ii) $P_{X_j} \in H$ *für alle* $j \in \mathbb{N}$,

(iii) $\frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{k_n} X_j + c_n \xrightarrow{d} \mu$ *für* $n \to \infty$,

(iv) $\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq k_n} P\left(\|\frac{1}{a_n} X_j\| > \varepsilon\right) = 0$ *(Infinitesimalitäts-Bedingung).*

Äquivalent kann man die Bedingungen (ii), (iii) und (iv) auch in Termen von Verteilungen beschreiben:

(ii') $\mu_j := P_{X_j} \in H$ *für alle* $j \in \mathbb{N}$,

(iii') $a_n^{-1}(\mathop{*}\limits_{j=1}^{k_n} \mu_j) * \varepsilon_{c_n} \xrightarrow{w} \mu$ *für* $n \to \infty$,

(iv') $\{a_n^{-1}\mu_j\}$ *ist gleichmäßig infinitesimal.*

Der Leser sei auch auf [19], Definition 1.1 verwiesen.

Bemerkung 2.3.2. Die Normierung in (iii) ist skalar, eine Normierung mit linearen Operatoren wird später ab Definition 2.4.1 betrachtet (siehe auch [20]).$\diamondsuit$

Im Folgenden werden einige Resultate über die Zerlegbarkeitsklassen von Maejima und Naito vorgestellt. Die nächsten Propositionen untersuchen unter anderem, welche Verteilungen aus diesen Zerlegbarkeitsklassen unendlich-teilbar bzw. semistabil sind, siehe dazu die Propositionen 2.1-2.3 in [19].

Proposition 2.3.3. *Seien $H \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ und $0 < b < 1$. Dann gilt*

$$K(H,b) \subset \mathrm{ID}(\mathbb{R}^d).$$

Proposition 2.3.4. *Seien $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ und $0 < b < 1$. Dann gilt*

$$K(\{\nu\}, b) \subset \mathrm{SS}(\mathbb{R}^d),$$

wobei $\mathrm{SS}(\mathbb{R}^d)$ *die Menge aller semistabilen Verteilungen bezeichnet.*

Proposition 2.3.5. *Seien $H \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ und $0 < b < 1$. Dann gilt für $m = 1, 2, \ldots$:*

$$K(H, b) \subset K(H, b^m).$$

Ziele dieses Abschnitts sind die Definition einer Folge von Klassen mehrfach semi-selbstzerlegbarer Verteilungen und die Darstellung einiger wichtiger Resultate über diese Klassen. Dafür benötigen wir zunächst den Begriff der vollständigen Abgeschlossenheit einer Menge $H \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ (vergleiche auch [19], Definition 2.1 und Definition 2.2) und Aussagen über die zugehörige Klasse $K(H, b)$, siehe [19], Theorem 2.1 und Proposition 2.4.

Definition 2.3.6. *$H \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ heißt vollständig abgeschlossen, falls H abgeschlossen ist unter*

(i) schwacher Konvergenz: $(\mu_n)_{n\geq 1} \subset H$, $\mu_n \xrightarrow{w} \mu \Rightarrow \mu \in H$,

(ii) Faltung: $\mu, \nu \in H \Rightarrow \mu * \nu \in H$,

(iii) Typ-Äquivalenz: $\mu \in H \Rightarrow b\mu * \varepsilon_a \in H$ für alle $b > 0$ und alle $a \in \mathbb{R}^d$.

Gilt $H \subset \mathrm{ID}(\mathbb{R}^d)$ und gilt für jedes $\mu \in H$ mit Faltungshalbgruppe $(\mu^t)_{t>0}$, dass $\mu^t \in H$ für alle $t > 0$ (man sagt, H ist abgeschlossen unter t-facher Faltung für alle $t > 0$), dann heißt H vollständig abgeschlossen im starken Sinn.

Proposition 2.3.7. *Seien $H \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ vollständig abgeschlossen und $0 < b < 1$. Dann gilt $K(H, b) \subset H$. Ist H vollständig abgeschlossen im starken Sinn, dann ist auch $K(H, b)$ vollständig abgeschlossen.*

Das folgende Theorem liefert nun den Zusammenhang zwischen der Klasse $K(H, b)$ und der b-Zerlegbarkeit von Loève, siehe [19], Theorem 2.1.

Theorem 2.3.8. *Sei $0 < b < 1$.*

(a) Sei $H \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ vollständig abgeschlossen und $\mu \in K(H, b)$. Dann existiert $\nu \in H \cap \mathrm{ID}(\mathbb{R}^d)$, so dass

$$\mu = b\mu * \nu. \tag{2.1}$$

(b) *Sei H vollständig abgeschlossen im starken Sinn und es existiere ein $\nu \in H = H \cap \mathrm{ID}(\mathbb{R}^d)$ mit $\mu = b\mu * \nu$, dann gilt $\mu \in K(H, b)$.*

Mithilfe dieser Vorbereitungen wird nun (siehe [19], Abschnitt 3) die bereits erwähnte Folge von Klassen mehrfach semi-selbstzerlegbarer Verteilungen definiert, und zwar in Analogie zu den Urbanik-Klassen für den Fall selbstzerlegbarer Verteilungen, vergleiche dazu [38].

Definition 2.3.9. *Sei $0 < b < 1$, dann definiert man*

(a) $L_0(b) := K(\mathcal{P}(\mathbb{R}^d), b)$,

(b) $L_m(b) := K(L_{m-1}(b), b)$,

(c) $L_\infty(b) := \bigcap_{m=0}^{\infty} L_m(b)$.

Man nennt $\mu \in L_0(b)$ (b-)semi-selbstzerlegbar auf $\mathbb{R}^d$.

Im Folgenden sollen nun einige wichtige Resultate über die Klassen $L_m(b)$ vorgestellt werden (vergleiche dazu ebenfalls [19]). Zunächst folgt eine Charakterisierung der Verteilungen in $L_0(b)$, siehe [19], Theorem 3.1.

Theorem 2.3.10. *Sei $0 < b < 1$.*

(a) $\mu \in L_0(b) \Leftrightarrow$ *es existiert $\nu \in \mathrm{ID}(\mathbb{R}^d)$, so dass (2.1) gilt.*

(b) $L_0(b)$ *ist vollständig abgeschlossen im starken Sinn.*

Auf sehr ähnliche Art und Weise kann man die Verteilungen in $L_m(b)$ charakterisieren (vergleiche [19], Theorem 3.3).

Theorem 2.3.11. *Seien $0 < b < 1$ und $m = 1, 2 \dots$.*

(a) $\mu \in L_m(b) \Leftrightarrow$ *es existiert ein $\nu_m \in L_{m-1}(b)$, so dass gilt:*

$$\mu = b\mu * \nu_m.$$

(b) $L_m(b)$ *ist vollständig abgeschlossen im starken Sinn.*

Dies führt nun direkt zu dem Zusammenhang zwischen selbstzerlegbaren und semi-selbstzerlegbaren Verteilungen, dazu sei auf [19], Theorem 3.2 verwiesen:

Theorem 2.3.12.
$$Ł(\mathbb{R}^d) = \bigcap_{0<b<1} L_0(b).$$

Das nächste Theorem (siehe [19], Theorem 3.4) liefert nützliche Eigenschaften der Klasse $L_\infty(b)$.

Theorem 2.3.13. *Sei* $0 < b < 1$. *Dann gilt:*

(a) $L_\infty(b)$ *ist vollständig abgeschlossen im starken Sinn,*

(b) $L_\infty(b) = K(L_\infty(b), b)$,

(c) $L_\infty(b)$ *ist die größte Klasse, die invariant ist unter der Operation* $K(\cdot, b)$.

Dass die hier betrachtete Folge von Klassen ineinander geschachtelt ist, besagt das nun folgende Korollar:

Korollar 2.3.14. *Sei* $0 < b < 1$. *Dann gilt*

$$\mathrm{ID}(\mathbb{R}^d) \supset L_0(b) \supset \cdots \supset L_m(b) \supset \cdots \supset L_\infty(b).$$

2.4 Operator-Semi-Selbstzerlegbarkeit

In diesem Abschnitt wird die bereits erwähnte Erweiterung der Semi-Selbstzerlegbarkeit aus dem vorherigen Abschnitt vorgestellt. Dabei werden wieder Verteilungen betrachtet, die als Grenzverteilungen von Teilfolgen normierter Summen unabhängiger Zufallsvariabler auftreten. Jedoch betrachtet man hier keine skalare Normierung, sondern eine durch lineare Operatoren. Dies geht im Wesentlichen auf die Arbeit von Maejima, Sato und Watanabe zurück, vergleiche [20]. Am Ende dieses Abschnitts wird schließlich der Zusammenhang zu den bereits erwähnten Bunge-Klassen beschrieben. Einige Resultate über diese speziellen Klassen werden im nächsten Kapitel teilweise auf kontrahierbare, lokalkompakte Gruppen übertragen.
Im Folgenden seien immer $0 < b < 1$ und $Q \in \mathrm{M}_+(\mathbb{R}^d)$, wobei $\mathrm{M}_+(\mathbb{R}^d)$ die Menge aller $d \times d$-Matrizen sei, deren Eigenwerte alle positive Realteile besitzen. Für $a > 0$ ist a^Q definiert (siehe Definition 1.3.8), für $a = 0$ setzt man $0^Q := 0$. Es ist a^Q kontrahierend, falls $a \in (0, 1)$ und $Q \in \mathrm{M}_+(\mathbb{R}^d)$; $(t^Q)_{t>0}$ ist eine kontrahierende Gruppe.

Definition 2.4.1. *Sei $H \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Wir sagen, eine Verteilung $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ gehört zu der Klasse $\widetilde{K}(H, b, Q)$, falls eine Folge unabhängiger Zufallsvariabler $(X_j)_{j\geq 1}$, $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+^\times$ mit $a_n \nearrow \infty$, $(c_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^d$ und $(k_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{N}$ mit $k_n \nearrow \infty$ existieren, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = b$,

(ii) $P_{X_j} \in H$ *für alle* $j \in \mathbb{N}$,

(iii) $a_n^{-Q} \sum_{j=1}^{k_n} X_j + c_n \xrightarrow{d} \mu$ *für* $n \to \infty$.

Gilt darüber hinaus

(iv) $\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq k_n} P\left(\|a_n^{-Q} X_j\| > \varepsilon\right) = 0$ *(Infinitesimalitäts-Bedingung),*

dann sagen wir $\mu \in \mathbb{R}^d$ gehört zu der Klasse $K(H, b, Q)$. Auch hier können analog zur Definition 2.3.1 die Bedingungen (ii), (iii) und (iv) in Termen von Verteilungen äquivalent beschrieben werden:

(ii') $\mu_j := P_{X_j} \in H$ *für alle* $j \in \mathbb{N}$,

(iii') $a_n^{-Q}(\mathop{\ast}_{j=1}^{k_n} \mu_j) * \varepsilon_{c_n} \xrightarrow{d} \mu$ *für* $n \to \infty$,

(iv') $\{a_n^{-Q} \mu_j\}$ *ist gleichmäßig infinitesimal.*

Bemerkung 2.4.2. Direkt aus der Definition erhält man die folgenden Zusammenhänge zwischen den Klassen in 2.4.1 und den Zusammenhang zu den Klassen aus Definition 2.3.1:

(a) $K(H, b, Q) \subset \widetilde{K}(H, b, Q)$,

(b) $K(H, b, Q) \subset \mathrm{ID}(\mathbb{R}^d)$,

(c) $K(H, b, Q) \subset K(G, b, Q)$, falls $H \subset G$,

(d) $\widetilde{K}(H, b, Q) \subset \widetilde{K}(G, b, Q)$, falls $H \subset G$,

(e) $K(H, b, I) = K(H, b)$.

Im Allgemeinen ist aber $\widetilde{K}(H, b, Q) \not\subset \mathrm{ID}(\mathbb{R}^d)$. Beispiele dafür gibt es genügend, z.B. ist $U(0, 1)$, die Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$, $\frac{1}{2}$-zerlegbar, aber nicht unendlich-teilbar, siehe auch [35]. $\diamondsuit$

Wir benötigen nun einen etwas veränderten Begriff der vollständigen Abgeschlossenheit aus Definition 2.3.6.

Definition 2.4.3. *Sei $Q \in \mathrm{M}_+(\mathbb{R}^d)$. Dann heißt $H \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ Q-vollständig abgeschlossen, falls die Bedingungen (i) und (ii) in Definition 2.3.6 gelten und H abgeschlossen ist unter Q-Typ-Äquivalenz, d.h. $\mu \in H \Rightarrow b^{-Q}\mu * \varepsilon_a \in H$ für alle $b > 0$ und alle $a \in \mathbb{R}^d$. Gilt weiterhin $H \subset \mathrm{ID}(\mathbb{R}^d)$ und ist H abgeschlossen unter t-facher Faltung für alle $t > 0$, dann heißt H Q-vollständig abgeschlossen im starken Sinn.*

Mithilfe dieser Begriffe erhält man die beiden folgenden Resultate, die den Zusammenhang zwischen der b^Q-Zerlegbarkeit (nach Urbanik, vergleiche auch Definition 2.2.2) und der Klasse $K(H, b, Q)$ bzw. $\widetilde{K}(H, b, Q)$ beschreiben.

Theorem 2.4.4. *Sei $H \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.*

(a) Seien H Q-vollständig abgeschlossen und $\mu \in K(H, b, Q)$. Dann existiert ein $\nu \in H \cap \mathrm{ID}(\mathbb{R}^d)$, so dass

$$\mu = b^Q\mu * \nu. \tag{2.2}$$

(b) Sei H Q-vollständig abgeschlossen im starken Sinn, dann gilt in (a) auch die Umkehrung.

(c) Sei H Q-vollständig abgeschlossen im starken Sinn, dann gilt dies auch für $K(H, b, Q)$.

Theorem 2.4.5. *Sei $H \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.*

(a) Sei H Q-vollständig abgeschlossen. Dann gilt

$$\mu \in \widetilde{K}(H, b, Q) \Leftrightarrow \text{ es existiert } \nu \in H \text{ mit } \mu = b^Q\mu * \nu.$$

(b) Sei H Q-vollständig abgeschlossen im starken Sinn, dann gilt dies auch für $\widetilde{K}(H, b, Q)$.

Auch hier wollen wir analog zum Fall semi-selbstzerlegbarer Verteilungen eine Folge geschachtelter Klassen definieren. Die Konstruktion dieser Klassen wird in den folgenden Definitionen beschrieben.

Definition 2.4.6. *Man bezeichnet mit $\mathfrak{C}$ die Menge aller abgeschlossenen multiplikativen Unterhalbgruppen C von $[0,1]$, so dass $C \supsetneqq \{0,1\}$. Weiterhin definiert man für $C \in \mathfrak{C}$*

(a) $K(H, C, Q) := \bigcap_{b \in C \setminus \{0,1\}} K(H, b, Q)$,

(b) $\widetilde{K}(H, C, Q) := \bigcap_{b \in C \setminus \{0,1\}} \widetilde{K}(H, b, Q)$.

Definition 2.4.7. *Seien $0 < b < 1$ und $Q \in \mathrm{M}_+(\mathbb{R}^d)$. Man definiert*

(a) $L_0(b, Q) := K(\mathcal{P}(\mathbb{R}^d), b, Q)$,

(b) $L_m(b, Q) := K(L_{m-1}(b, Q), b, Q)$,

(c) $L_\infty(b, Q) := \bigcap_{m=0}^{\infty} L_m(b, Q)$.

Weiterhin definiert man für $m = 0, 1, \ldots, \infty$

(d) $L_m(C, Q) := \bigcap_{b \in C \setminus \{0,1\}} L_m(b, Q)$.

Analog definiert man $\widetilde{L}_m(b, Q)$ und $\widetilde{L}_m(C, Q)$ mit $\widetilde{K}$ anstelle von K. Man nennt $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ Operator-semi-selbstzerlegbar, falls $0 < b < 1$ und $Q \in \mathrm{M}_+(\mathbb{R}^d)$ existieren, so dass $\mu \in L_0(b, Q)$, insbesondere falls $\mu = b^Q(\mu) * \nu_b$ für ein $b \in (0,1)$. Analog heißt $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ Operator-selbstzerlegbar, falls $Q \in \mathrm{M}_+(\mathbb{R}^d)$ existiert, so dass $\mu \in L_0(b, Q)$ für alle $b \in (0,1)$.

Nun können wir untersuchen, wie die oben definierten Klassen Operator-selbstzerlegbarer und Operator-semi-selbstzerlegbarer Verteilungen zusammenhängen. Die beiden folgenden Propositionen liefern dazu wichtige Aussagen.

Proposition 2.4.8. *Seien $0 < b < 1$ und $C \in \mathfrak{C}$. Dann erhält man folgende geschachtelte Klassen:*

(a) $\mathrm{ID}(\mathbb{R}^d) \supset L_0(b, Q) \supset L_1(b, Q) \supset \cdots \supset L_\infty(b, Q)$,

(b) $\mathrm{ID}(\mathbb{R}^d) \supset L_0(C, Q) \supset L_1(C, Q) \supset \cdots \supset L_\infty(C, Q)$,

(c) $\widetilde{L}_0(b, Q) \supset \widetilde{L}_1(b, Q) \supset \cdots \supset \widetilde{L}_\infty(b, Q)$,

(d) $\widetilde{L}_0(C, Q) \supset \widetilde{L}_1(C, Q) \supset \cdots \supset \widetilde{L}_\infty(C, Q)$.

Proposition 2.4.9. *Seien $C_1, C_2 \in \mathfrak{C}$ und sei $C_1 \subset C_2$. Für alle $0 \leq m \leq \infty$ gilt dann* *(a)* $L_m(C_1, Q) \supset L_m(C_2, Q)$,

(b) $\widetilde{L}_m(C_1, Q) \supset \widetilde{L}_m(C_2, Q)$.

Die folgende Proposition liefert eine Aussage analog zum Fall der Klasse $K(H, b)$ in Proposition 2.3.7.

Proposition 2.4.10. *Sei $H \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ Q-vollständig abgeschlossen, dann gilt $K(H, b, Q) \subset H$ und $\widetilde{K}(H, b, Q) \subset H$.*

Einige interessante Resultate über die in diesem Abschnitt behandelten Klassen $K(H, b, Q)$ und $\widetilde{K}(H, b, Q)$ werden nun in den folgenden beiden Propositionen der Vollständigkeit halber zitiert, auch wenn sie im weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht mehr benötigt werden.

Proposition 2.4.11. *Es gilt:*

(a) $K(H, b, Q) \subset K(H, b^n, Q)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$,

(b) $\widetilde{K}(H, b, Q) \subset \widetilde{K}(H, b^n, Q)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.4.12. *Sei $C := \{b^n, n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\} \in \mathfrak{C}$ für ein $0 < b < 1$. Dann gilt*

(a) $K(H, C, Q) = K(H, b, Q)$,

(b) $\widetilde{K}(H, C, Q) = \widetilde{K}(H, b, Q)$.

Nun können wir den Zusammenhang zu den bereits erwähnten Bunge-Klassen herstellen. Dafür betrachten wir eine neue Klasse von Verteilungen, die für den Fall $d = 1$ in [4] eingeführt wurde. Sei dafür ab jetzt immer $C \in \mathfrak{C}$.

Definition 2.4.13. *Sei $H \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ I-vollständig abgeschlossen. Eine Verteilung $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ gehört zu der Klasse $\mathcal{L}^C(H)$, falls für alle $b \in C \backslash \{0, 1\}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariabler $(X_j^b)_{j \geq 1}$, $(a_n^b)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+^\times$ mit $a_n^b \nearrow \infty$, $(c_n^b)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^d$ existieren, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n^b}{a_{n+1}^b} = b$,

(ii) $P_{X_j^b} \in H$ *für alle* $j \in \mathbb{N}$,

(iii) $(a_n^b)^{-1} \sum_{j=1}^n X_j^b + c_n^b \xrightarrow{d} \mu$ *für* $n \to \infty$.

Äquivalent zu den Bedingungen (ii) und (iii) sind die folgenden Beschreibungen in Termen von Verteilungen:

(ii') $\mu_j^b := P_{X_j^b} \in H$ für alle $j \in \mathbb{N}$,

(iii') $(a_n^b)^{-1}(\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{n} \mu_j^b) * \varepsilon_{c_n^b} \xrightarrow{d} \mu$ für $n \to \infty$.

Offensichtlich besteht der folgende Zusammenhang zu den in diesem Abschnitt bereits behandelten Klassen:

Proposition 2.4.14. $\mathcal{L}^C(H) = \widetilde{K}(H, C, I)$.

Am Ende dieses Abschnitts sollen schließlich die Klassen $L_\infty(C, Q)$ noch weiter untersucht werden. Auch dies ist eine Erweiterung der Ergebnisse von Bunge (vergleiche [4]) für den Fall $d = 1$.

Definition 2.4.15.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\ln^n} &= \left\{ \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} (\ln(1 + \|x\|))^n \nu(dx) < \infty \right\} \\ &= \left\{ \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} (\ln^+(\|x\|))^n \nu(dx) < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Man sagt, $\nu \in \mathcal{P}_{\ln^n}$ besitzt ein logarithmisches Moment der Ordnung n.

Nun können wir Verteilungen in $\widetilde{L}_m(C, Q)$ durch ein spezielles Faltungsprodukt beschreiben, dessen Faktoren aus Verteilungen mit logarithmischen Momenten bestehen.

Theorem 2.4.16. *Sei $0 \leq m < \infty$.*

(a) Sei $\mu \in \widetilde{L}_m(C, Q)$. Dann existiert für alle $b \in C \backslash \{0, 1\}$ ein $\nu_b \in \mathcal{P}_{\ln^{m+1}}$, so dass

$$\mu = \mathop{\ast}\limits_{j=0}^{\infty} b^{-jQ} \nu_b^{*\binom{m+j}{j}}. \tag{2.3}$$

(b) Seien $0 < b < 1$ und $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Weiter existiere ein $\nu_b \in \mathcal{P}_{\ln^{m+1}}$, so dass (2.3) erfüllt ist, dann ist $\mu \in \widetilde{L}_m(C, Q)$ mit $C = \{b^n, n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\}$.

Die Klassen $L_\infty(C, Q)$ und $\widetilde{L}_\infty(C, Q)$ sind identisch und die Verteilungen beider Klassen sind stets auch unendlich-teilbar, dies liefern abschließend die folgenden Theoreme:

Theorem 2.4.17. $\widetilde{L}_\infty(C, Q) \subset \mathrm{ID}(\mathbb{R}^d)$.

Theorem 2.4.18. $L_\infty(C, Q) = \widetilde{L}_\infty(C, Q)$.

Im nächsten Kapitel wird nun ein Teil der Resultate aus diesem Kapitel auf kontrahierbare, lokalkompakte Gruppen übertragen. Dabei muss die Gruppe $\mathbb{G}$ jedoch häufig weitere grundlegende Voraussetzungen erfüllen. Darüber hinaus betrachten wir im Folgenden ausschließlich eine Normierung durch Automorphismen τ.

Kapitel 3

τ-zerlegbare Verteilungen auf lokalkompakten Gruppen

Zunächst werden in diesem Kapitel τ-zerlegbare Verteilungen auf lokalkompakten Gruppen eingeführt und deren Eigenschaften untersucht. Für den Fall, dass die Faktoren bezüglich $*$ kommutieren, erhält man eine interessante Struktur geschachtelter Klassen analog zum Fall $\mathbb{R}^d$, der bereits im vorherigen Kapitel vorgestellt wurde. Im weiteren Verlauf des Kapitels wird der Zusammenhang zwischen der τ-Zerlegbarkeit und der Existenz logarithmischer Momente von Verteilungen dargelegt, analog zu 2.4.16, vergleiche auch [4]. Nun bezeichne im Folgenden $\mathbb{G}$ eine lokalkompakte Gruppe und $\mathcal{P}(\mathbb{G})$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{G}$, weiterhin sei $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ (= die Menge aller stetigen Automorphismen auf $\mathbb{G}$). Außerdem benötigen wir später aus technischen Gründen, dass $\mathbb{G}$ eine Gruppe mit 2. Abzählbarkeitsaxiom ist; dies bedeutet, dass die Topologie von $\mathbb{G}$ eine abzählbare Basis besitzt. Betrachten wir kontrahierbare, lokalkompakte Gruppen, so ist das zweite Abzhlbarkeitsaxiom direkt erfüllt, vergleiche dazu auch Lemma 4.4.3 oder [12], Abschnitt 3.1.5.

Bemerkung 3.0.1. Im Folgenden werden wir uns gelegentlich auf den Fall beschränken müssen, dass die betrachteten Verteilungen bzgl. der Faltung kommutieren. Dafür sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\mathbb{G})$ mit $(\mathcal{S}, *)$ kommutativ, d. h. in $\mathcal{S}$ liegen ausschließlich Verteilungen auf $\mathbb{G}$, die bezüglich der Faltung kommutativ sind. Wir wählen dann gegebenenfalls nur Verteilungen aus $\mathcal{S}$. $\Diamond$

Dass diese Einschränkung nicht nur zu trivialen Beispielen führt, zeigen wir im Folgenden, siehe dazu auch [2].

Beispiel 3.0.2. *(a) Sei $(\mathbb{G}, K)$ ein Gelfand-Paar (vergleiche Abschnitt 4.3.21 in [2]), dann ist $S = S(\mathbb{G}, K) = \{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{G}) : \omega_K * \mu = \mu * \omega_K\}$ eine kommutative Halbgruppe mit Einheit ω_K, wobei ω_K ein Haarmaß auf K bezeichnet. Für jede Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ gilt dann $\mu_0 = \omega_L$ für eine Untergruppe $L \supseteq K$.*

(b) (i) Seien $\mathbb{G}$ eine lokalkompakte Gruppe und $K \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ eine kompakte Untergruppe. Definieren wir $S_1(\mathbb{G}, K) := \{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{G}) : \kappa(\mu) = \mu$ für alle $\kappa \in K\}$, dann ist S_1 eine Faltungshalbgruppe mit Einheit ε_e. Es gibt genügend Beispiele mit kommutativem $S_1(\mathbb{G}, K)$, siehe auch [2].

(ii) Seien $(\mathbb{G}, K)$ wie in (i) und $\Gamma := \mathbb{G} \ltimes K$ das semidirekte Produkt, d.h.

$$(x, \kappa)(x', \kappa') := (x\kappa(x'), \kappa\kappa').$$

Somit ist $K \subseteq \{e\} \ltimes \Gamma$. Ist (Γ, K) ein Gelfand-Paar, so ist $S_1(\mathbb{G}, K)$ eine kommutative Unterhalbgruppe von $\mathcal{P}(\mathbb{G})$.

(c) Spezialfall von (b): Sei H_d die Heisenberggruppe, auf der die orthogonale Gruppe $O(2d) \subset \mathrm{Aut}(H_d)$ operiert (vergleiche auch [23], Beispiel 2.53). Dann ist die Orbital-Hypergruppe $S_1(H_d, O_{2d})$ kommutativ.

Bemerkung 3.0.3. Sei $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ eine Kontraktion. Wir betrachten eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ der Automorphismen auf $\mathbb{G}$, so dass für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt $\tau B = B\tau$. Weiter wird häufig vorausgesetzt, dass $\tau(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ und $B(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Wir werden uns später häufig auf Automorphismen aus $\mathcal{B}$ beschränken. $\Diamond$

3.1 τ-Zerlegbarkeit

Wir beginnen zunächst mit einem Grenzwertkriterium und arbeiten später auf ein Zerlegbarkeitskriterium hin. Die folgenden Definitionen, Notationen und Bemerkungen orientieren sich dabei, wenn nicht anders erwähnt, an [4] und [11]. Da wir hier im Allgemeinen nicht die Kommutativität der Faltungsprodukte voraussetzen, bereiten die Shift-Terme c_n, vergleiche Definition 2.4.1, Probleme. Viele Aussagen werden auch im Fall mit Shifts korrekt bleiben, der Einfachheit halber werden wir aber im weiteren Verlauf nur noch den Fall $c_n = e$ für alle $n \in \mathbb{N}$

betrachten. Außerdem seien ab jetzt $\mathcal{B}$ und $\mathcal{S}$ wie in den Bemerkungen 3.0.1 und 3.0.3 fest gewählt.

Definition 3.1.1. *Seien $\tau \in \operatorname{Aut}(\mathbb{G})$ und $H \subset \mathcal{P}(\mathbb{G})$, $H \neq \emptyset$. Man definiert:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^*(H,\tau) \;&:=\; \{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{G}) : \text{ es existieren } (\mu_n)_{n\geq 1} \subset H \text{ und } (B_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}, \\
&\qquad \text{so dass: } B_n B_{n+1}^{-1} \to \tau \text{ und } B_n^{-1}(\mu_1 * \ldots * \mu_n) \xrightarrow{w} \mu \text{ für } n \to \infty\}, \\
\mathcal{L}(H,\tau) \;&:=\; \{\mu \in \mathcal{L}^*(H,\tau) : (B_n^{-1}(\mu_j))_{j=1,\ldots,n} \subset \mathcal{S}\}.
\end{aligned}$$

In $\mathcal{L}(H,\tau)$ liegen also die Verteilungen aus $\mathcal{L}^*(H,\tau)$, für die alle zugehörigen Faktoren bezüglich der Faltung kommutieren.

Wir benötigen hier erneut einen etwas veränderten Begriff der vollständigen Abgeschlossenheit.

Definition 3.1.2. *$H \subset \mathcal{P}(\mathbb{G})$ heißt vollständig abgeschlossen, falls H abgeschlossen ist unter:*

(i) schwacher Konvergenz: $\mu_n \in H$, $\mu_n \xrightarrow{w} \mu \Rightarrow \mu \in H$,

(ii) Faltung: $\mu, \nu \in \mathcal{S} \cap H \Rightarrow \mu * \nu \in H$,

(iii) $\mathcal{B}$-Typ-Äquivalenz: $\mu \in H \Rightarrow B(\mu) \in H$ für alle $B \in \mathcal{B}$.

Der Begriff der τ-Zerlegbarkeit einer Verteilung μ auf einer lokalkompakten Gruppe spielt wie bereits erwähnt eine zentrale Rolle in dieser Arbeit und wird nun definiert, vergleiche auch [11], Definition 3.1.

Definition 3.1.3. *Seien $\mathbb{G}$ eine lokalkompakte Gruppe und $\tau \in \operatorname{Aut}(\mathbb{G})$.*

(a) Ein Maß $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$ heißt τ-zerlegbar (mit Kofaktor ν), falls $\mu = \nu * \tau(\mu)$.

(b) $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$ heißt stark τ-zerlegbar, falls überdies $\tau^k(\mu) \xrightarrow{w} \varepsilon_e$ für $k \to \infty$.

Die Bedingung in (b) ist stets erfüllt, wenn τ kontrahierend ist.

Bemerkung 3.1.4. Per Induktion folgt nun offensichtlich (siehe auch [11], Bemerkung 3.2) für alle $k \in \mathbb{N}$, dass

$$\mu = \nu(k) * \tau^k(\mu) \text{ mit } \nu(k) = \nu * \tau(\nu) * \ldots * \tau^{k-1}(\nu) = \mathop{\Large *}_{j=0}^{k-1} \tau^j(\nu).$$

Da wir im Folgenden nicht immer die Kommutativität der Faltung voraussetzen, müssen wir auf die richtige Reihenfolge der Faktoren achten. Daher benutzen wir sowohl für die Verteilungen als auch für die Gruppenelemente die Konvention:

$$\mathop{*}_{j=0}^{n} \nu_j := \nu_0 * \cdots * \nu_n \text{ bzw. } \prod_{j=0}^{n} x_j := x_0 x_1 \cdots x_n.$$

$\diamondsuit$

Dies liefert direkt den Zusammenhang zwischen der τ-Zerlegbarkeit einer Verteilung μ und der schwachen Konvergenz der Folge $\mathop{*}_{j=0}^{n} \tau^j(\nu)$.

Proposition 3.1.5. *Sei $\mathbb{G}$ eine kontrahierbare Gruppe mit $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$.*

(a) Sei μ (stark) τ-zerlegbar. Dann gilt

$$\mu = \lim_{k\to\infty} \nu * \tau(\nu) * \ldots * \tau^k(\nu) =: \mathop{*}_{j=0}^{\infty} \tau^j(\nu).$$

(b) Umgekehrt sei nun $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ kontrahierend und es existiere

$$\mu = \lim_{k\to\infty} \nu * \tau(\nu) * \cdots * \tau^k(\nu).$$

Dann ist μ stark τ-zerlegbar.

Für den Beweis sei der Leser auf [11], Proposition 3.3 verwiesen. Betrachtet man einen kontrahierenden Automorphismus auf $\mathbb{G}$, erhält man in obiger Proposition also Äquivalenz. Dies ist für unsere Untersuchungen interessant, da wir uns hauptsächlich mit Kontraktionen beschäftigen.

Folgerung 3.1.6. *Seien $\mathbb{G}$ eine kontrahierbare Gruppe und $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ kontrahierend. Dann gilt*

$$\mu = \nu * \tau(\mu) \Leftrightarrow \mu = \mathop{*}_{j=0}^{\infty} \tau^j(\nu).$$

Dies führt nun dazu, dass wir den Zusammenhang zwischen dem Grenzwertkriterium aus Definition 3.1.1 und der τ-Zerlegbarkeit herstellen können. Dafür sei in Proposition 3.1.7 und der darauf folgenden Bemerkung $\mathcal{B} := \{\tau^k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition 3.1.7. *Seien $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$, $H \subset \mathcal{P}(\mathbb{G})$ vollständig abgeschlossen, $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ kontrahierend und $\tau(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$. Dann gilt:*

$$\textit{es existiert } \nu \in H \cap \mathcal{S} \textit{ mit } \mu = \nu * \tau(\mu) \quad \Rightarrow \quad \mu \in \mathcal{L}^*(H, \tau).$$

Beweis. Mit Folgerung 3.1.6 und wegen der vollständigen Abgeschlossenheit von H gilt

$$\begin{aligned}\mu = \nu * \tau(\mu) \Rightarrow \mu &= \mathop{*}_{j\geq 0} \tau^j(\nu) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathop{*}_{j=0}^{n} \tau^j(\nu) \\ &= \lim_{n\to\infty} \tau^n\Big(\mathop{*}_{j=0}^{n} \tau^{j-n}(\nu)\Big).\end{aligned}$$

Es gilt $\tau^{j-n}(\nu) \in H$ für $j = 0, \dots, n$ und mit $B_n^{-1} := \tau^n$ folgt $\mu \in \mathcal{L}^*(H, \tau)$. □

Bemerkung 3.1.8. (a) In Proposition 3.1.7 erhält man sogar Äquivalenz für $\mathcal{L}(H, \tau)$, wenn man voraussetzt, dass $\tau^j(\nu) \in \mathcal{S}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$:

$$\mu \in \mathcal{L}(H, \tau) \Leftrightarrow \text{es existiert } \nu \in H \text{ mit } \mu = \nu * \tau(\mu) \text{ und } \tau^j(\nu) \in \mathcal{S} \text{ für alle } j.$$

(b) Unser Ziel im weiteren Verlauf dieses Abschnitts ist die Definition einer Folge geschachtelter Klassen von τ-zerlegbaren Verteilungen. Hierfür setzen wir voraus, dass sowohl $\mu, \tau^j(\nu) \in \mathcal{S}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ als auch $\tau(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$. ♢

Wir benötigen für das nächste Resultat und auch in weiteren Abschnitten dieser Arbeit das Shift-Kompaktheits-Theorem, siehe dazu auch [26], Theorem 2.1.

Theorem 3.1.9. *Sei $\mathbb{G}$ eine vollständig separable, metrische Gruppe und seien $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, $(\mu_n)_{n\geq 1}$ und $(\nu_n)_{n\geq 1}$ Folgen von Verteilungen auf $\mathbb{G}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lambda_n = \mu_n * \nu_n$. Sind zwei der drei Folgen $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, $(\mu_n)_{n\geq 1}$ und $(\nu_n)_{n\geq 1}$ relativkompakt, dann gilt dies auch für die dritte.*

Folgerung 3.1.10. *Gilt $\lambda_n = \mu_n * \nu_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und konvergiert für $n \to \infty$ sowohl $\lambda_n \to \lambda$ als auch $\mu_n \to \mu$, dann ist (ν_n) relativkompakt und für alle Häufungspunkte ν von ν_n gilt $\lambda = \mu * \nu$.*

Mithilfe dieses Theorems und der Folgerung können wir nun die folgende Proposition beweisen, die eine wichtige Vorbereitung für die Konstruktion der bereits erwähnten geschachtelten Klassen darstellt.

Proposition 3.1.11. *Seien $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$, $H \subset \mathcal{P}(\mathbb{G})$ vollständig abgeschlossen, $\tau(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ und $B(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ für alle $B \in \mathcal{B}$, dann gilt*

(a) $\mathcal{L}(H, \tau) \subset H$,

(b) $\mathcal{L}(H,\tau)$ ist vollständig abgeschlossen.

Beweis. (a) Sei $\mu \in \mathcal{L}(H,\tau)$, d.h. es existieren $\{\mu_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{S} \cap H$ und $\{B_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}$, so dass:

$$B_n^{-1}(\mu_1 * \cdots * \mu_n) \xrightarrow{w} \mu.$$

Dabei gilt $\mu^{(n)} := \mu_1 * \cdots * \mu_n \in H$ wegen Abgeschlossenheit unter Faltung und $B_n^{-1}(\mu^{(n)}) \in H$ wegen Abgeschlossenheit unter $\mathcal{B}$-Typ-Äquivalenz. Also folgt aufgrund der Abgeschlossenheit unter schwacher Konvergenz $\mu \in H$.
(b) Zu zeigen sind die Eigenschaften (i)-(iii) aus Definition 3.1.2:
(i) Abgeschlossenheit unter $\mathcal{B}$-Typ-Äquivalenz:
Sei $\mu \in \mathcal{L}(H,\tau)$, d.h. es existiert $\nu \in H$ mit $\mu = \nu * \tau(\mu)$ und $\tau^j(\nu) \in \mathcal{S}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$. Also gilt für alle $B \in \mathcal{B}$ wegen $B\tau = \tau B$

$$\begin{aligned} B(\mu) &= B(\nu * \tau(\mu)) \\ &= B(\nu) * B(\tau(\mu)) \\ &= B(\nu) * \tau(B(\mu)). \end{aligned}$$

Dabei gilt $B(\nu) \in H$ wegen vollständiger Abgeschlossenheit von H. Mit Proposition 3.1.7 bzw. Bemerkung 3.1.8 ($\tau^j B(\nu) = B\tau^j(\nu) \in \mathcal{S}$, da $B(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ für alle $B \in \mathcal{B}$) folgt die Abgeschlossenheit unter $\mathcal{B}$-Typ-Äquivalenz.
(ii) Abgeschlossenheit unter Faltung:
Seien $\mu, \mu' \in \mathcal{L}(H,\tau)$, dann gilt $\mu = \nu * \tau(\mu)$ und $\mu' = \nu' * \tau(\mu')$. Da alle Faltungsfaktoren nach Voraussetzung in $\mathcal{S}$ liegen und $\tau(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$, folgt

$$\mu * \mu' = \nu * \tau(\mu) * \nu' * \tau(\mu') = (\nu * \nu') * \tau(\mu * \mu').$$

(iii) Abgeschlossenheit unter schwacher Konvergenz:
Sei $(\mu_n) \in \mathcal{L}(H,\tau)$ mit $\mu_n \xrightarrow{w} \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$. Dann existiert für alle $n \geq 1$ ein $\nu_n \in H$, so dass

$$\mu_n = \nu_n * \tau(\mu_n).$$

Es gilt $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, $\tau(\mu_n) \xrightarrow{w} \tau(\mu)$ und nach dem Shift-Kompaktheits-Theorem existiert somit eine Teilfolge n', so dass $\nu_{n'} \xrightarrow{w} \nu \in H$. Also $\mu \in \mathcal{L}(H,\tau)$. □

Analog zu Proposition 3.1.11 kann man ebenfalls zeigen, dass $\mathcal{L}^*(H,\tau) \subset H$. Darüber hinaus ist $\mathcal{L}^*(H,\tau)$ abgeschlossen unter $\mathcal{B}$-Typ-Äquivalenz und schwacher Konvergenz. Für die Abgeschlossenheit unter Faltung benötigt man jedoch die Kommutativität.

Bemerkung 3.1.12. Man erhält nun offensichtlich die folgenden Eigenschaften.

(a) Sei H vollständig abgeschlossen, dann gilt:

$$H \supset \mathcal{L}(H,\tau) \supset \mathcal{L}(\mathcal{L}(H,\tau),\tau) \supset \ldots \; .$$

(b) Definiert man nun für $H := \mathcal{S}$ die folgenden Klassen

$$\begin{aligned} L_0^\tau &:= \mathcal{S}, \\ L_n^\tau &:= \mathcal{L}(L_{n-1}^\tau, \tau) \text{ für } n \geq 0, \\ L_\infty^\tau &:= \bigcap_{n\geq 0} L_n^\tau, \end{aligned}$$

dann gilt aufgrund der vollständigen Abgeschlossenheit von $H = \mathcal{S}$

$$\mathcal{S} = L_0^\tau \supset L_1^\tau \supset L_2^\tau \supset \ldots \supset L_\infty^\tau.$$

$\Diamond$

Dies führt zu einem Korollar, welches den Zusammenhang zwischen den Klassen L_n^τ und der τ-Zerlegbarkeit einer Verteilung ν darstellt. Der Beweis ist offensichtlich.

Korollar 3.1.13. *Seien $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$, $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$, $\mathcal{S}$ vollständig abgeschlossen. Dann gilt:*

(a) $\mu \in L_n^\tau \Leftrightarrow$ es existiert $\nu \in L_{n-1}^\tau$, so dass $\mu = \nu * \tau(\mu)$ und $\tau(\mu), \nu \in \mathcal{S}$,

(b) $\mu \in L_\infty^\tau \Leftrightarrow$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert $\nu_{n-1} \in L_{n-1}^\tau$, so dass $\mu = \nu_{n-1} * \tau(\mu)$ und $\tau(\mu), \nu_{n-1} \in \mathcal{S}$.

3.2 Semi-τ-Zerlegbarkeit

Wir wollen uns nun in diesem Abschnitt der Semi-τ-Zerlegbarkeit widmen, einer Verallgemeinerung der τ-Zerlegbarkeit. Dabei betrachten wir wieder Grenzverteilungen von Produkten von Zufallsvariablen auf $\mathbb{G}$ entlang Teilfolgen, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{S}$ seien dabei wieder fest gewählt.

Definition 3.2.1. *Seien $\tau \in \mathcal{B}$ und $H \subset \mathcal{P}(\mathbb{G})$, $H \neq \emptyset$. Wir sagen, μ gehört zur Klasse $\mathcal{L}_s^*(H,\tau)$, falls $(B_n)_{n\geq 1} \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$, $(\nu_n)_{n\geq 1} \subset H$ und $k_n \nearrow \infty$ existieren mit* *(i)* $B_{n+1}^{-1}B_n \to \tau$ *für* $n \to \infty$,

(ii) $B_n^{-1}(\mathop{*}\limits_{j=1}^{k_n} \nu_j) \xrightarrow{w} \mu$ *für* $n \to \infty$.

Gilt darüber hinaus

(iii) $k_{n+1}^{-1}k_n \to \alpha \in (0,1)$ *für* $n \to \infty$,

dann sagen wir, μ *gehört zur Klasse* $\mathcal{L}_s^*(H,\tau,\alpha)$.

Proposition 3.2.2. *Seien* $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ *und* $\mu \in \mathcal{L}_s^*(\mathcal{P}(\mathbb{G}),\tau)$. *Dann existiert ein* $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$, *so dass* $\mu = \tau(\mu) * \nu$.

Beweis. Für $\mu \in \mathcal{L}_s^*(\mathcal{P}(\mathbb{G}),\tau)$ gilt nach Definition, dass $(B_n)_{n\geq 1} \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$, $(\nu_n)_{n\geq 1} \subset H$ und $k_n \nearrow \infty$ existieren mit $B_{n+1}^{-1}B_n \to \tau$ und $B_{n+1}^{-1}(\mathop{*}\limits_{j=1}^{k_{n+1}} \nu_j) \xrightarrow{w} \mu$. Nun gilt

$$B_{n+1}^{-1}(\mathop{*}\limits_{j=1}^{k_{n+1}} \nu_j) = (B_{n+1}^{-1}B_n)(B_n^{-1}\mathop{*}\limits_{j=1}^{k_n} \nu_j) * (B_{n+1}^{-1}\mathop{*}\limits_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} \nu_j).$$

Setze $\tau_n := B_{n+1}^{-1}B_n$, $\lambda_n := B_n^{-1}\mathop{*}\limits_{j=1}^{k_n} \nu_j$ und $\sigma_n := B_{n+1}^{-1}\mathop{*}\limits_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} \nu_j$. Es gilt nach Voraussetzung, dass $\tau_n \to \tau$ und $\lambda_n \xrightarrow{w} \mu$. Damit folgt aus dem Shift-Kompaktheits-Theorem, dass $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ relativ kompakt ist. Für jeden Häufungspunkt ν von $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ gilt dann $\mu = \tau(\mu) * \nu$. $\square$

Wenn man in Proposition 3.2.2 erreichen will, dass μ die klassische τ-Zerlegbarkeits-Darstellung $\mu = \nu * \tau(\mu)$ besitzt, muss man z. B. zusätzlich voraussetzen, dass $\tau^j(\nu) \in \mathcal{S}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3.2.3. *Seien* $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ *und* $\mu = \tau(\mu) * \nu$ *mit* $\tau^n(\mu) \xrightarrow{w} \varepsilon_e$, *dann folgt* $\mu \in \mathcal{L}^*(H,\tau)$, *also insbesondere* $\mu \in \mathcal{L}_s^*(H,\tau)$.

Beweis. Wie in Bemerkung 3.1.4 erhält man in umgekehrter Reihenfolge

$$\begin{aligned} \mu &= \tau^n(\mu) * \tau^{n-1}(\nu) * \cdots * \tau^1(\nu) * \tau^0(\nu) \\ &= \tau^n(\mu) * \tau^n(\tau^{-1}(\nu) * \cdots * \tau^{-(n-1)}(\nu) * \tau^{-n}(\nu)). \end{aligned}$$

Mit $B_n := \tau^{-n}$ und $\nu_j := \tau^{-j}(\nu)$ folgt die Behauptung. $\square$

Ebenso wie in Proposition 3.2.2 muss man hier fordern, dass $\tau^j(\nu) \in \mathcal{S}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$, wenn man in der Voraussetzung die Form $\mu = \nu * \tau(\mu)$ benutzen will. Darüber hinaus gelten die Aussagen der Propositionen 3.2.2 und 3.2.3 auch für $\mathcal{L}(H, \tau)$, falls man dort zusätzlich fordert, dass $\tau, B_n \in \mathcal{B}$, $\tau(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$, $B(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ für alle $B \in \mathcal{B}$ und $\tau^j(\nu) \in \mathcal{S}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$.

3.3 Gruppen- und Automorphismennormen

Wir benötigen im späteren Verlauf dieses Kapitels unter anderem die Existenz einer subadditiven Norm auf $\mathbb{G}$. Weiterhin soll zu einer Kontraktion $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ eine Automorphismennorm $\|.\|$ existieren, so dass bereits $\|\tau\| < 1$ gilt. Die Existenz solcher Normen wird nun einerseits für homogene und andererseits für total unzusammenhängende Gruppen nachgewiesen. Später wird dies auf den allgemeinen Fall einer kontrahierbaren, lokalkompakten Gruppe übertragen. Zur Vorbereitung benötigen wir zunächst einige Lemmata über Gruppen- und Automorphismennormen.

Lemma 3.3.1. *Seien $\mathbb{G}$ eine lokalkompakte Gruppe mit neutralem Element e und $|\cdot|$ eine Gruppennorm auf $\mathbb{G}$. Dann ist*

$$\|\sigma\| := \sup_{x \neq e} \frac{|\sigma(x)|}{|x|}$$

eine Automorphismennorm auf $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$.

Lemma 3.3.2. *Seien $\mathbb{G}$ eine lokalkompakte Gruppe und $|\cdot|_i$, $1 \leq i \leq n$, Gruppennormen auf $\mathbb{G}$. Dann ist* $\max_{1 \leq i \leq n} |\cdot|_i$ *eine Gruppennorm auf $\mathbb{G}$.*

Lemma 3.3.3. *Sei $\mathbb{G}$ eine lokalkompakte Gruppe. Seien weiter $H \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ eine kommutative Untergruppe, $m_0 \in \mathbb{N}$ und $\|\cdot\|$ eine Automorphismennorm auf H. Dann ist*

$$\|\sigma\|_0 := \|\sigma^{m_0}\|, \ \sigma \in H$$

eine Automorphismennorm auf H.

Lemma 3.3.4. *Seien $\mathbb{G}$ eine lokalkompakte Gruppe und $H \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ eine Untergruppe. Seien weiter $\alpha > 0$ und $\|\cdot\|$ eine Automorphismennorm auf H. Dann ist*

$$\|\sigma\|_1 := \|\sigma\|^\alpha, \ \sigma \in H$$

eine Automorphismennorm auf H.

Da die Beweise offensichtlich sind, werden wir sie nicht nochmals explizit angeben. Wir zeigen nun die Existenz einer subadditiven, homogenen Norm auf einer homogenen Gruppe $\mathbb{G}$ mit den bereits erwähnten Eigenschaften.

Proposition 3.3.5. *Sei $\mathbb{G}$ eine homogene Gruppe mit Dilatationen $(\delta_t)_{t>0}$ und zugehöriger homogener Norm $|\cdot|$ (d. h. $|\delta_t x| = t|x|$). Weiter sei $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ eine Kontraktion mit $\tau\delta_t = \delta_t\tau$ für alle t. Dann existieren eine subadditive, homogene Norm $|\cdot|_*$ (bezüglich $(\delta_t)_{t>0}$) auf $\mathbb{G}$ mit kanonischer Automorphismennorm $\|\cdot\|_*$ und ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|\tau\|_* < 1$ und $\|\tau^{m_0}\|_* < 1$.*

Beweis. Sei durch $\sigma := \sup_{x\neq e} \frac{|\tau(x)|}{|x|}$ die kanonische Automorphismennorm definiert (auf $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$). Da τ eine Kontraktion ist, existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|\tau^{m_0}\| < 1$. Wir wählen m_0 minimal.

Man definiert nach Lemma 3.3.2 zunächst eine Norm durch

$$|x|_* := \max_{0\leq k\leq m_0-1} |\tau^k x|,\ x \in \mathbb{G}.$$

Diese ist subadditiv, denn:

$$|xy|_* = \max_{0\leq k\leq m_0-1} \left\{|\tau^k(xy)|\right\} \leq \max_{0\leq k\leq m_0-1} \left\{|\tau^k(x)| + |\tau^k(y)|\right\} \leq |x|_* + |y|_*.$$

Für $N \in \mathbb{N}$ gilt $N = nm_0 + k$ mit $0 \leq k < m_0$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\tau^N x|_* &= \max_{0\leq j<m_0} |\tau^{N+j}x| \\ &\leq \max_{0\leq j<m_0} \|\tau^{nm_0}\| \cdot |\tau^{k+j}x| \\ &\leq \|\tau^{m_0}\|^n \max\left\{|\tau^k x|, \ldots, |\tau^{m_0-1}x|, |\tau^{m_0}x|, \ldots, |\tau^{k+m_0-1}x|\right\}. \end{aligned}$$

Wegen $|\tau^j x|_* \leq \|\tau^j\| \cdot |x|_* < |x|_*$ für $j \geq m_0$ folgt weiter

$$\begin{aligned} |\tau^N x|_* &\leq \|\tau^{m_0}\|^n \max_{0\leq j<m_0} \left\{|\tau^j x|\right\} \\ &\leq \|\tau^{m_0}\|^n |x|_*. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Außerdem gilt

$$|\tau^{-1}x|_* = \max_{0\leq k<m_0} |\tau^{k-1}x| \leq \max_{0\leq k<m_0} \|\tau^{-1}\||\tau^k x| \leq \|\tau^{-1}\||x|_*.$$

Sei H eine kommutative Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ mit $\tau, (\delta_t)_{t>0} \in H$. Dann gilt mit Lemma 3.3.3 und 3.3.4, dass durch

$$\|\sigma\|_0 := \|\sigma^{m_0}\| \text{ und } \|\sigma|_1 := \|\sigma\|_0^{\frac{1}{2m_0}}$$

Automorphismennormen auf H definiert werden. Es gilt $\|\tau\|_0 < 1$ und $\|\tau\|_1 < 1$. Aus (3.1) folgt

$$|\tau^N x|_* \leq \|\tau\|_1^N |x|_* \text{ für } N \geq m_0 \text{ und } |\tau^k x|_* \leq |x|_* \text{ für } k \geq 0.$$

Nun sei $\|\cdot\|_*$ die kanonische Automorphismennorm zu $|\cdot|_*$ (definiert auf $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$). Nach Bemerkung 1.6.4 (d) ist $\|\sigma\|_* = \sup_{|x|_*=1} |\sigma(x)|_*$, denn $|\delta_t(x)|_* = t|x|_*$. Dann folgt

$$\|\tau^N\|_* \leq \|\tau\|_1^N \text{ für } N \geq m_0 \text{ und } \|\tau^N\|_* \leq 1 \text{ für } N < m_0$$

und

$$\|\tau^{-1}\|_* \leq \|\tau^{-1}\|.$$

□

Die so konstruierte Norm $|\cdot|_*$ auf $\mathbb{G}$ und die zugehörige Automorphismennorm $\|\cdot\|_*$ auf H erfüllen somit die Eigenschaften von 1.6.2-1.6.5. Auf einer kontrahierbaren, total unzusammenhängenden Gruppe existieren ebenfalls eine subadditive Norm und eine Automorphismennorm mit den gewünschten Eigenschaften, dies liefert die folgende Proposition.

Proposition 3.3.6. $\mathbb{G}$ *sei eine kontrahierbare, total unzusammenhängende Gruppe,* $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ *kontrahierend. Dann existiert eine subadditive Norm* $|\cdot|$ *auf* $\mathbb{G}$ *und eine Automorphismennorm* $\|\cdot\|$ *auf* $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ *mit* $\|\tau\| := \sup_{x\neq e} |\tau(x)|/|x| < 1$. *Insbesondere gilt mit der Notation aus Proposition 1.6.5* $R^{-n}|x| \leq |\tau^n(x)| \leq \rho^n|x|$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $\mathbb{G}$ eine total unzusammenhängende Gruppe, dann existieren kompakte, offene Untergruppen $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von $\mathbb{G}$, die die folgenden Bedingungen erfüllen (siehe Lemma 4.4.2 bzw. [12], Abschnitt 3.1 II):

(i) $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} U_n = \mathbb{G}$,

(ii) $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} U_n = \{e\}$, wobei e das Einheitselement in $\mathbb{G}$ ist,

(iii) $U_n \supset U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$,

(iv) $\tau^n U_0 = U_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Sei nun $0 < \rho < 1$. Definiert man $|x| := \inf_k\{\rho^k : x \in U_k\}$, dann gilt:

$$|x| = \rho^k \Leftrightarrow x \in U_k \setminus U_{k+1},\ |x| = |x^{-1}|.$$

Diese Norm ist subadditiv. Dazu seien nun $|x| = \rho^k$, $|y| = \rho^l$ und o.B.d.A. $l < k$. D. h. $x \in U_k \setminus U_{k+1}$ und $y \in U_l \setminus U_{l+1}$, und wegen $l < k$ folgt $y \in U_k$. Also gilt auch $xy \in U_k$, damit folgt:

$$|xy| \leq \max\{|x|, |y|\} \leq |x| + |y|.$$

Überdies gilt nach Konstruktion:

$$|\tau x| = \rho|x| \text{ und damit } |\tau^n x| = \rho^n|x|.$$

Für die Automorphismennorm wählt man

$$\|\sigma\| := \sup_{x \neq e} \frac{|\sigma(x)|}{|x|}.$$

Ist $x \in U_k$, dann folgt $\tau(x) \in U_{k+1}$ und somit $|\tau(x)|/|x| = \rho$ für alle k. Somit gilt

$$\|\tau\| = \sup_{x \neq e}\{\frac{|\tau(x)|}{|x|}\} = \rho < 1.$$

□

Nun kommen wir zum allgemeinen Fall einer kontrahierbaren, lokalkompakten Gruppe. Dieser Fall kann jetzt auf die obigen Fälle zurückgeführt werden.

Proposition 3.3.7. *Seien $\mathbb{G}$ eine kontrahierbare, lokalkompakte Gruppe und $\tau \in$ $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ eine Kontraktion. Dann existieren eine subadditive Norm $|\cdot|$ und eine Automorphismennorm $\|\cdot\|$ ($\{\delta_t, \tau\}$ kommutativ für geeignete Dilatationen $(\delta_t)_{t>0}$) mit $\|\tau\| < 1$, $R^{-n}|x| \leq |\tau^n(x)|$ für alle $n \geq 0$ und $|\tau^n(x)| \leq \rho^n|x|$ für $n \geq m_0$.*

Beweis. Für eine kontrahierbare, lokalkompakte Gruppe gilt nach 3.1.13 in [12]

$$\mathbb{G} = N \bigotimes D,$$

wobei N eine kontrahierbare, nilpotente Gruppe mit Dilatationen $(\delta_t)_{t>0}$ und D eine kontrahierbare, total unzusammenhängende Gruppe ist. Weiterhin gilt, dass $\tau = \kappa \otimes \sigma$, wobei κ auf N und σ auf D kontrahierend sind.
Seien weiter $|\cdot|_N$ bzw. $|\cdot|_D$ die zugehörigen subadditiven Normen und $\|\cdot\|_N$ und $\|\cdot\|_D$ die zugehörigen Automorphismennormen auf N bzw. D. Es gilt also

$\|\kappa\|_N \leq 1$, $\|\kappa^n\|_N \leq c^n$, für $n \geq m_0$ und $0 < c < 1$, $\|\sigma\|_D = C < 1$, $|\kappa x|_N = c|x|_N$ für $x \in N$ und $|\sigma x|_D = C|x|_D$ für $x \in D$.
Dann definieren wir für $(x, y) \in \mathbb{G}$

$$|(x, y)|_{\mathbb{G}} := |x|_N + |y|_D.$$

Diese Norm ist subadditiv, denn

$$\begin{aligned} |(x, y)(x', y')|_{\mathbb{G}} &= |(xx', yy')|_{\mathbb{G}} = |xx'|_N + |yy'|_D \\ &\leq (|x|_N + |x'|_N) + (|y|_D + |y'|_D) \\ &= (|x|_N + |y|_D) + (|x'|_N + |y'|_D) \\ &= |(x, y)|_{\mathbb{G}} + |(x', y')|_{\mathbb{G}}. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$|(x, y)|_{\mathbb{G}} = |(x, y)^{-1}|_{\mathbb{G}} \text{ und } |(x, y)|_{\mathbb{G}} = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (e_N, e_D).$$

Weiter gilt mit $\rho := \max\{c, C\} < 1$

$$|\tau(x, y)|_{\mathbb{G}} = |(\kappa x, \sigma y)|_{\mathbb{G}} = |\kappa x|_N + |\sigma y|_D \leq \rho|x|_N + \rho|y|_D = \rho|(x, y)|_{\mathbb{G}}$$

und daher folgt $\|\tau\| \leq 1$ und $\|\tau^{m_0}\| < 1$. Die übrigen Ungleichungen folgen unmittelbar.

$\square$

Wir können also im Folgenden auf kontrahierbaren, lokalkompakten Gruppen o.B.d.A. annehmen, dass eine subadditive Norm $|\cdot|$ auf $\mathbb{G}$ und eine Automorphismennorm $\|\cdot\|$ auf einer Untergruppe $H \supseteq \{\tau^k\}$ existieren, so dass für die Kontraktion τ bereits $\|\tau\| < 1$ gilt.

3.4 Logarithmische Momente und Konvergenz von Faltungsprodukten

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, einen Zusammenhang zwischen der Existenz logarithmischer Momente der Ordnung n und der schwachen Konvergenz gewisser Faltungsprodukte herzustellen. Im Folgenden sei dabei $\mathbb{G}$ stets eine kontrahierbare Gruppe. Darüber hinaus sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ immer der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 3.4.1. *Man definiert analog zu Definition 2.4.15*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\ln^n} &= \left\{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{G}) : \int \ln(1+\|x\|)^n \nu(dx) < \infty\right\} \\ &= \left\{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{G}) : \int \ln^+(\|x\|)^n \nu(dx) < \infty\right\},\end{aligned}$$

wobei $\|\cdot\|$ eine subadditive Norm und $n \geq 0$ seien. Man sagt, $\nu \in \mathcal{P}_{\ln^n}$ besitzt ein logarithmisches Moment der Ordnung n. Diese Klasse ist nach 1.6.2 für homogene Gruppen unabhängig von der speziellen Norm.

Lemma 3.4.2. *Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ messbar, $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi \in \mathcal{C}^1$ strikt monoton wachsend und $\psi' \in L^1$. Dann gilt:*

$$\int_\Omega \psi \circ f dP = \int_{\mathbb{R}_+} P(f > y)\psi'(y)dy.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega \psi \circ f dP &= \int_{\mathbb{R}_+} P(\psi \circ f > z)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} P(f > \psi^{-1}(z))dz \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} P(f > y)\psi'(y)dy.\end{aligned}$$

$\square$

Folgerung 3.4.3. *Insbesondere benötigen wir im Folgenden*

$$\mathbb{E}\left[(\log(1+\|X\|))^{n+1}\right] = (n+1)\int_0^\infty P(\|X\| > e^y - 1)y^n dy$$

bzw. äquivalent dazu

$$\mathbb{E}\left[(\log^+(\|X\|))^{n+1}\right] = (n+1)\int_0^\infty P(\|X\| > e^y)y^n dy.$$

Beweis. Mit $f(x) = \log(1+\|x\|)$ und $\psi(y) = y^{n+1}$ folgt sofort, dass

$$\mathbb{E}\left[(\log(1+\|X\|))^{n+1}\right] = (n+1)\int_0^\infty P(\log(1+\|X\|) > y)y^n dy.$$

Umformen liefert die Behauptung. $\square$

Analog zu Summen unabhängiger Zufallsvariabler im Vektorraum benötigen wir hier für Folgen von Produkten unabhängiger Zufallsvariabler die Äquivalenz von fast sicherer und stochastischer Konvergenz. Für den Beweis des folgenden Theorems sei dabei auf [14], Theorem 2.2.19 verwiesen. Da wir hier auch die zugehörigen Zufallsvariablen betrachten, sei daran erinnert, dass die Gruppe das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (dies folgt wie bereits erwähnt aus der Kontrahierbarkeit).

Theorem 3.4.4. *Seien $\mathbb{G}$ eine aperiodische, lokalkompakte Gruppe und $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariabler auf $\mathbb{G}$ mit Verteilungen $(\mu_n)_{n\geq 1}$, d. h. X_n hat die Verteilung μ_n. Sei $Y_n := X_1 \dots X_n$, dann sind äquivalent*

(i) *Y_n konvergiert fast sicher,*

(ii) *$\mathop{\ast}\limits_{i=1}^{n} \mu_i$ konvergiert schwach,*

(iii) *Y_n konvergiert stochastisch.*

Damit erhält man für den Fall aperiodischer lokalkompakter Gruppen auch direkt das folgende Korollar.

Korollar 3.4.5. *Seien $\mathbb{G}$ eine aperiodische, lokalkompakte Gruppe und $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariabler auf $\mathbb{G}$ mit Verteilungen $(\mu_n)_{n\geq 1}$, dann gilt*

$$\mathop{\ast}\limits_{i\geq k} \mu_i \text{ konvergiert schwach } \forall k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \prod_{i\geq k} X_i \text{ konvergiert f. s. } \forall k \in \mathbb{N}.$$

Da homogene Gruppen aperiodische, lokalkompakte Gruppen sind, erhalten wir also die obigen Äquivalenzen für homogene Gruppen. Im Falle allgemeiner lokalkompakter Gruppen kommt man jedoch nicht ohne eine Zusatzvoraussetzung aus, wenn man die Äquivalenz von fast sicherer Konvergenz und Konvergenz in Verteilung eines Produkts von unabhängigen Zufallsvariablen erhalten möchte. Zur vereinfachten Schreibweise im folgenden Satz benutzen wir die Notation

$$H_r(\nu) := \{x \in \mathbb{G} : \nu * \varepsilon_x = \nu\}$$

für die so genannte rechts-Invarianzgruppe einer Verteilung $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$. Außerdem setzen wir

$$\nu_{(k,n)} := \mathop{\ast}\limits_{i=k+1}^{n} \mu_i \text{ und } \nu_{(k)} := \mathop{\ast}\limits_{i=k+1}^{\infty} \mu_i$$

mit den Verteilungen aus dem vorherigen Theorem und Korollar.

Satz 3.4.6. *Seien $\mathbb{G}$ eine lokalkompakte Gruppe und $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariabler auf $\mathbb{G}$ mit Verteilungen $(\mu_n)_{n\geq 1}$. Gilt darüber hinaus*

$$\bigcap_{k\geq 1} H_r(\nu_{(k)}) = \{e\},$$

dann folgt

$$\prod_{i\geq k} X_i \text{ konvergiert f. s. } \forall k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \mathop{\ast}_{i\geq k} \mu_i \text{ konvergiert schwach } \forall k \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Es ist nur die Rückrichtung zu zeigen. Wir übernehmen hier die Notationen aus [14]. Nach Voraussetzung gilt $\nu_{(k,n)} \xrightarrow{w} \nu_{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Aus Korollar 2.2.7 in [14] folgt, dass

$$K_0 := \overline{\bigcup_{\lambda\in\mathfrak{L}} \operatorname{supp}(\lambda)}$$

kompakt ist (zur Definition von $\mathfrak{L}$ siehe 2.2.1 in [14]). Mit 2.2.9 in [14] folgt $K_0 \subset H_r(\nu_{(k)})$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und somit $K_0 \subset \bigcap_{k\geq 1} H_r(\nu_{(k)}) = \{e\}$. Theorem 2.2.16 in [14] liefert die fast sichere Konvergenz von $\prod_{i=k+1}^{n} X_i$, wenn wir dort $H = \{e\}$ wählen. □

Für unseren Fall der τ-Zerlegbarkeit können wir nun das folgende Korollar beweisen.

Korollar 3.4.7. *Seien $\mathbb{G}$ eine kontrahierbare, lokalkompakte Gruppe, $\tau \in \operatorname{Aut}(\mathbb{G})$ kontrahierend, $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$ und $(X_i)_{i\geq 1}$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariable mit Verteilung ν. Darüber hinaus sei X eine Zufallsvariable mit Verteilung μ. Dann gilt*

$$\mathop{\ast}_{j=1}^{n} \tau^j(\nu) \xrightarrow{w} \mu \text{ für } n \to \infty \Leftrightarrow \prod_{j=1}^{n} \tau^j(X_j) \to X \text{ fast sicher für } n \to \infty.$$

Beweis. Nach Satz 3.4.6 genügt es zu zeigen, dass

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} H_r(\mathop{\ast}_{k+1}^{\infty} \tau^j(\nu)) = \{e\}.$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned}
H_r(\mathop{\ast}_{j=k+1}^{\infty} \tau^j(\nu)) &= \{x : \mathop{\ast}_{k+1}^{\infty} \tau^j(\nu) * \varepsilon_x = \mathop{\ast}_{k+1}^{\infty} \tau^j(\nu)\} \\
&= \{x : \tau^{k+1}(\mathop{\ast}_{j=0}^{\infty} \tau^j(\nu)) * \varepsilon_x = \tau^{k+1}(\mathop{\ast}_{j=0}^{\infty} \tau^j(\nu))\} \\
&= \{x : \tau^{k+1}(\mathop{\ast}_{j=0}^{\infty} \tau^j(\nu) * \varepsilon_{\tau^{-(k+1)}(x)}) = \tau^{k+1}(\mathop{\ast}_{j=0}^{\infty} \tau^j(\nu))\} \\
&= \{x : \tau^{k+1}(\mu * \varepsilon_{\tau^{-(k+1)}(x)}) = \tau^{k+1}(\mu)\} \\
&= \{x : \mu * \varepsilon_{\tau^{-(k+1)}(x)} = \mu\} \\
&= \{x : \tau^{-(k+1)}(x) \in H_r(\mu)\}
\end{aligned}$$

und somit folgt $H_r(\mathop{\ast}_{j=k+1}^{\infty} \tau^j(\nu)) = \tau^{k+1}(H_r(\mu))$. Da τ kontrahierend ist, konvergiert $\tau^{k+1}(x)$ gegen e. Also folgt

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} H_r(\mathop{\ast}_{k+1}^{\infty} \tau^j(\nu)) = \{e\}.$$

□

Wir benötigen zunächst noch ein Hilfslemma.

Lemma 3.4.8. *Seien X eine $\mathbb{G}$-wertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $|\cdot|$ eine subadditive Norm auf $\mathbb{G}$. Dann gilt*

$$\int_1^{\infty} P(\ln^+|X| > y) y^n dy < \infty \;\; \Rightarrow \;\; \sum_{j=1}^{\infty} P(\ln^+|X| > j\beta) j^n < \infty \textit{ für alle } \beta > 0,$$

$$\int_1^{\infty} P(\ln^+|X| > y) y^n dy < \infty \;\; \Leftarrow \;\; \sum_{j=1}^{\infty} P(\ln^+|X| > j\beta) j^n < \infty \textit{ für ein } \beta > 0.$$

Beweis. Wir definieren $f_1(y) := P(\ln^+|X| > y)$ und $f_2(y) := y^n$ für $y > 1$. Beide Funktionen sind nichtnegativ und offensichtlich ist f_1 monoton fallend und f_2 monoton wachsend. Wir zeigen zunächst die zweite Aussage. Sei also $\sum_{j=1}^{\infty} P(\ln^+|X| > j\beta) j^n < \infty$ für ein $\beta > 0$. Nun setzen wir

$$z(j) := \max_{j\beta \le y \le (j+1)\beta} f_1(y) f_2(y) \text{ für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} z(j) &\leq \max_{j\beta\leq y\leq (j+1)\beta} f_1(y) \max_{j\beta\leq y\leq (j+1)\beta} f_2(y) \\ &= f_1(j\beta)f_2((j+1)\beta) \\ &= P(\ln^+|X|>j\beta)((j+1)\beta)^n. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich mithilfe der Abschätzung durch Riemann-Obersummen

$$\begin{aligned} \int_1^\infty P(\ln^+|X|>y)y^n dy &\leq \sum_{j=1}^\infty z(j) \\ &\leq \sum_{j=1}^\infty P(\ln^+|X|>j\beta)((j+1)\beta)^n \\ &\leq \sum_{j=1}^\infty P(\ln^+|X|>j\beta)j^n\beta^n(\frac{j+1}{j})^n \\ &\leq 2^n\beta^n\sum_{j=1}^\infty P(\ln^+|X|>j\beta)j^n \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Der Beweis der ersten Aussage verläuft analog. Wir setzen hier

$$z(j) := \min_{j\beta\leq y\leq (j+1)\beta} f_1(y)f_2(y) \text{ für alle } y>1.$$

Dann folgt wie oben

$$\begin{aligned} z(j) &\geq \min_{j\beta\leq y\leq (j+1)\beta} f_1(y) \min_{j\beta\leq y\leq (j+1)\beta} f_2(y) \\ &= f_1((j+1)\beta)f_2(j\beta) \\ &= P(\ln^+|X|>(j+1)\beta)(j\beta)^n. \end{aligned}$$

Analog zum Beweis der zweiten Aussage liefert eine Abschätzung die Behauptung. □

Für einige der Hauptresultate dieses Abschnitts ist eine Verallgemeinerung des Lemmas von Borel-Cantelli erforderlich. Wir benötigen Aussagen über Doppelfolgen von Mengen $(A_{k,l})_{k,l\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ und definieren für diese ähnlich zum limes superior für gewöhnliche Folgen von Mengen

$$A^* := \bigcap_{n\geq 1}\Big(\bigcup_{\max(k,l)\geq n} A_{k,l}\Big).$$

Lemma 3.4.9 (Borel-Cantelli für Doppelfolgen)**.** *Sei $(A_{k,l})_{k,l\in\mathbb{N}}$ eine Doppelfolge von Ereignissen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dann gilt*

(a) Sei $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} P(A_{k,l}) < \infty$, dann folgt $P(A^*) = 0$.

(b) Seien die Ereignisse $(A_{k,l})_{k,l\in\mathbb{N}}$ unabhängig und $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} P(A_{k,l}) = \infty$, dann folgt $P(A^*) = 1$.

Beweis. (a) Aus der Stetigkeit von oben und der σ-Subadditivität von P folgt

$$\begin{aligned}
P(A^*) &= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{\max(k,l)\geq n} A_{k,l}) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{\max(k,l)\geq n} P(A_{k,l}) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{l=1}^{n-1} P(A_{k,l}) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=n}^{\infty} P(A_{k,l}) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} P(A_{k,l}) + \lim_{n\to\infty} \sum_{l=n}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} P(A_{k,l}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b) Aus der Stetigkeit von unten folgt

$$\begin{aligned}
P((A^*)^c) &= P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\max(k,l)\geq n} A_{k,l}^c) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{\max(k,l)\geq n} A_{k,l}^c).
\end{aligned}$$

Da $\log(1-x) \leq -x$ für alle $x \in [0,1]$, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
P(\bigcap_{\max(k,l)\geq n} A_{k,l}^c) &= \prod_{\max(k,l)\geq n} (1 - P(A_{k,l})) \\
&= \exp(\sum_{\max(k,l)\geq n} \log(1 - P(A_{k,l})) \\
&\leq \exp(-\sum_{\max(k,l)\geq n} P(A_{k,l})) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Somit gilt $P(A^*) = 1$. $\square$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den Zusammenhang zwischen der Konvergenz gewisser Faltungsprodukte und der Existenz logarithmischer Momente herstellen, vergleiche auch Theorem 2.4.16. Da wir aber im allgemeinen Fall einer kontrahierbaren Gruppe keine Äquivalenz schwacher und fast sicherer Konvergenz wie in Satz 3.4.6 zur Verfügung haben, können wir zunächst nur eine Richtung beweisen.

Satz 3.4.10. *Seien $\mathbb{G}$ eine kontrahierbare, lokalkompakte Gruppe und $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ eine Kontraktion. Dann gilt:*

$$\nu \in \mathcal{P}_{\ln^{n+1}} \Rightarrow \mathop{\ast}_{j\geq 0} \tau^j \left(\nu^{*\binom{n+j}{j}}\right) \text{ konvergiert schwach.}$$

Beweis. Es sei zunächst vorausgesetzt, dass in Proposition 3.3.7 gilt $m_0 = 1$. Seien X, X_i, $X_{i,j}$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilung ν. Seien $n \in \mathbb{N}$ fest und $\nu \in \mathcal{P}_{\ln^{n+1}}$, d. h. $\int_{\mathbb{G}} (\ln^+ |x|)^{n+1} d\nu(x) < \infty$. Nun gilt wegen Lemma 3.4.2:

$$\int_{\mathbb{G}} (\ln^+ |x|)^{n+1} d\nu(x) = \int_{\Omega} (\ln^+ |X|)^{n+1} dP = \int_0^\infty P(\ln_+ |X| > y)(n+1)y^n dy < \infty.$$

Hieraus ergibt sich mit Lemma 3.4.8 folgende äquivalente Umformung:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty P(\ln^+ |X| > y)(n+1)y^n dy < \infty \\
\Leftrightarrow\quad & \int_0^\infty P(\ln^+ |X| > y)y^n dy < \infty \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{j\geq 0} j^n P(\ln^+ |X| > j\alpha) < \infty \qquad \forall\, \alpha > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{j\geq 0} j^n P(|X| > \exp(j\alpha)) < \infty \qquad \forall\, \alpha > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & I := \sum_{j\geq 0} \sum_{i=1}^{j^n} P(|X_{i,j}| > \exp(j\alpha)) < \infty \qquad \forall\, \alpha > 0.
\end{aligned}$$

Nun gilt aber nach Proposition 1.6.5 und Proposition 3.3.7 für $R := \|\tau^{-1}\| > 1$ und $0 < \rho := \|\tau\| < 1$

$$|\tau^n x| \;\geq\; R^{-n}|x|, \tag{3.2}$$

$$|\tau^n x| \;\leq\; \rho^n|x|, \tag{3.3}$$

und daher für alle $\delta > 0$

$$\{|\tau^n x| \geq \rho^n\delta\} \subseteq \{|x| \geq \delta\} = \{R^{-n}|x| \geq R^{-n}\delta\} \subseteq \{|\tau^n(x)| \geq R^{-n}\delta\}. \tag{3.4}$$

Daraus ergibt sich für $\delta = \exp(j\alpha)$ und für alle $j \in \mathbb{N}$

$$P(|X_{i,j}| \geq \exp(j\alpha)) \leq P(|\tau^j X_{i,j}| \geq R^{-j} \exp(j\alpha)), \tag{3.5}$$
$$P(|X_{i,j}| \geq \exp(j\alpha)) \geq P(|\tau^j X_{i,j}| \geq \rho^j \exp(j\alpha)), \tag{3.6}$$

und somit

$$\begin{aligned} I &\leq \sum_{j \geq 0} \sum_{i=1}^{j^n} P(|\tau^j X_{i,j}| \geq R^{-j} \exp(j\alpha)), \\ I &\geq \sum_{j \geq 0} \sum_{i=1}^{j^n} P(|\tau^j X_{i,j}| \geq \rho^j \exp(j\alpha)). \end{aligned}$$

Also folgt mit $\delta_\alpha := \rho \exp(\alpha)$:

$$\sum_{j \geq 0} \sum_{i=1}^{j^n} P(|\tau^j X_{i,j}| \geq \delta_\alpha^j) < \infty.$$

Wir definieren für $1 \leq i \leq j^n$

$$A_{i,j} := \{|\tau^j X_{i,j}| \geq \delta_\alpha^j\}$$

und $A_{i,j} = \emptyset$ sonst. Dann gilt $P(A_{i,j}) = P(A_{0,j})$ für $0 \leq i \leq j^n$. Aus dem Borel-Cantelli-Lemma für Doppelfolgen erhält man nun mit zugehörigem A^*:

$$P(A^*) = 0 \text{ für jedes feste } \alpha > 0.$$

Dies bedeutet, dass für P-fast alle ω ein $j(\omega)$ existiert, so dass für alle $i \leq j^n$ und $j \geq j(\omega)$ gilt $\omega \in A_{i,j}^c$, also $|\tau^j X_{i,j}(\omega)| < \delta_\alpha^j$.
Wähle nun $\alpha > 0$ so, dass $\delta_\alpha < 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} \sum_{i=1}^{j^n} \left|\tau^j X_{i,j}(\omega)\right| &= \sum_{j=0}^{j(\omega)} \sum_{i=1}^{j^n} \left|\tau^j X_{i,j}(\omega)\right| + \sum_{j > j(\omega)} \sum_{i=1}^{j^n} \left|\tau^j X_{i,j}(\omega)\right| \\ &\leq c_1(\omega) + \sum_{j \geq 0} \sum_{i=1}^{j^n} \delta_\alpha^j \\ &= c_1(\omega) + \sum_{j \geq 0} j^n \delta_\alpha^j \\ &< \infty \text{ f.s.,} \end{aligned} \tag{3.7}$$

wobei $c_1(\omega) := \sum_{j=0}^{j(\omega)} \sum_{i=1}^{j^n} |\tau^j X_{i,j}(\omega)| < \infty$ ist.

Analog gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 0} j^n \left|\tau^j X_{i,j}(\omega)\right| &= \sum_{j=0}^{j(\omega)} j^n \left|\tau^j X_{i,j}(\omega)\right| + \sum_{j>j(\omega)} j^n \left|\tau^j X_{i,j}(\omega)\right| \\ &\leq c_2(\omega) + \sum_{j\geq 0} j^n \delta_\alpha^j \\ &< \infty \text{ f.s.,} \end{aligned} \tag{3.8}$$

wobei hier $c_2(\omega) := \sum_{j=0}^{j(\omega)} j^n \left|\tau^j X_{i,j}(\omega)\right| < \infty$ ist.
Wegen $\binom{n+j}{j} = j^n + o(j^n)$ folgt nun auch

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\binom{n+j}{j}} \left|\tau^j X_{ij}(\omega)\right| \leq c_3(\omega) + \sum_{j\geq 0} j^n \delta_\alpha^j < \infty \text{ f.s.,} \tag{3.9}$$

wobei hier $c_3(\omega) := \sum_{j=0}^{j(\omega)} \sum_{i=1}^{\binom{n+j}{j}} \left|\tau^j X_{i,j}(\omega)\right| < \infty$ ist.
Also ist

$$\prod_{j\geq 0} \prod_{i=1}^{\binom{n+j}{j}} \tau^j X_{i,j}$$

eine Cauchyfolge fast sicher, damit konvergiert $\mathop{\ast}\limits_{j\geq 0} \tau^j \left(\nu^{*\binom{n+j}{j}}\right)$ schwach.
Im Fall $m_0 > 1$ verläuft der Beweis prinzipiell analog. Die Abschätzungen in (3.3), (3.4) und (3.6) gelten dann nur für $j \geq m_0$. Dies führt in (3.7), (3.8) und (3.9) lediglich zu einer weiteren additiven Konstanten, lässt den restlichen Beweis aber unverändert.

□

Für homogene Gruppen erhalten wir aber mithilfe der obigen Vorbereitungen auch die Umkehrung.

Satz 3.4.11. *Seien $\mathbb{G}$ eine homogene Gruppe und $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ eine Kontraktion. Dann gilt:*

$$\mathop{\ast}\limits_{j\geq 0} \tau^j \left(\nu^{*\binom{n+j}{j}}\right) \textit{ konvergiert schwach} \Rightarrow \nu \in \mathcal{P}_{\ln^{n+1}}.$$

Beweis. $\mathop{\ast}\limits_{j\geq 0} \tau^j \left(\nu^{*\binom{n+j}{j}}\right)$ konvergiere schwach. Nach Korollar 3.4.5 ist dies für unabhängig identisch-verteilte Zufallsvariablen $(X_{i,j})_{i,j}$ mit Verteilung ν äquivalent zur fast sicheren Konvergenz von

$$\prod_{j\geq 0} \tau^j (\prod_{i=1}^{\binom{n+j}{j}} X_{i,j}).$$

Nun folgt:

$$\text{für alle } \delta > 0 : P(\bigcap_{n\geq 0} (\bigcup_{\max(i,j)\geq n} \{|\tau^j X_{i,j}| > \delta\}) = 0.$$

Mit dem Lemma von Borel-Cantelli für Doppelfolgen erhält man daraus für alle $\delta > 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{j\geq 0} \sum_{i=1}^{j^n} P(|\tau^j X_{i,j}| > \delta) < \infty \\ \Leftrightarrow \quad & I := \sum_{j\geq 0} j^n P(|\tau^j X_{i,j}| > \delta) < \infty, \end{aligned}$$

da die $X_{i,j}$ identisch verteilt sind für alle i, j. Aus (3.4) ergibt sich

$$\{|\tau^j X_{i,j}| > \delta\} = \{|\tau^j X_{i,j}| > R^{-j}(R^j \delta)\} \supseteq \{|X_{i,j}| > R^j \delta\}$$

und mit $\delta_j = \delta^{1/j} R$

$$I \geq \sum_{j\geq 0} j^n P(|X_{i,j}| > \delta R^j) = \sum_{j\geq 0} j^n P(|X_{i,j}| > \delta_j^j).$$

Es ist $R > 1$. Wir wählen $\delta > 1$ und definieren $\bar{\delta} := \delta R$. Damit erhalten wir $\bar{\delta}^j = \delta^j R^j > \delta R^j = \delta_j^j$ und es ergibt sich mit $\{|x| > \delta_j^j\} \supseteq \{|x| > \bar{\delta}^j\}$ direkt

$$P(|X_{i,j}| > \delta_j^j) \geq P(|X_{i,j}| > \bar{\delta}^j)$$

und somit

$$I \geq \sum_{j\geq 0} j^n P(|X_{i,j}| > \bar{\delta}^j).$$

Wie im Beweis von Satz 3.4.10 und mithilfe von Lemma 3.4.8 gilt mit $\beta := \ln(\bar{\delta})$:

$$\begin{aligned} & \sum_{j\geq 1} j^n P(|X_{i,j}| > \bar{\delta}^j) < \infty \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{j\geq 1} j^n P(\ln^+ |X_{i,j}| > j\beta) < \infty \\ \Leftrightarrow \quad & \int (\ln^+ |X|)^{n+1} dP = (n+1) \int_1^\infty P(\ln^+ |X| > y) y^n dy < \infty. \end{aligned}$$

□

Diese Resultate liefern nun im folgenden Korollar die bereits erwähnte Verbesserung der Resultate von W. Hazod und H.-P. Scheffler in [11]. Dort wurde nur der Fall homogener Gruppen und $n = 0$ behandelt. Wir erhalten hier zum einen eine Übertragung auf mehrfache Zerlegbarkeit, zum anderen aber für den Fall $n = 0$ auch die Verallgemeinerung von homogenen Gruppen zu kontrahierbaren, lokalkompakten Gruppen. Dies zeigt das folgende Korollar.

Korollar 3.4.12. *Seien $\mathbb{G}$ eine kontrahierbare, lokalkompakte Gruppe und $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ eine Kontraktion. Im Fall $n = 0$ sind die Aussagen im Satz 3.4.10 äquivalent.*

Beweis. Die Hin-Richtung ist gerade der Spezialfall für $n = 0$. Die Rückrichtung folgt mit Korollar 3.4.7, denn für den Fall $n = 0$ sind schwache und fast sichere Konvergenz der auftretenden Verteilungen bzw. Zufallsvariablen nach 3.4.7 äquivalent. □

Bemerkung 3.4.13. Wir können nun die Bezeichnungen aus Satz 3.4.10 und die Aussagen (3.7), (3.8) und (3.9) nutzen und erhalten für homogene Gruppen weitere äquivalente Aussagen. Es gilt

$$\nu \in \mathcal{P}_{\ln^{n+1}} \Leftrightarrow \mathop{\ast}_{j\geq 0} \tau^j \left(\nu^{*\binom{n+j}{j}}\right) \text{ konvergiert schwach} \Leftrightarrow (3.7) \Leftrightarrow (3.8) \Leftrightarrow (3.9).$$

Dies folgt direkt aus den Beweisen von Satz 3.4.10 und 3.4.11, denn im ersten Beweis wurde eigentlich gezeigt

(a) $\nu \in \mathcal{P}_{\ln^{n+1}} \Rightarrow (3.7), (3.8)$,

(b) $(3.8) \Rightarrow (3.9)$,

(c) Aus jeder der drei Aussagen (3.7), (3.8), (3.9) folgt, dass $\mathop{\ast}_{j\geq 0} \tau^j \left(\nu^{*\binom{n+j}{j}}\right)$ schwach konvergiert. ◊

Bemerkung 3.4.14. Die Bedingung (3.9)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\binom{n+j}{j}} \left|\tau^j X_{ij}\right| < \infty \text{ f.s.}$$

bedeutet absolute Konvergenz und dies beinhaltet, dass die Reihe umgeordnet werden darf. Somit ist auch jedes Teilprodukt von $\mathop{\ast}_{j\geq 0} \tau^j(\nu^{\binom{n+j}{j}})$ konvergent. Setzt man voraus, dass $\tau^j(\nu^l) \in \mathcal{S}$ für alle $j,\ l \in \mathbb{Z}$, dann unter anderem auch

$$\mathop{\ast}_{j\geq 0} \tau^j(\nu^{\binom{n+j}{j}}) = \mathop{\ast}_{j\geq 0} \tau^j(\mathop{\ast}_{i\geq 0} \tau^i(\nu^{\binom{n-1+i}{n-1}})).$$

$\diamondsuit$

Satz 3.4.15. *Seien* $\mathbb{G}$ *eine kontrahierbare, lokalkompakte Gruppe und* $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ *eine Kontraktion. Darüber hinaus konvergiere*

$$\nu_\tau^{(k)} := \mathop{\ast}_{j\geq 0} \tau^j(\nu^{\binom{k+j}{j}})$$

schwach für alle $k \leq n-1$*. Seien* $(Z_l^{(k)})_{l\geq 1}$ *die zugehörigen unabhängigen Zufallsvariablen, d. h. Zufallsvariable mit Verteilung* $\nu_\tau^{(k)}$*. Dann gilt*

$$\prod_{j\geq 0} \tau^j(Z_j^{(k)}) \text{ konvergiert fast sicher für alle } k \leq n-1.$$

Beweis. Aus Bemerkung 3.4.14 folgt direkt, dass $\nu_\tau^{(k+1)} = \mathop{\ast}_{j\geq 0} \tau^j \nu_\tau^{(k)}$. Also ist Satz 3.4.10 anwendbar. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 3.4.16. Seien $(Z_j^{(k)})_{j\geq 1}$, $(Z_{j,i}^{(k)})_{j,i\geq 1}, \ldots$ jeweils unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable mit den entsprechenden Verteilungen aus dem vorherigen Satz. Dann gilt

$$\begin{aligned} Z^{(n)} &= \prod_{j\geq 0} \tau^j(Z_j^{(n-1)}) = \prod_{j\geq 0} \tau^j \prod_{i\geq 0} \tau^i(Z_{j,i}^{(n-2)}) \\ &= \ldots = \prod_{j_n\geq 0} \tau^{j_n}(\prod_{j_{n-1}\geq 0} \tau^{j_{n-1}}(\ldots(\prod_{j_0\geq 0} \tau_0^j(Z_{j_n,j_{n-1},\ldots,j_0}^{(0)})\ldots)), \end{aligned}$$

wobei die einzelnen Produkte fast sicher konvergieren. $\diamondsuit$

Für das folgende Theorem seien nun wieder $\mathcal{B}$ und $\mathcal{S}$ fest gewählt, mit den bereits zuvor vereinbarten Eigenschaften.

Theorem 3.4.17. *Seien* $\mathbb{G}$ *eine kontrahierbare, lokalkompakte Gruppe und* $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ *eine Kontraktion. Dann sind äquivalent:*

(a) $\mu \in L_n^\tau$,

(b) es existiert $\nu_\tau \in \mathcal{P}_{\ln^{n+1}}$*, so dass gilt:*

(i) $\mu = \mathop{\ast}\limits_{j\geq 0} \tau^j \nu_\tau^{*\binom{n+j}{j}}$,

(ii) für alle $k \leq n-1$ *konvergiert* $\mathop{\ast}\limits_{j\geq 0} \tau^j(\nu_\tau^{\binom{k+j}{j}})$ *schwach,*

(c) es existiert $\nu_\tau \in \mathcal{P}_{\ln^{n+1}}$*, so dass gilt:*

(i) $\mu = \mathop{\ast}\limits_{j\geq 0} \tau^j \nu_\tau^{*\binom{n+j}{j}}$,

(ii) $\sum_{j\geq 0} \sum_{i=1}^{\binom{n+j}{j}} |\tau^j X_{i,j}| < \infty$ *fast sicher, wobei die* $(X_{i,j})_{i,j}$ *unabhängig sind mit Verteilung* ν_τ.

Dabei sei wieder vorausgesetzt, dass $\tau^j(\nu_\tau^l) \in \mathcal{S}$ *für alle* $j, l \in \mathbb{N}$.

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$ Induktion nach n. Für den Fall $n = 0$ folgt die Behauptung aus Folgerung 3.1.6 und Proposition 3.1.7 (mit Kommutativitätsvoraussetzung):

$$\begin{aligned} \mu \in \mathcal{L}_0^\tau \quad &\Rightarrow \quad \exists \nu_\tau \in \mathcal{P}(\mathbb{G}) \text{ mit } \mu = \tau\mu * \nu_\tau \\ &\Rightarrow \quad \mu = \mathop{\ast}\limits_{j\geq 0} \tau^j \nu_\tau. \end{aligned}$$

Sei die Behauptung nun für n gezeigt und sei $\mu \in \mathcal{L}_{n+1}^\tau$. Dann folgt aus Korollar 3.1.13 und Folgerung 3.1.6, dass ein $\nu'_\tau \in \mathcal{L}_n^\tau$ existiert mit:

$$\mu = \mathop{\ast}\limits_{j\geq 0} \tau^j \nu'_\tau.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt aber:

$$\nu'_\tau = \mathop{\ast}\limits_{i\geq 0} \tau^i \nu_\tau^{*\binom{n+i}{n}},$$

wobei $\nu_\tau \in \mathcal{P}_{\ln^{n+1}}$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \mu &= \mathop{\ast}\limits_{j\geq 0} \tau^j \mathop{\ast}\limits_{i\geq 0} \tau^i \nu_\tau^{*\binom{n+i}{n}} \\ &= \mathop{\ast}\limits_{j\geq 0} \mathop{\ast}\limits_{i\geq 0} \tau^{j+i} \nu_\tau^{*\binom{n+i}{n}} \\ &= \mathop{\ast}\limits_{j\geq 0} \mathop{\ast}\limits_{i=0}^{j} \tau^j \nu_\tau^{*\binom{n+i}{n}} \\ &= \mathop{\ast}\limits_{j\geq 0} \tau^j \nu_\tau^{*\sum_{i=0}^{j}\binom{n+i}{n}} \\ &= \mathop{\ast}\limits_{j\geq 0} \tau^j \nu_\tau^{*\binom{n+j+1}{n+1}}. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus Proposition 3.1.7.
$(b) \Rightarrow (a)$ Auch hier benutzen wir eine Induktion nach n. Man kann die Kofaktoren von ν_{τ^k} wie folgt wählen:

$$\nu_{\tau^k} = \mathop{\ast}_{0\le j\le k-1} \tau^j \nu_\tau.$$

Dies ergibt sich aus Bemerkung 3.1.4. Damit und mit Folgerung 3.1.6 und Satz 3.4.10 ergibt sich der Fall $n = 0$. Denn angenommen (b) gilt, dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mu &= \mathop{\ast}_{j\ge 0} \tau^j \nu_\tau \\
&= \mathop{\ast}_{0\le j\le k-1} \tau^j \nu_\tau \ast \mathop{\ast}_{j\ge k} \tau^j \nu_\tau \\
&= \mathop{\ast}_{j\ge k} \tau^j \nu_\tau \ast \mathop{\ast}_{0\le j\le k-1} \tau^j \nu_\tau \\
&= \tau^k \mathop{\ast}_{j\ge 0} \tau^j \nu_\tau \ast \mathop{\ast}_{0\le j\le k-1} \tau^j \nu_\tau \\
&= \tau^k \mu \ast \nu_{\tau^k}.
\end{aligned}$$

Also folgt $\mu \in \mathcal{L}_n^\tau$.
Sei nun $n \ge 1$ fest und die Behauptung gelte für n. Sei $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$ und existiere $\nu_\tau \in \mathcal{P}_{ln^{n+2}}$ mit:

$$\mu = \mathop{\ast}_{j\ge 0} \tau^j \nu_\tau^{*\binom{n+1+j}{n+1}}.$$

Dann gilt analog zu „$(a) \Rightarrow (b)$“:

$$\mu = \mathop{\ast}_{j\ge 0} \tau^j \nu_\tau^{*\binom{n+1+j}{n+1}} = \mathop{\ast}_{j\ge 0} \tau^j \left(\mathop{\ast}_{i\ge 0} \tau^i \nu_\tau^{*\binom{n+i}{n}} \right).$$

Nun gilt aber nach Induktionsvoraussetzung, dass $\rho_n := \mathop{\ast}_{i\ge 0} \tau^i \nu_\tau^{*\binom{n+i}{n}} \in \mathcal{L}_n^\tau$, und damit folgt $\mu \in \mathcal{L}_{n+1}^\tau$.
$(b) \Leftrightarrow (c)$ Dies folgt aus Bemerkung 3.4.14. □

Wir betrachten nun weiterhin kontrahierbare, lokalkompakte Gruppen. Im Fall $n = 1$ können wir auch dann ähnliche äquivalente Aussagen wie im vorherigen Theorem treffen, wenn wir nicht voraussetzen, dass die betrachteten Verteilungen bzgl. der Faltung kommutativ sind. Wir haben zwar die Klassen $\mathcal{L}_n^\tau$ nur für den kommutativen Fall definiert, um die gewünschte geschachtelte Struktur zur erhalten. Jedoch können wir stattdessen die zweifache Zerlegbarkeit der Verteilung μ fordern. Dies bedeutet, dass für einen Automorphismus $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ die Verteilung μ τ-zerlegbar ist mit Kofaktor ν, welcher wiederum τ-zerlegbar ist. Im Fall $n > 1$ gelten die im Folgenden bewiesenen Äquivalenzen vermutlich auch. Jedoch wird die Formulierung sehr unübersichtlich, da man die auftretenden Faktoren ohne Kommutativitätsvoraussetzung nicht mehr geeignet zusammenfassen kann.

Satz 3.4.18. *Seien $\mathbb{G}$ eine kontrahierbare, lokalkompakte Gruppe und $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$. Seien $(X_{i,j})_{j\geq 1, i\leq j+1}$ unabhängige Zufallsvariable mit Verteilung λ. Weiter seien $Z_i := \prod_{k\geq 0} \tau^k(X_{i,k+i})$ mit Verteilung ν und $Y := \prod_{i\geq 0} \tau^i(Z_i)$ mit Verteilung μ. Sei*

$$\sum_{j\geq 0} \sum_{i=1}^{j+1} |\tau^j(X_{i,j})| < \infty \text{ f.s. },$$

dann gilt

(a) für alle Teilreihen $\sum_{j\geq i} |\tau^j(X_{i,j})| < \infty$ f.s.,

(b) $\nu = \lambda * \tau(\nu)$,

(c) $\mu = \nu * \tau(\mu)$.

Beweis. Da die Reihe $\sum_{j\geq 0} \sum_{i=1}^{j+1} |\tau^j(X_{i,j})|$ absolut konvergiert, kann man sie umordnen (siehe auch Bemerkung 3.4.14) und man erhält

$$\sum_{i\geq 1} \sum_{j\geq i-1} |\tau^j(X_{i,j})| < \infty \text{ f.s..}$$

Daher gilt für alle Teilreihen $\sum_{j\geq i-1} |\tau^j(X_{i,j})| < \infty$ fast sicher und somit konvergiert für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\prod_{j\geq i-1} \tau^j(X_{i,j}) = \tau^i(\prod_{j\geq i-1} \tau^{j-i}(X_{i,j})) = \tau^i(Z_i)$$

fast sicher. Dabei gilt $Z_i = \prod_{k\geq 0} \tau^k(X_{i,k+i})$. Weiterhin gilt

$$\sum_{i\geq 0} |\tau^i Z_i| \leq \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq i-1} |\tau^j(X_{i,j})| < \infty \text{ f.s..}$$

Also folgt

$$\nu = \lambda * \tau(\nu) \text{ und } \mu = \nu * \tau(\mu).$$

□

Nun kommen wir zur partiellen Umkehrung des vorherigen Satzes:

Satz 3.4.19. *Seien $\mathbb{G}$ eine kontrahierbare, lokalkompakte Gruppe und $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$. Sei μ zweifach τ-zerlegbar, d. h. es gelte $\mu = \nu * \tau(\mu)$ und $\nu = \lambda * \tau(\nu)$. Es seien $(X_{i,j})$ unabhängige Zufallsvariable mit Verteilung λ und Y eine Zufallsvariable mit Verteilung ν. Dann gilt*

(a) $\prod_{i=0}^{n} \tau^i(\prod_{j=0}^{\infty} \tau^j(X_{i,j})) \to Y$ *in Verteilung,*

(b) $\sum_{i\geq 0} |\tau^i(X_{i,j})| < \infty$ *fast sicher für alle* j*,*

(c) $\sum_{j\geq 0} |\tau^j \prod_{i\geq 0} \tau^i(X_{i,j})| < \infty$ *fast sicher.*

Beweis. Aus der zweifachen τ-Zerlegbarkeit von μ ergibt sich für alle $k, l \in \mathbb{N}$ induktiv

$$\mu = \mathop{\ast}_{j=0}^{k} \tau^j(\nu) * \tau^{k+1}(\mu) \text{ und } \nu = \mathop{\ast}_{i=0}^{l} \tau^i(\lambda) * \tau^{l+1}(\nu).$$

Wir setzen $\sigma_l := \mathop{\ast}_{i=0}^{l} \tau^i(\lambda)$ und erhalten durch Einsetzen des zweiten Ausdrucks in den ersten

$$\begin{aligned} \mu &= \mathop{\ast}_{j=0}^{k} \tau^j \left(\mathop{\ast}_{i=0}^{l} \tau^i(\lambda) * \tau^{l+1}(\nu) \right) * \tau^{k+1}(\mu) \\ &= \sigma_l * \tau^{l+1}(\nu) * \tau(\sigma_l) * \tau^{l+2}(\nu) * \ldots * \tau^{k-1}(\sigma_l) * \tau^{k+l}(\nu) * \tau^k(\sigma_l) * \tau^{k+l+1}(\nu) \\ &\quad * \tau^{k+1}(\mu). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Da τ kontrahierend ist, gilt bekanntermaßen (siehe Definition 3.1.3) $\tau^{k+1}(\mu) \stackrel{w}{\to} \varepsilon_e$ und $\tau^{k+i}(\nu) \stackrel{w}{\to} \varepsilon_e$ für $k \to \infty$. In (3.10) müssen also nur die Terme $\tau^i(\sigma_l)$ genauer betrachtet werden. Nun sei d eine Metrik auf $\mathcal{P}(\mathbb{G})$, die die schwache Topologie erzeugt. Dann folgt aus der τ-Zerlegbarkeit von μ, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $k \geq K_\varepsilon$ gilt:

$$d(\mu, \mathop{\ast}_{j=0}^{k} \tau^j(\nu)) < \varepsilon.$$

Aus der τ-Zerlegbarkeit von ν folgt ebenso, dass für alle $\delta > 0$ und alle $k \in \mathbb{N}$ ein $L_{\delta,k}$ existiert, so dass für alle $l \geq L_{\delta,k} \in \mathbb{N}$ gilt:

$$d(\tau^j(\nu), \tau^j(\sigma_l)) < \delta \text{ für } 0 \leq j \leq k.$$

Daraus ergibt sich also mit (3.10)

$$d(\mu, \mathop{\ast}_{j=0}^{k} \tau^j(\sigma_l)) \leq d(\mu, \mathop{\ast}_{j=0}^{k} \tau^j(\nu)) + d(\tau^j(\nu), \tau^j(\sigma_l)) < \varepsilon + k\delta.$$

Wir wählen nun ε_n und δ_n so, dass $\varepsilon_n + n\delta_n \to 0$ für $n \to \infty$. Dann existiert eine Folge $(m_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{N}$, so dass für alle $l_n \geq m_n$ gilt

$$d\left(\mu, \mathop{\ast}_{j=0}^{n} \tau^j \left(\mathop{\ast}_{i=0}^{l_n} \tau^i(\lambda)\right)\right) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

In Termen von Zufallsvariablen ausgedrückt bedeutet dies gerade

$$\prod_{j=0}^{n} \tau^j \left(\prod_{i=0}^{l_n} \tau^i(X_{i,j})\right) \to Y \text{ für } n \to \infty \text{ in Verteilung.}$$

Betrachtet man $Z_j := \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{l_n} \tau^i(X_{i,j})$, dann folgt

$$\prod_{j=0}^{n} \tau^j(Z_j) \to Y \text{ in Verteilung.}$$

Das Korollar 3.4.12 für den Spezialfall $n = 0$ liefert dann

$$\sum_{i\geq 0} |\tau^i(X_{i,j})| < \infty \text{ f.s. für alle } j \text{ und } \sum_{j\geq 0} |\tau^j(Z_j)| < \infty \text{ fast sicher.}$$

□

Kapitel 4

Stetig einbettbare Verteilungen

Wir wollen uns in diesem Kapitel mit der Zerlegbarkeit von Verteilungen beschäftigen, die stetig einbettbar in eine Hemigruppe sind. Stetige Faltungshemigruppen erzeugen gleichmäßig infinitesimale Dreieckssysteme, kommutative Faltungshemigruppen und insbesondere Faltungshalbgruppen erzeugen kommutative, infinitesimale Dreieckssysteme. Die Umkehrung gilt nur unter Zusatzvoraussetzungen. Der erste Abschnitt behandelt die Einbettbarkeit in Hemi- bzw. Faltungshalbgruppen. Danach werden Erzeugende Funktionale auf Vektorräumen, einfach zusammenhängenden nilpotenten Lie-Gruppen und total unzusammenhängenden Gruppen definiert und jeweils wichtige Resultate zitiert. Dies dient der Vorbereitung auf die Abschnitte über Erzeugende Funktionale τ-zerlegbarer Verteilungen auf lokalkompakten Gruppen.

4.1 Einbettbarkeit

Im ersten Abschnitt wird untersucht, wann eine τ-zerlegbare Verteilung einbettbar ist in eine Hemigruppe bzw. eine stetige Faltungshalbgruppe. Zunächst wird jedoch die Kommutativität der Faltung nicht vorausgesetzt. Dafür übertragen wir ein Resultat von C.R.E. Raja auf unseren Gruppenfall, siehe dazu [27], Section 3, Proposition 2. Zunächst benötigen wir dazu ein Lemma, der Beweis verläuft analog zu [27], Section 2, Lemma 1, siehe auch [34].

Lemma 4.1.1. *Seien $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ kontrahierend und $\Gamma \subset \mathcal{P}(\mathbb{G})$ relativ kompakt. Dann folgt $\tau^n(\gamma) \xrightarrow{w} \varepsilon_e$ gleichmäßig für alle $\gamma \in \Gamma$.*

Proposition 4.1.2. *Seien $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ kontrahierend und $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$ τ-zerlegbar ($\mu = \nu * \tau(\mu)$). Sei weiterhin ν einbettbar in eine stetige Hemigruppe $(\nu(s,t))_{0\le s\le t\le 1}$ mit $\nu = \nu(0,1)$. Dann existieren $(\gamma_i^{(n)})_{i\ge 1, n\ge 1} \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$ und eine Folge natürlicher Zahlen $k_n \nearrow \infty$, so dass das Dreieckssystem $(\tau^n(\gamma_i^{(n)}))_{i=1}^{k_n}, n \ge 1$ gleichmäßig infinitesimal ist und*

$$\mathop{*}_{i=1}^{k_n} \tau^n(\gamma_i^{(n)}) = \tau^n(\mathop{*}_{i=1}^{k_n} \gamma_i^{(n)}) \xrightarrow{w} \mu \text{ für } n \to \infty.$$

Beweis. Wir wählen eine beliebige Folge $k_n \in \mathbb{N}$ so, dass $k_{n+1} - k_n \nearrow \infty$, z.B. $k_n = n^2$. Weiterhin definieren wir für jedes $1 \le i \le k_n$

$$\gamma_i^{(n)} := \tau^{j-n-1}\left(\nu\left(\frac{i-1-k_{j-1}}{k_j - k_{j-1}}, \frac{i-k_{j-1}}{k_j-k_{j-1}}\right)\right),$$

falls $k_{j-1} < i \le k_j$. Aus der τ-Zerlegbarkeit von μ erhält man für alle $n \ge 1$

$$\mu = \nu * \tau(\nu) * \ldots * \tau^{n-1}(\nu) * \tau^n(\mu)$$

und mit $\tau^n(\mu) \xrightarrow{w} \varepsilon_e$ für $n \to \infty$ gilt nach Proposition 3.1.5

$$\nu * \tau(\nu) * \ldots * \tau^{n-1}(\nu) \xrightarrow{w} \mu. \tag{4.1}$$

Betrachten wir nun

$$\begin{aligned}
\tau^n\left(\mathop{*}_{j=1}^{k_n} \gamma_j\right) &= \tau^n\left(\mathop{*}_{j=1}^{n}\left(\mathop{*}_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} \gamma_i^{(n)}\right)\right)\\
&= \tau^n\left(\mathop{*}_{j=1}^{n}\left(\mathop{*}_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} \tau^{j-n-1}\left(\nu\left(\frac{i-1-k_{j-1}}{k_j-k_{j-1}}, \frac{i-k_{j-1}}{k_j-k_{j-1}}\right)\right)\right)\right)\\
&= \tau^n\left(\mathop{*}_{j=1}^{n} \tau^{j-n-1}\left(\mathop{*}_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} \nu\left(\frac{i-1-k_{j-1}}{k_j-k_{j-1}}, \frac{i-k_{j-1}}{k_j-k_{j-1}}\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Es gilt aufgrund der Hemigruppeneigenschaft

$$\mathop{*}_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} \nu\left(\frac{i-1-k_{j-1}}{k_j-k_{j-1}}, \frac{i-k_{j-1}}{k_j-k_{j-1}}\right) = \nu(0,1) = \nu$$

und wegen (4.1)

$$\begin{aligned}
\tau^n\left(\mathop{*}_{j=1}^{k_n} \gamma_j\right) &= \tau^n\left(\mathop{*}_{j=1}^{n} \tau^{j-n-1}(\nu)\right)\\
&= \nu * \tau(\nu) * \ldots * \tau^{n-2}(\nu) * \tau^{n-1}(\nu)\\
&\xrightarrow{w} \mu \text{ für } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Nun bleibt noch zu zeigen, dass das Dreieckssystem $(\tau^n(\gamma_i^{(n)}))_{i=1}^{k_n}, n \geq 1$ gleichmäßig infinitesimal ist, d. h. $\tau^n(\gamma_i^{(n)}) \xrightarrow{w} \varepsilon_e, n \to \infty$, gleichmäßig für alle i. Sei $\Gamma := \{\nu(s,t) : 0 \leq s \leq t \leq 1\}$. Dann ist Γ relativ kompakt. Da τ kontrahierend ist, folgt aus Lemma 4.1.1, dass $\tau^n(\gamma) \xrightarrow{w} \varepsilon_e$ gleichmäßig für alle $\gamma \in \Gamma$.

Seien nun $\varepsilon > 0$ und eine Nullumgebung U_0 in $\mathbb{G}$ gegeben. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\tau^n(\gamma)(\mathbb{G}\backslash U_0) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $\gamma \in \Gamma$. Für alle $j \leq [\frac{n}{2}]$ und $n \geq 2N$ gilt $n - j \geq N$ und wegen $\tau^j(\gamma_i^{(n)}) \in \Gamma$ folgt für $k_{j-1} < i \leq k_j$

$$\tau^n(\gamma_i^{(n)})(\mathbb{G}\backslash U_0) = \tau^{n-j}\left(\nu\left(\frac{i-1-k_{j-1}}{k_j - k_{j-1}}, \frac{i-k_{j-1}}{k_j-k_{j-1}}\right)\right)(\mathbb{G}\backslash U_0) < \varepsilon.$$

Nun ist τ kontrahierend, daher existiert eine Nullumgebung V_0, so dass $V_0 \subset \tau^{-n}(U_0)$ für alle $n \geq 1$. Weiterhin ist die Abbildung $(s,t) \mapsto \nu(s,t)$ gleichmäßig stetig auf $\{0 \leq s \leq t \leq 1\}$. Für $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$, so dass für alle $t - s < \delta$ folgt

$$\nu(s,t)(\mathbb{G}\backslash U_0) < \varepsilon.$$

Nach Konstruktion gilt $k_n - k_{n-1} \to \infty$, d. h. es existiert ein L, so dass $k_n - k_{n-1} > M$ für alle $n \geq L$ und $\frac{1}{M} < \delta$. Für $n \geq 2L$ und $j \geq [\frac{n}{2}]$ gilt dann $k_j - k_{j-1} > M$ und für diese n und j folgt

$$\nu\left(\frac{i-1-k_{j-1}}{k_j - k_{j-1}}, \frac{i-k_{j-1}}{k_j-k_{j-1}}\right)(\mathbb{G}\backslash V_0) < \varepsilon.$$

Somit gilt für alle $j \geq [\frac{n}{2}]$ und $n \geq 2L$

$$\begin{aligned}
\tau^n(\gamma_i^{(n)})(\mathbb{G}\backslash U_0) &= \tau^{n-j}\left(\nu\left(\frac{i-1-k_{j-1}}{k_j - k_{j-1}}, \frac{i-k_{j-1}}{k_j-k_{j-1}}\right)\right)(\mathbb{G}\backslash U_0) \\
&\leq \nu\left(\frac{i-1-k_{j-1}}{k_j - k_{j-1}}, \frac{i-k_{j-1}}{k_j-k_{j-1}}\right)(\mathbb{G}\backslash V_0) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Faltungshalbgruppen erzeugen in kanonischer Weise Hemigruppen durch $\nu(s,t) := \nu(t-s)$, siehe dazu auch [12], Abschnitt 2.14 IV. Im Folgenden werden wir nur kommutative Dreieckssysteme betrachten und uns daher auf den Fall der Einbettbarkeit in Faltungshalbgruppen beschränken.

Definition 4.1.3. *Wir sagen, μ ist semi-τ-zerlegbar, falls $\nu \in \mathcal{L}_s(H,\tau)$ und (gemäß der Definition in 3.2.1) zusätzlich das Dreieckssystem $(B_n\nu_j)$, $1 \leq j \leq k_n$, kommutativ und infinitesimal ist.*

Wir wollen nun semi-τ-zerlegbare Verteilungen charakterisieren. Da wir im allgemeinen Fall von Gruppen den Limes μ eines kommutativen, infinitesimalen Dreieckssystems nicht in eine Faltungshalbgruppe einbetten können, beschränken wir uns hier zunächst auf den Fall symmetrischer Verteilungen. In diesem Fall können wir ein Resultat von R. Shah nutzen, siehe dazu [29], Theorem 1.1.

Proposition 4.1.4. *Sei $\mathbb{G}$ eine homogene Gruppe und sei $(\mu_{n,j})_{n\in\mathbb{N},j=1,\dots,k_n}$ ein kommutatives, infinitesimales, symmetrisches Dreieckssystem, so dass*

$$\mathop{\ast}_{j=1}^{k_n} \mu_{n,j} \xrightarrow{w} \mu.$$

Dann ist μ einbettbar in eine stetige Faltungshalbgruppe (μ_t).

Wir können nun symmetrische, semi-τ-zerlegbare Verteilungen charakterisieren.

Theorem 4.1.5. *Seien $\mathbb{G}$ eine homogene Gruppe und $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ eine Kontraktion. Sei weiterhin $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$ symmetrisch. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) μ ist semi-τ-zerlegbar und das zugehörige infinitesimale Dreieckssystem ist symmetrisch und liegt in $\mathcal{S}$.

(ii) μ ist (stark) τ-zerlegbar, der Kofaktor ν ist symmetrisch und einbettbar in eine stetige Faltungshalbgruppe $(\nu_t)_{t\geq 0}$ und für die Kofaktoren gilt $\tau^k(\nu_j) \in \mathcal{S}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0, 1 \leq j \leq N(k)$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Setze für alle $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\lambda_n &:= \tau^n(\nu_1 \ast \cdots \ast \nu_{N(n)}),\\
\rho_n &:= \tau^n(\nu_1 \ast \cdots \ast \nu_{N(n-1)}),\\
\sigma_n &:= \tau^n(\nu_{N(n-1)+1} \ast \cdots \ast \nu_{N(n)}).
\end{aligned}$$

Es gilt $\lambda_n \xrightarrow{w} \mu$ und $\rho_n = \tau(\lambda_{n-1}) \xrightarrow{w} \tau(\mu)$ und mit $\lambda_n = \rho_n \ast \sigma_n$ folgt, dass $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ relativ kompakt ist. Für jeden Häufungspunkt ν von σ_n gilt also $\mu = \nu \ast \tau(\mu)$. ν ist Limes eines kommutativen infinitesimalen symmetrischen Dreieckssystems (in $\mathcal{S}$) und damit einbettbar in eine stetige Faltungshalbgruppe. Da τ kontrahierend ist, ist jede τ-zerlegbare Verteilung auch stark τ-zerlegbar.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Seien umgekehrt μ τ-zerlegbar mit Kofaktor ν und ν einbettbar in eine stetige Faltungshalbgruppe $(\nu_t)_{t\geq 0}$. Die Behauptung folgt nun aus Proposition 4.1.2 für die Hemigruppe $\nu(s,t) := \nu_{t-s}$. $\square$

Wir können uns von dem Fall symmetrischer Dreieckssysteme lösen, benötigen aber andere Voraussetzungen an das Dreieckssystem, damit der Limes einbettbar ist in eine stetige Faltungshalbgruppe. Beispiele dafür finden sich unter anderem bei Guivarc'h und Shah, [8], bei Maejima und Shah, [21], Theorem 5.2, bei Shah, [30], Theorem 1.6 bzw. [32], Theorem 4.1 und bei Neuenschwander, [25].

4.2 Erzeugende Funktionale auf Vektorräumen

In diesem Abschnitt sollen zunächst einige bekannte Definitionen und Resultate über die Lévy-Khinchin-Darstellung und Erzeugende Funktionale unendlichteilbarer Verteilungen auf Vektorräumen vorgestellt werden. Dazu bezeichne $\mathbb{V}$ im Folgenden stets einen Vektorraum. Für Beweise sei im Fall $\mathbb{V} = \mathbb{R}$ auf [16] und [37] verwiesen. Allgemeinere Beweise finden sich bei [14] und [26]. Wir benutzen die Notation $\mathbb{V}^\times := \mathbb{V}\backslash\{0\}$.

Definition 4.2.1. *(a) Sei $\varphi(x) := \|x\|^2/(1+\|x\|^2)$ für alle $x \in \mathbb{V}$. Man nennt φ Hunt-Funktion.*

(b) Ein nichtnegatives Radon-Maß $\eta \in \mathcal{M}_+(\mathbb{V}^\times)$ heißt Lévy-Maß auf $\mathbb{V}^\times$, falls

$$\int_{\mathbb{V}^\times} \varphi d\eta < \infty.$$

Offensichtlich ist dies äquivalent zu

$$\int_{V(\varepsilon)\backslash\{0\}} \|x\|^2 \eta(dx) < \infty \text{ und } \eta(\complement V(\varepsilon)) < \infty$$

für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times$. Dabei bezeichne $V(\varepsilon) := \{x \in \mathbb{V} : \|x\| < \varepsilon\}$.

Satz 4.2.2 (Lévy-Khinchin-Darstellung)**.** *Sei $\mu \in \mathrm{ID}(\mathbb{V})$, dann existieren $c \in \mathbb{V}$, $Q \in End^+(\mathbb{V})$ und ein Lévy-Maß η auf $\mathbb{V}^\times$, so dass*

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(y) &=: \exp\left(L(y)\right) \qquad (4.2) \\ &= \exp\left(i\langle c,y\rangle - \frac{1}{2}\langle Qy,y\rangle + \int_{\mathbb{R}^d\backslash\{0\}} \left[\exp(i\langle x,y\rangle) - 1 - i\frac{\langle x,y\rangle}{1+\|x\|^2}\right]\eta(dx)\right)\end{aligned}$$

für alle $y \in \mathbb{V}'$. Weiterhin ist das L-K-Tripel (c, Q, η) von μ eindeutig bestimmt. Man nennt L auch zweite charakteristische Funktion von μ oder log*-charakteristische Funktion.*

Umgekehrt gilt, dass für alle $c \in \mathbb{V}$, $Q \in End^+(\mathbb{V})$ und ein Lévy-Maß η auf $\mathbb{V}^\times$ genau ein $\mu \in \mathrm{ID}(\mathbb{V})$ existiert, so dass (4.2) gilt.

Bemerkung 4.2.3. Sei $\mu \in \mathrm{ID}(\mathbb{V})$ mit L-K-Tripel (c, Q, η), dann gelten die folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle $t \in \mathbb{R}_+^\times$ ist $\mu^t \in \mathrm{ID}(\mathbb{V})$ mit L-K-Tripel $(tc, tQ, t\eta)$, $\mu^0 = \varepsilon_0$. Dann ist $(\mu^t)_{t\geq 0}$ eine stetige Faltungshalbgruppe. Diese wird durch $\mu = \mu^1$ bzw. durch das L-K-Tripel (c, Q, η) eindeutig bestimmt. Für alle $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{V})$ mit $0 \notin \mathrm{supp}(f)$ gilt
$$\int_{\mathbb{V}^\times} f\ d\eta = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{V}^\times} f\ d\mu^t.$$

(b) Seien $A \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ und $a \in \mathbb{V}$, dann gilt $A(\mu) * \varepsilon_a \in \mathrm{ID}(\mathbb{V})$ mit L-K-Tripel
$$(C, AQA^*, A(\eta)|_{\mathbb{V}^\times}) \text{ für ein } C \in \mathbb{V}.$$

(c) Es gilt $C = a + A(c) + A(u(A))$, wobei
$$u(A) := \int_{\mathbb{V}^\times} \left(\frac{1}{1 + \|Ax\|^2} - \frac{1}{1 + \|x\|^2} \right) x\ \eta(dx).$$
Offensichtlich ist $u(A) = 0$ für $A \in \mathrm{Iso}(\mathbb{V})$.

(d) Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt $(A(\mu))^t = A(\mu^t)$ und $(A(\mu) * \varepsilon_a)^t = A(\mu^t) * \varepsilon_{at}$.

(e) Seien $\mu, \nu \in \mathrm{ID}(\mathbb{V})$ mit zugehörigem L-K-Tripel (c_1, Q_1, η_1) bzw. (c_2, Q_2, η_2), dann ist $\mu*\nu \in \mathrm{ID}(\mathbb{V})$ mit zugehörigem L-K-Tripel $(c_1+c_2, Q_1+Q_2, \eta_1+\eta_2)$.

$\Diamond$

Wir können nun das Erzeugende Funktional einer Verteilung μ definieren und einige Bemerkungen anführen, siehe dazu auch [12], Abschnitt 1.1 II, 1.3.16 und 1.3.17.

Definition und Bemerkung 4.2.4. *(a) Sei $\mu \in \mathrm{ID}(\mathbb{V})$ mit L-K-Darstellung (c, Q, η) und seien $c = (c_i)$, $Q = (q_{ij})$ (bzgl. einer Basis von $\mathbb{V}$), dann definieren wir ein lineares Funktional auf $\mathcal{C}^2(\mathbb{V})$ durch:*
$$\begin{aligned} \langle A, f \rangle \ &:= \ \sum_i c_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} q_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(0) \\ &+ \ \int_{\mathbb{V}^\times} \left[f(x) - f(0) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) \cdot \frac{x_i}{1 + \|x\|^2} \right] d\eta. \end{aligned}$$
A heißt Erzeugendes Funktional von μ (bzw. $\mu^\bullet$).

(b) Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}\langle c, f\rangle &:= \textstyle\sum_i c_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(0),\\ \langle Q, f\rangle &:= \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i,j} q_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(0),\\ \xi_i &: x \mapsto \tfrac{x_i}{1+\|x\|^2},\\ \psi f &: x \mapsto \textstyle\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) \cdot \xi_i(x)\end{aligned}$$

erhält man die vereinfachte Darstellung

$$\langle A, f\rangle = \langle C, f\rangle + \langle Q, f\rangle + \int_{\mathbb{V}^\times} (f(x) - f(0) - \psi f(x)) d\eta(x).$$

(c) Für $y \in \mathbb{V}$ sei $\gamma_y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{V})$ die Abbildung: $x \mapsto \exp(i\langle x, y\rangle)$. Dann gilt für L aus Satz 4.2.2 $L(y) = \langle A, \gamma_y\rangle$.

(d) Man bezeichnet mit $\mathcal{GF}(\mathbb{V})$ die Menge aller Erzeugenden Funktionale auf $\mathbb{V}$.

(e) Sei $(\mu^t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine stetige Faltungshalbgruppe mit $\mu_0 = \varepsilon_0$. Dann kann das Erzeugende Funktional dargestellt werden durch:

$$\langle A, f\rangle = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\langle \mu_t - \varepsilon_0, f\rangle = \frac{d^+}{dt}\langle \mu_t, f\rangle|_{t=0} \text{ für alle } f \in \mathcal{E}(\mathbb{V}).$$

4.3 Erzeugende Funktionale auf einfach zusammenhängenden nilpotenten Lie-Gruppen

Wie schon in Abschnitt 1.4 bemerkt, ist eine stetige Faltungshalbgruppe im Allgemeinen nicht eindeutig durch ein Maß $\mu = \mu_1$ bestimmt. Stattdessen wollen wir im Folgenden Erzeugende Funktionale betrachten, welche eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{P}(\mathbb{G})$ eindeutig charakterisieren. Zunächst werden Erzeugende Funktionale auf lokalkompakten Gruppen definiert und einige bekannte Resultate aufgeführt. Im Anschluss wird die Beziehung zwischen Erzeugenden Funktionalen auf einfach zusammenhängenden Lie-Gruppen und den zugehörigen Lie-Algebren dargestellt. Diesen Zusammenhang benötigen wir im Abschnitt 4.5, um Erzeugende Funktionale τ-zerlegbarer Verteilungen auf lokalkompakten Gruppen zu untersuchen.

Definition 4.3.1. *(a) Sei $\mathcal{D}(\mathbb{G})$ bzw. $\mathcal{E}(\mathbb{G})$ der Raum der Testfunktionen bzw. der beschränkten, regulären Funktionen auf $\mathbb{G}$ im Sinne von Bruhat [3]. Für Lie-Gruppen gilt dann $\mathcal{D}(\mathbb{G}) = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{G})$ und $\mathcal{E}(\mathbb{G}) = \{f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{G}) : fg \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$ für alle $g \in \mathcal{D}(\mathbb{G})\} = \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{G})$, siehe auch [12].*

(b) *Sei $(\mu_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine stetige Faltungshalbgruppe mit $\mu_0 = \varepsilon_e$. Dann wird das Erzeugende Funktional definiert durch:*

$$\langle A, f\rangle = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\langle \mu_t - \varepsilon_e, f\rangle = \frac{d^+}{dt}\langle \mu_t, f\rangle|_{t=0} \text{ für alle } f \in \mathcal{E}(\mathbb{G}).$$

(c) *Analog zum Vektorraumfall bezeichnen wir mit $\mathcal{GF}(\mathbb{G})$ die Menge aller Erzeugenden Funktionale stetiger Faltungshalbgruppen auf $\mathbb{G}$.*

(d) *Man definiert durch*

$$T_\mu f(x) := \langle \mu, {}_x f(\cdot)\rangle := \int_{\mathbb{G}} f(xy)d\mu(y) \text{ für } f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{G})$$

den zu einem Maß μ gehörigen Faltungsoperator. Dabei sei ${}_x f(\cdot) := f(x\cdot)$.

Die nächsten Theoreme liefern den eindeutigen Zusammenhang zwischen der Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ und dem zugehörigen Erzeugenden Funktional A, siehe dazu [14], Theorem 4.5.9 und [12], Theorem 2.0.3. Wir benötigen zunächst die Definition eines infinitesimalen Generators, siehe [14], Abschnitt 4.1.

Definition 4.3.2. *Für eine Kontraktionshalbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ auf einem Banachraum B ist der infinitesimale Generator N definiert durch*

$$Nf := \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t}(T_t - I)f$$

für $f \in \mathrm{Def}(N) = \{f \in B : \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t}(T_t - I)f$ existiert in $B\}$. In unserem Fall ist $B = \mathcal{C}_0(\mathbb{G})$.

Außerdem benötigen wir die Begriffe primitive und quadratische Form, siehe [14], Definition 1.5.15.

Definition 4.3.3. *Sei ψ ein reelles lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\mathbb{G})$.*

(a) *ψ heißt primitive Form, falls für alle $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$ gilt:*

$$\psi(fg^*) = \psi(f)g(e) - f(e)\psi(g),$$

wobei $g^*(x) := g(x^{-1})$.

(b) *ψ heißt quadratische Form, falls für alle $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$ gilt*

$$\psi(fg) + \psi(fg^*) = 2(\psi(f)g(e) + f(e)\psi(g)).$$

Nun kommen wir zum Lévy-Khinchin-Theorem für beliebige lokalkompakte Gruppen, vergleiche dazu [14], Theorem 4.5.9. Für die Definition einer Lévy-Abbildung und eines Lévy-Maßes sei der Leser auf [14], Definition 4.4.10 und 4.3.8 verwiesen, für die Definition der Begriffe fast positiver bzw. normierter Funktionale siehe auch [14], Definition 4.4.6.

Theorem 4.3.4 (Lévy-Khinchin)**.** *Sei $\mathbb{G}$ eine lokalkompakte Gruppe.*

(a) Sei $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Faltungshalbgruppe in $\mathcal{P}(\mathbb{G})$ mit Erzeugendem Funktional A, dann gilt:

(i) $\mathcal{D}(\mathbb{G}) \subset Def(A)$.

(ii) A ist fast positiv und normiert auf $\mathcal{D}(\mathbb{G})$.

(iii) Sei Γ eine Lévy-Abbildung auf $\mathbb{G}$, dann existieren eine primitive Form ψ_1, eine quadratische Form ψ_2 auf $\mathcal{D}(\mathbb{G})$ und ein Lévy-Maß η auf $\mathbb{G}$, so dass A die Darstellung (ψ_1, ψ_2, η) besitzt, definiert durch

$$A(f) = \psi_1(f) + \psi_2(f) + \int_{\mathbb{G}^\times} (f - f(e) - \Gamma(f))d\eta \qquad (4.3)$$

für alle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$.

(iv) η und ψ_2 sind durch $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eindeutig bestimmt.

(v) $\int_{\mathbb{G}^\times} f d\eta = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t}\int_{\mathbb{G}} d\mu_t$ für alle $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{G}^\times)$.

(b) Seien umgekehrt Γ eine Lévy-Abbildung auf $\mathbb{G}$, ψ_1 eine primitive Form, ψ_2 eine quadratische Form auf $\mathcal{D}(\mathbb{G})$ und η ein Lévy-Maß auf $\mathbb{G}$. Wird durch (4.3) ein lineares Funktional L auf $\mathcal{D}(\mathbb{G})$ definiert, dann gilt:

(i) L ist fast positiv und normiert auf $\mathcal{D}(\mathbb{G})$.

(ii) Es existiert eine eindeutig bestimmte stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $\mathcal{P}(\mathbb{G})$ mit Erzeugendem Funktional A und infinitesimalem Generator N, so dass $A|_{\mathcal{D}(\mathbb{G})} = L$.

(iii) $\mathcal{D}(\mathbb{G}) \subset D_A$.

Theorem 4.3.5. *Seien $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Faltungshalbgruppe und A das zugehörige Erzeugende Funktional. Dann gilt*

(a) $(\mu_t)_{t\geq 0}$ ist eindeutig durch A charakterisiert.

(b) *Die Faltungshalbgruppe* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *definiert eine* C_0*-Kontraktionshalbgruppe von Faltungsoperatoren* $(T_t = T_{\mu_t})_{t\geq 0}$ *auf* $\mathcal{C}_0(\mathbb{G})$ *mit infinitesimalem Generator* (N, D_N) *und* $\mathcal{D}(\mathbb{G}) \subset D_N$*. Darüber hinaus gilt* $Nf = T_A f$ *für* $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$*, also*

$$\langle A, f\rangle = Nf(e).$$

Dabei ist der Faltungsoperator T_A *definiert als* $x \mapsto T_A f(x) := \langle A, {}_x f\rangle$.

(c) $\mathcal{D}(\mathbb{G})$ *ist ein Kern für* (N, D_N) *(d. h.* $\overline{(N|_{\mathcal{D}(\mathbb{G})})} = (N, D_N)$*) und daher ein gemeinsamer Kern für alle Generatoren stetiger Faltungshalbgruppen.*

Definition 4.3.6. *Es sei* $\operatorname{Exp} : \mathcal{GF}(\mathbb{G}) \to \mathcal{P}(\mathbb{G})$ *die Abbildung*

$$tA \mapsto \operatorname{Exp}(tA) = \operatorname{Exp}_{\mathbb{G}}(tA) =: \mu_t, t \geq 0,$$

wobei $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *die Faltungshalbgruppe mit Erzeugendem Funktional* A *ist.*

Im folgenden Theorem wird der Zusammenhang zwischen Erzeugenden Funktionalen auf einer exponentiellen Lie-Gruppe und auf der zugehörigen Lie-Algebra dargestellt, vergleiche auch [12], Korollar 2.0.8 und Theorem 2.1.1.

Theorem 4.3.7. *Im Falle einer exponentiellen Lie-Gruppe* $\mathbb{G}$ *mit Lie-Algebra* $\mathbb{V}$ *wird durch* $f \mapsto f^\circ := f \circ \exp$ *ein Isomorphismus zwischen* $\mathcal{D}(\mathbb{G})$ *und* $\mathcal{D}(\mathbb{V})$*,* $\mathcal{E}(\mathbb{G})$ *und* $\mathcal{E}(\mathbb{V})$ *sowie* $\mathcal{C}_b(\mathbb{G})$ *und* $\mathcal{C}_b(\mathbb{V})$ *definiert. Weiter definieren wir* $A \mapsto A^\circ$ *durch*

$$\langle A^\circ, f^\circ\rangle := \langle A, f\rangle$$

und erhalten so jeweils einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{D}'(\mathbb{G})$ *und* $\mathcal{D}'(\mathbb{V})$ *sowie* $\mathcal{E}'(\mathbb{G})$ *und* $\mathcal{E}'(\mathbb{V})$*, so dass* $A \in \mathcal{GF}(\mathbb{G})$*, falls* $A^\circ \in \mathcal{GF}(\mathbb{V})$.

Im Folgenden wird die Beziehung zwischen Verteilungen auf einer Lie-Gruppe $\mathbb{G}$ und der zugehörigen Lie-Algebra $\mathbb{V}$ beschrieben. Diese Beziehung bezeichnen wir hier als Übersetzungs-Methode (vergleiche auch [12], Abschnitt 2.1). Die Übersetzung vom Gruppenfall auf den Vektorraumfall wird uns später helfen, die Struktur Erzeugender Funktionale von τ-zerlegbaren Verteilungen auf Gruppen zu untersuchen. Für die nachfolgenden Theoreme sei auf die Theoreme 2.1.3 und 2.1.4 in [12] verwiesen.

Theorem 4.3.8. *Seien* $(\mu_t^{(n)})_{t\geq 0}, n \in \mathbb{N}$ *und* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *stetige Faltungshalbgruppen mit Erzeugenden Funktionalen* A_n *bzw.* A*. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mu_t^{(n)} \xrightarrow{w} \mu_t$ *für* $t \geq 0$*,*

(ii) $\langle A_n, f\rangle \to \langle A, f\rangle$ *für alle* $f \in \mathcal{E}(\mathbb{G})$*,*

(iii) $\langle A_n^\circ, f^\circ\rangle \to \langle A^\circ, f^\circ\rangle$ *für alle* $f^\circ \in \mathcal{E}(\mathbb{V})$*,*

(iv) $\gamma_t^{\circ(n)} := \mathrm{Exp}_{\mathbb{V}}(tA_n^\circ) \xrightarrow{w} \gamma_t^\circ := \mathrm{Exp}_{\mathbb{V}}(tA^\circ)$*,*

(v) $\gamma_1^{\circ(n)} \xrightarrow{w} \gamma_1^\circ$*,*

(vi) $\rho^{(n)} := \int_0^\infty e^{-t}\mu_t^{(n)}dt \to \int_0^\infty e^{-t}\mu_t dt$*.*

Theorem 4.3.9. *Seien* $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$ *und* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *eine stetige Faltungshalbgruppe mit Erzeugendem Funktional* A *und* $k_n \in \mathbb{N}$ *mit* $k_n \nearrow \infty$*. Dann sind äquivalent:*

(i) $\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow{w} \mu_t = \mathrm{Exp}_{\mathbb{G}}(tA)$ *für* $t \geq 0$*,*

(ii) $\exp(tk_n(\nu_n - \varepsilon_e)) \xrightarrow{w} \mu_t$ *für* $t \geq 0$*,*

(iii) $\langle k_n(\nu_n - \varepsilon_e), f\rangle = k_n \int_{\mathbb{G}} f - f(e)d\nu_n \to \langle A, f\rangle$ *für alle* $f \in \mathcal{E}(\mathbb{G})$*,*

(iv) $\langle k_n(\nu_n^\circ - \varepsilon_e), f^\circ\rangle = k_n \int_{\mathbb{V}} f^\circ - f^\circ(0)d\nu_n^\circ \to \langle A^\circ, f^\circ\rangle$ *für alle* $f^\circ \in \mathcal{E}(\mathbb{V})$*,*

(v) $\exp(tk_n(\nu_n^\circ - \varepsilon_e)) \xrightarrow{w} \gamma_t^\circ$ *für* $t \geq 0$ *mit* $\gamma_t^\circ := \mathrm{Exp}_{\mathbb{V}}(tA^\circ)$*,*

(vi) $\nu_n^{\circ[k_n t]} \xrightarrow{w} \gamma_t = \mathrm{Exp}_{\mathbb{G}}(tA)$ *für* $t \geq 0$*.*

Wir haben bereits in Theorem 1.3.7 gesehen, dass für eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe $\mathbb{G}$ und die zugehörige Lie-Algebra $\mathbb{V}$ gilt, dass $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ und $\mathrm{Aut}(\mathbb{V})$ isomorph sind. Für die vollständige Übersetzungs-Methode benötigen wir noch zwei weitere Propositionen, vergleiche auch die Propositionen 2.1.6 und 2.1.7 in [12].

Proposition 4.3.10. *Sei* $\mathbb{G}$ *eine lokalkompakte Gruppe. Ein Automorphismus* $a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ *(bzw.* $a^\circ \in \mathrm{GL}(\mathbb{V})$*) operiert auf Funktionenräumen, indem man definiert* $a(f) := f \circ a$*. Analog kann man Operationen auf* $\mathcal{P}(\mathbb{G})$ *und* $\mathcal{GF}(\mathbb{G})$ *definieren durch*

$$\langle a(\mu), f\rangle := \langle \mu, a(f)\rangle = \langle \mu, f \circ a\rangle \text{ und } \langle a(A), f\rangle = \langle A, f \circ a\rangle.$$

Weiter gilt

$$a(\mathrm{Exp}(t \cdot A)) = \mathrm{Exp}(t \cdot a(A)) \text{ für } t > 0.$$

Proposition 4.3.11. *Sei $\mathbb{G}$ eine einfach zusammenhängende nilpotente Lie-Gruppe, allgemeiner eine exponentielle Lie-Gruppe.*

(a) Seien $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$ und $a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$. Dann gilt $(a(\mu))^\circ = a^\circ(\mu^\circ)$.

(b) Seien $(\mu_t = \mathrm{Exp}_{\mathbb{G}}(tA))_{t\geq 0}$ eine stetige Faltungshalbgruppe auf $\mathcal{P}(\mathbb{G})$ und $a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$. Sei $\gamma_t^\circ = \mathrm{Exp}_{\mathbb{V}}(tA^\circ)$. Dann gilt $(a(A))^\circ = a^\circ(A^\circ)$. Also ist $a(A)$ das Erzeugende Funktional der Faltungshalbgruppe

$$(a(\mu_t) = a(\mathrm{Exp}_{\mathbb{G}}(tA)) = \mathrm{Exp}_{\mathbb{G}}(ta(A)))_{t\geq 0} \subset \mathcal{P}(\mathbb{G})$$

und $a^\circ(A^\circ)$ ist das Erzeugende Funktional von

$$(a^\circ(\gamma_t^\circ) = a^\circ(\mathrm{Exp}_{\mathbb{V}}(tA^\circ)) = \mathrm{Exp}_{\mathbb{V}}(ta^\circ(A^\circ)))_{t\geq 0} \subset \mathcal{P}(\mathbb{V}).$$

Für die folgende Proposition siehe auch [12], Proposition 2.1.9

Proposition 4.3.12. *Sei $\mathbb{G}$ eine exponentielle Lie-Gruppe.*

(a) $a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ ist kontrahierend, falls $a^\circ \in \mathrm{Aut}(\mathbb{V})$ kontrahierend ist.

(b) $(a_t)_{t>0}$ ist eine stetige Ein-Parameter-Gruppe in $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$, falls $(a_t^\circ)_{t>0}$ eine stetige Ein-Parameter-Gruppe in $\mathrm{Aut}(\mathbb{V})$ ist, falls also $(a_t^\circ = t^E)_{t>0}$ für ein $E \in \mathrm{Der}(\mathbb{V}) \subseteq \mathrm{End}(\mathbb{V})$. Dabei bezeichnet $\mathrm{Der}(\mathbb{V})$ die Lie-Algebra der Lie-Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{V})$, die Algebra der Derivationen.

4.4 Erzeugende Funktionale auf total unzusammenhängenden Gruppen

Auch für den Fall total unzusammenhängender Gruppen $\mathbb{G}$ gibt es eine Übersetzungs-Methode, die es uns ermöglicht, den Zusammenhang zwischen Erzeugenden Funktionalen auf $\mathbb{G}$ und einer Gruppe mit wesentlich schöneren Strukturen zu untersuchen. Im Fall nilpotenter Lie-Gruppen reduziert man die Untersuchung auf die Lie-Algebra $\mathbb{V}$, also einen Vektorraum. In diesem Abschnitt beschreiben wir die Übersetzung in zwei Schritten. Dabei reduzieren wir zuerst von beliebigen total unzusammenhängenden Gruppen auf eine abelsche, kontrahierbare Gruppe, im zweiten Schritt von dieser Gruppe auf eine spezielle total unzusammenhängende Gruppe, eine p-adische Gruppe.
Zunächst werden einige allgemeine Eigenschaften kontrahierender Automorphismen auf kontrahierbaren, lokalkompakten Gruppen aufgeführt.

Definition 4.4.1. *Es seien $\mathbb{G}$ eine lokalkompakte Gruppe und $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$. Man bezeichnet mit $\Delta(\tau)$ die eindeutig bestimmte positive reelle Zahl, für die gilt $\tau(\omega_{\mathbb{G}}) = \Delta(\tau) \cdot \omega_{\mathbb{G}}$. Δ ist ein stetiger Homomorphismus von $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ nach $\mathbb{R}_+^\times$.*

Es bezeichne $\mathfrak{U}(e)$ die Menge aller Umgebungen des neutralen Elements e, auch Umgebungsfilter von e genannt. Für den Beweis des folgenden Lemmas sei der Leser auf [12], Lemma 3.1.3 verwiesen.

Lemma 4.4.2. *Seien $\mathbb{G}$ eine kontrahierbare, lokalkompakte Gruppe, $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ und $U \in \mathfrak{U}(e)$ abgeschlossen. Für $n \in \mathbb{Z}$ setzt man $U_n := \bigcap_{k \leq n, k \in \mathbb{Z}} \tau^k(U)$. Dann gilt*

(a) $U_n \supset U_{n+1}$ und $\tau(U_n) = U_{n+1}$; insbesondere $U_n = \tau^n(U_0)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$,

(b) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_n = \mathbb{G}$,

(c) jedes U_n hat innere Punkte,

(d) für jede kompakte Menge $C \subset \mathbb{G}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\tau^n(C) \subset U$ für alle $n \geq n_0$,

(e) ist U kompakt, so ist $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Basis für $\mathfrak{U}(e)$, insbesondere gilt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} U_n = \{e\}.$$

Kontrahierbare, lokalkompakte Gruppen besitzen die folgenden Eigenschaften, für den Beweis sei auf [12], Abschnitt 3.1.5 verwiesen.

Lemma 4.4.3. *Seien $\mathbb{G}$ eine kontrahierbare, lokalkompakte Gruppe und $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ eine Kontraktion. Dann gilt*

(a) Die Topologie von $\mathbb{G}$ hat eine abzählbare Basis.

(b) Ist $\mathbb{G} \neq \{e\}$, dann ist $\mathbb{G}$ weder kompakt noch diskret.

(c) Ist N eine abgeschlossene, τ-invariante Untergruppe von $\mathbb{G}$, dann sind N und $\mathbb{G}/N$ ebenfalls kontrahierbar.

(d) Ist $\mathbb{H}$ eine weitere kontrahierbare Gruppe mit Kontraktion $\rho \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, dann ist das direkte Produkt $\mathbb{G} \times \mathbb{H}$ auch kontrahierbar, denn der Automorphismus $\tau \otimes \rho$ auf $\mathbb{G} \times \mathbb{H}$ ist kontrahierend.

Betrachten wir nun den Fall einer kontrahierbaren, total unzusammenhängenden lokalkompakten Gruppe $\mathbb{G} \neq \{e\}$, dabei sei wieder $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ kontrahierend. $\mathbb{G}$ ist dann weder kompakt noch diskret (siehe [12], Kapitel 3, Abschnitt II). Es existiert nach [13], Theorem 7.7 eine kompakte offene Untergruppe U von $\mathbb{G}$, so dass $\{e\} \neq U \neq \mathbb{G}$. Wir setzen wie in Lemma 4.4.2

$$U_n := \bigcap_{k \leq n, k \in \mathbb{Z}} \tau^k(U) \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

U_n ist dann für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine kompakte Untergruppe von $\mathbb{G}$. Es gilt dann:

(i) $U_n \supset U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$,

(ii) $\tau(U_n) = U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$,

(iii) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_n = \mathbb{G}$,

(iv) $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} U_n = \{e\}$.

Man kann U so wählen, dass U_{n+1} eine normale Untergruppe von U_n ist für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $ord(U_n/U_{n+1}) = \Delta(\tau)$. Für den Beweis siehe [12], Lemma 3.1.6. Dies führt zu folgender Definition, siehe [12], Definition 3.1.7.

Definition 4.4.4. *(a) Eine Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ kompakter, offener Untergruppen von $\mathbb{G}$ heißt zu τ zugehörige Filtration, falls gilt:*

(i) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} G_n = \mathbb{G}$,

(ii) $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} G_n = \{e\}$,

(iii) G_{n+1} ist eine normale Untergruppe von G_n für alle $n \in \mathbb{Z}$,

(iv) $\tau(G_n) = G_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Eine Filtration heißt normal, falls G_0, also jedes G_n, $n \in \mathbb{Z}$, eine normale Untergruppe von $\mathbb{G}$ ist.

(c) Sei $r := \Delta(\tau)$. Setzt man $|x| := \inf\{r^{-n} : x \in G_n\}$ für alle $x \in \mathbb{G}$, dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{G}$:

(i) $|x| = 0$, falls $x = e$,

(ii) $|x| = |x^{-1}|$,

(iii) $|xy| \leq \max(|x|, |y|)$,

(iv) $|\tau(x)| = r^{-1}|x|$.

Darüber hinaus gilt dann

$$G_n = \{x \in \mathbb{G} : |x| \leq r^{-n}\} = \tau\{x \in \mathbb{G} : |x| < r^{-(n-1)}\}, n \in \mathbb{Z}.$$

Daher definiert $\vartheta(x,y) := |x^{-1}y|$ eine links-invariante Ultrametrik ϑ auf $\mathbb{G}$, die die Topologie auf $\mathbb{G}$ erzeugt. Eine Ultrametrik ϑ bezeichnet dabei eine Metrik, für die $\vartheta(x,y) \leq \max\{\vartheta(x,z), \vartheta(z,y)\}$ für alle $x, y, z \in \mathbb{G}$ gilt.

Die in der obigen Definition in (c) konstruierte Norm ist für den Fall $\rho = r^{-1}$ die Gruppennorm auf einer total unzusammenhängenden Gruppe, die in Proposition 3.3.6 konstruiert wurde.
Das bereits zuvor erwähnte Ziel ist, für eine beliebige kontrahierbare, total unzusammenhängende Gruppe $\mathbb{G}$ eine kontrahierbare, abelsche, total unzusammenhängende Gruppe zu finden, die zu $\mathbb{G}$ isomorph ist. Dazu betrachten wir zunächst zwei Beispiele, vergleiche dazu [12], Bemerkung 3.1.8, Beispiel 3a) und Beispiel 4a)-b).

Beispiel 4.4.5. *(a) Für eine natürliche Zahl p bezeichne $\mathbb{Q}_p$ die p-adischen Zahlen. Diese bilden zusammen mit der Operation „+“ eine abelsche Gruppe (siehe [13], Theorem 10.3), jedoch nur für Primzahlen p ist $(\mathbb{Q}_p, +, \cdot)$ ein Körper (siehe [13], Definition 10.9, Theorem 10.10). Wir betrachten ab jetzt die p-adischen Zahlen nur für Primzahlen p. Für $t \in \mathbb{Q}_p$ definieren wir die Abbildung $H_t : x \mapsto t \cdot x$. Es gilt $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Q}_p^\times$, siehe [13], Abschnitt 26.18(d). Es sei $|\cdot|_p$ der p-adische Betrag. Da $|H_t(x)|_p = |t|_p \cdot |x|_p$, ist H_t kontrahierend, falls $|t|_p < 1$. Darüber hinaus ist $\mathbb{Q}_p$ total unzusammenhängend.*

(b) Sei F eine endliche Gruppe der Ordnung $r > 1$. Λ bezeichne die Menge aller Folgen $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ in F, so dass $x_k = e$ für alle $k < k_0 := k_0(x)$ und ein $k_0 \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$. Das Produkt zweier Folgen betrachten wir komponentenweise, damit wird Λ zu einer Gruppe. Wir betrachten die Teilmengen $\Lambda_n := \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : x_k = e$ für alle $k < n\}$, $n \in \mathbb{Z}$. Jedes Λ_n ist eine normale Untergruppe von Λ und es gilt:

$$\Lambda_n \supset \Lambda_{n+1}, \ \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \Lambda_n = \{e\}, \ \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Lambda_n = \Lambda.$$

Versehen mit einer geeigneten Topologie (siehe [12], Bemerkung 3.1.8, Beispiel 4a)) ist Λ eine total unzusammenhängende topologische Gruppe. Λ ist *lokalkompakt. Man definiert durch* $\rho((x_k)_{k\in\mathbb{Z}}) = (x_{k-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ *einen Automorphismus* ρ *auf* Λ*, dieser erfüllt offensichtlich* $\rho(\Lambda_n) = \Lambda_{n+1}$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$*, ist bistetig und kontrahierend. Wir schreiben für festes* $r = \Delta(\rho)$ *auch häufig* $\Lambda(r)$ *statt* Λ*.*

Ist insbesondere $r = p$ *eine Primzahl und* F *die zyklische Gruppe der Ordnung* p*, dann ist die gerade konstruierte Gruppe* Λ *eine abelsche Torsionsgruppe, so dass* $\Delta(\rho) = p$*.*

Dass diese beiden Beispiele in Verbindung zueinander stehen, zeigt die folgende Proposition, vergleiche auch [12], Proposition 3.1.9.

Proposition 4.4.6. *Sei* $\mathbb{G}$ *eine total unzusammenhängende, lokalkompakte Gruppe mit kontrahierendem Automorphismus* τ*. Sei* $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *eine zu* τ *zugehörige Filtration auf* $\mathbb{G}$ *und sei* ϑ *die links-invariante Ultrametrik auf* $\mathbb{G}$*, die von der Filtration erzeugt wird. Definiere* $H := G_n/G_{n+1}$ *und* $r := ord(H)$*. Sei andererseits* $\Lambda = \Lambda(r)$ *die abelsche, kontrahierbare, total unzusammenhängende, lokalkompakte Gruppe aus dem zweiten Beispiel in 4.4.5 zusammen mit dem betrachteten Automorphismus* ρ*, der Filtration* $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *und der induzierten Ultrametrik* δ*. Dann existiert ein Homeomorphismus* $\phi : \Lambda \to \mathbb{G}$ *(sogar eine Isometrie von* (Λ, δ) *nach* $(\mathbb{G}, \vartheta)$*), so dass*

$$\phi(\Lambda_n) = G_n \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}$$

und $\tau \circ \phi = \phi \circ \rho$*.*

Die abelsche, total unzusammenhängende Gruppe Λ kann also aufgefasst werden als das Analogon zum Tangentenraum einer kontrahierbaren Lie-Gruppe, der im Abschnitt 4.3 betrachtet wurde. Denn wir haben gezeigt, dass jede kontrahierbare, total unzusammenhängende, lokalkompakte Gruppe $\mathbb{G}$ mit Kontraktion τ und $\Delta(\tau) = r$ isomorph (als topologischer Raum) ist zu $\Lambda(r)$, unabhängig von der genauen Struktur der Gruppe. Insbesondere ist aber auch die Gruppe $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen eine kontrahierbare, total unzusammenhängende Gruppe (vergleiche Beispiel (a) in 4.4.5) und somit isomorph zu $\Lambda(p)$.

Folgerung 4.4.7. *Für den Fall, dass für die total unzusammenhängende, lokalkompakte Gruppe* $\mathbb{G}$ *mit Kontraktion* τ *gilt* $\Delta(\tau) = p$*,* p *prim, ist* $\mathbb{G}$ *isomorph zu* $\mathbb{Q}_p$*. D. h. es existieren Isomorphismen* $\phi_1 : \Lambda(p) \to \mathbb{G}$ *und* $\phi_2 : \Lambda(p) \to \mathbb{Q}_p$ *und somit ist*

$$\Phi := \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{G} \to \mathbb{Q}_p$$

ein Isomorphismus.

Dies liefert uns im nächsten Abschnitt eine Vereinfachung bei der Untersuchung der Zerlegbarkeitseigenschaften der Erzeugenden Funktionale auf kontrahierbaren, total unzusammenhängenden, lokalkompakten Gruppen, denn im speziellen Fall p-adischer Gruppen für eine Primzahl p wurden die Erzeugenden Funktionale mehrfachzerlegbarer Verteilungen bereits von M. Maejima und R. Shah untersucht, vergleiche [21]. Wir gehen im nächsten Abschnitt noch darauf ein und möchten im letzten Teil dieses Abschnitts noch Erzeugende Funktionale auf total unzusammenhängenden Gruppen betrachten. Für die folgenden Bemerkungen siehe auch [12], Abschnitt 3.6.16.

Bemerkung 4.4.8. Für eine total unzusammenhängende Gruppe $\mathbb{G}$ erhält man eine einfache Lévy-Khinchin-Darstellung für eine Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ bzw. deren Erzeugendes Funktional A, vergleiche auch [12], Abschnitt 3.6.16. Es gilt

$$\mathcal{D}(\mathbb{G}) = \{f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{G}) : \mathrm{im}(f) \text{ ist endlich}\}.$$

Für das Erzeugende Funktional A erhält man die Darstellung:

$$A(f) = \int_{\mathbb{G}^\times} (f - f(e))d\eta \text{ für } f \in \mathcal{E}(\mathbb{G}).$$

$\diamondsuit$

Bemerkung 4.4.9. Seien $\mathbb{G}_1$ und $\mathbb{G}_2$ lokalkompakte Gruppen mit neutralen Elementen e_1 und e_2. Sei $\phi : \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ ein topologischer Isomorphismus, so dass wir durch $f \mapsto f \circ \phi$ eine Bijektion zwischen $\mathcal{D}(\mathbb{G}_2)$ und $\mathcal{D}(\mathbb{G}_1)$ erhalten. Sei darüber hinaus $\phi(e_1) = e_2$. Wir definieren das Funktional $\phi(A)$ durch

$$\langle \phi(A), f\rangle := \langle A, f \circ \phi\rangle,\ f \in \mathcal{D}(\mathbb{G}_2).$$

$\diamondsuit$

Es liegt also eine ähnliche Situation wie in Abschnitt 4.3 vor. Dabei übernimmt hier die abelsche, total unzusammenhängende, lokalkompakte Gruppe Λ die Aufgabe der Lie-Algebra $\mathbb{V}$ im Fall von Lie-Gruppen. Wir erhalten das folgende Theorem, siehe auch [12], Theorem 3.6.18.

Theorem 4.4.10. *Seien $\nu_n \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$, $k_n \nearrow \infty$ und $(\mu_t = \mathrm{Exp}_{\mathbb{G}}(tA))_{t\geq 0}$ eine stetige Faltungshalbgruppe auf $\mathbb{G}$ mit $\mu_0 = \varepsilon_e$ und sei $(\gamma_t^\circ = \mathrm{Exp}_\Lambda(tA^\circ))_{t\geq 0}$ eine stetige Faltungshalbgruppe auf Λ, so dass die Erzeugenden Funktionale gerade A und A° sind. Dann gilt*

$$\nu_n^{[k_n t]} \xrightarrow{w} \mu_t,\ t \geq 0 \Leftrightarrow \nu_n^{\circ[k_n t]} \xrightarrow{w} \gamma_t^\circ,\ t \geq 0.$$

Die Resultate 4.3.8 und 4.3.9 lassen sich dann analog auf den Fall einer total unzusammenhängenden Gruppe übertragen. Da wir im nächsten Abschnitt den Zusammenhang zwischen Erzeugenden Funktionalen auf einer kontrahierbaren, total unzusammenhängenden, lokalkompakten Gruppe und auf der Gruppe $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen untersuchen möchten, benötigen wir noch die folgende Definition. Sei $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$, dann definieren wir $\tau^\circ \in \mathrm{Aut}(\Lambda(p))$ durch

$$\tau^\circ := \phi_1^{-1} \circ \tau \circ \phi_1,$$

dabei ist ϕ_1 wie in Folgerung 4.4.7 gewählt. Seien also $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ und $\tilde{\tau} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_p)$, so dass

$$\tau^\circ = \phi_1^{-1} \circ \tau \circ \phi_1 = \phi_2^{-1} \circ \tilde{\tau} \circ \phi_2^{-1},$$

dann gilt

$$\tilde{\tau} = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} \circ \tau \circ \phi_1 \circ \phi_2^{-1} = \Phi \circ \tau \circ \Phi^{-1}.$$

Wir benutzen im Folgenden die Notation τ° bzw. A° für Automorphismen bzw. Erzeugende Funktionale auf $\Lambda(p)$ und $\tilde{\tau}$ bzw. $\tilde{A}$ für die entsprechenden Objekte auf $\mathbb{Q}_p$.

4.5 Erzeugende Funktionale τ-zerlegbarer Verteilungen

Wir wollen in diesem Abschnitt die Struktur der Erzeugenden Funktionale τ-zerlegbarer Verteilungen auf $\mathbb{R}^d$ untersuchen, dabei sei $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^d)$. Wir betrachten τ-zerlegbare Faltungshalbgruppen $(\mu^t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, wobei eine Faltungshalbgruppe τ-zerlegbar heißt, falls μ^t für alle $t \geq 0$ τ-zerlegbar ist mit einem Kofaktor $\nu(t)$. Für alle $t \geq 0$ gilt also

$$\mu^t = \tau(\mu^t) * \nu(t). \tag{4.4}$$

Ist nun $\nu(t)$ selbst unendlich-teilbar für alle $t \geq 0$, dann kann auch $\nu(t)$ eingebettet werden in die Faltungshalbgruppe $(\nu(t)^s)_{s\geq 0}$. Ist diese Faltungshalbgruppe wiederum τ-zerlegbar, dann erhält man analog für alle $s, t \geq 0$

$$\nu(t)^s = \tau(\nu(t)^s) * \lambda(t, s). \tag{4.5}$$

Definition 4.5.1. *Wir nennen eine Faltungshalbgruppe $(\mu^t)_{t\geq 0}$ einfach-τ-zerlegbar, wenn $(\mu^t)_{t\geq 0}$ τ-zerlegbar ist, wie oben definiert. $(\mu^t)_{t\geq 0}$ heißt n-fach τ-zerlegbar, falls für alle $t \geq 0$*

$$\mu^t = \tau(\mu^t) * \nu(t)$$

und $\nu(t)$ einbettbar ist in eine $(n-1)$-fach τ-zerlegbare Faltungshalbgruppe.

Nach Satz 1.4.8 ist die Einbettung in eine Faltungshalbgruppe eindeutig. Darüber hinaus ist die Faltung hier kommutativ, was uns zu folgendem Lemma führt:

Lemma 4.5.2. *Seien $(\mu^t)_{t\geq 0}, (\nu(t)^s)_{s\geq 0}, \lambda(t,s) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ wie oben. Dann gilt*

(a) $\nu(s) = \nu(1)^s$,

(b) $\nu(t)^s = \nu(1)^{t\cdot s}$,

(c) $\lambda(t,s) = \lambda(1, t\cdot s)$.

Beweis. (a) Es gilt einerseits

$$\mu^s = \nu(s) * \tau(\mu^s)$$

und andererseits

$$\mu^s = (\mu^1)^s = (\nu(1) * \tau(\mu_1))^s = (\nu(1))^s * (\tau(\mu^1))^s = \nu(1)^s * \tau(\mu^s).$$

Die Kofaktoren sind eindeutig, denn für die Fouriertransformierte von μ^s gilt $\hat{\mu}^s(y) \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$ und daher $\widehat{\tau(\mu^s)}(y) \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$. Also folgt $\widehat{\nu(s)}(y) = \widehat{\nu(1)^s}(y) = \widehat{\nu(s)}(y)/\widehat{\tau(\mu^s)}(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$ und damit die Behauptung. Der Beweis von (b) bzw. (c) verläuft analog. □

Wir können nun die zugehörigen Erzeugenden Funktionale untersuchen.

Lemma 4.5.3. *Seien wie oben (4.4) und (4.5) vorausgesetzt. Seien A und B die Erzeugenden Funktionale von $(\mu^t)_{t\geq 0}$ und $(\nu(1)^s)_{s\geq 0}$. Dann gilt*

(a) $A = \tau(A) + B$,

(b) $B = \tau(B) + C$,

wobei C wiederum ein Erzeugendes Funktional ist.
Gilt umgekehrt (a) und (b) für Erzeugende Funktionale A, B und C, dann ist die von A erzeugte Faltungshalbgruppe 2-fach τ-zerlegbar.

Beweis. (*a*) Da μ^1 und $\nu(1)^1$ unendlich-teilbar sind, besitzen sie nach Satz 4.2.2 Lévy-Khinchin-Darstellungen (c_1, Q_1, η_1) und (c_2, Q_2, η_2). Nach Bemerkung 4.2.3 (*b*) und (*c*) besitzt daher $\tau(\mu^1)$ die Lévy-Khinchin-Darstellung

$$(\tau(c_1), \tau Q \tau^*, \tau(\eta)|_{\mathbb{R}^d_\times}).$$

Nun gilt $\mu^1 = \nu(1) * \tau(\mu^1)$ und mit Bemerkung 4.2.3 (e) folgt

$$\begin{aligned} c_1 &= \tau(c_1) + c_2, \\ Q_1 &= \tau Q \tau^* + Q_2, \\ \eta_1 &= \tau(\eta)|_{\mathbb{R}^d_\times} + \eta_2. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung direkt aus der Definition 4.2.4 der Erzeugenden Funktionale.
(b) Es ist nur noch zu zeigen, dass $C = B - \tau(B)$ ein Erzeugendes Funktional ist. Dann gilt für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ und $t > 0$

$$\begin{aligned} t\langle B, f\rangle &= \frac{d^+}{ds}\langle \nu(t)^s, f\rangle|_{s=0} \\ &= \frac{d^+}{ds}\langle \tau(\nu(t)^s) * \lambda(t,s), f\rangle|_{s=0} \\ &= \frac{d^+}{ds}\langle \tau(\nu(t)^s), f\rangle|_{s=0} + \frac{d^+}{ds}\langle \lambda(t,s), f\rangle|_{s=0}. \end{aligned}$$

Da $\langle B, f\rangle$ und $\frac{d^+}{ds}\langle \tau(\nu(t)^s), f\rangle|_{s=0}$ existieren, existiert auch $\frac{d^+}{ds}\langle \lambda(t,s), f\rangle|_{s=0}$. Somit ergibt sich

$$t\langle B, f\rangle = t\langle \tau(B), f\rangle + t\langle C, f\rangle,$$

mit

$$\langle C, f\rangle = \frac{d^+}{ds}\langle \lambda(1,s), f\rangle|_{s=0}.$$

Nach der Charakterisierung von erzeugenden Funktionalen in [33] als fast positiv und normiert (siehe auch Theorem 4.3.4) gilt damit $C \in \mathcal{GF}(\mathbb{R}^d)$.
Die Umkehrung ist offensichtlich. □

Bemerkung 4.5.4. Das Lemma bleibt auch im Gruppenfall richtig, jedoch nicht ohne weitere Voraussetzungen an die Gruppe. Man benötigt die eindeutige Einbettbarkeit in eine Faltungshalbgruppe, die Kommutativität der Faltung und die Eindeutigkeit der Kofaktoren. Diese Bedingungen sind im Vektorraum erfüllt, auf einer Gruppe im Allgemeinen aber nicht, sie müssen also unter Umständen zusätzlich gefordert werden. ◊

Induktiv erhält man aus Lemma 4.5.3 schließlich den folgenden Satz:

Satz 4.5.5. *Seien $\mathbb{V}$ ein Vektorraum, $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{V})$ kontrahierend und A ein Erzeugendes Funktional. Dann sind äquivalent:*

(i) eine stetige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ mit Erzeugendem Funktional A ist n-fach τ-zerlegbar,

(ii) es existieren $(A_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{GF}(\mathbb{V})$, so dass

$$A = \tau(A)+\sum_{i=1}^{n-1}\tau(A_i)+A_n \text{ und } A_i = \tau(A_i)+A_{i+1} \text{ für } A_0 := A,\ 0 \leq i \leq n-1.$$

Analog zur τ-Zerlegbarkeit von Faltungshalbgruppen definieren wir also die τ-Zerlegbarkeit von Erzeugenden Funktionalen auf Gruppen.

Definition 4.5.6. *Wir sagen, ein Erzeugendes Funktional A heißt n-fach τ-zerlegbar auf $\mathbb{G}$, falls $(A_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{GF}(\mathbb{G})$ existieren, so dass*

$$A = \tau(A) + \sum_{i=1}^{n-1}\tau(A_i) + A_n \text{ und } A_i = \tau(A_i) + A_{i+1} \text{ für } A_0 := A,\ 0 \leq i \leq n-1.$$

Analog wird die n-fache τ°-Zerlegbarkeit von A° auf $\mathbb{V}$ definiert.

Man kann die n-fache τ-Zerlegbarkeit eines Erzeugenden Funktionals A auch folgendermaßen beschreiben:

$$A = \tau(A) + A_1,\ A_1 = \tau(A_1) + A_2,\ \ldots,\ A_{n-1} = \tau(A_{n-1}) + A_n. \tag{4.6}$$

Das Lévy-Maß hat dann eine entsprechene Gestalt.
Mit diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu den beiden Hauptresultaten dieses Kapitels, zunächst für den Fall einer homogenen Gruppe $\mathbb{G}$. Für den Vektorraumfall wurde die Struktur Erzeugender Funktionale mehrfachzerlegbarer Faltungshalbgruppen bereits von M. Maejima, K. Sato und T. Watanabe genauer untersucht, vergleiche [20]. Wir beziehen uns daher im Folgenden auf die in [20] untersuchte Lévy-Khinchin-Darstellung, vergleiche [20], Theorem 3.1 und Proposition 3.2.

Satz 4.5.7. *Seien $\mathbb{G}$ eine homogene Gruppe mit Lie-Algebra $\mathbb{V} = \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{GF}(\mathbb{G})$ bzw. $A^\circ \in \mathcal{GF}(\mathbb{V})$. Weiter seien $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ bzw. $\tau^\circ \in \mathrm{Aut}(\mathbb{V})$. Dann sind äquivalent:*

(i) *A ist n-fach τ-zerlegbar auf $\mathbb{G}$,*

(ii) *A° ist n-fach τ°-zerlegbar auf $\mathbb{V}$,*

(iii) *$\gamma^t = \operatorname{Exp}(tA^\circ)$ ist n-fach τ°-zerlegbar auf $\mathbb{V}$ für alle $t \geq 0$,*

(iv) *A° hat die von Maejima, Sato und Watanabe angegebene Lévy-Khinchin-Darstellung.*

Beweis. Es bleibt nur zu zeigen (i) $\Leftrightarrow$ (ii), denn nach Satz 4.5.5 gilt (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) und nach [20] gilt (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Sei also A n-fach τ-zerlegbar auf $\mathbb{G}$, wir setzen $A_0 := A$. Dann existieren $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{GF}(\mathbb{G})$, so dass

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \tau(A_i) + A_n \text{ und } A_i = \tau(A_i) + A_{i+1} \text{ für } 0 \leq i \leq n-1.$$

Wir setzen für $f \in \mathcal{E}(\mathbb{G})$

$$\langle A_i^\circ, f^\circ \rangle := \langle A_i, f \rangle \text{ für } 0 \leq i \leq n$$

und erhalten somit für das Erzeugende Funktional A° auf $\mathbb{V}$:

$$\begin{aligned}
\langle A^\circ, f^\circ \rangle &= \langle A, f \rangle \\
&= \langle \sum_{i=0}^{n-1} \tau(A_i) + A_n, f \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \langle \tau(A_i), f \rangle + \langle A_n, f \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \langle A_i, \tau(f) \rangle + \langle A_n, f \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \langle A_i^\circ, (\tau(f))^\circ \rangle + \langle A_n^\circ, f^\circ \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \langle \tau^\circ(A_i^\circ), f^\circ \rangle + \langle A_n^\circ, f^\circ \rangle \\
&= \langle \sum_{i=0}^{n-1} \tau^\circ(A_i^\circ) + A_n^\circ, f^\circ \rangle.
\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt auch

$$A_i^\circ = \tau^\circ(A_i^\circ) + A_{i+1}^\circ \text{ für } 0 \leq i \leq n.$$

Damit folgt (ii). Die Umkehrung folgt analog. □

Für den Fall total unzusammenhängender Gruppen erhält man analoge Aussagen. Wir können den Zusammenhang zwischen einer kontrahierbaren, total unzusammenhängenden, lokalkompakten Gruppe $\mathbb{G}$ und der Gruppe $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen herstellen. Erzeugende Funktionale auf dieser Gruppe wurden nämlich bereits von M. Maejima und R. Shah untersucht, vergleiche [21]. Insofern beziehen wir uns also im Folgenden auf die dort untersuchte Lévy-Khinchin-Darstellung, vergleiche [21], Theorem 4.3 und Theorem 5.2.

Satz 4.5.8. *Seien $\mathbb{G}$ eine kontrahierbare, total unzusammenhängende Gruppe mit Filtrierung (U_n), $U_{n+1} = \tau(U_n)$ und $p = ord(U_n/U_{n+1})$ prim. $A \in \mathcal{GF}(\mathbb{G})$, $A^\circ \in \mathcal{GF}(\Lambda(p))$ bzw. $\tilde{A} \in \mathcal{GF}(\mathbb{Q}_p)$. Weiter seien $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$, $\tau^\circ \in \mathrm{Aut}(\Lambda(p))$ bzw. $\tilde{\tau} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_p)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *A ist n-fach τ-zerlegbar auf $\mathbb{G}$,*

(ii) *A° ist n-fach τ°-zerlegbar auf $\Lambda(p)$,*

(iii) *$\tilde{A}$ ist n-fach $\tilde{\tau}$-zerlegbar auf $\mathbb{Q}_p$,*

(iv) *$\gamma_t = \mathrm{Exp}_{\mathbb{Q}_p}(t\tilde{A})$ ist n-fach $\tilde{\tau}$-zerlegbar auf $\mathbb{Q}_p$ für alle $t \geq 0$,*

(v) *$\tilde{A}$ hat die von Maejima und Shah angegebene Lévy-Khinchin-Darstellung.*

Beweis. Es bleibt zu zeigen (i) $\Leftrightarrow$ (ii) und (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Nach [21], Theorem 4.3 gilt nämlich (iii) $\Leftrightarrow$ (iv), man beachte die Darstellung (4.6) insbesondere für das Lévy-Maß. Nach [21], Theorem 5.2 gilt (iv) $\Leftrightarrow$ (v). (i) $\Leftrightarrow$ (ii) und (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) werden auf die gleiche Art bewiesen wie die entsprechende Aussage für den Fall homogener Gruppen. Es wird hier nur der Zusammenhang zwischen kontrahierbaren, total unzusammenhängenden, lokalkompakten Gruppen und $\Lambda(p)$ benötigt. Sowohl $\mathbb{G}$ als auch $\mathbb{Q}_p$ sind aber kontrahierbar, total unzusammenhängend und lokalkompakt. □

$\Lambda(p)$ und $\mathbb{Q}_p$ sind abelsche Gruppen (auch wenn p nicht prim ist). Aus (ii) bzw. (iii) folgt also, dass die entsprechenden Faltungshalbgruppen $\sigma_t = \mathrm{Exp}_{\Lambda(p)}(tA^\circ)$ und $\gamma_t = \mathrm{Exp}_{\mathbb{Q}_p}(t\tilde{A})$ n-fach zerlegbar sind. Die Umkehrung ist auch beweisbar, falls die Eindeutigkeit der Einbettung gewährleistet ist, nur dann kann Lemma 4.5.3 angewendet werden, siehe auch Bemerkung 4.5.4. Zum Beispiel kann man die zusätzliche Voraussetzung im Fall der Gruppe $\Lambda(p)$ stellen, dass alle betrachteten Maße symmetrisch sind. In [21] wurde vorausgesetzt, dass p prim ist, daher wurde diese Voraussetzung auch in Satz 4.5.8 übernommen.

Kapitel 5

Ausblick

Bereits in den vorherigen Kapiteln wurden kommutative Hypergruppen als Beispiele betrachtet. Die Gelfand-Paare $(\mathbb{G}, K)$ in Beispiel 3.0.2 definieren auf kanonische Weise Hypergruppen. Ebenso kann die Menge $S_1(\mathbb{G}, K) := \{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{G}) : \kappa(\mu) = \mu \text{ für alle } \kappa \in K\}$ in Beispiel 3.0.2 $(b)(ii)$ (wobei $K \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ eine kompakte Untergruppe bezeichnet) als Hypergruppe aufgefasst werden (die so genannte Bahnenhypergruppe).
Somit stellt sich die Frage, in welcher Weise die Ergebnisse aus den vorherigen Kapiteln auch auf Hypergruppen richtig bleiben. Im letzten Kapitel dieser Arbeit widmen wir uns dieser Fragestellung und geben einen kurzen Ausblick, welche Resultate sich auf eine spezielle Klasse von Hypergruppen übertragen lassen. Dabei konzentrieren wir uns auf eine Klasse von Hypergruppen, die bereits von M. Rösler [28] und M. Voit [39] studiert wurden. Diese Hypergruppen besitzen einige Eigenschaften analog zum Gruppen- oder Vektorraumfall, daher werden im ersten Abschnitt zunächst ein kurzer Überblick gegeben und diese Eigenschaften dargestellt.
Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und wir bezeichnen mit Π_d den Kegel positiv semidefiniter, linearer Operatoren auf dem $\mathbb{K}^d$. Weiterhin sei $M^b(\Pi_d)$ die Menge der beschränkten Borel-Maße auf Π_d, versehen mit einer Faltungsstruktur

$$*_\mu : M^b(\Pi_d) \times M^b(\Pi_d) \to M^b(\Pi_d),$$

so dass $(\Pi_d, *_\mu)$ eine Hypergruppe ist. Dabei gilt $\mu > \rho - 1$ für zwei reelle Parameter μ, ρ. Dies sind die von M. Rösler und M. Voit untersuchten Hypergruppen, für genauere Details zu μ und ρ sei der Leser daher auf [28] und [39] verwiesen. Für den Fall $d = 1$ sind dies gerade die so genannten Bessel-Kingman-Hypergruppen.

Wir werden im weiteren Verlauf die Notation $*$ für die Faltung benutzen, da wir nicht genauer auf die Details der Parameter eingehen werden.
Es ergibt sich auf einer Hypergruppe $\mathcal{R}$ zunächst einmal das Problem, dass keine deterministische punktweise Operation in der Hypergruppe gegeben ist, die es erlaubt, eine Summe $X+Y$ von zwei unabhängigen $\mathcal{R}$-wertigen Zufallsvariablen X und Y direkt zu definieren. Daher soll im Folgenden der Begriff der Konkretisierung einer Hypergruppe eingeführt werden, der es erlaubt, eine Summe von $\mathcal{R}$-wertigen Zufallsvariablen X und Y so festzulegen, dass die Verteilung dieser Summe im Falle unabhängiger Zufallsvariabler gerade durch $P_X * P_Y$ beschrieben wird. Für Details sei der Leser auf [2], Abschnitt 7.1., verwiesen.

Definition 5.0.9. *Seien $\mathcal{R}$ eine Hypergruppe, μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem kompakten Raum M und $\Phi : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times M \to \mathcal{R}$ Borel-messbar. Das Tripel (M, μ, Φ) heißt Konkretisierung von $\mathcal{R}$, falls*

$$\mu(\{\Phi(x, y, \cdot) \in A\}) = (\varepsilon_x * \varepsilon_y)(A) \text{ für alle } x, y \in \mathcal{R} \text{ und } A \in \mathcal{B}(\mathcal{R}),$$

dabei bezeichnet $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ die Borelsche σ-Algebra in $\mathcal{R}$.

Der folgende Satz sichert die Existenz von Konkretisierungen für Hypergruppen, falls diese das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, siehe auch [2], Theorem 7.1.3.

Satz 5.0.10. *Sei $\mathcal{R}$ eine Hypergruppe. Dann existiert eine messbare Abbildung $\Phi : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times [0,1] \to \mathcal{R}$, so dass $([0,1], \lambda|_{[0,1]}, \Phi)$ eine Konkretisierung von $\mathcal{R}$ ist.*

Für die folgende Definition und Proposition sei auf [2], Abschnitte 7.1.5 und 7.1.6 verwiesen.

Definition und Proposition 5.0.11. *Seien $\mathcal{R}$ eine Hypergruppe, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (M, μ, Φ) eine Konkretisierung von $\mathcal{R}$. X und Y seien $\mathcal{R}$-wertige Zufallsvariable und Λ eine M-wertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Λ sei unabhängig von (X, Y) und es gelte $P_\Lambda = \mu$. Die randomisierte Summe von X und Y wird dann definiert durch*

$$X \overset{\Lambda}{+} Y := \Phi(X, Y, \Lambda).$$

$X \overset{\Lambda}{+} Y$ ist dann eine $\mathcal{R}$-wertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, und im Falle der Unabhängigkeit gilt

$$P_{X \overset{\Lambda}{+} Y} = P_X * P_Y.$$

Wir betrachten in diesem Kapitel nur eine spezielle Klasse von Hypergruppen und wollen nun einige Eigenschaften dieser Hypergruppen zitieren, die in [39] untersucht wurden und die benötigt werden, um die Resultate aus den Kapiteln 3 und 4 zu übertragen.

Proposition 5.0.12. $(\Pi_d, *)$ *ist hermitesch und abelsch. Die Fouriertransformierte* $\hat{\mu}$ *ist reell.*

Die Begriffe Unendlich-Teilbarkeit, Einbettbarkeit und Faltungshalbgruppe werden ähnlich wie in Abschnitt 1.4 definiert. Im Fall einer beliebigen kommutativen Hypergruppe gilt im Allgemeinen nicht, dass jede unendlich-teilbare Verteilung einbettbar ist in eine Faltungshalbgruppe. In unserem Fall jedoch kann man sogar zeigen, dass jede unendlich-teilbare Verteilung $\mu \in \mathcal{P}(\Pi_d)$ eindeutig einbettbar ist in eine Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$. Darüber hinaus gilt auf der Hypergruppe $(\Pi_d, *)$ das Shift-Kompaktheits-Theorem, für die folgenden Aussagen siehe auch [2] bzw. die Propositionen 0.12 und 0.13 in [10].

Proposition 5.0.13. *Seien* $(\mu_n)_{n\geq 1}, (\nu_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{P}(R)$ *und* $\lambda_n := \mu_n * \nu_n$ *für* $n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt:*

(a) Sei $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *gleichmäßig straff, dann existieren Folgen* $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \subseteq R$, *so dass* $(\mu_n * \varepsilon_{x_n})_{n\geq 1}$ *und* $(\varepsilon_{y_n} * \nu_n)_{n\geq 1}$ *gleichmäßig straff sind.*

(b) Sind zwei der drei Folgen gleichmäßig straff, dann gilt dies auch für die dritte.

(c) Ist $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *gleichmäßig straff, dann sind auch* $(\mu_n^2)_{n\geq 1}$ *und* $(\nu_n^2)_{n\geq 1}$ *gleichmäßig straff.*

(d) Ist $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *gleichmäßig straff, dann sind auch* $(\varepsilon_{x_n})_{n\geq 1}$ *und* $(\varepsilon_{y_n})_{n\geq 1}$ *(aus 1.) gleichmäßig straff.*

Lemma 5.0.14. *Seien* $\mu, (\mu_n)_{n\geq 1}, (\nu_n)_{n\geq 1}, (\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{P}(R)$.

(a) Es gelte $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ *und* $\sigma_n := \mu_n * \varepsilon_{x_n} \xrightarrow{w} \sigma$ *für eine Folge* $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq R$. *Dann ist* $(\mu_n)_{n\geq 1}$ *relativkompakt und für alle Häufungspunkte* x *von* x_n *gilt* $\sigma = \mu * \varepsilon_x$.

(b) Es gelte $\nu_n \xrightarrow{w} \varepsilon_0$ *und* $\nu_n * \lambda_n \xrightarrow{w} \lambda$. *Dann folgt* $\lambda_n \xrightarrow{w} \lambda$.

Für Matrix-Kegel-Hypergruppen existiert außerdem ein Typenkonvergenzsatz, vergleiche [10], Theorem 1.10. Diesen wollen wir hier aber nicht noch einmal explizit darstellen, wir benötigen nur dessen Existenz. Ebenso wollen wir die in Kapitel 3 eingeführten Begriffe und Notationen nicht noch einmal auflisten. Die Definitionen der (Semi-)τ-Zerlegbarkeit, τ-Zerlegbarkeit, vollständigen Abgeschlossenheit, logarithmischen Momente, Automorphismennormen usw. wollen wir Eins-zu-Eins aus den vorherigen Kapiteln übernehmen. Es wird jedoch noch ein Äquivalenzsatz für Konvergenzen benötigt, vergleiche z.B. 3.4.4 oder 3.4.6. Der Leser sei für die Definition der Fourier-Transformierten auf [2], Abschnitt 2.2, für den Beweis des folgenden Äquivalenzsatzes auf Π_d auf [10], Korollar 2.21 verwiesen.

Korollar 5.0.15. *Sei $(\Pi_d, *)$ eine Hypergruppe und sei τ ein kontrahierender Automorphismus. Seien $\nu \in \mathcal{P}(\Pi_d)$ und $(X_k)_{k\geq 0}$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilung ν, wobei $\hat{\nu}$ keine Nullstellen besitzt. Wir bezeichnen mit*

$$S_n := \Lambda - \sum_{k=0}^{n} \tau^k(X_k)$$

die randomisierte Summe. Dann gilt

$$P_{S_n} = \mathop{\ast}_{k=0}^{n} \tau^k(\nu) \xrightarrow{w} \lambda \in \mathcal{P}(\Pi_d) \Rightarrow S_n \to S \text{ f.s und } P_S = \lambda \text{ ist } \tau\text{-zerlegbar.}$$

Die Aussage bleibt richtig, wenn man die Bedingung, dass $\hat{\nu}$ keine Nullstellen besitzt, durch die schwächere Aussage ersetzt, dass die Menge der Nullstellen von ν von erster Kategorie ist. Den Zusammenhang zu der Existenz von logarithmischen Momenten liefern die beiden folgenden Propositionen, es sei dazu auf die Propositionen 2.22 und 2.23 in [10] verwiesen.

Proposition 5.0.16. *Seien $(\Pi_d, *)$ eine Hypergruppe und τ ein kontrahierender Automorphismus auf $(\Pi_d, *)$. Seien $\nu \in \mathcal{P}(\Pi_d)$ und $(X_k)_{k\geq 0}$ unabhängige Zufallsvariable mit Verteilung ν. Gilt darüber hinaus*

(i) $\hat{\nu}$ besitzt keine Nullstellen,

(ii) $\tau^k(X_k) \to 0$ f.s. für $k \to \infty$,

(iii) $\lambda_n := \mathop{\ast}_{k=0}^{n} \tau^k(\nu) \xrightarrow{w} \lambda \in \mathcal{P}(\Pi_d)$ für $n \to \infty$,

dann besitzt ν ein logarithmisches Moment erster Ordnung (vergleiche Definition 3.4.1).

Proposition 5.0.17. *Seien $(\Pi_d, *)$ eine Hypergruppe und τ ein kontrahierender Automorphismus auf $(\Pi_d, *)$. Seien $\nu \in \mathcal{P}(\Pi_d)$ und $(X_k)_{k\geq 0}$ unabhängige Zufallsvariable mit Verteilung ν. Gilt darüber hinaus*

(i) $\hat{\nu}$ besitzt keine Nullstellen,

(ii) ν besitzt ein logarithmisches Moment erster Ordnung.

Dann folgt $\lambda_n := \mathop{\huge *}_{k=0}^{n} \tau^k(\nu) \xrightarrow{w} \lambda \in \mathcal{P}(\Pi_d)$ für $n \to \infty$ und λ ist τ-zerlegbar.

Zusätzlich zu den Forderungen im klassischen Fall von lokalkompakten Gruppen und Vektorräumen müssen wir hier unter anderem fordern, dass $\hat{\nu}$ keine Nullstellen besitzt. Diese Einschränkung müssen wir auch übernehmen, wenn wir Resultate aus den Kapiteln 3 und 4 übertragen wollen. Nun stehen somit alle Hilfsmittel zur Verfügung, um die Ergebnisse von Kapitel 3 und 4 auf die speziellen Hypergruppen $(\Pi_d, *)$ zu übertragen. Wir wollen hier jedoch auf genaue Details verzichten.

Symbolverzeichnis

$\bigotimes_{i\in I} G_i$	direktes Produkt der Gruppen G_i
$\mu * \nu$	Faltung der Maße μ und ν
μ^{*n}, μ^n	n-fache Faltung von μ
$\mu_n \overset{w}{\to} \mu$	schwache Konvergenz von Maßen
$X \overset{d}{=} Y$	Gleichheit in Verteilung
$X_n \overset{d}{\to} X$	Konvergenz in Verteilung von Zufallsvariablen
$\\|\tau\\|$	Automorphismennorm
$\lvert x\rvert$	homogene Norm auf $\mathbb{G}$
$[\cdot,\cdot]$	Kommutator
(A,B)	die von den Elementen $aba^{-1}b^{-1}$ erzeugte Untergruppe von $\mathbb{G}$

a°	Automorphismus auf $\overset{\circ}{G}$
a^Q	$= \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-1}(\log a)^n Q^n$
$\mathcal{A}(\mu)$	Halbgruppe der Symmetrien von μ
$\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$	Menge der Automorphismen auf $\mathbb{G}$
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
$\mathfrak{C}$	Menge aller abgeschlossenen, multiplikativen Unterhalbgruppen C von $[0,1]$ mit $C \supsetneqq \{0,1\}$
$\mathcal{C}_0(\mathbb{V})$	Menge aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{V}$ mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
$\mathcal{C}^2(\mathbb{V})$	Menge aller beschränkten, zweifach stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{V}$ mit beschränkten Ableitungen
$\mathcal{C}_b(\mathbb{V})$	Menge aller stetigen, beschränkten Funktionen auf $\mathbb{V}$
$\mathcal{C}_c(\mathbb{V})$	Menge aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{V}$ mit kompaktem Träger
$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{V})$	Menge aller stetigen, unendlich-oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{V}$
$\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{V})$	$:= \mathcal{C}_b(\mathbb{V}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{V})$

$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{V})$	$:= \mathcal{C}_c(\mathbb{V}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{V})$
$\mathrm{Cent}(A, \mathbb{G})$	Zentralisator von A in $\mathbb{G}$
$\mathrm{Cent}(\mathbb{G})$	Zentrum von $\mathbb{G}$
δ_t	Dilatationen
$\mathcal{D}(\mathbb{G})$	Raum der Testfunktionen auf $\mathbb{G}$
$\mathrm{D}(\mathbb{G})$	Kommutatoruntergruppe von $\mathbb{G}$
$\mathrm{D}(\mu)$	Urbanik-Zerlegbarkeitsklasse
$\mathrm{Def}(f)$	Definitionsbereich von f
$\mathrm{Der}(\mathbb{V})$	Algebra der Derivationen auf $\mathbb{V}$
e	neutrales Element der Gruppe G
ε_x	Punktmaß mit Masse in x
$\mathcal{E}(\mathbb{G})$	beschränkte, reguläre Funktionen auf $\mathbb{G}$
$\mathfrak{E}(\mathbb{G})$	Menge der stetig einbettbaren Maße auf $\mathbb{G}$
$\mathrm{End}(\mathbb{G})$	Menge der Endomorphismen auf $\mathbb{G}$
$\mathrm{End}^+(\mathbb{V})$	nicht negativdefinite, symmetrische Operatoren auf $\mathbb{V}$
$\mathcal{F}, \mathcal{F}_p$	Menge der lokalen Funktionen
$\mathbb{G}$	lokalkompakte Gruppe
$\mathbb{G}^\times$	$:= \mathbb{G} \backslash \{e\}$
$\overset{\circ}{G}$	Tangentialraum an eine Gruppe $\mathbb{G}$ in e
$\mathcal{GF}(\mathbb{V})$	Menge aller erzeugenden Funktionale auf $\mathbb{V}$
$\mathrm{GL}(\mathbb{V})$	Menge invertierbarer Operatoren (Automorphismen) auf $\mathbb{V}$
$\mathrm{ID}(\mathbb{G})$	Menge der unendlich-teilbaren Verteilungen auf $\mathbb{G}$
$\mathrm{im}(f)$	Bild einer Funktion f
$\mathrm{Iso}(\mathbb{G})$	Menge der Isomorphismen auf $\mathbb{G}$
$\mathbb{K}$	$= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$\mathrm{L}(\mathbb{R}^d)$	Menge der selbstzerlegbaren Verteilungen auf $\mathbb{R}^d$
log, ln	$:= \exp^{-1}$
$\widehat{\mu}$	Fouriertransformierte eines Maßes μ
$(\mu_t)_{t \geq 0}$	Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen, meist Faltungshalbgruppe
$(\mu_{s,t})_{s \leq t}$	Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen, meist Hemigruppe
M_p	Tangentialraum an M in p
$\mathcal{M}(\mathbb{G})$	Menge der Radon-Maße auf $\mathbb{G}$
$\mathcal{M}_+(\mathbb{G})$	Menge der positiven Radon-Maße auf $\mathbb{G}$
$\mathcal{M}^b(\mathbb{G})$	Menge der beschränkten Maße auf $\mathbb{G}$
$\mathrm{M}_+(\mathbb{R}^d)$	Menge aller $d \times d$-Matrizen über $\mathbb{R}$, deren Eigenwerte alle einen

	nichtnegativen Realteil besitzen
$(\nu(s,t))_{s\leq t}$	Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen, meist Hemigruppe
Π_d	Kegel der positiv semidefiniten, linearen Operatoren auf $\mathbb{K}^d$
P_X	Verteilung einer Zufallsvariablen X
$\mathcal{P}(\mathbb{G})$	Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{G}$
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{R}_+$	nichtnegative reelle Zahlen
$\mathbb{R}^d_\times$	$=\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$
$\mathrm{Re}(z)$	Realteil einer komplexen Zahl z
$\mathcal{S}$	Menge von bzgl. der Faltung kommutativen Verteilungen
$\mathrm{Spec}(A)$	Menge der Eigenwerte von A
$\mathrm{SS}(\mathbb{G})$	Menge der semistabilen Verteilungen auf $\mathbb{G}$
$\mathrm{supp}(f)$	Träger einer Funktion f
τ	Automorphismus, meist Kontraktion
T^E	$= (t^E)_{t\geq 0}$ Ein-Parameter-Untergruppe von $GL(\mathbb{V})$
$\mathfrak{U}(e)$	Umgebungsfilter von e
$\mathbb{V}$	Vektorraum
$\mathbb{V}^\times$	$= \mathbb{V}\backslash\{0\}$
$V(\varepsilon)$	$:= \{x \in \mathbb{V} : \lVert x\rVert < \varepsilon\}$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen

Literaturverzeichnis

[1] H. Bauer, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 5. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin, 2002.

[2] W.R. Bloom, H. Heyer, *Harmonic analysis of probability measures on hypergroups*, Walter de Gruyter, Berlin, 1995.

[3] F. Bruhat, Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p-adiques, *Bull. Soc. Math. France*, 89: 43-75, 1961.

[4] J. Bunge, Nested classes of C-decomposable laws, *Ann. Probab.*, 25 (1): 215-229, 1997.

[5] P. B. Chen, T. S. Wu, On exponential groups, *J. Pure Appl. Algebra*, 93: 169-178, 1994.

[6] D. Ž. Djoković, K. H. Hofmann, The surjectivity question for the exponential function of real Lie groups, *J. Lie Theory*, 7: 171-199, 1997.

[7] G. Fischer, *Lineare Algebra*, Vieweg Studium, Grundkurs Mathematik, 12. verb. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 2000.

[8] Y. Guivarc'h, R. Shah, Asymptotic properties of convolution operators and limits of triangular arrays on locally compact groups, *Trans. Am. Math. Soc.*, 357 (9): 3683-3723, 2005.

[9] W. Hazod, *Stetige Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen und erzeugende Distributionen*, Lecture Notes in Mathematics 595, Springer, Berlin, 1977.

[10] W. Hazod, Probability on matrix-cone hypergroups: limit theorems and structural properties, *J. Appl. Anal.*, erscheint

[11] W. Hazod und H.-P. Scheffler, Strongly τ-decomposable and selfdecomposable laws on simply connected nilpotent Lie-groups, *Monatsh. Math.*, 128: 269 - 282, 1999.

[12] W. Hazod und E. Siebert, *Stable probability measures on euclidean spaces and on locally compact groups*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[13] E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer, Berlin, 1963.

[14] H. Heyer, *Probability measures on locally compact groups*, Springer, Berlin, 1977.

[15] G. Hochschild, *The structure of Lie groups*, Holden Day, San Francisco, 1965.

[16] Z. Jurek und J. Mason, *Operator-Limit Distributions in Probability Theory*, Wiley, New York, 1993.

[17] A. A. Kirillov, *Introduction to the theory of representation and noncommutative harmonic analysis*, Encyclopaedia of Mathematicak Sciences vol. 22, Springer, Berlin, 1994.

[18] M. Loève, Nouvelles classes de lois limites, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 73: 107-206, 1945.

[19] M. Maejima, Y. Naito, Semi-selfdecomposable distributions and a new class of limit theorems, *Probab. Theory Related Fields*, 112: 13-31, 1998.

[20] M. Maejima, K. Sato, T. Watanabe, Operator Semi-selfdecomposability, (C, Q)-Decomposability and related nested classes, *Tokyo J. Math.*, 22 (2): 473-509, 1999.

[21] M. Maejima, R. Shah, Operator-semistable, operator semi-selfdecomposable probability measures and related nested classes on p-adic vector spaces, *Monatsh. Math.*, 151 (4): 293-318, 2007.

[22] M. Meerschaert and H. P. Scheffler, *Limit theorems for sums of independent random vectors: heavy tails in theory and practice*, Wiley, New York, 2000.

[23] S. Menges, *Stetige Faltungshalbgruppen und Grenzwertsätze auf Hypergruppen*, Dissertation, Universität Dortmund, 2003.

[24] Z. I. Moskalenko, Exponential groups and ML-groups, *Ukrain Math J.*, 28: 387-394, 1976.

[25] D. Neuenschwander, Limits of commutative triangular systems on simply connected step 2- nilpotent Lie groups, *J. Theor. Probab.*, 5 (1): 217-222, 1992.

[26] K. R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, Reprint of the 1967 original, AMS Chelsea Publishing, Providence, 2005.

[27] C.R.E. Raja, Operator Semi-selfdecomposable measures and related nested subclasses of measures on vector spaces, *Monatsh. Math.*, 142: 351-361, 2004.

[28] M. Rösler, Convolution algebras on matrix cones, *Compos. Math.*, 143: 749-779, 2007.

[29] R. Shah, Limits of commutative triangular systems on real and p-adic groups, *Math. Proc. of Camb. Phil. Soc.*, 120: 181-192, 1996.

[30] R. Shah, The central limit problem on locally compact groups, *Isr. J. Math.*, 110: 189-218, 1999.

[31] R. Shah, Selfdecomposable measures on simply connected nilpotent groups, *J. Theor. Probab.*, 13 (1): 65-83, 2000.

[32] R. Shah, Limits of commutative triangular systems on locally compact groups, *Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci.*, 111 (1): 49-63, 2001.

[33] E. Siebert, Über die Erzeugung von Faltungshalbgruppen auf beliebigen lokalkompakten Gruppen, *Math. Z.*, 131: 313-333, 1973.

[34] E. Siebert, Contractive automorphisms on locally compact groups, *Math. Z.*, 191: 73-90, 1986.

[35] E. Siebert, Operator-decomposability of Gaussian measures on separable Banach spaces, *J. Theor. Probab.*, 5 (2): 333-347, 1992.

[36] J. Tits, *Liesche Gruppen und Algebren*, Springer, Berlin, 1983.

[37] A. Tortrat, *Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires*, Masson et Cie, Paris, 1971.

[38] K. Urbanik, Lévy's probability measures on Euclidean spaces, *Stud. Math.*, 44: 119-148, 1972.

[39] M. Voit, Bessel convolutions on matrix cones: Algebraic properties and random walks, *J. Theor. Probab.*, 22 (3): 741-771, 2009.