



# Aufspannende Kreise und Wege in polytopalen Graphen

Peter Knorr

Themenstellung & Betreuung:  
Prof. Dr. Dr. h. c. T. Zamfirescu

20. September 2010



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
1.1	Vorwort . . . . .	4
1.2	Einführung . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Voraussetzungen</b>	<b>8</b>
2.1	Definitionen . . . . .	8
2.2	Grundlegende Sätze . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Homogen trassable Graphen</b>	<b>13</b>
3.1	Der Graph $Z_{44}$ von Zamfirescu . . . . .	14
3.2	Zerlegung nichthamiltonscher Graphen mit 38 bis 42 Punkten	15
3.2.1	Graphen aus $\mathcal{M}_0$ . . . . .	18
3.2.2	Graphen aus $\mathcal{M}_1$ . . . . .	20
3.2.3	Graphen aus $\mathcal{M}_2$ . . . . .	21
3.3	Untersuchung der einzelnen Klassen . . . . .	23
3.3.1	Dreiecke . . . . .	23
3.3.2	Graphen aus $\mathcal{M}_1$ . . . . .	25
3.3.3	Graphen aus $\mathcal{M}_2$ . . . . .	32
3.3.4	A-Stücke . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Tuttische Teilgraphen</b>	<b>51</b>
4.1	Fünf Teilgraphen und ihre besonderen Eigenschaften . . . . .	51
4.2	Anwendungen . . . . .	57
4.2.1	$n$ -Wege-Trassabilität . . . . .	57
4.2.2	Y-Baum-Trassabilität . . . . .	60

4.2.3	Nicht-disjunkte Kreise und Wege . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Die minimale Ordnung eines nichttrassablen Graphen in <math>\mathcal{F}</math></b>	<b>69</b>
5.1	Der Graph $Z_{88}$ von Zamfirescu . . . . .	72
5.2	Obergrenze der sicheren Trassabilität . . . . .	74
5.2.1	Graphen mit zyklischem 3-Schnitt . . . . .	75
5.2.2	Zyklisch 5-zusammenhängende Graphen . . . . .	78
5.2.3	Zyklisch 4-zusammenhängende Graphen mit wesentli- chem 4-Schnitt . . . . .	79
5.2.4	Zyklisch 4*-zusammenhängende Graphen . . . . .	94
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>189</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Vorwort

*„Ein guter Beweis liest sich wie ein Gedicht –  
dieser sieht aus wie ein Telefonbuch!“*

Dieser Kommentar war eine Antwort auf den ersten Beweis des Vierfarbensatzes. Dieser Beweis war eines der bekanntesten Resultate der Graphentheorie in den vergangenen Jahrzehnten und zugleich eines der unbefriedigendsten. Nachdem APPEL und HAKEN diesen Beweis publiziert hatten, reagierte die Fachwelt kritisch, weil er nicht ohne die Hilfe eines programmierbaren Rechners auskam. Seither gab es keine populärwissenschaftliche Abhandlung des Vierfarbensatzes, die nicht durch dieses Zitat ausgeschmückt wurde.

Auch in dieser Arbeit (insbesondere im letzten Abschnitt) nehmen monotone Untersuchungen von Einzelfällen einen großen Raum ein. Darum fühlte ich mich in den letzten Monaten oft an das obige Zitat erinnert. Wer jedoch aktuelle Arbeiten in vergleichbaren Gebieten zur Hand nimmt, der weiß auch, dass ich mich damit in guter Gesellschaft befinde. Und eine tröstliche Komponente hat die Geschichte um den Vierfarbensatz. Die Namen APPEL und HAKEN sind jedem bekannt, der sich mit diesem Thema befasst. Aber von wem das obige Zitat stammt, ließ sich trotz

intensiver Recherche nicht in Erfahrung bringen. Unter diesem Aspekt hat das Telefonbuch über seinen Kritiker gesiegt.

An dieser Stelle möchte ich allen Personen meinen Dank aussprechen, ohne die diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre. In erster Linie gilt dies natürlich für meinen Doktorvater, Prof. Dr. Dr. h. c. T. ZAMFIRESCU. Er weckte mein Interesse an diesen Themen, und er glaubte an mich, als ich es selbst nicht mehr tat.

Ein weiterer Dank gilt Prof. B. D. MCKAY, auf dessen Hinweisen wesentliche Teile der vorliegenden Arbeit beruhen. Ferner möchte ich meinem Kollegen G. KOHUT danken, der mir am Computer zur Seite stand, sowie Herrn Dr. NEMETH, der mir beim Korrekturlesen weitergeholfen hat. Ein besonderer Dank gebührt meiner Frau und meiner Familie für ihre bedingungslose Unterstützung in den zurückliegenden Monaten. Sie waren entscheidend dafür, dass ich die Kraft hatte, mich auf diese Arbeit zu konzentrieren.

## 1.2 Einführung

Einige der ältesten und bekanntesten Probleme der Graphentheorie drehen sich um die Bedingungen, unter denen ein Graph einen bestimmten Teilgraphen besitzen muss. So lässt sich das Königsberger Brückenproblem des LEONHARD EULER zu der Frage umformulieren, ob in einem gegebenen Graphen ein Eulerweg existiert. (Ein Eulerweg ist ein Kantenzug, der jede Kante des Graphen genau einmal durchläuft. In der Regel besucht er die Punkte des Graphen mehrfach.)

Gut ein Jahrhundert später entwickelte sich eine Diskussion um die Frage, unter welchen Bedingungen die Existenz eines aufspannenden Kreises gegeben sei. (Ein aufspannender Kreis oder Hamiltonkreis ist ein geschlossener Kantenzug, der jeden Punkt genau einmal durchläuft. Einen Graphen, der einen Hamiltonkreis enthält, nennt man hamiltonsch.) Von besonderem Interesse war hierbei der Fall der einfach 3-polytopalen Graphen, also der planaren 3-zusammenhängenden Graphen, in deren Punkten sich immer genau drei Kanten treffen. Erst 1946 entdeckte W. T. TUTTE ein Beispiel für einen einfach 3-polytopalen Graphen ohne Hamiltonkreis. Er enthielt 46 Punkte.

Weil man bei kleinen einfach 3-polytopalen Graphen schnell Hamiltonkreise finden kann, ergab sich die Frage von V. KLEE, wie viele Punkte ein nichthamiltonscher einfach 3-polytopaler Graph mindestens haben muss. In den frühen Sechzigerjahren veröffentlichten BOSÁK, BARNETTE und LEDERBERG unabhängig voneinander Beispiele für Graphen mit 38 Punkten, die diese Eigenschaften erfüllten. In einer Serie von Arbeiten, die zwischen 1967 und 1988 veröffentlicht wurden, konnte nachgewiesen werden, dass alle kleineren einfach 3-polytopalen Graphen hamiltonsch sind.

Die vorliegende Arbeit ist der Frage gewidmet, wo diese Grenze liegt, wenn man die Bedingung streicht, dass der Kantenzug geschlossen sein muss. Einen (nicht notwendig geschlossenen) Kantenzug, der jeden Punkt genau einmal besucht, nennt man *Hamiltonweg*; ein Graph mit Hamiltonweg heißt *trassabel*.



Die Frage, wie viele Punkte ein solcher Graph mindestens enthalten muss, besteht analog zu den Hamilton*kreisen* aus zwei Teilen. Erstens benötigt man einen kleinsten nichttrassablen Graphen, zweitens muss man beweisen, dass jeder kleinere Graph trassabel ist. ZAMFIRESCU hat 1967 einen einfach 3-polytopalen nicht-trassablen Graphen mit 88 Punkten gefunden. Trotz intensiver Suche ist bislang kein kleinerer Graph mit diesen Eigenschaften publiziert worden. Im Zusammenhang mit der zweiten Frage wurde in [7] lediglich bewiesen, dass jeder Graph mit bis zu 38 Punkten trassabel ist. (Wobei diese Grenze allerdings für bestimmte Unterfälle weit höher lag.) Was zwischen 38 und 88 Punkten geschieht, war also bislang nicht bekannt.

Die vorliegende Arbeit beweist den folgenden Satz:

**Jeder einfach 3-polytopale Graph mit bis zu 52 Punkten ist trassabel.**

Der Beweis besteht aus zwei Teilen: Im ersten Kapitel wird bewiesen, dass jeder einfach 3-polytopale Graph mit bis zu 42 Punkten homogen trassabel ist, d. h., in jedem dieser Graphen findet man zu jedem Punkt einen Hamiltonweg, der dort beginnt. (Da ZAMFIRESCU einen nicht homogen trassablen Graphen mit 44 Punkten gefunden hat, ist diese Grenze scharf.) Im letzten Kapitel werden die Graphen mit 44 bis 52 Punkten durch Reduktion auf Graphen mit maximal 42 Punkten zurückgeführt (die demzufolge homogen trassabel oder hamiltonsch sind), und die dort vorliegenden Hamiltonkreise und -wege werden durch die ursprünglichen größeren Graphen umgeleitet.

Das Zwischenergebnis nach dem ersten Kapitel lautet, dass die minimalen nicht homogen trassablen einfach 3-polytopalen Graphen 44 Punkte enthalten. Diese Tatsache ist auch für andere Probleme von Bedeutung, die in den vergangenen Jahren von ZAMFIRESCU gestellt wurden. Sie zieht nämlich die Minimalität mehrerer anderer Teilgraphen nach sich, deren Anwendungen im zweiten Kapitel näher untersucht werden.

# Kapitel 2

## Voraussetzungen

### 2.1 Definitionen

Die Familie aller einfach 3-polytopalen Graphen wird in dieser Arbeit der Einfachheit halber mit  $\mathcal{F}$  bezeichnet.

Sei  $G \in \mathcal{F}$ . Eine A-Kante ist eine Kante, die in jedem Hamiltonkreis enthalten ist. Eine B-Kante ist eine Kante, die in keinem Hamiltonkreis enthalten ist. Eine  $\beta$ -Kante ist eine Kante, die in keinem Hamiltonweg enthalten ist.

Ein Kantenpaar  $(e, f) \in E(G) \times E(G)$  wird als *BB-Kanten* bezeichnet, wenn es keinen Hamiltonkreis gibt, der sowohl  $e$  als auch  $f$  benutzt.

Enthält  $G$  eine A-Kante, so nennt man  $G$  einen *A-Kanten-Graph*. Die Bezeichnungen B-Kanten-Graph,  $\beta$ -Kanten-Graph und BB-Kanten-Graph ergeben sich analog.

Ein *2-Pfad-Faktor* eines Graphen  $G$  ist nach SKUPIEŃ ein aufspannender Teilgraph von  $G$ , der aus maximal zwei Komponenten besteht, von denen jede ein Punkt oder ein Weg ist.

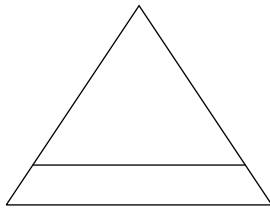
Sei  $G \in \mathcal{F}$ . Da jeder Graph aus  $\mathcal{F}$  planar sein muss, hat  $G$  Polygone. Sei  $p$  ein  $k$ -Eck in  $G$ , also ein Polygon der Länge  $k$ . Da  $G$  kubisch ist, ist zu jedem dieser  $k$  Punkte eine Kante inzident, die nicht zu  $p$  benachbart ist. Diese Kanten *föhren zu  $p$  hin*.

Sei  $G \in \mathcal{F}$ . Nach [3] ist ein  $n$ -Schnitt von  $G$  eine Menge  $C \subseteq E(G)$ , die aus  $n$  Kanten besteht, sodass  $G \setminus C$  in zwei zusammenhängende Komponenten zerfällt, aber keine echte Teilmenge  $C' \subsetneq C$  diese Bedingung erfüllt. Die Komponenten, die durch einen  $n$ -Schnitt voneinander getrennt werden, heißen  $n$ -Stücke.

Ein solcher  $n$ -Schnitt heißt *zyklisch*, wenn beide zugehörigen  $n$ -Stücke je einen Kreis enthalten; andernfalls nennt man ihn *trivial*. Er heißt *wesentlich*, wenn beide  $n$ -Stücke jeweils mehr als einen Kreis enthalten. Wenn ein Graph keinen zyklischen  $n - 1$ -Schnitt enthält, so nennt man ihn *zyklisch  $n$ -zusammenhängend*. Enthält er zusätzlich einen zyklischen  $n$ -Schnitt, so heißt er zyklisch *genau  $n$ -zusammenhängend*.

Wenn es in einem Graphen keinen  $n$ -Schnitt gibt, so nennt man einen solchen Graphen  $n$ -Kanten-zusammenhängend. Nach [3] ist der 3-Kanten-Zusammenhang bei kubischen Graphen äquivalent zum üblichen 3-Zusammenhang.

Zum Schluss wird das 3-Stück  $D$  definiert. Es besteht aus einem Dreieck, in dem ein Punkt durch ein weiteres Dreieck ersetzt wurde (Abb. 2.1).



**Abb. 2.1** Das 3-Stück  $D$

## 2.2 Grundlegende Sätze

Die folgenden Sätze werden in den Beweisen in den folgenden Kapiteln mehrfach auftauchen. Sie sind nicht Bestandteil einer üblichen Graphentheorievorlesung, jedoch mit Grundkenntnissen der Materie leicht zu verstehen.

**Lemma 2.1** *Sei  $G \in \mathcal{F}$  ein Graph mit einer A-Kante  $e$ . Ersetzt man einen zu  $e$  inzidenten Punkt  $v$  durch ein Dreieck, dann wird in diesem Dreieck auch die Kante  $e'$ , die keinen Punkt mit  $e$  gemein hat, zu einer A-Kante. (Das gleiche gilt für B-Kanten; vgl. Abb. 2.2)*

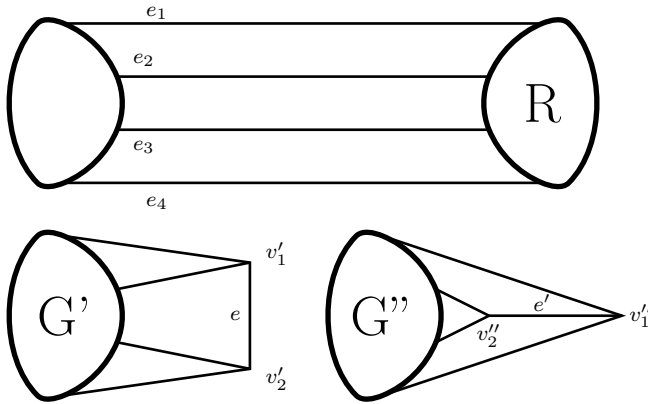


**Abb. 2.2** Die markierten Kanten sind A- oder B-Kanten.

Es gilt ebenso umgekehrt: Enthält ein A-Kanten-Graph ein Dreieck, so bleibt er auch ein A-Kanten-Graph, wenn man das Dreieck zu einem Punkt kontrahiert. (Gleiches gilt für B-Kanten- oder BB-Kanten-Graphen.)

**Definition 2.1** Sei  $G \in \mathcal{F}$  zyklisch 4-zusammenhängend und  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  (in dieser Reihenfolge!) ein zyklischer 4-Schnitt von  $G$ . Sei ferner  $R$  eines der dabei entstehenden 4-Stücke.

Der Graph  $G'$  entsteht, indem man  $R$  in  $G$  durch eine Kante  $e = (v'_1, v'_2)$  ersetzt, sodass  $e_1$  und  $e_2$  zu  $v'_1$  inzident sind und  $e_3$  und  $e_4$  zu  $v'_2$ . Der Graph  $G''$  entsteht, wenn stattdessen  $e' = (v''_1, v''_2)$  benutzt wird, sodass  $e_1$  und  $e_4$  zu  $v''_1$  und  $e_2$  und  $e_3$  zu  $v''_2$  inzident sind. Dann heißt  $G''$  die  $e$ -Transponierte von  $G'$ . (Und umgekehrt.)

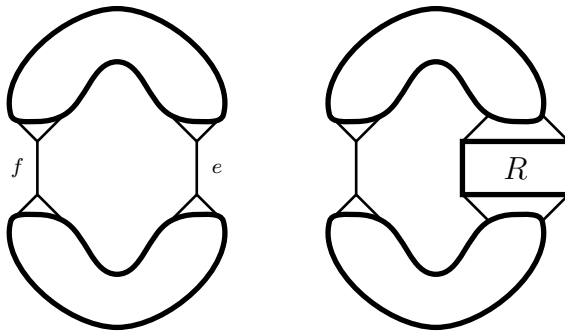


**Abb. 2.3** Konstruktion zueinander  $e$ -transponierter Graphen aus einem zyklisch 4-zusammenhängenden Graphen  $G$

**Lemma 2.2** *Die Graphen  $G'$  und  $G''$  sind einfach 3-polytopal.*

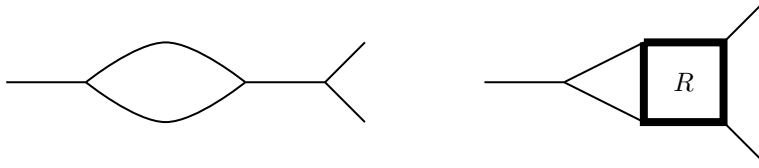
*Beweis:* Dass jeder Punkt in  $G'$  Grad 3 hat, ist ebenso offensichtlich wie die Planarität von  $G'$ .

Angenommen,  $G'$  wäre nicht 3-zusammenhängend. Weil  $G'$  kubisch ist, gäbe es dann einen 2-Schnitt in  $G$  (Abb. 2.4).



**Abb. 2.4** Ein 2-Schnitt in  $G'$  im Vergleich zu  $G$ .

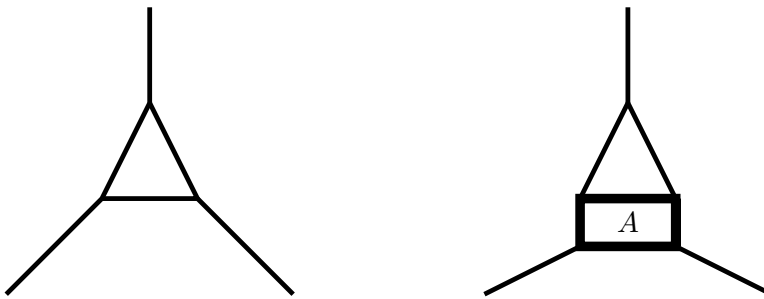
Weil das in  $G$  nicht möglich ist, muss eine dieser Kanten  $e$  sein; die andere heiße  $f$ . Dann gibt es zwei 3-Schnitte in  $G$ . Ist einer von ihnen nicht zyklisch, dann gibt es zwei Kanten in  $G'$ , die sowohl zu  $e$  als auch zu  $f$  inzident sind, also eine Doppelkante. Wenn es aber in  $G'$  eine Doppelkante gibt, dann gibt es in  $G$  einen zyklischen 3-Schnitt (Abb. 2.5).  $\square$



**Abb. 2.5** Eine Doppelkante in  $G'$  im Vergleich zu  $G$

Man erkennt im Beweis, dass man nicht zu jedem beliebigen Graphen  $G \in \mathcal{F}$  und jeder beliebigen Kante  $e \in E(G)$  eine  $e$ -Transponierte finden kann, die einfach 3-polytopal ist. Der zyklische 4-Zusammenhang ist notwendig.

**Lemma 2.3** Sei  $G \in \mathcal{F}$  nicht der Tetraëder  $K_4$ . Ersetzt man wie in Abb. 2.3 eine Kante eines Dreiecks in  $G$  durch ein 4-Stück  $R$ , so enthält der resultierende Graph einen zyklischen 3-Schnitt (Abb. 2.6).



**Abb. 2.6** Zyklisches 4-Stück  $A$  in ein Dreieck eingesetzt

# Kapitel 3

## Homogen trassable Graphen

Die Findung von aufspannenden Wegen und Kreisen in Graphen ist verwandt mit der Frage, ob ein Graph *homogen trassabel* ist, d.h., ob jeder Punkt Endpunkt eines Hamiltonweges ist.

Dass hamiltonsche Graphen homogen trassabel sind, ist leicht einzusehen. Deswegen ist die Untersuchung der homogenen Trassabilität nur interessant für nichthamiltonsche Graphen.

Sei nun  $\mathcal{M}$  die Teilmenge von  $\mathcal{F}$ , die aus allen nichthamiltonschen Graphen mit weniger als 44 Punkten besteht. Die Gestalt dieser Graphen ist aus [10] bekannt. (In einer Publikation von ALDRED, BAU, HOLTON & MCKAY [1] aus dem Jahr 2000 wird die Anzahl der Graphen aus  $\mathcal{M}$  erwähnt.)

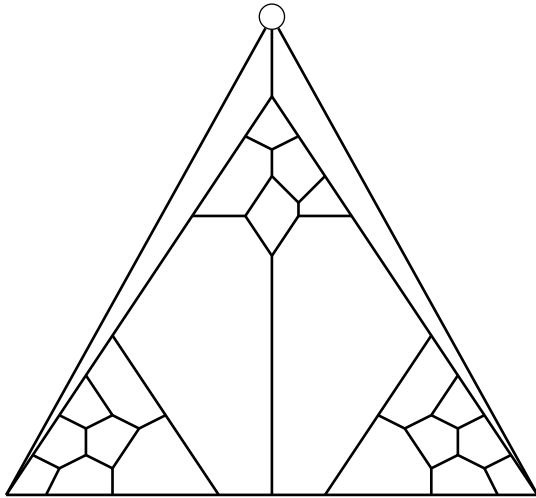
In diesem Kapitel wird bewiesen:

**Proposition 1** *Sämtliche Graphen aus  $\mathcal{M}$  sind homogen trassabel.*

Daraus folgt, dass sämtliche Graphen aus  $\mathcal{F}$  mit weniger als 44 Punkten homogen trassabel sind. Zunächst soll gezeigt werden, dass diese Grenze scharf ist.

### 3.1 Der Graph $Z_{44}$ von Zamfirescu

T. ZAMFIRESCU stellte 1980 in [15] einen Graphen mit 44 Punkten vor, der nicht homogen trassabel ist: den  $Z_{44}$  (Abb. 3.1). Es gibt keinen Hamiltonweg, der im markierten Punkt anfängt.



**Abb. 3.1**  $Z_{44}$  (ZAMFIRESCU)

Für jeden anderen Punkt  $v \in V(Z_{44})$  existiert ein Hamiltonweg, der in  $v$  beginnt. Außerdem wird jede Kante des  $Z_{44}$  von einem Hamiltonweg benutzt. Es existiert also in  $Z_{44}$  keine  $\beta$ -Kante.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird bewiesen (und benutzt), dass auch homogen trassable Graphen keine  $\beta$ -Kanten enthalten. Die Frage, wie viele Punkte ein minimaler  $\beta$ -Kanten-Graph hat, ist bislang ungeklärt.

Man beachte, dass durch Spiegelung der beiden Kopien des  $T_1$  drei weitere Graphen mit 44 Punkten entstehen, die nicht homogen trassabel sind;  $Z_{44}$  ist also nicht eindeutig. Ob es noch mehr nicht homogen trassable Graphen aus  $\mathcal{F}$  mit 44 Punkten gibt, ist mir nicht bekannt.



## 3.2 Zerlegung nichthamiltonscher Graphen mit 38 bis 42 Punkten

Wie bereits erwähnt, sind sämtliche Graphen der Familie  $\mathcal{M}$  durch [1] und [10] bekannt. Dort erfährt man auch, dass sich diese Graphen in verschiedene Klassen einteilen lassen.

Die erste Klasse bilden die zyklisch 4-zusammenhängenden Graphen. Diese besteht jedoch nur aus drei Graphen, und deren homogene Trassabilität kann direkt nachgeprüft werden. Alle weiteren Graphen lassen sich an Hand von 3-Schnitten zerlegen. Die Strategie des vorliegenden Beweises von Proposition 1 wird auf diesen Zerlegungen beruhen.

Im Folgenden wird beschrieben, aus welchen Einzelteilen diese Graphen zusammengesetzt sind. Hierzu sind einige weitere Definitionen erforderlich. Zunächst benötigt man sogenannte *A-Stücke*.

Sei  $G$  ein einfach 3-polytopaler Graph mit einer A-Kante  $e = (v, w_1)$ . Die beiden anderen zu  $v$  adjazenten Punkte seien  $w_2$  und  $w_3$ .  $G'$  entstehe aus  $G$ , indem man  $v$  und alle zu  $v$  inzidenten Kanten entfernt. Dann gibt es in  $G'$  keinen Hamiltonweg zwischen  $w_2$  und  $w_3$ .

**Definition 3.1** Ein solches  $G'$  heißt *A-Stück*, und  $w_1$  heißt dann *A-Punkt* von  $G'$ . (Die Definition eines *B-Stücks* läuft analog.) Die Punkte  $w_1$ ,  $w_2$  und  $w_3$  heißen dann *Außenpunkte* von  $G'$ .

Das bekannteste Beispiel für ein A-Stück ist das TUTTE-Dreieck. Es entsteht aus dem  $a_{16}$ -Graphen, dem kleinsten A-Kanten-Graphen.

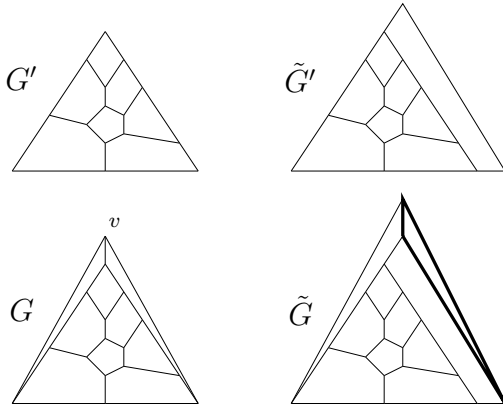
A-Stücke werden in dreieckiger Form dargestellt. Die Ecken des Dreiecks sind hierbei die Außenecken des A-Stücks, wobei der A-Punkt nach oben weist.

Um alle Graphen aus  $\mathcal{M}$  zu erhalten, braucht man folgendes Lemma:

**Lemma 3.1** *Sei  $G'$  ein A-Stück. Wenn man in einem Dreieck einen Punkt durch  $G'$  ersetzt, so entsteht daraus ein neues A-Stück  $\tilde{G}'$ . Dabei spielt es keine Rolle, wie  $G'$  orientiert ist.*

*Beweis:* Sei  $G \in \mathcal{F}$  der Graph, aus dem  $G'$  entstanden ist. Man erhält  $G'$  aus  $G$ , indem man einen Punkt  $v$  hinzufügt und die drei Außenpunkte von  $G'$  durch Kanten mit  $v$  verbindet. Dieser Punkt  $v$  ist zu einer A-Kante inzident.

Nun ergänzt man  $\tilde{G}'$  analog zu einem Graphen  $\tilde{G} \in \mathcal{F}$ . Dieser Graph  $\tilde{G}$  würde auch aus  $G$  entstehen, wenn man  $v$  durch ein Dreieck ersetzt. (Dieses Dreieck ist in Abb. 3.2 fettgedruckt.)  $\square$



**Abb. 3.2**  $G'$  und  $\tilde{G}'$  werden zu  $G$  und  $\tilde{G}$

Wenn  $G \in \mathcal{M}$  ein A-Stück  $H$  enthält, das nicht auf diese Weise zu einem größeren A-Stück  $\tilde{H}$  in  $G$  ergänzt werden kann, so nennt man  $H$  ein *maximales* A-Stück.

**Lemma 3.2** Die Graphen in  $\mathcal{M}$  lassen sich in drei Klassen aufteilen:

$\mathcal{M}_0$  (zyklisch 4-zusammenhängende Graphen),

$\mathcal{M}_1$  (Graphen, die genau ein maximales A-Stück enthalten) und

$\mathcal{M}_2$  (Graphen, die zwei maximale A-Stücke enthalten).

*Beweis:* Ein Graph  $G \in \mathcal{M}$  kann nicht mehr als zwei maximale A-Stücke enthalten, denn jedes A-Stück enthält mindestens 15,  $G$  aber maximal 42 Punkte.

Angenommen,  $G$  ist nicht zyklisch 4-zusammenhängend, enthält also einen zyklischen 3-Schnitt. Dieser trennt  $G$  in zwei 3-Stücke  $L'$  und  $R'$ , welche

durch je einen zusätzlichen Punkt  $l$  bzw.  $r$  zu Graphen  $L, R \in \mathcal{F}$  ergänzt werden können.

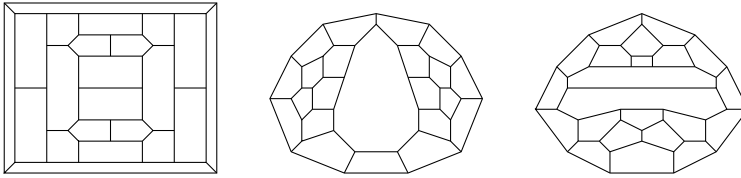
Seien  $L$  und  $R$  hamiltonsch. Jeder Hamiltonkreis in  $L$  benutzt zwei zu  $l$  inzidente Kanten. OBdA enthalte ein Hamiltonkreis  $K$  von  $L$  die Kanten  $e_1$  und  $e_2$ .

Enthält ein Hamiltonkreis in  $R$  die Kanten  $f_1$  und  $f_2$ , dann kann er mit  $K$  zu einem Hamiltonkreis in  $G$  vereinigt werden, den es nach Voraussetzung nicht gibt. Also darf kein Hamiltonkreis in  $R$  zugleich die Kanten  $f_1$  und  $f_2$  enthalten. Damit muss jeder Hamiltonkreis in  $R$  die Kante  $f_3$  enthalten. Also ist  $f_3$  eine A-Kante und  $R'$  ein A-Stück.

Sei  $L$  nicht hamiltonsch.  $L$  enthält maximal 40 Punkte. Weil nach [1] kein nichthamiltonscher Graph in  $\mathcal{F}$  mit weniger als 42 Punkten zyklisch 4-zusammenhängend ist, enthält  $L$  einen zyklischen 3-Schnitt. Die Untersuchungen, die mit  $G$  durchgeführt wurden, muss man nun rekursiv auf  $L$  anwenden. So findet man in  $L$  (und damit in  $G$ ) ein A-Stück.

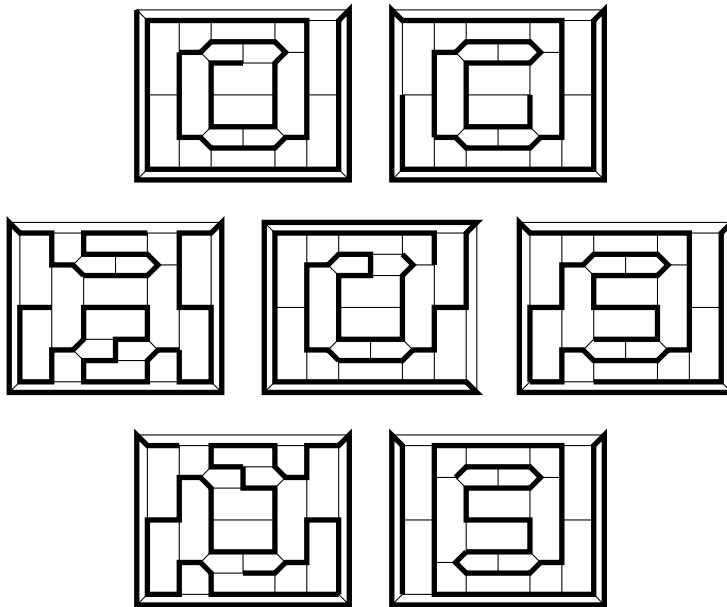
### 3.2.1 Graphen aus $\mathcal{M}_0$

Die Klasse  $\mathcal{M}_0$  der zyklisch 4-zusammenhängenden nichthamiltonschen Graphen mit weniger als 44 Punkten enthält nur drei Graphen, von denen jeder aus 42 Punkten besteht. Diese heißen  $NH_{42}^1$ ,  $NH_{42}^2$  und  $NH_{42}^3$



**Abb. 3.3** Die Graphen  $NH_{42}^1$ ,  $NH_{42}^2$  und  $NH_{42}^3$

Dass jeder von ihnen homogen trassabel ist, lässt sich mittels Abb. 3.4, 3.5 und 3.6 durch Ausnutzung der Symmetrien leicht überprüfen.



**Abb. 3.4**  $NH_{42}^1$  ist homogen trassabel

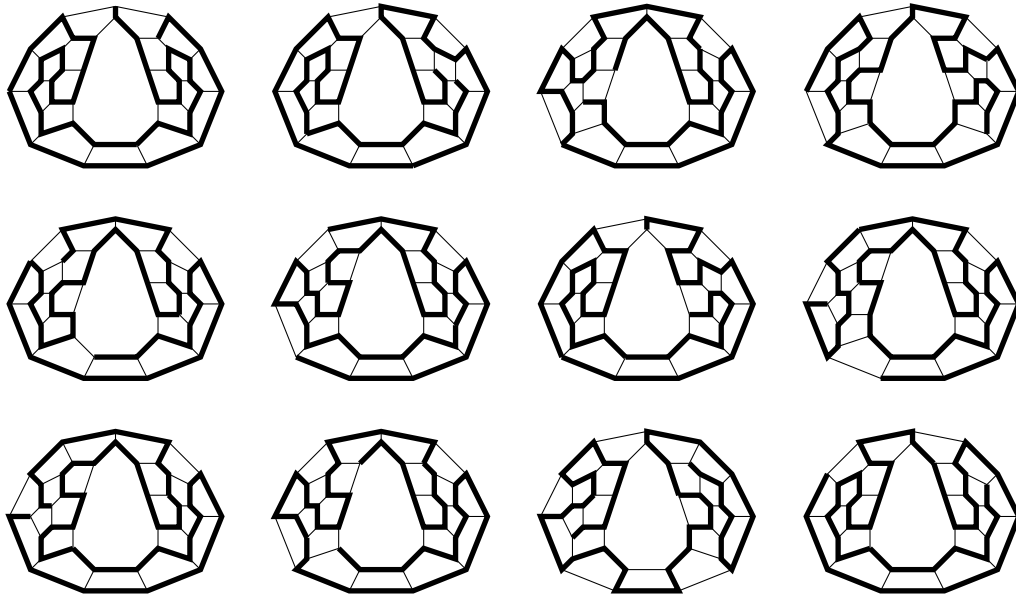


Abb. 3.5  $NH_{42}^2$  ist homogen trassabel

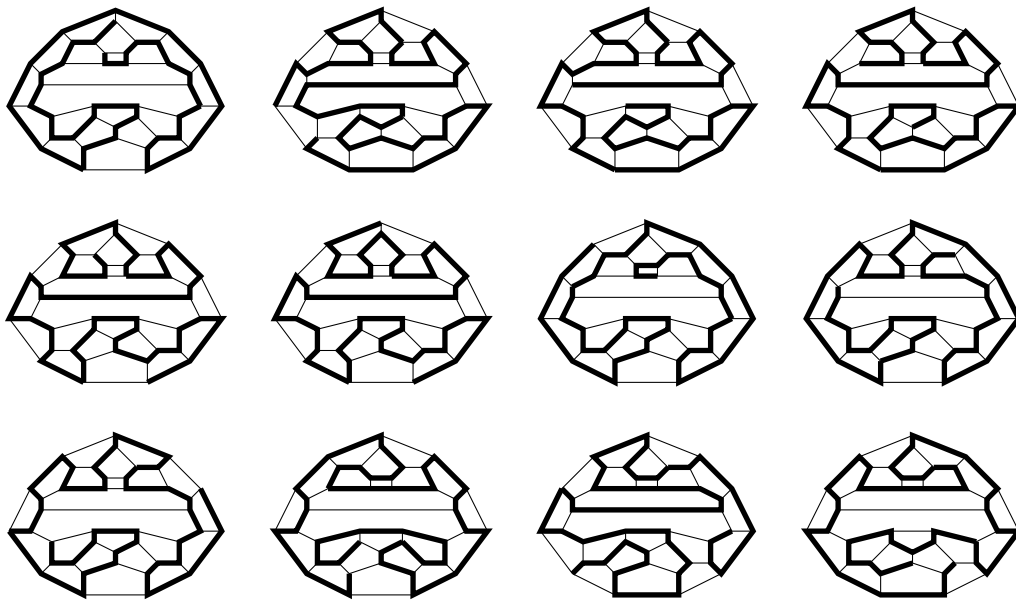


Abb. 3.6  $NH_{42}^3$  ist homogen trassabel

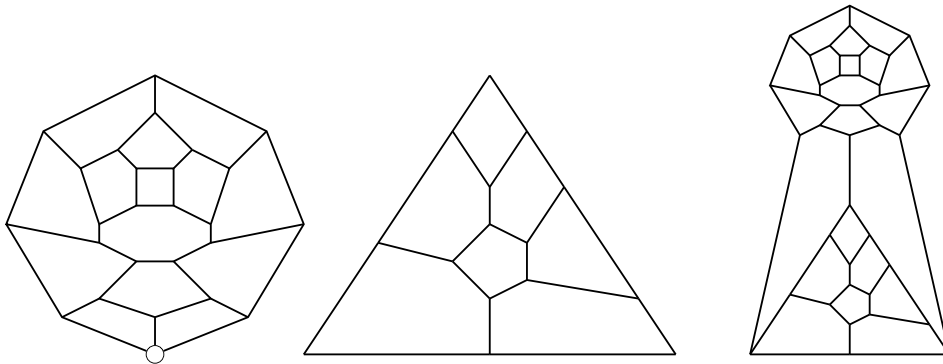
### 3.2.2 Graphen aus $\mathcal{M}_1$

Die Klasse  $\mathcal{M}_1$  besteht aus Graphen, die genau ein maximales A-Stück enthalten. Um zu verstehen, wie ein solcher Graph zusammengesetzt ist, hilft folgende Überlegung (vgl. [9]):

Sei  $K$  ein B-Kanten-Graph,  $e = (v_1, v_2) \in E(K)$  eine B-Kante. Ersetzt man  $v_1$  durch ein A-Stück  $I$  dergestalt, dass der A-Punkt von  $I$  zu  $e$  inzident ist, dann ist der resultierende Graph  $G$  nicht hamiltonsch.

Aus [1] stammt der Satz:

**Lemma 3.3** *Alle Graphen aus  $\mathcal{M}_1$  kann man auf die oben beschriebene Weise konstruieren. Hierbei ist der Graph  $K$  entweder zyklisch 4-zusammenhängend, oder er entsteht aus einem zyklisch 4-zusammenhängenden Graphen durch Einsetzung von maximal zwei Dreiecken.*



**Abb. 3.7** links: Ein zyklisch 4-zusammenhängender B-Kanten-Graph  
Mitte: Ein A-Stück  
rechts: Ein Beispielgraph aus  $\mathcal{M}_1$

Da die Graphen von  $\mathcal{M}_1$  maximal 42 Punkte enthalten dürfen und das kleinste A-Stück 15 Punkte enthält, kommen für  $K$  nur Graphen mit maximal 28 Punkten in Frage.

### 3.2.3 Graphen aus $\mathcal{M}_2$

Es bleiben die Graphen, die zwei maximale A-Stücke enthalten. Auch zur Zusammensetzung eines solchen Graphen gibt es aufschlussreiche Vorüberlegungen.

Sei  $L$  ein BB-Kanten-Graph,  $e_1 = (v_1, v_2)$  bilde mit  $e_2$  ein BB-Kanten-Paar. Man ersetze  $v_1$  so durch ein A-Stück  $I$ , dass der A-Punkt von  $I$  zu  $e_1$  inzident ist. Der so entstandene Graph heie  $J$ .

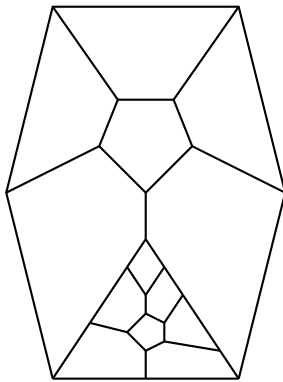
Sei  $H$  ein Hamiltonkreis in  $J$ . Es gibt nur drei Kanten, die das A-Stück  $I$  mit dem Rest des Graphen  $J$  verbinden. Deswegen muss  $H \cap I$  ein Hamiltonweg in  $I$  sein, der zwei der drei Außenpunkte von  $I$  miteinander verbindet. Weil  $I$  ja ein A-Stück ist, muss einer der so verbundenen Punkte der A-Punkt von  $I$  sein.  $H$  benutzt also die Kante  $e_1$ .

Kontrahiert man nun  $I$  auf einen Punkt, so bleibt  $H$  ein Hamiltonkreis.

Weil er die Kante  $e_1$  benutzt, darf er die Kante  $e_2$  nicht benutzen.

Darum wird  $e_2$  im neuen Graphen  $J$  zu einer B-Kante.

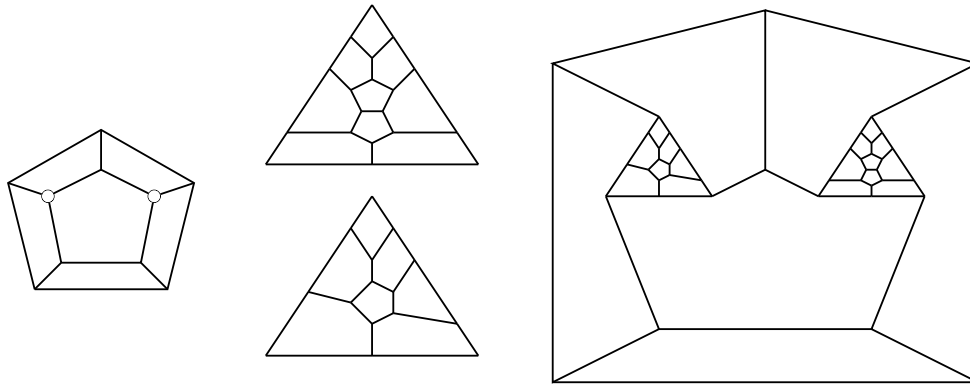
Ein Beispiel fur einen B-Kanten-Graphen, der sich auf diese Weise konstruieren lasst, ist der Graph  $b_{24}$ , der kleinste B-Kanten-Graph in  $\mathcal{F}$  (vgl. [2], [4]).



**Abb. 3.8**  $b_{24}$ , der kleinste B-Kanten-Graph in  $\mathcal{F}$

Alles Weitere ergibt sich analog zu den Graphen aus  $\mathcal{M}_1$ , denn  $e_2$  ist eine

B-Kante. Ersetzt man nun einen zu  $e_2$  inzidenten Punkt  $v$  durch ein A-Stück  $I'$  so, dass der A-Punkt von  $I'$  zu  $e_2$  adjazent ist, so entsteht ein nichthamiltonscher Graph. Auch hier gilt nach [1]: Sämtliche Graphen aus  $\mathcal{M}_2$  entstehen auf diese Weise.



**Abb. 3.9** Ein Beispielgraph aus  $\mathcal{M}_2$

Da die A-Stücke  $I$  und  $I'$  jeweils mindestens 15 Punkte enthalten, darf der BB-Kanten-Graph  $L$  maximal 14 Punkte haben.

So lassen sich alle nichthamiltonschen Graphen mit maximal 42 Punkten zerlegen. Wie dies bei der Untersuchung der homogenen Trassabilität hilft, das wird im folgenden Abschnitt erläutert.



### 3.3 Untersuchung der einzelnen Klassen

Ziel dieses Abschnitts ist es, für jeden Graphen  $G \in \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$  und jeden Punkt  $v \in V(G)$  eine Methode anzugeben, wie man einen Hamiltonweg konstruiert, der in  $v$  endet. Ist das geschafft, so ist bewiesen, dass alle Graphen in  $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$  homogen trassabel sind. Bevor man das tut, muss man sich jedoch eine Feinheit näher anschauen.

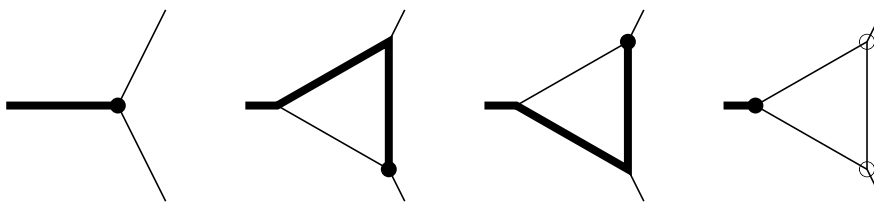
#### 3.3.1 Dreiecke

Die Graphen der Klasse  $\mathcal{M}$  haben 38 bis 42 Punkte. Es kann passieren, dass sie Dreiecke enthalten. Diese Fälle müssen gesondert behandelt werden.

**Lemma 3.4** ([9]) *Ein Graph  $G$  entstehe aus  $G'$ , indem ein Punkt durch ein Dreieck ersetzt wird. Dann gilt:*

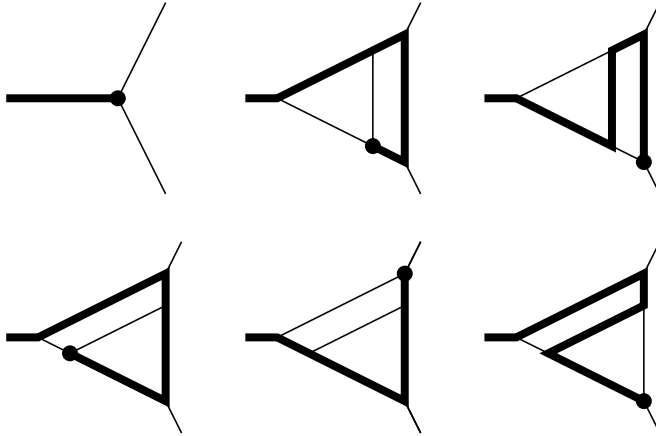
$G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G'$  hamiltonsch

In Lemma 3.4 darf man nach [7] ohne Probleme „hamiltonsch“ durch „trassabel“ ersetzen, nicht aber durch „homogen trassabel“. Angenommen, ein Hamiltonweg endet mit einer Kante  $e$  in einem Punkt  $v$ . Wenn man  $v$  durch ein Dreieck ersetzt, dann kann man den Hamiltonweg so ergänzen, dass er in zweien der drei Punkte dieses Dreiecks endet. Mit dem dritten geht das leider nicht (Abb. 3.10).



**Abb. 3.10** Die Einsetzung eines Dreiecks in einen homogen trassablen Graphen kann dazu führen, dass die homogene Trassabilität verlorengeht.

Wenn man allerdings zu jedem Punkt garantieren kann, dass er *von zwei Seiten* mit einem Hamiltonweg erreicht wird, dann bleibt der Gesamtgraph auch nach Einsetzung eines Dreiecks homogen trassabel. (Das funktioniert sogar dann, wenn man statt eines Dreiecks das 3-Stück  $D$  einsetzt.)



**Abb. 3.11** Umformung eines Hamiltonweges, in dessen Endpunkt das 3-Stück  $D$  eingesetzt wurde.

Sei  $G$  ein nichthamiltonscher einfach 3-polytopaler Graph, der ein Dreieck enthält. Kontrahiert man das Dreieck zu einem Punkt, so erhält man einen nichthamiltonschen Graphen  $G'$ , der zwei Punkte weniger enthält als  $G$ .

Daraus lassen sich zwei Schlussfolgerungen ziehen:

1. Weil  $G'$  mindestens 38 Punkte enthält und jeder Graph in  $\mathcal{M}$  aus maximal 42 Punkten besteht, kann ein Graph aus  $\mathcal{M}$  maximal zwei Dreiecke enthalten.
2. Die Einsetzung eines Dreiecks in  $G'$  braucht nicht untersucht zu werden, wenn  $|V(G')| = 42$  ist. (Das schließt die Graphen der Klasse  $\mathcal{M}_0$  ein.)

Darum werden im Folgenden nur Graphen  $G \in \mathcal{M}$  untersucht, die keine Dreiecke enthalten. Für  $|V(G)| = 42$  wird zu jedem Punkt  $v \in V(G)$  ein Hamiltonweg konstruiert, der in  $v$  endet. Für  $|V(G)| = 38$  und  $|V(G)| = 40$  müssen zu jedem Punkt  $v \in V(G)$  zwei Hamiltonwege konstruiert werden, die auf verschiedenen Kanten in  $v$  enden.

### 3.3.2 Graphen aus $\mathcal{M}_1$

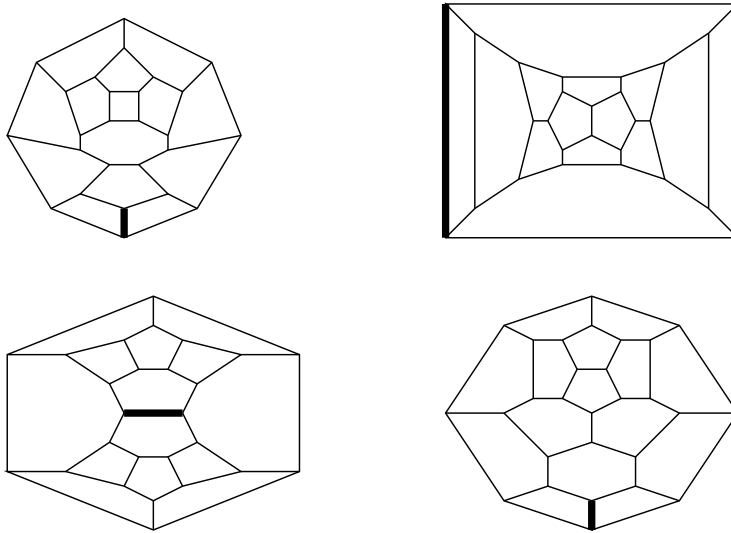
Sei  $G \in \mathcal{M}_1$  dreiecksfrei. Nach der Definition von  $\mathcal{M}_1$  enthält  $G$  ein A-Stück  $I$ . Nach Lemma 3.3 wird  $G$  durch Kontraktion von  $I$  zu einem Punkt in einen B-Kanten-Graphen  $K$  umgewandelt. Ferner ist  $K$  zyklisch 4-zusammenhängend und enthält maximal 28 Punkte.

Wenn  $G \in \mathcal{M}$  ein Dreieck enthält, dann liegt dieses Dreieck entweder in  $I$  (und verschwindet durch die Kontraktion von  $I$  auf einen Punkt) oder in  $G \setminus I$ . Im letzteren Fall kann man zunächst  $I$  und dann das Dreieck auf einen Punkt kontrahieren und erhält damit einen zyklisch 4-zusammenhängenden Graphen mit maximal 26 Punkten.

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis folgender Aussage:

**Lemma 3.5** *Jeder Punkt in  $G \setminus I$  ist Endpunkt eines Hamiltonweges in  $G$ .*

*Beweis:* Aus [10] ist bekannt, dass es nur vier zyklisch 4-zusammenhängende B-Kanten-Graphen mit maximal 28 Punkten gibt:  $b_{26}^1, b_{26}^2, b_{26}^3$  und  $b_{28}$  (vgl. Abb. 3.12).



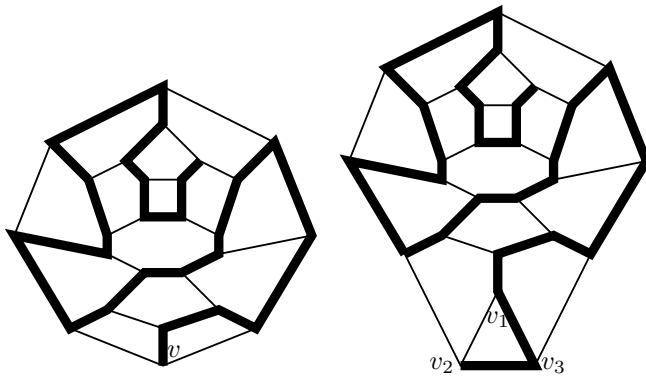
**Abb. 3.12** Die B-Kanten-Graphen  $b_{26}^1, b_{26}^2, b_{26}^3$  und  $b_{28}$   
Die markierten Kanten sind die B-Kanten.

Die Graphen  $b_{26}^1, b_{26}^2$  und  $b_{26}^3$  sind bereits aus [8] bekannt. Dort heißen sie allerdings  $B26.1, B26.3$  und  $B26.6$ .

Sei  $G \in \mathcal{M}_1$  dreiecksfrei und  $I \subseteq G$  ein A-Stück. Sei  $P$  ein Hamiltonweg in  $G$ , der keinen Endpunkt in  $I$  hat. Wenn man  $I$  zu einem Punkt kontrahiert, entsteht ein zyklisch 4-zusammenhängender B-Kanten-Graph  $K \in \mathcal{F}$  – einer der vier Graphen aus Abb. 3.12. Dann verwandelt sich  $P$  in einen Hamiltonweg in  $K$ , der jede B-Kante von  $K$  enthält.

Findet man also in jedem dieser vier Graphen zu jedem Punkt  $v \in V(K)$  einen Hamiltonweg, der alle B-Kanten von  $K$  benutzt und in  $v$  endet, dann bleibt dieser Weg auch nach Einsetzung von  $I$  ein Hamiltonweg. Diese Hamiltonwege muss man also in allen vier zyklisch 4-zusammenhängenden B-Kanten-Graphen mit maximal 28 Punkten suchen.

Findet man zu jedem Punkt  $v \in V(K)$  zwei Hamiltonwege, die in  $v$  enden und verschiedene zu  $v$  inzidente Kanten benutzen, dann bleibt mindestens einer von beiden Wegen auch nach Einsetzung von  $I$  und dem Dreieck ein Hamiltonweg. Letzteres ist für  $b_{28}$  nicht erforderlich, denn nach Einsetzung eines minimalen A-Stückes und eines Dreiecks hätte dieser Graph 44 Punkte. Diese Hamiltonwege muss man also in  $b_{26}^1, b_{26}^2$  und  $b_{26}^3$  suchen.

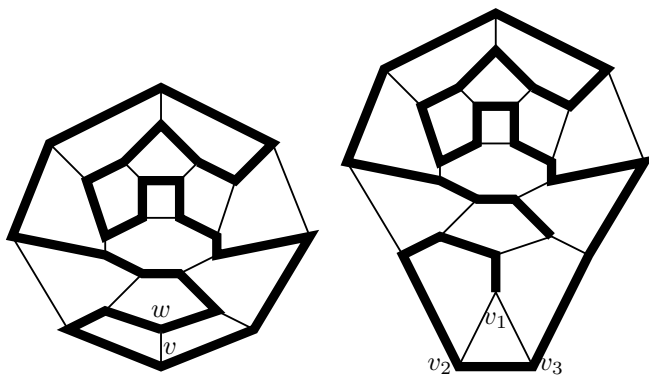


**Abb. 3.13** Erweiterung eines Hamiltonweges in  $b_{26}^1$  nach Einsetzung eines Dreiecks

Nun soll  $P$  alle B-Kanten benutzen. Jeder Hamiltonweg, der in  $v$  endet, enthält nur eine zu  $v$  inzidente Kante. Ist  $v$  in  $K$  zu einer B-Kante  $e$

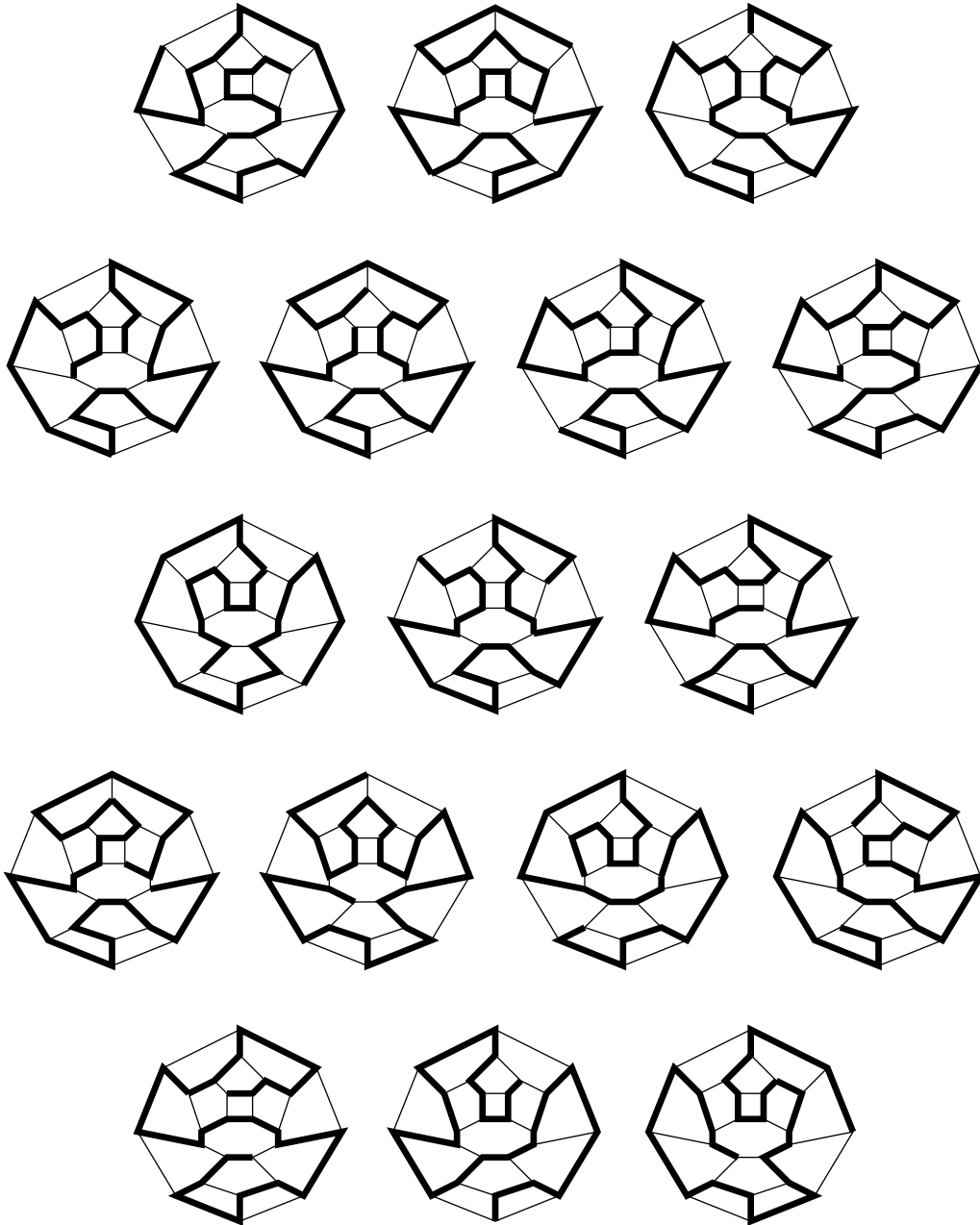
inzident, so gibt es nach Voraussetzung nur eine zu  $v$  inzidente Kante, die ein solches  $P$  enthalten darf.  $K'$  entstehe aus  $K$ , indem man  $v$  durch ein Dreieck  $f = \{v_1, v_2, v_3\}$  ersetzt, wobei  $v_1$  zu  $e$  inzident sei. Dann kann  $P$  zu einem Hamiltonweg mit Endpunkt  $v_2$  oder  $v_3$  verlängert werden, der alle B-Kanten von  $K'$  benutzt. Für  $v_1$  geht das nicht (Abb. 3.13).

Weil aber jeder Graph mit weniger als 38 Punkten hamiltonsch ist, enthält  $K$  einen Hamiltonkreis  $C$ . Da  $e = (v, w)$  eine B-Kante ist, kann  $C$  die Kante  $e$  nicht enthalten. Darum muss  $C$  die anderen zu  $v$  und  $w$  inzidenten Kanten enthalten. Ersetzt man nun  $v$  durch das Dreieck  $f$ , dann kann man  $C$  durch  $v_2$  und  $v_3$  umleiten. Verbindet man nun  $v_1$  mit  $w$  und lässt dafür eine der beiden anderen zu  $w$  inzidenten Kanten weg, so erhält man im Graphen  $K'$  einen Hamiltonweg, der alle B-Kanten benutzt und in  $v_1$  endet.



**Abb. 3.14** Aufbrechen eines Hamiltonkreises in  $b_{26}^1$  nach Einsetzung eines Dreiecks

Es genügt also, in jedem der vier Graphen  $b_{26}^1, b_{26}^2, b_{26}^3$  und  $b_{28}$  zu jedem Punkt  $v$  einen Hamiltonweg zu finden, der alle B-Kanten enthält und in  $v$  endet, sowie in  $b_{26}^1, b_{26}^2$  und  $b_{26}^3$  zu jedem  $v$ , das nicht zu einer B-Kante inzident ist, einen zweiten Hamiltonweg zu finden, der in  $v$  mit eine andere Kante endet als der erste. Dies wird mit den folgenden Abbildungen erledigt.



**Abb. 3.15** In jedem  $v \in V(b_{26}^1)$  endet ein Hamiltonweg, der die B-Kante enthält. Ist  $v$  nicht zur B-Kante inzident, dann endet dort ein zweiter solcher Weg, der eine andere zu  $v$  inzidente Kante benutzt als der erste.

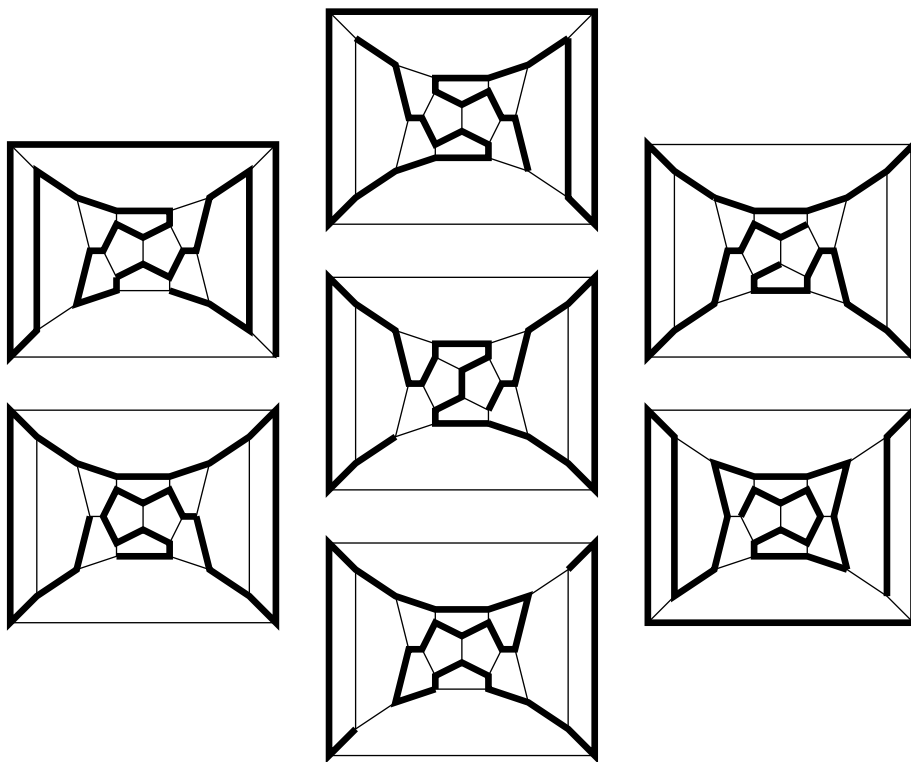


Abb. 3.16 Analoge Hamiltonwege in  $b_{26}^2$  (Symmetrien beachten!)  
 Hier müssen jeweils *zwei* B-Kanten durchlaufen werden.

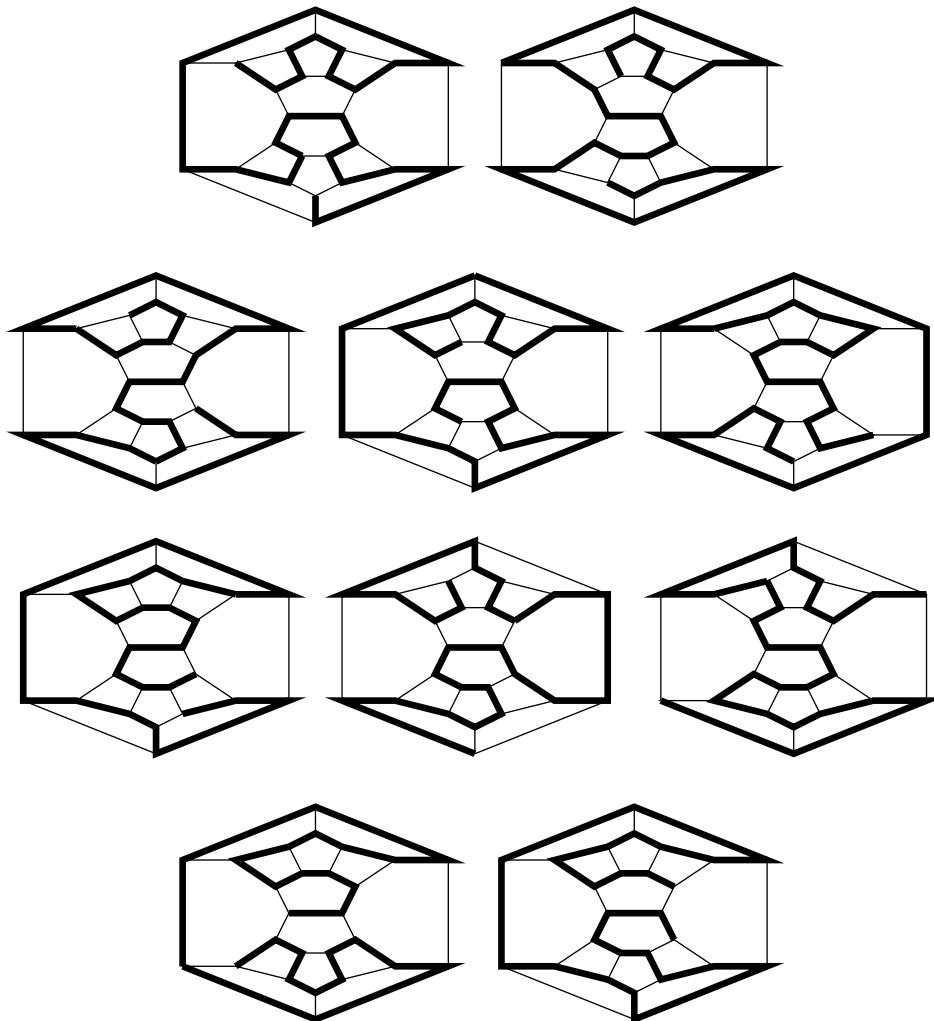
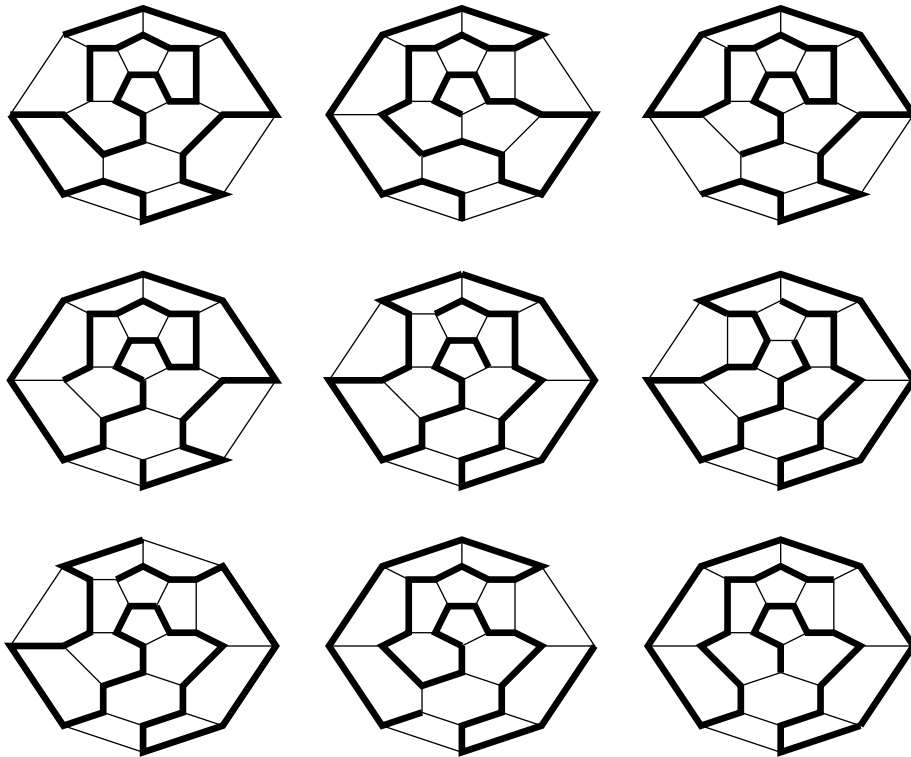


Abb. 3.17 analoge Hamiltonwege in  $b_{26}^3$





**Abb. 3.18** In jedem Punkt in  $b_{28}$  endet ein Hamiltonweg, der die B-Kante benutzt.

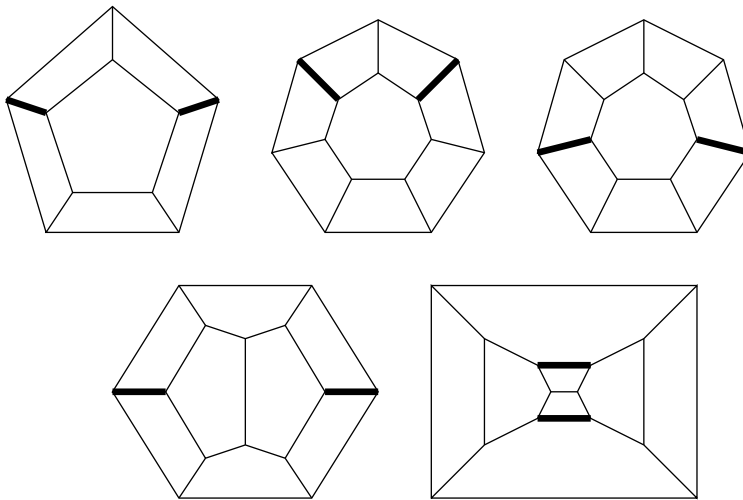
### 3.3.3 Graphen aus $\mathcal{M}_2$

Sei  $G \in \mathcal{M}_2$  dreiecksfrei. Nach der Definition von  $\mathcal{M}_2$  enthält  $G$  zwei maximale A-Stücke  $I_1$  und  $I_2$ . Durch Kontraktion von  $I_1$  und  $I_2$  zu je einem Punkt wird  $G$  in einen BB-Kanten-Graphen  $K$  umgewandelt. Ferner enthält  $K$  maximal 14 Punkte.

Wenn  $G \in \mathcal{M}$  ein Dreieck enthält, dann liegt dieses Dreieck entweder in  $I_1$  bzw.  $I_2$  (und verschwindet durch die Kontraktion von  $I_1$  und  $I_2$  auf einen Punkt) oder in  $G \setminus (I_1 \cup I_2)$ . Im letzteren Fall kann man zunächst  $I_1$  und  $I_2$  und dann das Dreieck auf je einen Punkt kontrahieren und erhält damit einen neuen BB-Graphen mit maximal 12 Punkten. Auch dieser könnte ein Dreieck enthalten, doch nach Kontraktion dieses Dreiecks kommt ein BB-Graph mit 10 Punkten heraus. Weil es keine kleineren BB-Graphen in  $\mathcal{F}$  gibt, muss man maximal zweimal ein Dreieck kontrahieren.

In diesem Abschnitt wird folgende Aussage bewiesen werden:

**Lemma 3.6** *Jeder Punkt in  $G \setminus (I_1 \cup I_2)$  ist Endpunkt eines Hamiltonweges in  $G$ .*

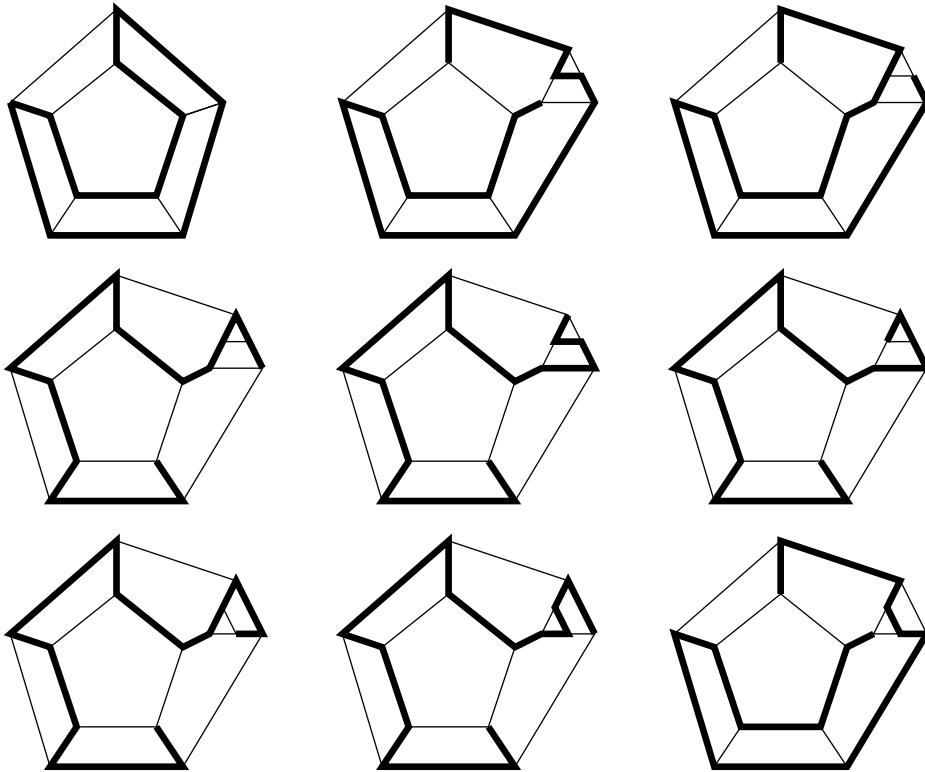


**Abb. 3.19** Die BB-Kanten-Graphen  $bb_{10}$ ,  $bb_{14}^1$ ,  $bb_{14}^2$  und  $bb_{14}^3$ . Die markierten Kanten sind alle BB-Kanten-Paare.

*Beweis:* Aus [10] ist bekannt, dass es nur vier dreiecksfreie BB-Kanten-Graphen mit maximal 14 Punkten gibt:  $bb_{10}$ ,  $bb_{14}^1$ ,  $bb_{14}^2$  und  $bb_{14}^3$  (vgl. Abb. 3.19). Dabei beachte man allerdings, dass es bei  $bb_{14}^1$  zwei nicht-isomorphe Möglichkeiten gibt, ein Paar BB-Kanten auszuwählen.

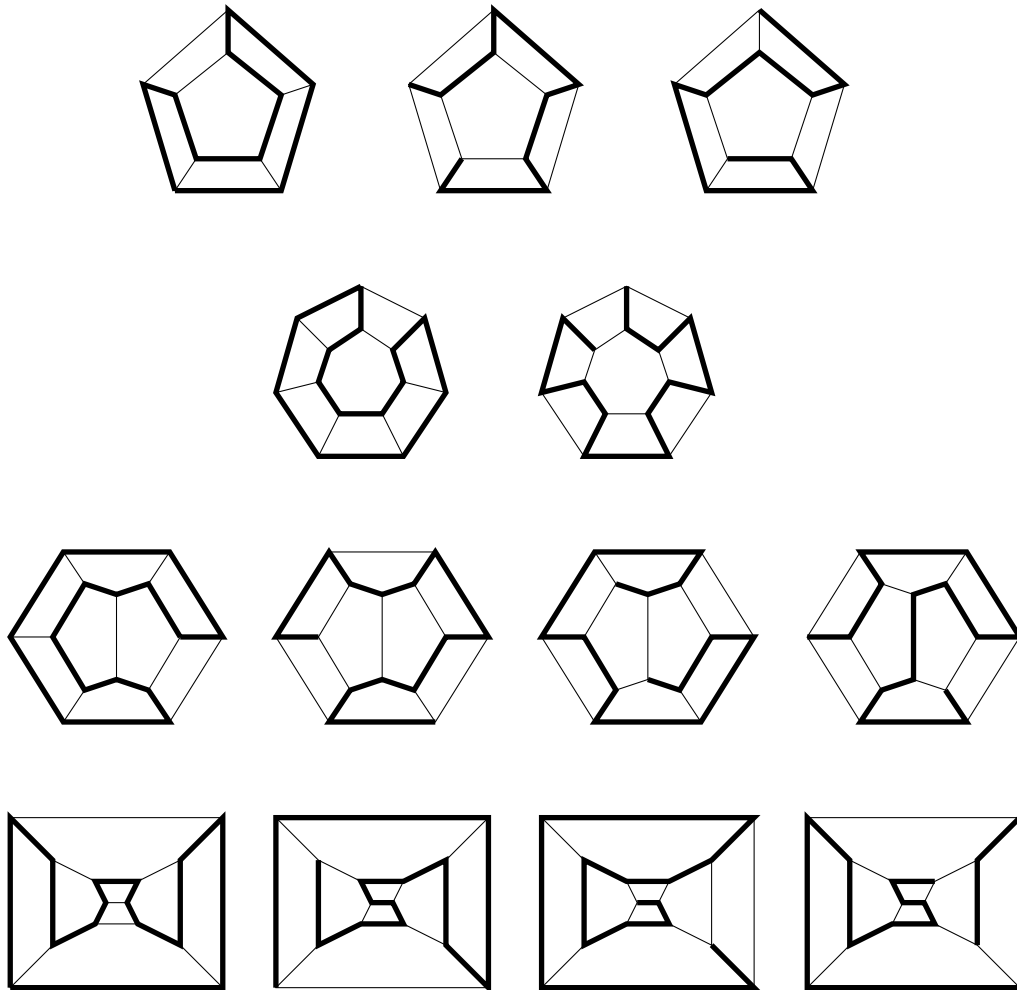
Die Beweisschritte laufen analog zum vorigen Kapitel, wobei der Hamiltonweg  $P$  die beiden BB-Kanten enthalten soll. Diesmal muss für die  $bb_{14}$ -Graphen kein zweiter Hamiltonweg gefunden werden. (Setzt man zwei minimale A-Stücke ein, dann ergibt sich ein Graph der Größe 42. Wenn man dort zusätzlich ein Dreieck einsetzt, gehört der resultierende Graph nicht mehr zu  $\mathcal{M}$ .) Man beachte hierbei jedoch, dass  $G$  auch das 3-Stück  $D$  enthalten kann.

Wenn  $v$  zu einer BB-Kante  $e = (v, w)$  inzident ist, gibt es ähnliche Probleme wie oben. Sei  $P$  ein Hamiltonweg in  $K$ , der ein BB-Kantenpaar enthält. Angenommen, das 3-Stück  $D$  wird für  $v$  eingesetzt. Dann kann man aber zu jedem Punkt  $v_0 \in D$  entweder von  $P$  oder von einem Hamiltonkreis ausgehend einen Hamiltonweg mit Endpunkt  $v_0$  finden, der beide BB-Kanten benutzt (Abb. 3.20).



**Abb. 3.20** oben links: Hamiltonkreis, der eine der beiden BB-Kanten benutzt  
 rechts: Umleitungen, falls an die andere BB-Kante in  $v$  der 3-Schnitt  $D$  eingesetzt wird  
 Mitte: Hamiltonweg durch alle BB-Kanten für die anderen drei Punkte aus  $D$   
 unten: analoge Einsetzungen, falls  $D$  gedreht ist

Diesmal genügt es also, in jedem der vier Graphen  $bb_{14}^1, bb_{14}^2$  und  $bb_{14}^3$  zu jedem BB-Kanten-Paar und jedem Punkt  $v$  einen Hamiltonweg zu finden, der beide BB-Kanten enthält und in  $v$  endet, sowie in  $bb_{10}$  zusätzlich zu jedem  $v$ , das nicht zu einer BB-Kante inzident ist, einen zweiten Hamiltonweg zu finden, der in  $v$  mit eine andere Kante endet als der erste. Unter Berücksichtigung aller Symmetrien findet man alle nötigen Hamiltonwege in den folgenden Zeichnungen.



**Abb. 3.21** Hamiltonkreise und -wege in den BB-Kanten-Graphen (Symmetrien beachten!)

Die Hamiltonkreise benutzen je einen BB-Kanten, die Hamiltonwege jeweils ein Paar BB-Kanten.

### 3.3.4 A-Stücke

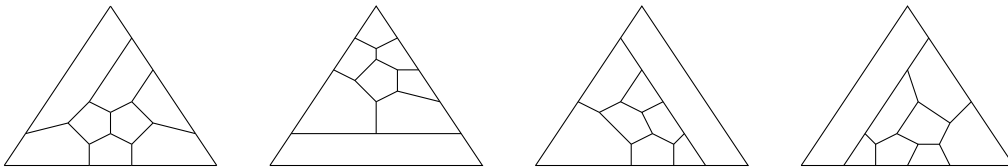
Ziel des gesamten Kapitels ist ja der Beweis, dass alle Graphen in  $\mathcal{M}$  homogen trassabel sind, dass also jeder Punkt in jedem dieser Graphen Endpunkt eines Hamiltonweges ist.

Für die Graphen, die kein A-Stück enthalten, ist das auch bereits bewiesen. Ferner wurde gezeigt, dass in jedem Graphen  $G \in \mathcal{M}$ , der ein A-Stück  $I$  enthält, jeder Punkt  $v$  Endpunkt eines Hamiltonweges ist, wenn er nicht in  $I$  liegt. Wenn man jetzt noch zu jedem Punkt in  $I$  einen Hamiltonweg konstruieren kann, der dort endet, dann ist der Beweis fertig.

Reduziert man  $I$  zu einem Punkt, so entsteht ein B-Kanten-Graph. Weil der kleinste B-Kanten-Graph 24 Punkte enthält und  $G$  selbst maximal 42 Punkte enthalten darf, besteht  $I$  aus maximal 19 Punkten. Welche A-Stücke dieser Größe gibt es?

Wieder einmal wird zunächst der dreiecksfreie Fall betrachtet. Dann liefert wieder [10], dass 25 A-Stücke mit maximal 19 Punkten existieren: eins mit 15 Punkten (das ist das TUTTE-Dreieck  $T_1$ ), vier mit je 17 Punkten und zwanzig mit je 19 Punkten.

Von den vier A-Stücken mit je 17 Punkten entstehen aber drei, indem man  $T_1$  in ein Dreieck einsetzt. Das A-Stück, das übrigbleibt, heißt ab sofort  $a_{17}$  (vgl. Abb. 3.22). Man beachte, dass die anderen drei A-Stücke kein Dreieck enthalten, obwohl sie mit einem Dreieck konstruiert wurden.

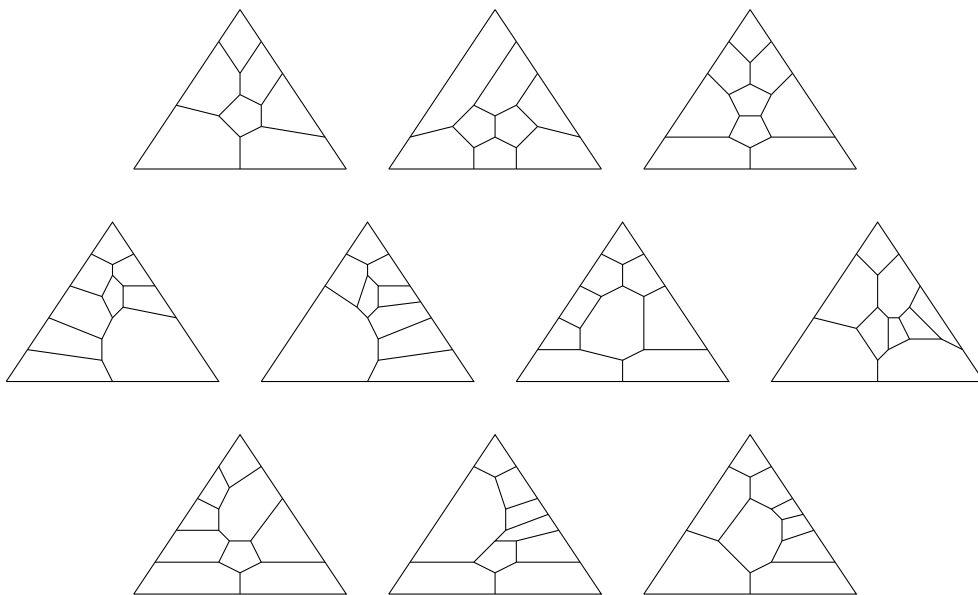


**Abb. 3.22** links:  $a_{17}$

rechts: drei A-Stücke, die bei Einsetzung des  $T_1$  in ein Dreieck entstehen.

Von den zwanzig A-Stücken mit je 19 Punkten entstehen zwölf durch Einsetzung eines A-Stücks mit 17 Punkten in ein Dreieck und sieben weitere durch den Austausch einer Kante in  $T_1$  gegen ein Doppel-Viereck. Das A-Stück, das bei dieser Aufzählung übrigbleibt, heißt  $a_{19}^1$ , die sieben Graphen der zweiten Menge heißen  $a_{19}^2$  bis  $a_{19}^8$ .

Zunächst werden alle A-Stücke betrachtet, die nicht durch Einsetzung eines kleineren A-Stücks in ein Dreieck entstehen. Diese sind in Abb. 3.23 dargestellt.



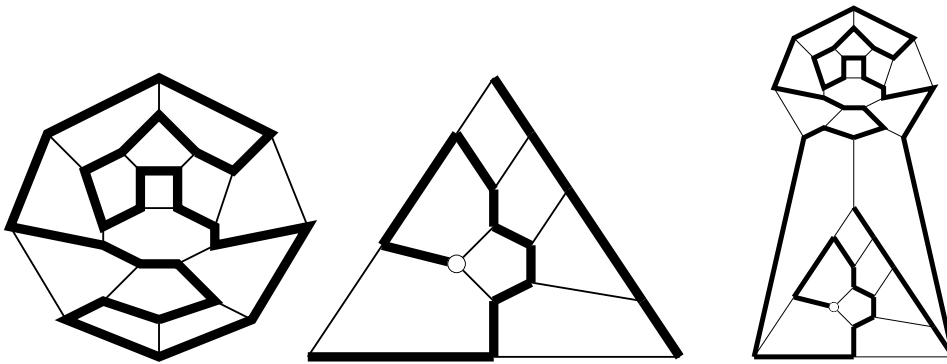
**Abb. 3.23** Von links oben nach rechts unten: Die zehn A-Stücke  $T_1$ ,  $a_{17}$  und  $a_{19}^1$  bis  $a_{19}^8$

Die A-Stücke in Abb. 3.23 sind als Dreiecke dargestellt, deren jeweiliger A-Punkt nach oben weist. Es gibt also keinen Hamiltonweg in einem dieser A-Stücke, der die beiden Punkte links und rechts unten als Endpunkte hat. Aber jeder von ihnen kann durch einen Hamiltonweg mit dem A-Punkt oben verbunden werden.

Zurück zum Gesamtgraphen  $G \in \mathcal{M}$ , der eines dieser A-Stücke enthält. Kontrahiert man das A-Stück  $I$  zu einem Punkt  $v$ , so entsteht aus  $G$  ein

B-Kanten-Graph  $K$ , der einen Hamiltonkreis  $H$  enthält. Ersetzt man  $v$  wieder durch  $I$ , dann enthält  $H$  die beiden Kanten, die  $I$  mit dem restlichen Graphen verbinden und gerade zu den beiden Punkten  $a$  und  $b$  inzident sind, die nicht durch einen Hamiltonweg in  $I$  miteinander verbunden werden können. Deswegen kann  $H$  nicht zu einem Hamiltonkreis in  $G$  fortgesetzt werden – wohl aber zu einem Hamiltonweg, dessen Endpunkte beide in  $I$  liegen.

Konkret macht man das folgendermaßen: Findet man zu einem Punkt  $v_0 \in V(I)$  einen aufspannenden 2-Pfad-Faktor  $P$ , der  $v_0$  mit  $a$  und einen weiteren Punkt  $v_1 \in V(I)$  mit  $b$  verbindet oder umgekehrt (wobei  $v_0, v_1, a$  und  $b$  die Endpunkte des 2-Pfad-Faktors sein sollen), so kann man  $H$  mit  $P$  zu einem Hamiltonweg in  $G$  kombinieren, der  $v_0$  und  $v_1$  als Endpunkte hat (s. Abb. 3.24).



**Abb. 3.24** Der Hamiltonkreis im B-Kanten-Graphen wird zu einem Hamiltonweg in  $G$

(Man beachte übrigens, dass auch  $a$  oder  $b$  als  $v_0$  in Frage kommen. In diesem Falle sind die Komponenten von  $P$  gerade der Punkt  $v_0$  sowie ein Weg, der  $I \setminus \{v_0\}$  aufspannt.)

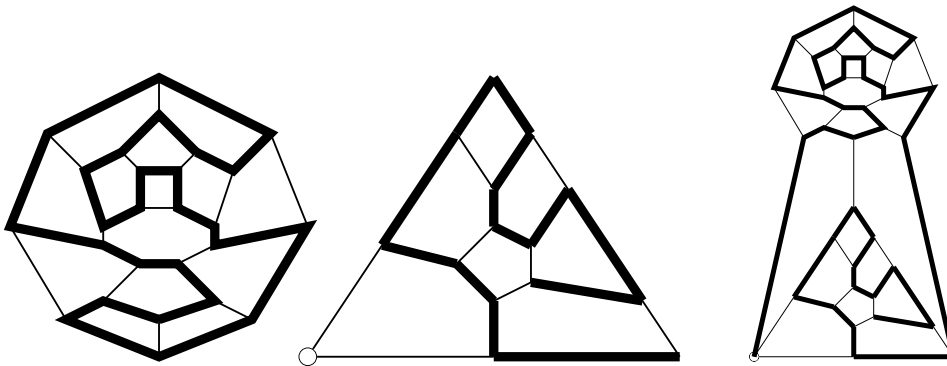
Findet man also zu jedem A-Stück  $I$  für jeden Punkt einen solchen 2-Pfad-Faktor, dann ist jeder dieser Punkte Endpunkt eines Hamiltonweges in jedem Graphen  $G \in \mathcal{M}$ , der  $I$  enthält.

Findet man weiterhin zu jedem solchen Punkt  $v_0$  einen zweiten aufspannenden 2-Pfad-Faktor wie oben, der den Endpunkt  $v_0$  über eine



andere inzidente Kante erreicht als der erste, dann kann man in  $v_0$  auch ein Dreieck einsetzen (und in das Dreieck noch ein Dreieck einsetzen), und jeder Punkt des Dreiecks wäre Endpunkt eines Hamiltonweges in  $G$ .

Dass man einen solchen Alternativweg nicht immer findet, liegt auf der Hand: Ein 2-Pfad-Faktor enthält immer einen Weg, der in  $a$  beginnt und einen Weg, der in  $b$  beginnt. Ist zum Beispiel  $v_0 = a$  oder  $v_0 = b$ , dann schrumpft der Weg, der  $v_0$  mit einem dieser Punkte verbinden soll, zu einem Punkt zusammen. Der Hamiltonweg, dessen Endpunkt  $v_0$  sein soll, würde dann zwangsläufig in der Kante enden, die von  $G \setminus I$  aus nach  $v_0$  läuft.



**Abb. 3.25** Will man einen Hamiltonkreis in  $K$  zu einem Hamiltonweg in  $G$  erweitern, können bestimmte Punkte in  $I$  nur von einer Seite erreicht werden.

Für solche Fälle gibt es aber die Möglichkeit,  $v_0$  durch einen aufspannenden Weg  $P'$  mit  $c$  zu verbinden, sodass  $P'$  eine andere zu  $c$  inzidente Kante benutzt als der 2-Pfad-Faktor von  $I$ . Zur Erinnerung: Jeder B-Kanten-Graph mit maximal 28 Punkten enthält zu jedem Punkt  $v$  einen Hamiltonweg  $H$ , der in  $v$  endet und alle B-Kanten benutzt. Also auch für die Punkte, die zu einer B-Kante inzident sind. Ersetzt man einen dieser Punkte durch das A-Stück  $I$ , dann kann man  $P'$  durch  $H$  zu einem Hamiltonweg in  $G$  erweitern, dessen Endpunkt  $v_0$  ist. Wenn dieser Hamiltonweg eine andere zu  $v_0$  inzidente Kante benutzt, kann er als Alternative zum 2-Pfad-Faktor verwendet werden.

Um das Kapitel abzuschließen, muss man also folgenden Sachverhalt

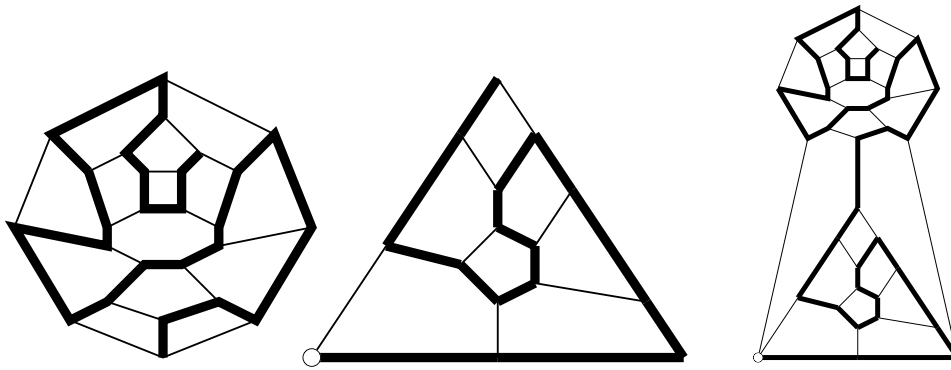


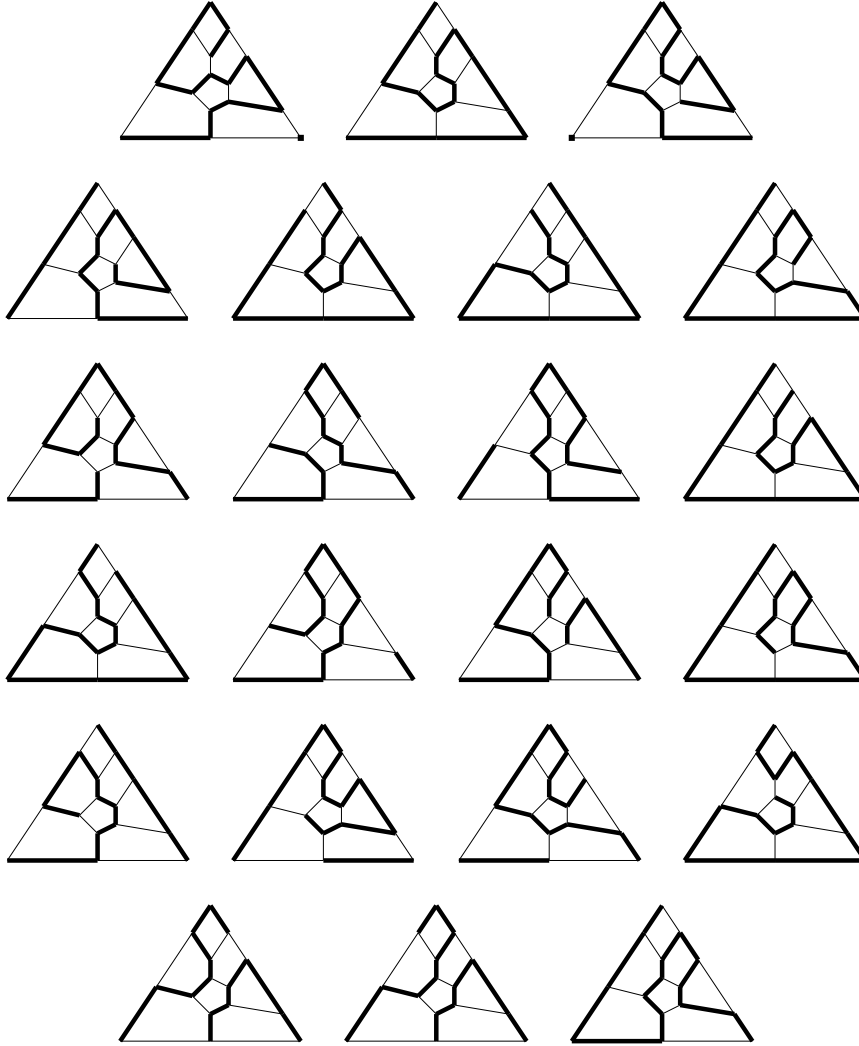
Abb. 3.26 Alternative Konstruktion über die  $c$ -Kante

beweisen:

**Lemma 3.7** *Zu jedem  $A$ -Stück  $I$  mit bis zu 19 Punkten und jedem  $v_0 \in V(I)$  gibt es einen 2-Pfad-Faktor, der von  $a$  und  $b$  ausgehend den Punkt  $v_0$  über eine Kante  $e$  erreicht.*

*Gilt  $|V(I)| \leq 17$ , so gibt es entweder einen zweiten 2-Pfad-Faktor mit denselben Eigenschaften oder einen Hamiltonweg, der  $v_0$  mit  $c$  verbindet, wobei dieser zweite aufspannende Teilgraph den Punkt  $v_0$  über eine andere Kante  $e'$  erreicht.*

*Beweis:* Bei  $T_1$  und  $a_{17}$  ist es unvermeidlich, all diese Teilgraphen anhand einer Zeichnung zu suchen.



**Abb. 3.27** Teilgraphen in  $T_1$   
 Jeder Punkt in  $T_1$  ist Endpunkt eines hervorgehobenen Teilgraphen

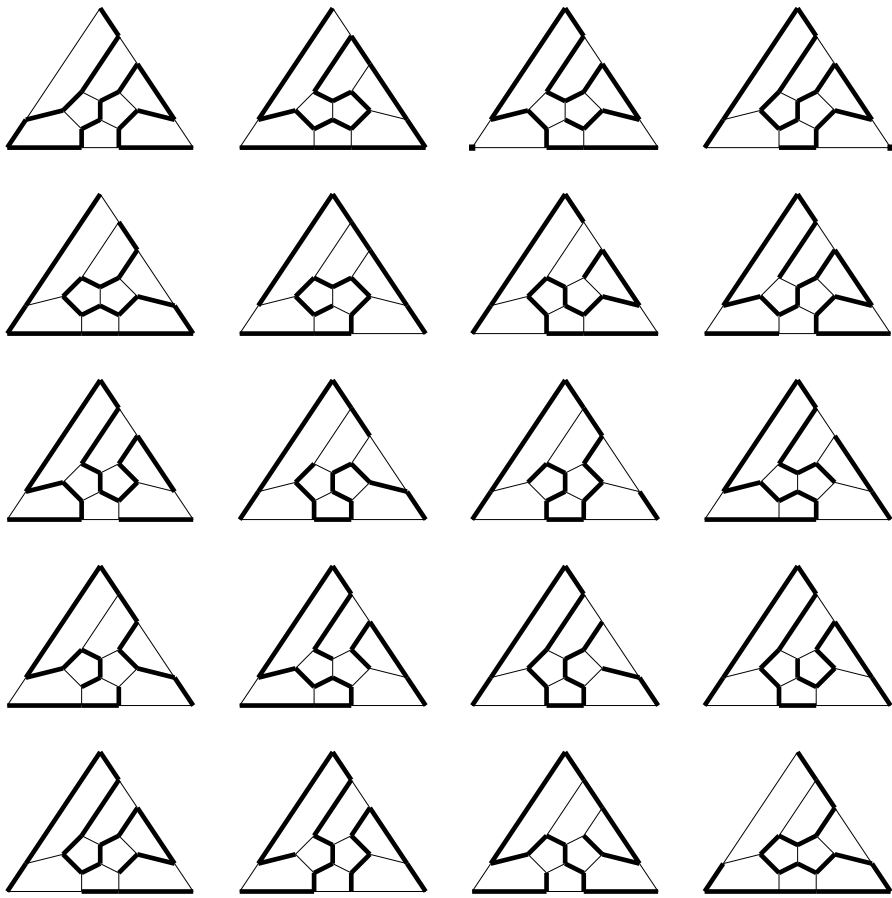
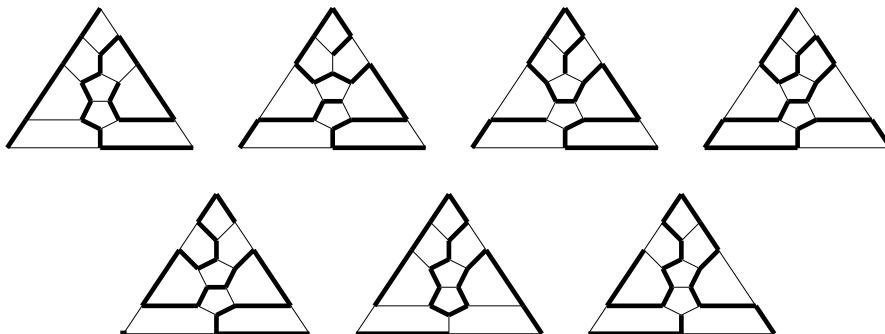


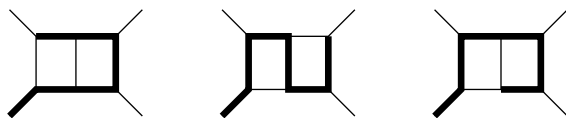
Abb. 3.28 analoge Teilgraphen in  $a_{17}$

Bei  $a_{19}^1$  braucht man zumindest zu jedem Punkt einen 2-Pfad-Faktor, der dort endet. Auch hier kommt man an der Zeichnung nicht vorbei.

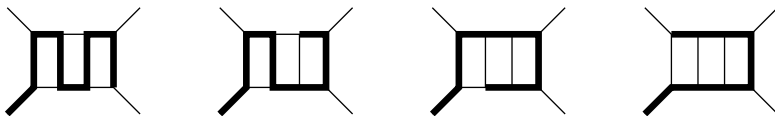


**Abb. 3.29** Teilgraphen in  $a_{19}^1$  (Symmetrie beachten!)

Die Graphen  $a_{19}^2$  bis  $a_{19}^8$  entstehen aus  $T_1$ , indem man eine Kante durch ein Doppelviereck ersetzt. Aus einem Satz in [3] folgt, dass bei einer solchen Ersetzung auch jeder Hamiltonkreis oder -weg im kleineren Graphen zu einem Hamiltonkreis oder -weg im größeren Graphen umgewandelt werden kann. Die einzigen Punkte, die hier noch näher untersucht werden müssen, sind also die Punkte, die zu diesen Doppelvierecken gehören.



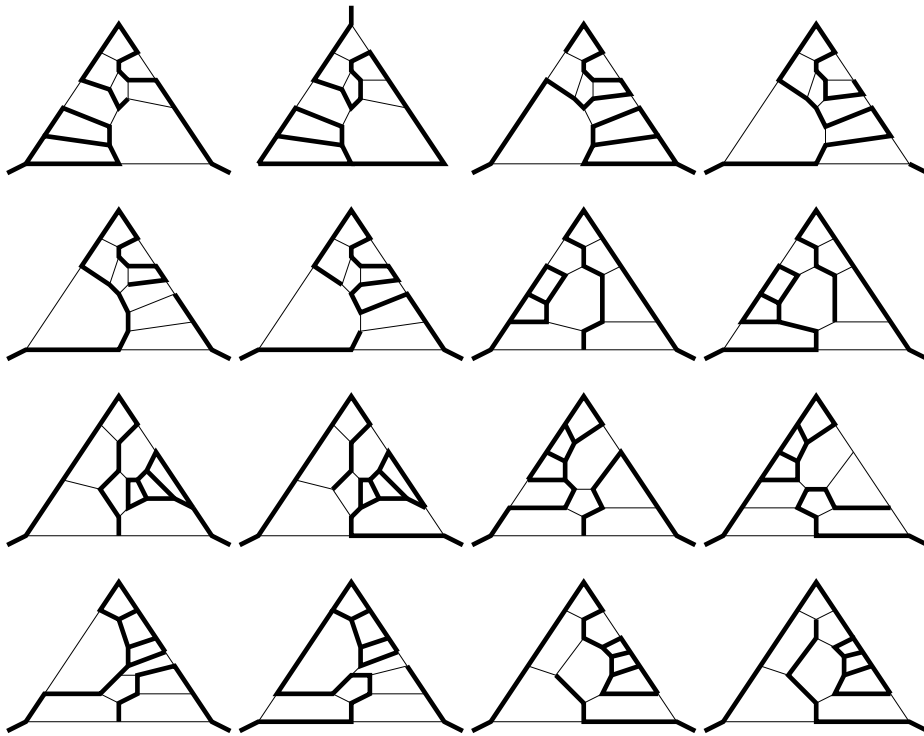
**Abb. 3.30** Enden eines Weges in einem Doppel-Viereck



**Abb. 3.31** Enden eines Weges in einem Tripel-Viereck

In diesem Zusammenhang gibt es einen weiteren Vorteil: Doppel- und Tripelvierecke sind bipartit. Und ein Hamiltonweg, der das Doppel- bzw. Tripelviereck nicht mehr verlässt und in einem Punkt der einen Partition endet, kann in jedem anderen Punkt der gleichen Partition enden (vgl. Abb. 3.30, 3.31).

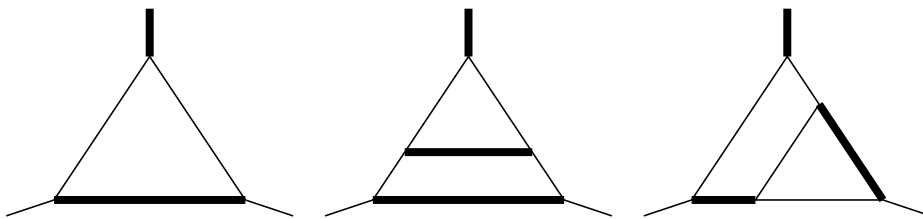
Mit diesen Vorkenntnissen kann man nun die  $a$ -Schnitte  $a_{19}^2$  bis  $a_{19}^8$  untersuchen:



**Abb. 3.32**  $a_{19}^2$  bis  $a_{19}^8$  und aufspannende 2-Pfad-Faktoren, die in einem Doppel-Viereck einen Endpunkt haben.

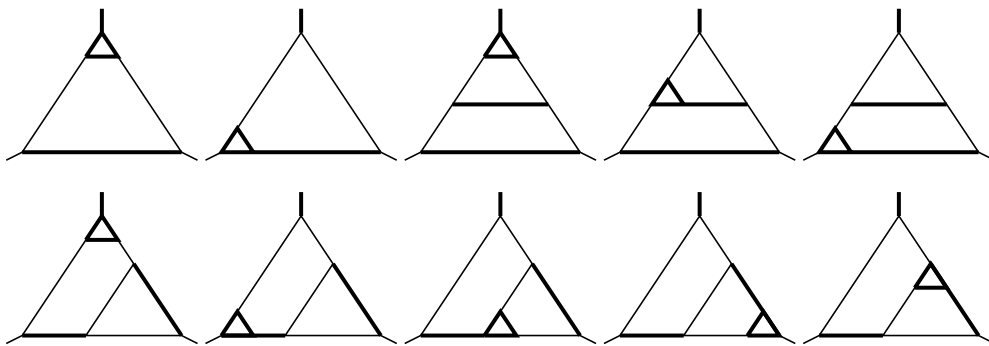
Als letztes kommen die A-Stücke, die durch Einsetzung des  $T_1$  oder des  $a_{17}$  in ein Dreieck oder den 3-Schnitt  $D$  entstehen. Es ergibt sich bekanntlich ein neues A-Stück, das so in einen B-Kanten-Graphen  $K$  eingesetzt wird, dass der A-Punkt inzident zur B-Kante sein soll. Setzt man  $D$  oder ein Dreieck in einen Punkt in  $K$  ein, der zu einer (im Bild nach oben gezeichneten) B-Kante inzident ist, dann werden die übrigen markierten Kanten ebenfalls zu B-Kanten. Jeder Hamiltonkreis in  $K$  muss also durch die nicht markierten Kanten umgeleitet werden.

In Abb. 3.33 sind die Kanten markiert, die zu B-Kanten werden.



**Abb. 3.33** Mit der oberen werden auch die übrigen markierten Kanten B-Kanten

Die A-Stücke, die durch Einsetzung von  $T_1$  oder  $a_{17}$  in ein Dreieck oder das 3-Stück  $D$  entstehen, werden in Abb. 3.34 aufgelistet. Das kleine hervorgehobene Dreieck ist dabei  $T_1$  bzw.  $a_{17}$ , wobei der A-Punkt zur fett gedruckten Kante inzident sei.

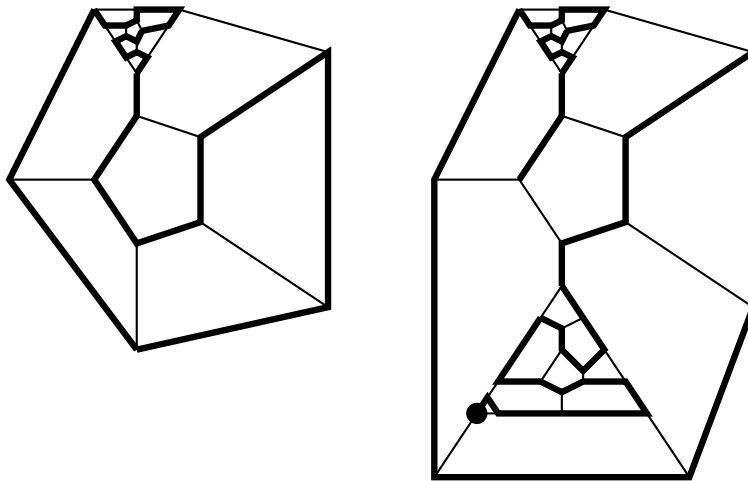


**Abb. 3.34** A-Stücke, die durch Einsetzung in Dreiecke entstehen

Sei  $I$  einer dieser Teilgraphen,  $I'$  die in ihm enthaltene Kopie von  $T_1$ , von  $a_{17}$  oder von  $T_1$  mit einem eingesetzten Dreieck. Nun gibt es zu jedem Punkt  $v \in V(I)$  ja einen Punkt  $v' \in V(I')$  sowie einen aufspannenden 2-Pfad-Faktor  $P$  mit Komponenten  $P_1$  und  $P_2$ , die diese beiden Punkte mit den Ecken von  $I'$  verbinden, die zu den dünnen Kanten in Abb. 3.34 inzident sind. Entlang der dünnen Kanten kann man  $I'$  so mit den Punkten unten links und unten rechts verbinden, dass  $P$  zu einem aufspannenden 2-Pfad-Faktor in  $I$  fortgesetzt wird.

Ein Problem entsteht dann, wenn man  $T_1$  so in ein Dreieck einsetzt wie in Abb. 3.34 oben links. Wenn man in diesem Fall ein weiteres Dreieck in einen Punkt  $v \in V(T_1)$  einsetzt, braucht man je nach Wahl von  $v$  einen Hamiltonweg in  $T_1$ , der  $v$  mit dem A-Punkt des  $T_1$  verbindet. Das so entstandene A-Stück heie  $T'_1$ .

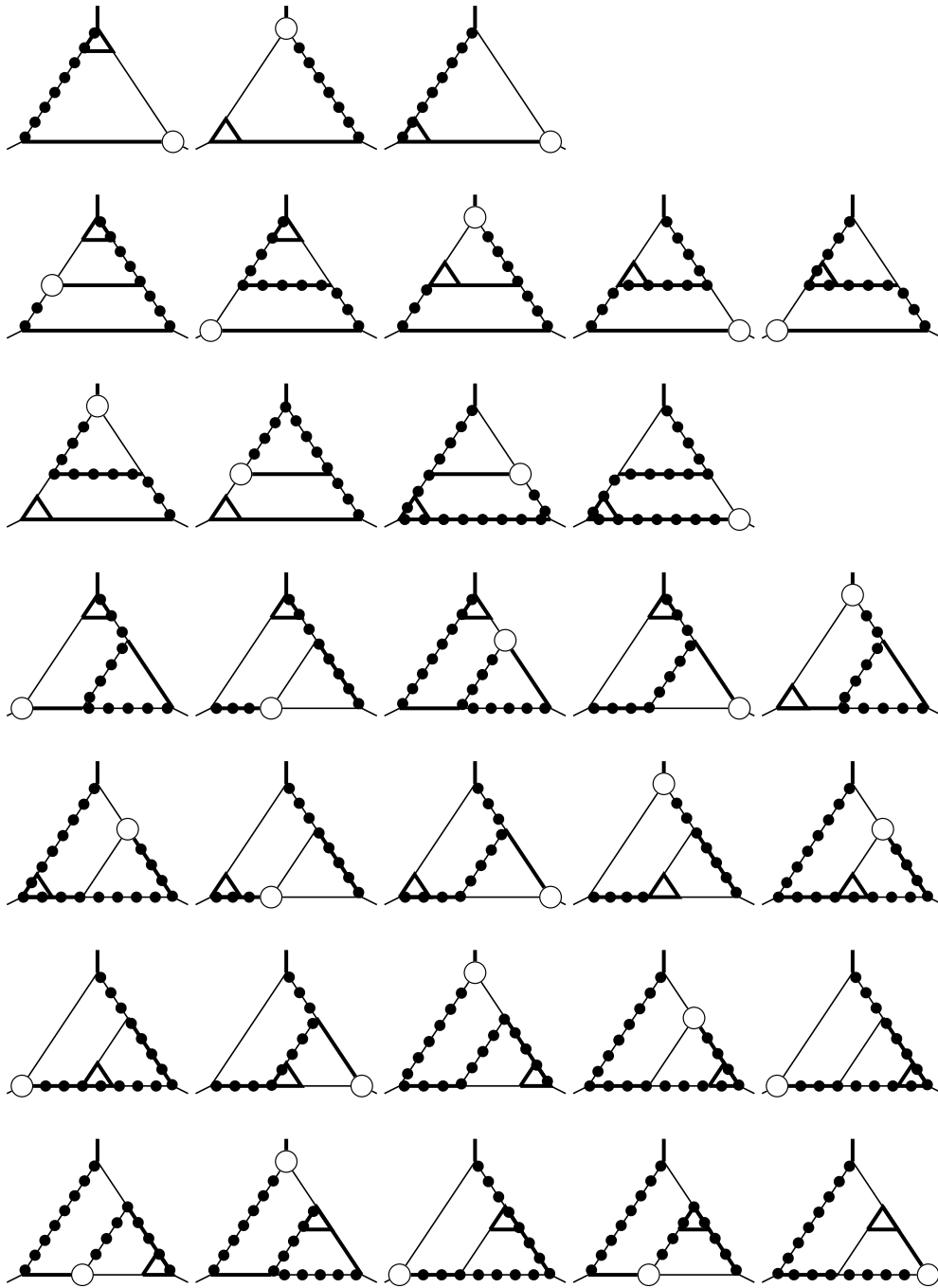
Aber  $T'_1$  hat 19 Punkte. Es kann also nur in den minimalen B-Kanten-Graphen eingesetzt werden. Wie man einen Hamiltonkreis in diesem Graphen zu einem Hamiltonweg umformt, der über den A-Punkt in  $T'_1$  gelangt, wird in Abb. 3.35 vorgeführt.



**Abb. 3.35** Umwandlung eines Hamiltonkreises nach Einsetzung von  $T'_1$

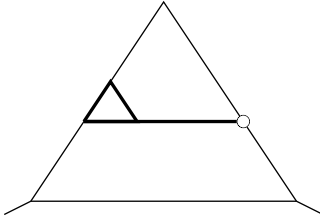


Für alle  $v_0 \in I'$  findet man also immer einen Hamiltonweg, der in  $v_0$  endet. Man muss also nur noch die Punkte in  $I \setminus I'$  betrachten, also im Dreieck oder im 3-Schnitt  $D$ . In Abb. 3.36 wird jeder Punkt  $v \in V(I \setminus I')$  entweder durch einen aufspannenden Weg mit dem A-Punkt von  $I$  verbunden, oder man findet einen aufspannenden 2-Pfad-Faktor, dessen eine Komponente einen Weg von  $v$  zur linken oder rechten unteren Ecke darstellt und dessen andere den jeweils anderen Eckpunkt als Endpunkt hat. Man beachte dabei, dass jeder Weg entweder in  $I'$  endet oder  $I'$  über den A-Punkt wieder verlässt.



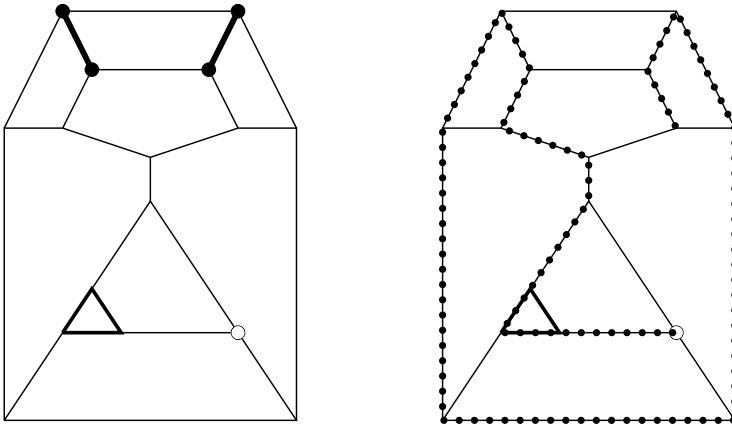
**Abb. 3.36** Die fettgedruckten Dreiecke sind A-Stücke, deren A-Punkt inzident zur fettgedruckten Kante ist. Die gepunkteten Linien sind aufspannende 2-Pfad-Faktoren.

Der einzige Fall, für den kein solcher aufspannender Teilgraph aufgestellt werden kann, ist in Abb. 3.37 dargestellt.



**Abb. 3.37** Der markierte Punkt ist weder Endpunkt eines aufspannenden 2-Pfad-Faktors mit Endpunkten  $a$  und  $b$  noch eines Hamiltonweges mit Endpunkt  $c$

Allerdings enthält dieses 3-Stück bereits 19 Punkte. Der restliche Graph muss also der minimale B-Kanten-Graph  $b_{24}$  sein. In diesem Fall entsteht ein Graph wie in Abb. 3.38.



**Abb. 3.38** Links: Einer der schwarzen Punkte muss so durch  $T_1$  ersetzt werden, dass der A-Punkt zur markierten Kante inzident ist  
Rechts: Hamiltonweg, der im weißen Punkt endet

Damit wurden sämtliche Teilgraphen überprüft, die sich zu einem Graphen  $G \in \mathcal{M}$  zusammensetzen lassen. Jeder Punkt, den sie enthalten, kann durch diese Konstruktionen zum Endpunkt eines Hamiltonweges in  $G$  gemacht werden.

Das Gesamtergebnis lautet also:

**Jeder einfach 3-polytopale Graph mit bis zu 42 Punkten ist homogen trassabel.**

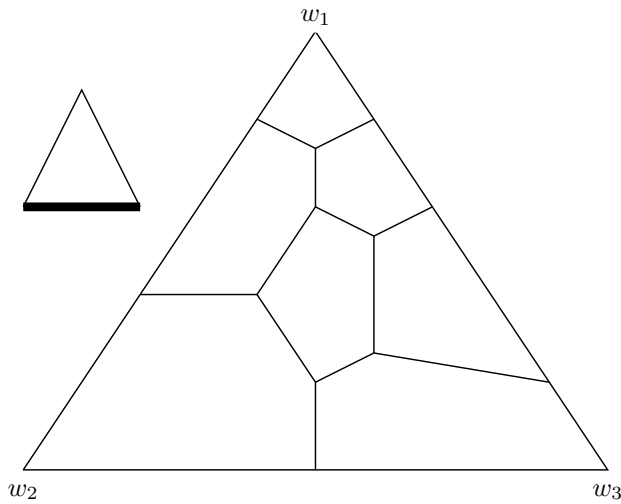
# Kapitel 4

## Tuttische Teilgraphen

### 4.1 Fünf Teilgraphen und ihre besonderen Eigenschaften

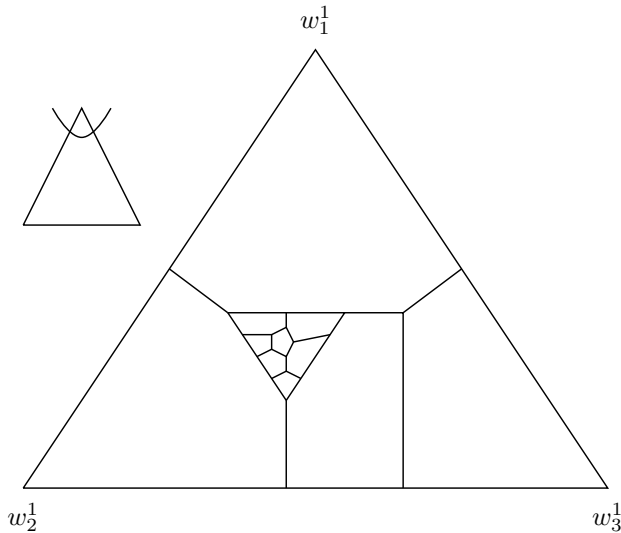
Die Frage nach einem minimalen nichthamiltonschen Graphen in  $\mathcal{F}$  (d. h. einem Graphen, der bei möglichst kleiner Anzahl von Punkten keinen aufspannenden Kreis enthält) wurde in der Literatur bereits ausgiebig untersucht. Diese Fragestellung lässt sich auf andere aufspannende Teilgraphen erweitern.

Will man möglichst kleine Graphen in  $\mathcal{F}$  konstruieren, die einen bestimmten aufspannenden Teilgraphen *nicht* enthalten sollen, so sind oftmals bestimmte 3-Stücke hilfreich. Das bekannteste von ihnen ist das TUTTE-Dreieck  $T_1$ , das kleinste A-Stück. Es enthält bekanntlich zwei Punkte von Grad 2, zwischen denen es keinen Hamiltonweg gibt. (Die Minimalität und Eindeutigkeit von  $T_1$  resultiert aus der Tatsache, dass  $a_{16}$  der eindeutige minimale A-Kanten-Graph ist.)



**Abb. 4.1** Das TUTTE-Dreieck  $T_1$  (mit Symbol)

Analog kann man 3-Stücke finden, das einen Punkt von Grad 2 enthält, der zu keinem der beiden anderen durch einen Hamiltonweg verbunden werden kann. Das kleinste 3-Stück, mit dem das möglich ist, ist  $b_{23}$  (Abb. 4.2).



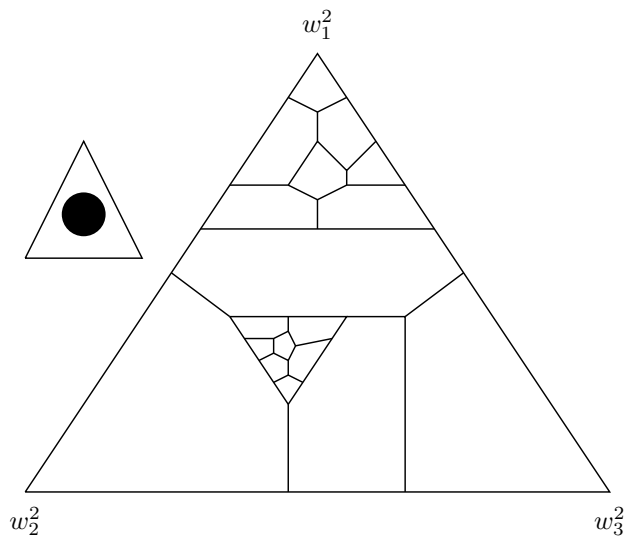
**Abb. 4.2** Das 3-Stück  $b_{23}$  (mit Symbol)

$b_{23}$  entsteht aus dem kleinsten B-Kanten-Graphen  $b_{24}$  durch Entfernung eines Punktes  $v^1$ , der zu einer B-Kante inzident ist. Der andere inzidente Punkt sei  $w_1^1$ , die weiteren zu  $v^1$  adjazenten Punkte  $w_2^1$  und  $w_3^1$ .

Wenn man  $w_1^1$  durch einen Hamiltonweg mit  $w_2^1$  oder  $w_3^1$  verbinden könnte, dann wäre es möglich, diesen Weg zu einem Hamiltonkreis in  $b_{24}$  zu erweitern, der die Kante zwischen  $w_1^1$  und  $v^1$  benutzt. Die ist aber eine B-Kante.

Spiegelt man die Kopie von  $T_1$ , so ergibt sich ein anderes 3-Stück, das nicht zu  $b_{23}$  isomorph ist.  $b_{23}$  ist also nicht eindeutig.

Ersetzt man Punkt  $w_1^1$  nun durch eine Kopie  $I$  des  $T_1$ , sodass der A-Punkt von  $I$  den Grad 2 bekommt, dann ergibt sich der Graph  $LBB'$  (Abb. 4.3). In diesem Graphen kann von den drei Punkten von Grad 2 kein Paar durch einen Hamiltonweg verbunden werden.

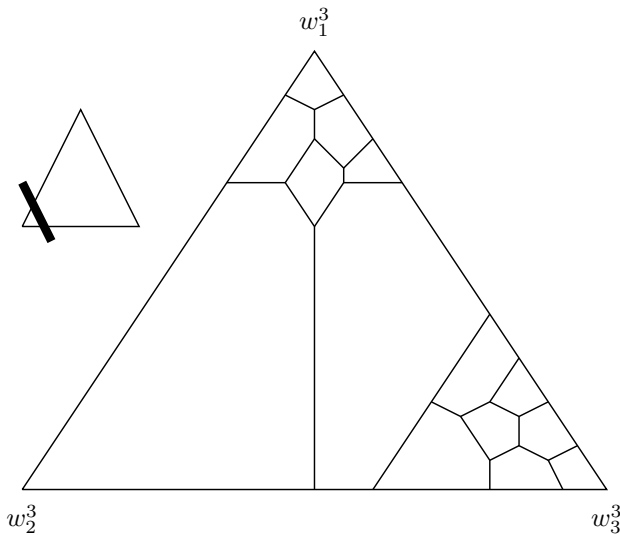


**Abb. 4.3** Der Graph  $LBB'$  (mit Symbol)

$LBB'$  entsteht alternativ aus dem Graphen von BOSÁK, LEDERBERG und BARNETTE, indem man einen Punkt  $v^2$  entfernt, der zum A-Punkt einer Kopie des  $T_1$  adjazent ist. Könnte man zwei der drei Punkte durch einen Hamiltonweg  $P$  in  $LBB'$  verbinden, dann könnte man  $P$  in  $LBB$  zu einem Hamiltonkreis erweitern, den es in  $LBB$  bekanntlich nicht gibt.

$LBB'$  ist minimal (wenn auch nicht eindeutig) unter allen 3-Stücken von Graphen aus  $\mathcal{F}$  mit der Eigenschaft, dass man keine zwei der drei Punkte von Grad 2 durch einen Hamiltonweg miteinander verbinden kann, weil  $LBB$  ein minimaler nichthamiltonscher Graph in  $\mathcal{F}$  ist.

Das vierte 3-Stück ist  $T_2$ . Wenn man den A-Punkt eines  $T_1$  als  $w_1$  bezeichnet und die beiden anderen Punkte als  $w_2$  bzw.  $w_3$ , so entsteht  $T_2$  bei Ersetzung von  $w_3$  durch eine Kopie  $I$  des  $T_1$ , wenn der A-Punkt von  $I$  im neuen A-Stück ebenfalls zum Außenpunkt wird. (Er landet also an der Stelle, wo sich ursprünglich  $w_3$  befand.) Dieser heißt nun  $w_3^3$ ;  $w_1$  und  $w_2$  werden zu  $w_1^3$  und  $w_2^3$ .



**Abb. 4.4** Das 3-Stück  $T_2$  (mit Symbol)

In diesem 3-Stück gibt es keinen Hamiltonweg  $H$ , der  $w_2^3$  als Endpunkt hat. (Läge der andere Endpunkt von  $H$  in  $I$ , dann könnte man  $I$  zu  $w_3$  zusammenfassen und erhielte so einen  $T_1$  mit einem Hamiltonweg von  $w_2$  nach  $w_3$ . Läge er nicht in  $I$ , dann wäre  $H \cap I$  ein verbotener Hamiltonweg in einem Tutte-Dreieck.)

**Lemma 4.1** *Es gibt kein kleineres 3-Stück  $G'$  eines Graphen  $G \in \mathcal{F}$ , sodass es einen Punkt  $u_1 \in V(G')$  von Grad 2 gibt, der nicht Endpunkt eines Hamiltonweges in  $G'$  sein kann.*



*Beweis:* Sei  $G'$  ein solches 3-Stück, die weiteren beiden Außenecken heißen  $u_2$  und  $u_3$ .  $G$  entsteht aus  $G'$  durch Hinzufügen eines Punktes  $v$  und der Kanten  $(v, u_1), (v, u_2), (v, u_3)$ . Wenn es einen Hamiltonkreis in  $G$  gibt, der  $e := (v, u_1)$  enthält, dann gibt es einen Hamiltonweg in  $G'$ , der  $u$  mit  $u_1$  oder  $u_2$  verbindet. Widerspruch!

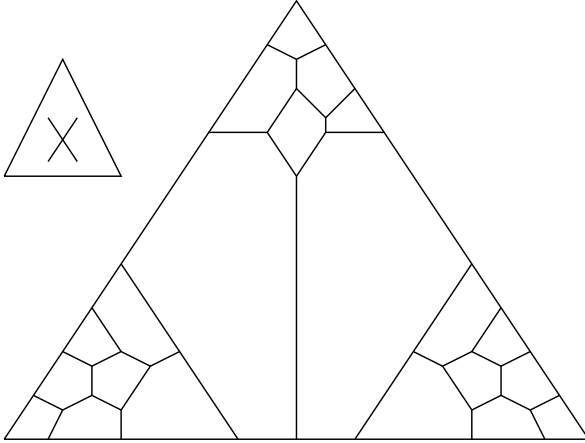
Also muss  $e$  eine B-Kante sein. Außerdem darf es keinen Hamiltonweg in  $G$  geben, der in  $v$  beginnt und die Kante  $e$  benutzt. Des weiteren darf kein Hamiltonweg in  $G$ , der in  $v$  beginnt, in  $a$  enden. (Sonst könnte man  $e$  hinzunehmen und hätte einen Hamiltonkreis, der  $e$  benutzt.) Jeder Hamiltonweg  $P$ , der in  $v$  endet, muss also  $a$  durchlaufen, ohne  $e$  zu benutzen.

Wenn man nun eine Kopie  $I$  von  $T_1$  so in  $u_1$  einsetzt, dass  $e$  zum A-Punkt von  $I$  inzident ist, dann ergibt sich ein Graph  $H$ . Ein Hamiltonweg  $P'$ , der  $v$  als Endpunkt hat, müsste dann  $I$  so durchlaufen, dass die Kante  $e$  nicht benutzt wird. Damit wäre  $P' \cap I$  ein Hamiltonweg zwischen den zwei Außenecken, die keine A-Punkte sind. Weil dies nicht möglich ist, enthält  $H$  keinen Hamiltonweg, der in  $v$  beginnt, ist also nicht homogen trassabel. Angenommen,  $G'$  ist kleiner als  $T_2$ . Weil  $T_2$  genau 29 Punkte enthält, darf  $G$  maximal 28 Punkte enthalten.  $H$  enthält damit maximal 42 Punkte, und alle Graphen in  $\mathcal{F}$  mit maximal 42 Punkten sind homogen trassabel.

**Definition 4.1** Sei  $J$  eine Kopie des  $T_2$  in einem Graphen  $G \in \mathcal{F}$ . Dann wird der Punkt  $w_2^3$  von Grad 2, in dem kein Hamiltonweg in  $J$  beginnen darf, als *B-Punkt* bezeichnet.

Sowohl die Kopie des  $T_1$  als auch der ursprüngliche  $T_1$  können gespiegelt werden. Die so erhaltenen, nicht zu  $T_2$  isomorphen Graphen haben ebenfalls die oben beschriebenen Eigenschaften.  $T_2$  ist also nicht eindeutig.

Das fünfte 3-Stück, das hier untersucht wird, ist  $T_3$  (Abb. 4.5). Es entsteht aus  $T_2$ , indem der B-Punkt durch eine Kopie  $J$  des  $T_1$  ersetzt wird, sodass der A-Punkt von  $J$  im fertigen 3-Stück den Grad 2 hat. Alternativ lässt sich  $T_3$  aus  $Z_{44}$  erzeugen, indem man den Punkt  $v$  entfernt, der nicht Anfangspunkt eines Hamiltonweges sein kann.



**Abb. 4.5** Das 3-Stück  $T_3$

Angenommen, es gäbe einen Hamiltonweg  $P$  in  $T_3$ .  $P$  muss in beiden Kopien  $I$  und  $J$  des  $T_1$  einen Endpunkt haben, weil sonst  $P \cap I$  oder  $P \cap J$  ein verbotener Hamiltonweg wäre. Aus einem solchen  $P$  würde aber nach Kontraktion von  $I$  und  $J$  zu je einem Punkt ein verbotener Hamiltonweg entstehen. Also ist  $T_3$  nicht trassabel. Mehr noch:

**Lemma 4.2** *Es gibt kein kleineres nichttrassables 3-Stück als  $T_3$ .*

*Beweis:* Alle Graphen in  $\mathcal{F}$  mit weniger als 44 Punkten sind homogen trassabel. Darum würde aus einem kleineren 3-Stück  $J'$  durch Ergänzung eines Punktes  $v$  und dreier Kanten, die  $v$  mit den Außenecken von  $J'$  verbinden, ein homogen trassabler Graph  $J$  entstehen. In  $J$  gäbe es einen Hamiltonweg  $P$ , der in  $v$  endet. Dann wäre  $P \cap J'$  ein Hamiltonweg, der in einer der Außenecken von  $J'$  beginnt. Deswegen gibt es kein kleineres nichttrassables 3-Stück eines Graphen in  $\mathcal{F}$ .  $\square$

Der Beweis liefert übrigens eine noch stärkere Aussage: Jedes 3-Stück, das kleiner ist als  $T_3$ , ist nicht nur trassabel, sondern enthält auch mindestens einen Hamiltonweg, der in einer der Außenecken anfängt.

So wie  $Z_{44}$  mit seinen Eigenschaften nicht eindeutig ist, ist es auch  $T_3$  nicht. Das erkennt man, wenn man die Kopien des  $T_1$  spiegelt.

## 4.2 Anwendungen

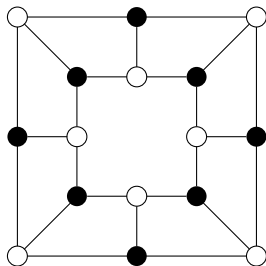
Die Graphen  $T_1, T_2, T_3, LBB'$  und  $b_{23}$  finden viele Anwendungen in der Fragestellung, ob es möglich ist, einen möglichst kleinen Graphen aus  $\mathcal{F}$  zu konstruieren, der einen bestimmten aufspannenden Teilgraphen *nicht* enthalten soll. Einige dieser Anwendungen werden nun vorgestellt.

### 4.2.1 $n$ -Wege-Trassabilität

**Definition 4.2** Ein Graph heißt  *$n$ -Wege-trassabel*, wenn er eine aufspannende Vereinigung von maximal  $n$  Wegen enthält.

**Lemma 4.3** Wenn ein Graph  $G$  eine Kopie  $I$  von  $T_3$  und einen aufspannenden  $n$ -Weg  $P$  enthält, dann ist  $I \cap P$  nicht zusammenhängend.

$T_3$  ist nicht trassabel. Weil jede Zusammenhangskomponente von  $I \cap P$  ein Punkt oder ein Weg sein muss, kann keine von ihnen  $I$  aufspannen.

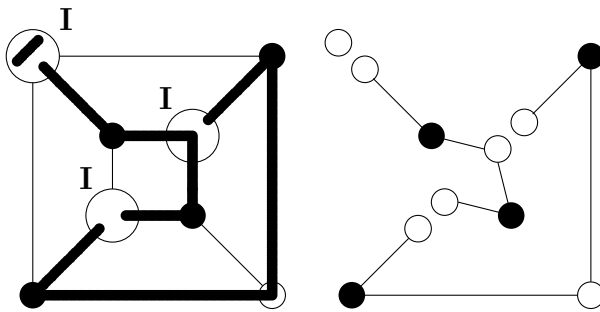


**Abb. 4.6** Graph  $G$  für  $n = 6$  oder  $n = 7$

**Proposition 2** Sei  $G$  der bipartite Graph aus Abb. 4.6, die 2-Partition der Punktemenge sei  $\{V_1, V_2\}$ , wobei

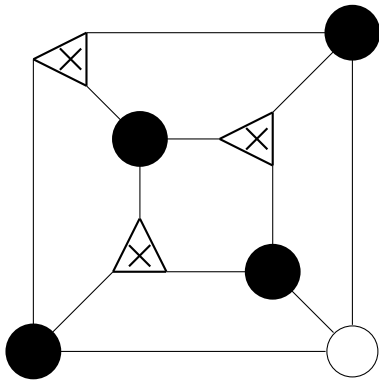
$$|V_1| = |V_2| = \begin{cases} n + 1, & n \text{ ungerade} \\ n + 2, & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

mit  $k \in \mathbb{N}$ . Wenn  $n + 1$  Punkte aus  $V_2$  durch Kopien von  $T_3$  ersetzt werden, ist der Ergebnisgraph nicht  $n$ -Wege-trassabel und hat  $44n + 44$  Punkte für ungerades  $n$  bzw.  $44n + 46$  Punkte für gerades  $n$ .



**Abb. 4.7** Ein aufspannender 3-Weg wird transformiert

*Beweis:* Sei  $H$  der Ergebnisgraph. Angenommen,  $H$  enthielte einen aufspannenden  $n$ -Weg  $P$ . Für jede Kopie  $I$  von  $T_3$  in  $H$  muss  $I \cap P$  aus mehr als einer Komponente bestehen. Wenn jede dieser Komponenten auf einen Punkt zusammengezogen wird und alle Kanten aus  $H \setminus P$  entfernt werden, erhält man eine Vereinigung  $K$  aus  $n$  disjunkten Wegen (Abb. 4.7). Während der Transformation von  $G$  über  $H$  zu  $K$  verändert sich die Anzahl der schwarzen Punkte nicht. Wenn alle anderen Punkte in  $K$  als weiße Punkte betrachtet werden, dann dürfen keine zwei weißen Punkte adjazent sein. Weil aber  $I \cap P$  für jede Kopie  $I$  von  $T_3$  in  $H$  aus mehr als einer Komponente besteht und  $n + 1$  solcher Kopien in  $H$  existieren, muss  $K$  mindestens  $n + 1$  mehr weiße als schwarze Punkte enthalten. Weil sich in jedem bipartiten Weg die Anzahl der Punkte beider Partitionen um höchstens 1 voneinander unterscheiden darf, ist die Anzahl der Wege größer als  $n$ . Widerspruch!  $\square$



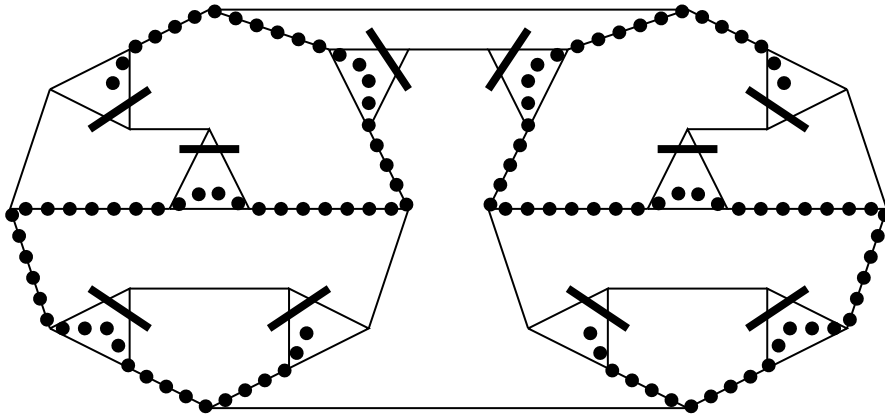
**Abb. 4.8** Ein nicht-2-Wege-trassabler Graph, 134 Punkte

Ein Graph, der gemäß der Proposition für  $n = 2$  konstruiert wurde, ist in Abb. 4.8 dargestellt. Er wurde 2002 von C. STRAUCH [14] gefunden.

## 4.2.2 Y-Baum-Trassabilität

Unter einem *Y-Baum* versteht man einen Baum, der maximal einen Punkt von Grad 3 und keinen von  $\text{Grad} \geq 4$  enthält. Ein Graph in  $\mathcal{F}$ , der einen aufspannenden Y-Baum enthält, enthält auch einen aufspannenden 2-Weg.

Der Umkehrschluss gilt nicht. Ein Gegenbeispiel hierzu ist  $Z$ , der Graph aus Abb. 4.9.



**Abb. 4.9** Graph  $Z$  mit (gepunktetem) aufspannendem 2-Weg  
Die Dreiecke stehen für Kopien des  $T_2$ , deren B-Punkte miteinander verbunden sind.

**Proposition 3**  $Z$  enthält einen aufspannenden 2-Weg, aber keinen aufspannenden Y-Baum.

*Beweis:* Den 2-Weg sieht man in Abb. 4.9. Um von einem Y-Baum aufgespannt zu werden, müsste es einen 2-Weg mit zwei Komponenten  $A$  und  $B$  enthalten, wobei ein Endpunkt von  $A$  zu einem Punkt von  $B$  adjazent ist.

Seien  $A$  und  $B$  die Zusammenhangskomponenten eines aufspannenden 2-Weges in  $Z$ . Jetzt muss gezeigt werden, dass kein Endpunkt von  $A$  zu einem Knoten von  $B$  benachbart sein kann und umgekehrt.

1. Konstruktion von  $Z'$

Wenn man in  $Z$  jede Kopie des  $T_2$  durch einen einzelnen Punkt ersetzt und dann die Kanten zwischen ihnen entfernt, erhält man  $Z'$ . Diese Punkte markiert man weiß. In  $Z'$  hat jeder diese Punkte Grad 2. Die übrigen acht Punkte werden schwarz markiert, und jeder von ihnen hat immer noch Grad 3. In Abb. 4.10 ist ein aufspannender 2-Weg von  $Z'$  eingezeichnet.

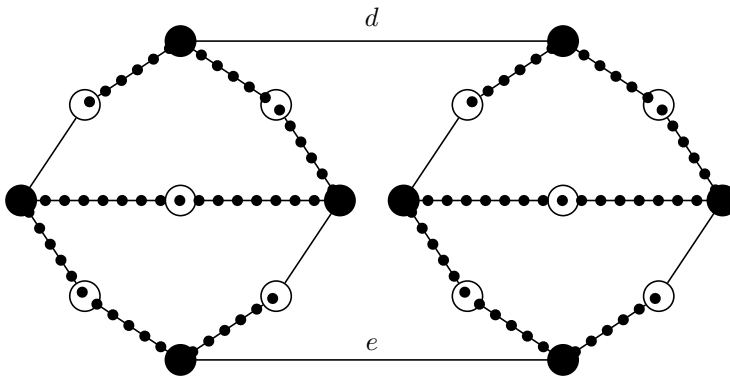


Abb. 4.10 Hilfsgraph  $Z'$  mit 2-Weg

Weil  $Z'$  zwei mehr weiße als schwarze Punkte enthält und jeder weiße Punkt nur zu schwarzen adjazent ist, muss jeder aufspannende 2-Weg in  $Z'$  weiße Endpunkte haben, und es dürfen keine zwei schwarzen Punkte auf ihm benachbart sein. Darum enthalten diese 2-Wege nicht die Kanten  $d$  und  $e$ . Seien nun  $L$  und  $R$  die Zusammenhangskomponenten von  $Z' \setminus \{d, e\}$  und  $P$  ein aufspannender 2-Weg in  $Z'$ . Dann muss sich also eine Komponente von  $P$  vollständig in  $L$ , die andere vollständig in  $R$  befinden.

Weil die weißen Punkte von  $L$  nicht zu den weißen Punkten in  $R$  adjazent sind, kann  $P$  nicht zu einem Y-Baum verbunden werden. Darum enthält  $Z'$  keinen aufspannenden Y-Baum.

## 2. Konstruktion von $Z_I$

Sei nun  $I$  ein beliebiger aufspannender 2-Weg in  $Z$ . Dann wird  $Z_I$  aus  $Z$  wie folgt erzeugt: Für jede Kopie  $J$  des  $T_2$  in  $Z$  wird eine Komponente von  $I \cap J$  durch einen weißen Punkt ersetzt. Die übrigen Punkte werden schwarz markiert. Auf diese Weise wird  $I$  zu einem 2-Weg  $I'$  reduziert.

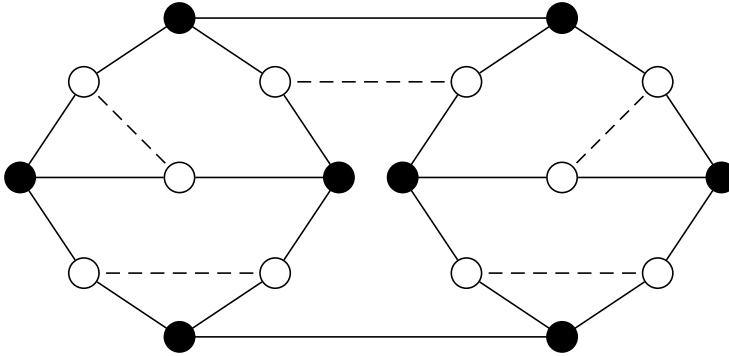


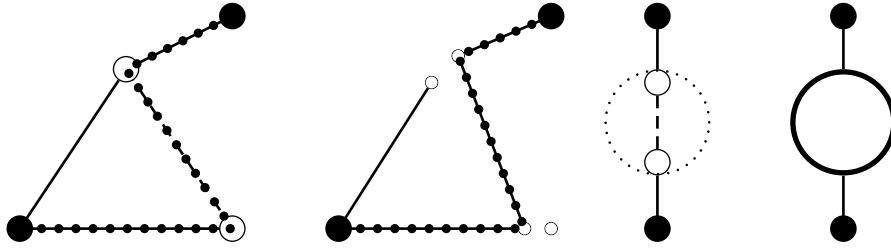
Abb. 4.11

Jede Kante  $f$ , die in Abb. 4.11 gestrichelt dargestellt ist, verbindet die B-Punkte zweier Kopien  $J_1$  und  $J_2$  von  $T_2$  in  $Z$ . Wenn  $I$  wenigstens eine solche Kante  $f$  enthält, dann können  $I \cap J_1$  und  $I \cap J_2$  nicht zusammenhängend sein. (Sonst wäre dies je ein aufspannender Weg in  $J_1$  und  $J_2$ , der im B-Punkt beginnt.) Sowohl  $I \cap J_1$  als auch  $I \cap J_2$  zerfällt also in jeweils mindestens zwei Komponenten, die zusammen als mindestens vier weiße Punkte in  $Z_I$  auftauchen würden. Weil zwei von diesen Punkten durch  $f$  verbunden sind, verbindet man diese zu einem einzigen weißen Punkt (Abb. 4.12).

Dabei bleiben aber immer noch mindestens drei weiße Punkte übrig, die zu keinem anderen weißen Punkt in  $I'$  adjazent sind. Wenn man so für jede gestrichelte Kante verfährt, die in  $I$  enthalten ist, bleiben auf  $I'$  keine zwei weißen Punkte benachbart.

Jetzt enthält  $Z_I$  genauso viele schwarze Punkte wie  $Z'$ , aber mindestens einen weißen Punkt mehr, und  $I'$  spannt  $Z_I$  auf. Weil aber die Anzahl weißer Punkte auf  $I'$  damit um mindestens 3 höher ist als die Anzahl schwarzer Punkte, kann  $I'$  kein 2-Weg mehr sein. Dies ist ein Widerspruch,





**Abb. 4.12** Transformation für einen Weg, der die gestrichelte Linie benutzt

darum enthält  $I$  keine gestrichelte Kante  $f$ , und  $I'$  spannt auch  $Z'$  auf. Weil  $Z'$  zehn weiße und acht schwarze Punkte enthält und keine zwei weißen Punkte in  $Z'$  adjazent sind, muss jeder Weg in  $I'$  in zwei weißen Punkten enden. Weil ja auch  $d$  und  $e$  nicht benutzt werden, bleibt eine Komponente von  $I'$  vollständig in der linken Hälfte von  $Z'$ , die andere Komponente vollständig in der rechten.

### 3. Rückschlüsse auf $Z$

Für  $Z$  bedeutet das, dass eine Komponente von  $I$  vollständig in der linken Hälfte von  $Z$  enthalten ist, die andere vollständig in der rechten Hälfte, und dass alle vier Endpunkte in unterschiedlichen Kopien von  $T_2$  liegen. Dieser Endpunkt darf auch nicht der B-Punkt der Kopie  $J$  von  $T_2$  sein, weil sonst  $I \cap J$  ein Weg wäre, der in  $a$  endet und  $J$  aufspannt.

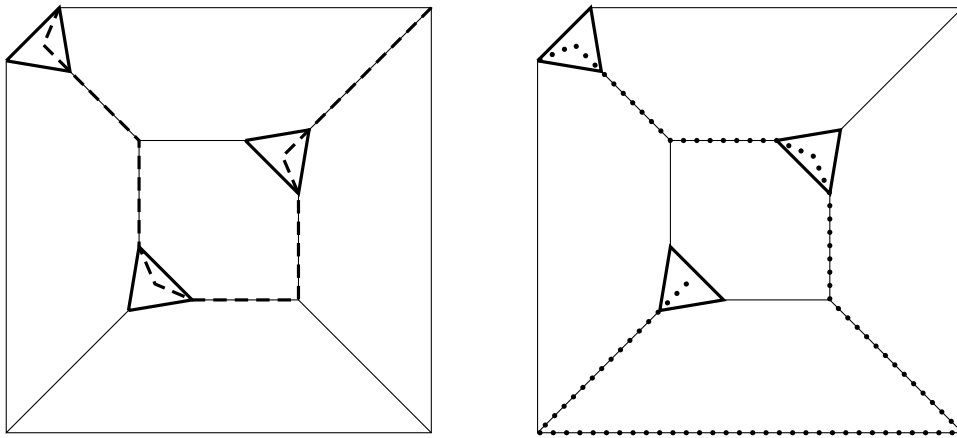
Es gibt aber in jeder Hälfte von  $Z$  nur drei Punkte, die zur anderen Hälfte adjazent sind. Einer davon ist B-Punkt einer Kopie von  $T_2$ , die anderen beiden sind nicht in einer Kopie von  $T_2$  enthalten. Weil keiner dieser drei Punkte Endpunkt einer Komponente von  $I$  sein kann, kann  $I$  nicht zu einem Y-Baum in  $Z$  verbunden werden. Darum gibt es einen solchen aufspannenden Y-Baum in  $Z$  nicht.  $\square$

Dies war das erste bekannte Beispiel eines Graphen in  $\mathcal{F}$  mit aufspannendem 2-Weg und ohne aufspannenden Y-Baum. Inzwischen hat S. L. GUOY ([6]) mehrere kleinere Beispiele gefunden.

### 4.2.3 Nicht-disjunkte Kreise und Wege

In diesem Kapitel geht es darum, wie man einen Graphen aus  $\mathcal{F}$  finden kann, der nicht von einer Vereinigung von  $n$  Kreisen oder Wegen aufgespannt wird. Im Gegensatz zu  $n$ -Kreisen und  $n$ -Wegen sind diese Vereinigungen nicht notwendigerweise disjunkt.

Wie man am Graphen von STRAUCH erkennt, sind die Probleme nicht äquivalent. Zwei disjunkte Wege können ihn bekanntlich nicht aufspannen, wohl aber zwei nicht-disjunkte (s. Abb. 4.13). Man beachte, dass  $T_3$  einen aufspannenden  $Y$ -Baum enthält.



**Abb. 4.13** Der Graph von STRAUCH wird durch die Vereinigung zweier Wege aufgespannt (Die dick gedruckten Dreiecke stehen für Kopien des  $T_3$ . Die Kreuze, die zum üblichen Symbol gehören, wurden hier der Übersichtlichkeit halber weggelassen.)

Jedoch gibt es Algorithmen, mit denen solche Graphen konstruiert werden können. Diese werden im Folgenden vorgestellt, zunächst für  $n$  Kreise.

## Vereinigung von $n$ Kreisen

**Algorithmus 4.1**  $NK(1) = LBB$ . Dann entsteht für jedes  $n \in \mathbb{N}$  der Graph  $NK(k)$ , indem man im Graphen  $NK(k - 1)$  jeden Punkt durch eine Kopie des  $LBB'$  ersetzt.

**Proposition 4** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt: Der Graph  $NK(n)$  enthält keine aufspannende Vereinigung aus  $n$  Kreisen.

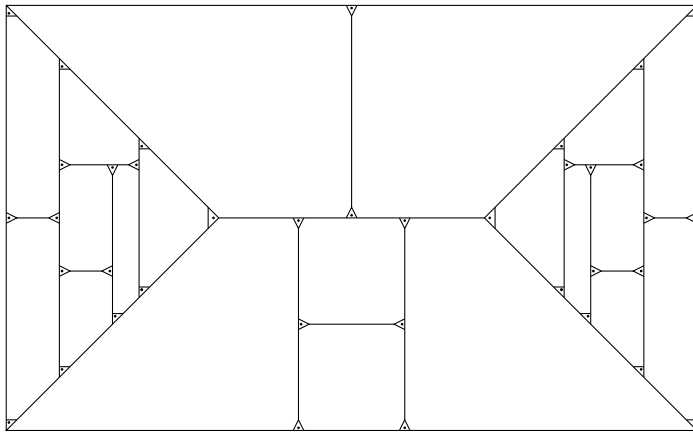
*Beweis:* Induktion nach  $n$ :

$n = 1$ : erfüllt, denn  $LBB$  ist nicht hamiltonsch.

$n - 1 \rightarrow n$ : Weil  $NK(n - 1)$  mindestens einen Punkt enthält, der von einer Vereinigung aus  $n - 1$  Kreisen nicht besucht wird, wird in  $NK(n)$  mindestens eine Kopie  $H$  des  $LBB'$  nicht besucht. Sei  $K$  ein zusätzlicher Kreis. Dann ist  $H \cap K$  ein Kreis oder ein Weg zwischen zwei Außenecken von  $H$ . Weil  $LBB'$  nicht hamiltonsch ist und keinen Hamiltonweg zwischen seinen Außenecken enthält, können in  $H$  nicht alle Punkte besucht werden.  $\square$

$NK(n)$  enthält  $37^n + 37^{n-1}$  Punkte.

**Definition 4.3** Das Ergebnis für den Fall  $n = 2$  ist Graph  $D$  (Abb. 4.14). Er enthält 1406 Punkte.



**Abb. 4.14** Graph  $D$ , der nicht durch die Vereinigung zweier Kreise aufgespannt wird

## Vereinigung von $n$ Wegen

Analog zum vorigen Abschnitt wird eine algorithmische Methode vorgestellt, mit der man einen Graphen finden kann, der keine aufspannende Vereinigung aus  $n$  Wegen enthält.

**Algorithmus 4.2** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $NW(n, 1)$  sei ein beliebiger Graph aus  $\mathcal{F}$ , in dem jeder Weg  $2n - 1$  Punkte auslässt. Dann entsteht für jede Zahl  $k \in \{1 \dots n\}$  der Graph  $NW(n, k)$ , indem man im Graphen  $NW(n, k - 1)$  jeden Punkt durch eine Kopie des  $LBB'$  ersetzt.

**Proposition 5** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt: Der Graph  $NW(n, n)$  enthält keine aufspannende Vereinigung aus  $n$  Wegen.

*Beweis:* Behauptung: In jedem Graphen  $NW(n, k)$  lässt jede Vereinigung von  $k$  Wegen wenigstens  $2(n - k) + 1$  Punkte aus.

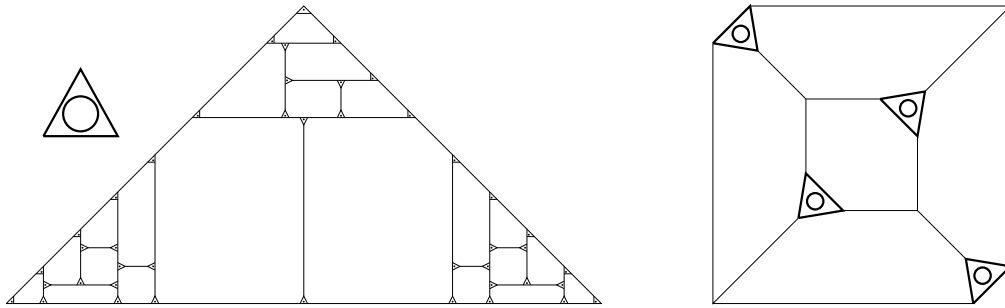
Induktion nach  $k$ :

$k = 1$ : gilt nach Voraussetzung.

$k - 1 \rightarrow k$ : Wenn jede Vereinigung von  $k - 1$  Wegen im Graphen  $NW(n, k - 1)$  wenigstens  $2(n - k) + 3$  Punkte auslässt, dann lässt sie in  $NW(n, k)$  wenigstens  $2(n - k) + 3$  Kopien des  $LBB'$  aus. Durch einen weiteren Weg  $W$  können maximal zwei davon vollständig besucht werden, womit in wenigstens  $2(n - k) + 1$  Kopien des  $LBB'$  jeweils wenigstens ein Punkt übrigbleibt, der von der Vereinigung von  $k$  Wegen nicht besucht wird.

Damit lässt jede Vereinigung von  $n$  Wegen in  $NW(n, n)$  wenigstens  $2(n - n) + 1 = 1$  Punkte aus.  $\square$

Die Existenz eines Graphen, in dem jeder Weg  $2n - 1$  Punkte auslässt, ist leicht zu gewährleisten: Man konstruiere einen Graphen mit  $2n + 2$  Punkten und ersetze alle bis auf einen durch Kopien des  $LBB'$ . Der nicht- $n$ -Wege-trassable Graph, der sich so ergibt, enthält  $37^n \cdot (74n + 38) + 37^{n-1}$  Punkte.



**Abb. 4.15** links:  $T_3$ , in dem jeder Punkt durch  $LBB'$  ersetzt wurde (mit Symbol)  
rechts: Graph  $E$ , der nicht durch die Vereinigung zweier Wege aufgespannt wird

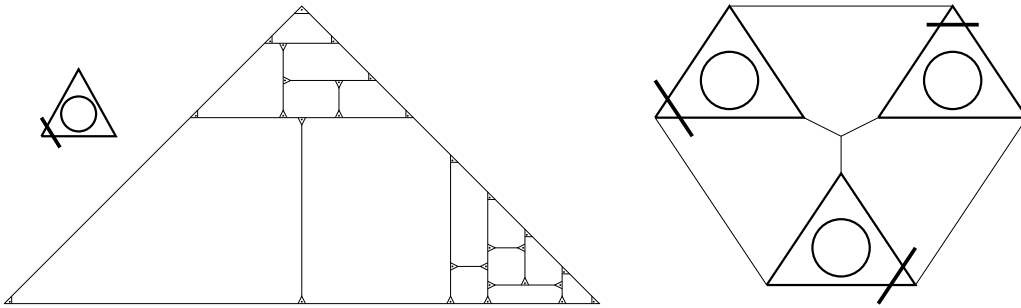
Angenommen, man weiß, dass jeder Weg in  $NW(n, 1)$   $2n + 1$  Punkte auslässt, die sich in bestimmten Teilgraphen des  $NW(n, 1)$  befinden. Dann genügt es, die rekursive Einsetzung von  $LBB'$  nur in diesen Teilgraphen durchzuführen.

Im Falle des Graphen  $C$  ist zum Beispiel klar, dass jeder Weg mindestens 3 Punkte auslässt, die sich in den Kopien des  $T_3$  befinden. Deswegen muss man die vier Punkte, die sich außerhalb dieser Teilgraphen befinden, nicht rekursiv ersetzen.

**Definition 4.4** Der Hilfsgraph links in Abb. 4.15 entsteht aus  $T_3$ , indem man jeden Punkt durch eine Kopie des  $LBB'$  ersetzt. Graph  $E$  (Abb. 4.15 rechts) entsteht aus Graph  $C$ , indem man statt der Kopien des  $T_3$  Kopien dieses Hilfsgraphen verwendet. Er enthält 6368 Punkte und wird nach Konstruktion von keiner Vereinigung zweier Wege aufgespannt.

## Vereinigung eines Weges mit einem Kreis

**Definition 4.5** Graph  $F$  entsteht aus Graph  $A$ , indem in jedem Punkt außer dem mittleren eine Kopie des  $LBB'$  eingesetzt wird, und enthält 3220 Punkte.



**Abb. 4.16** links:  $T_2$ , in dem jeder Punkt durch  $LBB'$  ersetzt wurde (mit Symbol)  
rechts: Graph  $F$ , der nicht durch die Vereinigung eines Weges und eines Kreises aufgespannt wird

**Proposition 6** *Graph  $F$  enthält keine aufspannende Vereinigung aus einem Weg und einem Kreis.*

*Beweis:* Jeder Weg im nichttrassablen Graphen  $A$  lässt mindestens einen Punkt aus, der in einer Kopie des  $T_2$  liegt.  $F$  entsteht aus  $A$ , indem man in jeder Kopie des  $T_2$  jeden Punkt durch eine Kopie des  $LBB'$  ersetzt. Also lässt jeder Weg in  $F$  mindestens eine vollständige Kopie  $I$  des  $LBB'$  aus. Diese müsste von einem Kreis  $K$  vollständig besucht werden. Aber  $K \cap I$  ist entweder ein Kreis oder ein Weg zwischen zwei Außenecken von  $I$ . Beide spannen  $I$  nicht auf.  $\square$

# Kapitel 5

## Die minimale Ordnung eines nichttrassablen Graphen in $\mathcal{F}$

Nachdem der erste nichthamiltonsche Graph in  $\mathcal{F}$  gefunden wurde, stellte sich bald die Frage, wie viele Punkte ein minimaler derartiger Graph haben würde. Die dazu notwendige Untersuchung ging über ca. dreißig Jahre und wurde 1988 durch HOLTON und MCKAY zu Ende geführt – die Antwort lautet 38.

In Kapitel 3 wurde bereits gezeigt, dass diese Grenze bei 44 liegt, wenn man „nichthamiltonsch“ durch „nicht homogen trassabel“ ersetzt. Wesentlich interessanter ist jedoch die Frage, wie diese Grenze für „nicht trassabel“ aussieht.

Zu dieser Problemstellung gehören naturgemäß zwei Fragen. Erstens: Wie groß ist der minimale bekannte nichttrassable Graph in  $\mathcal{F}$ ? Zweitens: Bis zu welcher Größe von  $G \in \mathcal{F}$  kann man garantieren, dass  $G$  trassabel ist? Erst, wenn diese beiden Zahlen zusammenkommen (wenn man also einen nichttrassablen Graphen mit  $n$  Punkten findet und bewiesen hat, dass alle Graphen mit weniger als  $n$  Punkten trassabel sind), ist die gesamte Fragestellung gelöst.

Die schlechte Nachricht vorweg: Zur ersten Frage wird der Leser in der vorliegenden Arbeit keine neuen Antworten finden. Genauer gesagt: Der

kleinste bekannte nichttrassable Graph in  $\mathcal{F}$  ist schon seit über vierzig Jahren bekannt. Es ist mir bis heute nicht gelungen, ihn zu verbessern.

Die zweite Fragestellung wurde jedoch bislang kaum untersucht: Bis zu welcher Größe von  $G$  kann man Trassabilität garantieren? (Die triviale Untergrenze für diese Untersuchungen lautet 36 Punkte – jeder hamiltonsche Graph ist logischerweise auch trassabel.) Der einzige mir bekannte Vorstoß in diese Richtung war die Arbeit [7] von T. HOFFMANN, der diese Grenze für einige Unterfälle deutlich anheben konnte. Allerdings konnte er im allgemeinen Fall nur garantieren, dass alle Graphen mit maximal 38 Punkten trassabel sind.

In der vorliegenden Arbeit wird die Grenze auf 52 gehoben. Die Vorgehensweise orientiert sich dabei an der Beweiskette, mit der das analoge Problem für hamiltonsche Graphen bearbeitet wurde. Zunächst werden die Graphen nach ihrem zyklischen Zusammenhangsgrad unterteilt: zyklisch genau 3-zusammenhängende Graphen, zyklisch genau 4-zusammenhängende Graphen mit oder ohne wesentlichen 4-Schnitt sowie zyklisch 5-zusammenhängende Graphen. (Nach [16] gibt es keine weiteren Fälle.) Dann nimmt man für jede Klasse an, dass sie einen in  $\mathcal{F}$  minimalen nichttrassablen Graphen  $G$  enthält.

Hat  $G$  einen zyklischen 3-Schnitt oder einen wesentlichen 4-Schnitt, so wird untersucht, welche dieser Schnitte auftreten können. Dann ergänzt man die Stücke eines solchen Schnitts zu Hilfsgraphen aus  $\mathcal{F}$ , die natürlich kleiner als  $G$  sind. Da  $G$  ein minimaler nichttrassabler Graph sein soll, müssen die Hilfsgraphen Hamiltonwege enthalten. Diese Wege dürfen sich nicht durch Einsetzung des anderen zyklischen 3- oder 4-Stücks zu Hamiltonwegen in  $G$  ergänzen lassen. Damit das nicht möglich ist, dürfen beide 3- oder 4-Stücke eine gewisse Größe nicht unterschreiten, aus denen sich dann auch eine Untergrenze der Größe von  $G$  ableiten lässt.

Aus [1] kennt man sämtliche zyklisch 5-zusammenhängenden nichthamiltonschen Graphen mit bis zu 52 Punkten und kann diese nach Hamiltonwegen untersuchen.



Den anspruchsvollsten Fall bilden sicherlich die *zyklisch 4\*-zusammenhängenden Graphen*. So bezeichnet man nach [12] die Graphen, die einen zyklischen 4-Schnitt enthalten, nicht jedoch einen wesentlichen. Jeder 4-Schnitt in einem solchen Graphen führt also zur Abtrennung eines Vierecks vom Rest des Graphen.

Für solche Graphen fand H. OKAMURA bei der Untersuchung auf aufspannende Kreise eine Methode, sie in kleinere Graphen zu überführen. Gab es im kleineren Graphen einen Hamiltonkreis, der eine bestimmte Kante benutzte, so konnte dieser Kreis auf den großen Graphen ausgedehnt werden. Dieser Graph konnte also nur dann nichthamiltonsch sein, wenn der kleinere wenigstens eine B-Kante enthielt.

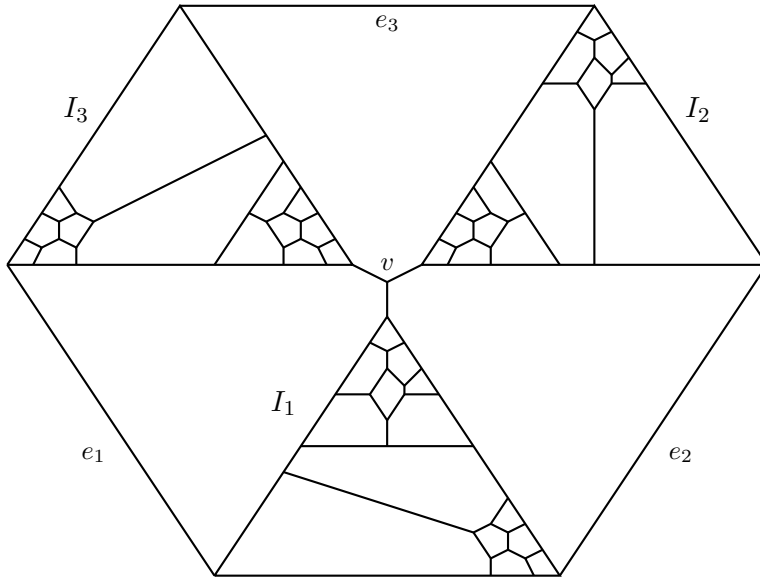
Weil damals bereits bekannt war, dass der kleinste B-Kanten-Graph genau 24 Punkte enthält, konnte man auf die Mindestgröße des Gesamtgraphen schließen.

In dieser Arbeit wird diese Methode angewendet und erweitert, wobei  $G$  nicht zu einem Graphen ohne B-Kante, sondern zu einem homogen trassablen Graphen reduziert werden soll. Da die kleinsten Graphen in  $\mathcal{F}$ , die nicht mehr zu dieser Menge gehören, 44 Punkte haben, gewinnt man auf ähnlichem Wege eine Abschätzung zur Mindestgröße von  $G$ .

## 5.1 Der Graph $Z_{88}$ von Zamfirescu

Aus der Arbeit [15] von T. ZAMFIRESCU ist folgendes bekannt:

**Lemma 5.1** *Der Graph  $Z_{88}$  (Abb. 5.1) ist nicht trassabel.*



**Abb. 5.1**  $Z_{88}$ , der kleinste bekannte nichttrassable Graph in  $\mathcal{F}$

*Beweis:*  $Z_{88}$  enthält drei Kopien  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  des 3-Stücks  $T_2$ . Sie sind so angeordnet, dass jeweils die Kante  $e_k$  zum  $B$ -Punkt von  $I_k$  inzident ist.

Angenommen,  $Z_{88}$  enthält einen Hamiltonweg  $P$ . Enthält er die Kante  $e_k$ , dann enthält das 3-Stück  $I_k$  einen Endpunkt von  $P$ .

OBdA enthalte  $I_1$  keinen Endpunkt von  $P$ . Dann enthält  $P$  auch nicht die Kante  $e_1$ , also muss  $P$  die beiden anderen zu  $I_1$  inzidenten Kanten enthalten. Eine davon ist  $e_2$ , was einen Endpunkt in  $I_2$  nach sich zieht. Außerdem kann kein aufspannender Weg in  $I_2$  durch  $e_2$  fortgesetzt werden, darum muss  $P$  noch mindestens eine andere zu  $I_2$  inzidente Kante enthalten.

Weil  $P$  die Kante  $e_1$  nicht enthält, muss  $P$  das 3-Stück  $I_3$  mit  $v$  verbinden, weil ja kein aufspannender Weg in  $I_3$  über  $e_3$  fortgesetzt werden kann.

Würde  $P$  zusätzlich  $e_3$  enthalten, so ließen sich diese beiden Eingänge nicht

zu einem Hamiltonweg in  $I_3$  verbinden. Also müssten sie in zwei verschiedenen Punkten enden, was drei Endpunkte von  $P$  ergäbe.  $P$  enthält also auch nicht  $e_3$ . Die andere zu  $I_2$  inzidente Kante in  $P$  geht also zu  $v$ , womit  $v$  in  $P$  ein Punkt von Grad 3 wäre. Widerspruch!

Sei  $n$  der minimale Grad eines nichttrassablen Graphen in  $\mathcal{F}$ . Durch  $Z_{88}$  ist bewiesen, dass  $n \leq 88$  sein muss. In diesem Kapitel wird gezeigt, dass  $n \geq 54$  gilt.

## 5.2 Obergrenze der sicheren Trassabilität

Ziel dieses Kapitels ist der Beweis des folgenden Satzes.

**Proposition 7** *Alle einfach 3-polytopalen Graphen mit maximal 52 Punkten sind trassabel.*

Hierzu benötigt man einen Hilfssatz.

**Lemma 5.2** *Sei  $G$  ein homogener trassabler Graph in  $\mathcal{F}$ . Dann hat  $G$  keine  $\beta$ -Kante.*

*Beweis:* Sei  $e \in E(G)$  beliebig,  $v$  ein zu  $e$  inzidenter Punkt. Dann existiert ein Hamiltonweg  $P$  in  $G$ , der  $v$  als Endpunkt hat. Wenn  $e \in E(P)$ , dann ist  $e$  keine  $\beta$ -Kante. Ansonsten sei  $P' = P \cup \{e\}$ . Dann ist  $P'$  entweder ein Hamiltonkreis oder ein Weg, der mit einem Kreis verbunden ist. In beiden Fällen gibt es je mindestens zwei Kanten, die man entfernen kann, damit aus  $P'$  wieder ein Hamiltonweg wird. Eine davon ist nicht  $e$ .  $\square$ .

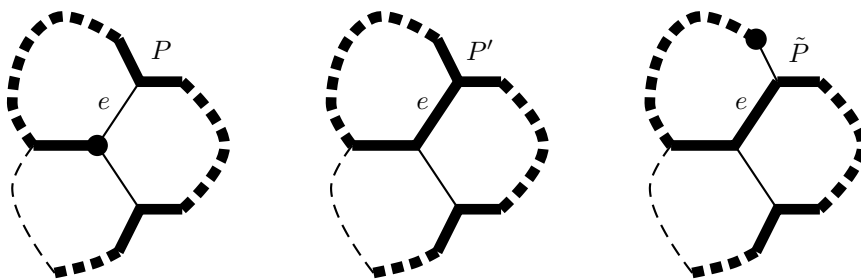


Abb. 5.2 Umleitung eines Hamiltonweges  $P$  durch die Kante  $e$

Die weitere Vorgehensweise orientiert sich an [4], [3] und [12]: Man teilt die Graphen nach ihrem zyklischen Zusammenhangsgrad in Klassen auf.

Während in den zitierten Arbeiten der Schluss genutzt wurde, dass in  $\mathcal{F}$  ein Graph mit maximal 22 Punkten keine  $\beta$ -Kante enthält, nutzt man in dieser Arbeit, dass ein Graph mit maximal 42 Punkten keine  $\beta$ -Kante enthält, und dass jeder Punkt in einem solchen Graphen Endpunkt eines Hamiltonwegs ist.

## 5.2.1 Graphen mit zyklischem 3-Schnitt

Wenn man annimmt, dass  $G$  ein minimaler nichttrassabler Graph in  $\mathcal{F}$  ist, so soll in diesem Kapitel bewiesen werden, dass  $|V(G)| \geq 54$  ist. Hierfür betrachtet man die unterschiedlichen Möglichkeiten, welchen Zusammenhangsgrad  $G$  haben kann.

Den Anfang macht der Fall, dass  $G$  zyklisch genau 3-zusammenhängend ist. Dies ist gleichbedeutend mit dem Vorhandensein eines zyklischen 3-Schnittes. Für diesen Fall soll folgendes bewiesen werden:

**Proposition 8** *Sei  $G$  ein minimaler nichttrassabler Graph in  $\mathcal{F}$ . Hat  $G$  einen zyklischen 3-Schnitt, dann ist  $|V(G)| \geq 58$ .*

*Beweis:* Man trenne  $G$  an seinem 3-Schnitt in zwei Teilgraphen  $L$  und  $R$  auf und füge auf beiden Seiten je einen Punkt  $v_l$  und  $v_r$  hinzu, zu dem die drei freigewordenen Kanten inzident sind. So ergeben sich zwei einfach 3-polytopale Graphen  $L'$  und  $R'$ , oBdA mit  $|V(L')| \geq |V(R')|$  (Abb. 5.3).

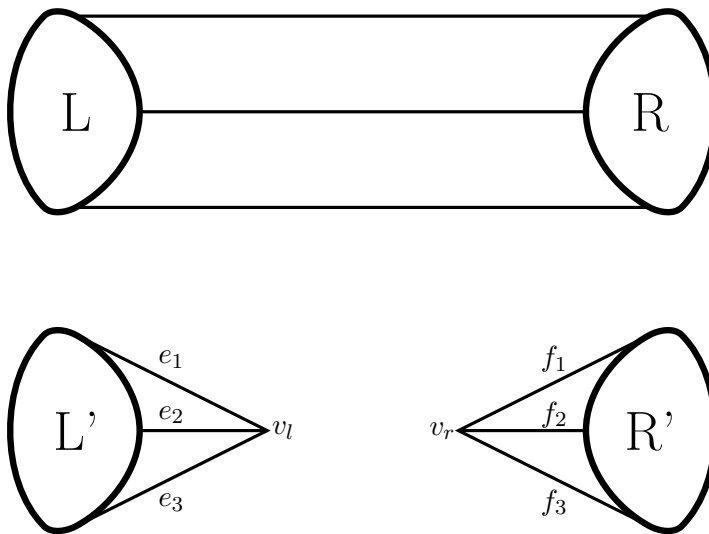
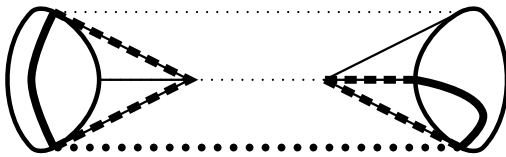


Abb. 5.3 Ergänzung zweier 3-Stücke zu Graphen aus  $\mathcal{F}$ .

Gehen wir davon aus, dass  $G$  ein minimaler nichttrassabler Graph ist. Für  $L'$  gibt es dann drei Möglichkeiten:

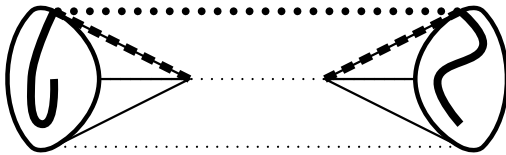
(i)  $L'$  ist hamiltonsch. Wenn auch  $R'$  hamiltonsch wäre, dann könnte man die beiden Punkte  $v_l$  und  $v_r$  so herausnehmen, dass in  $L$  und  $R$  je ein Hamiltonweg entsteht, der zwei Außenpunkte verbindet. Weil auf diese Weise mit Sicherheit zwei Außenpunkte auf den Hamiltonwegen liegen, die in  $G$  zur gleichen Kante inzident sind, kann man die beiden Wege mit eben dieser Kante zu einem Hamiltonweg in  $G$  verbinden (Abb. 5.4).



**Abb. 5.4** Dicke durchgezogene und gestrichelte Linien: Hamiltonkreise in  $L'$  und  $R'$   
Dicke durchgezogene und gepunktete Linien: Hamiltonweg in  $G$

Folglich darf  $R'$  nicht hamiltonsch sein  
 $\Rightarrow |V(R')| \geq 38 \Rightarrow |V(G)| \geq 2 \cdot 38 - 2 = 74$ .

(ii)  $L'$  ist nicht hamiltonsch, aber homogen trassabel. Damit gibt es einen Hamiltonweg, der über ein  $e_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) in  $v_l$  endet. Wenn man in  $R'$  einen Hamiltonweg findet, der über  $f_i$  in  $v_r$  endet, kann man beide Wege zu einem Hamiltonweg in  $G$  zusammenfügen.



**Abb. 5.5** Dicke durchgezogene und gestrichelte Linien: Hamiltonwege in  $L'$  und  $R'$   
Dicke durchgezogene und gepunktete Linien: Hamiltonweg in  $G$

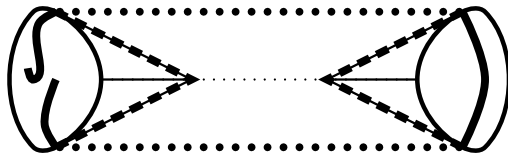
Darum muss es in  $R'$  eine zu  $v_r$  inzidente Kante  $e$  geben, sodass kein in  $v_r$  beginnender Hamiltonweg durch  $e$  läuft. Das ist erst dann möglich, wenn  $|V(R')| \geq 30$  ist. (Vgl. Eigenschaften des  $T_2$ , S. 54.)

Macht zusammen:  $|V(L')| \geq 38 \wedge |V(R')| \geq 30 \Rightarrow |V(G)| \geq 66$

(iii)  $L'$  ist nicht homogen trassabel. Damit ist  $|V(L')| \geq 44$ .

$L'$  muss trassabel sein, weil  $G$  nach Voraussetzung minimal unter allen nichttrassablen Graphen in  $\mathcal{F}$  sein soll. Darum gibt es einen Hamiltonweg  $P$  in  $L'$ .

Wenn  $P$  einen Endpunkt in  $v_l$  hat, dann kann man diesen Fall auf Fall (ii) zurückführen. Sonst gibt es zwei Kanten  $e_i$  und  $e_j$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ), die von  $P$  durchlaufen werden. Findet man in  $R'$  einen Hamiltonkreis, der  $f_i$  und  $f_j$  durchläuft, dann kann man diesen mit  $P$  zu einem Hamiltonweg in  $G$  verbinden.



**Abb. 5.6** Dicke durchgezogene und gestrichelte Linien:

Hamiltonweg in  $L'$  und Hamiltonkreis in  $R'$

Dicke durchgezogene und gepunktete Linien: Hamiltonweg in  $G$

Also muss es in  $R'$  zwei zu  $v_r$  inzidente Kanten geben, die nicht auf einem Hamiltonkreis liegen. Das funktioniert nur, wenn die dritte eine A-Kante ist. Damit hat  $R'$  mindestens 16 Punkte. Das ergibt:  $|V(G)| \geq 44 + 16 - 2 = 58$ .

### 5.2.2 Zyklisch 5-zusammenhängende Graphen

In der Arbeit [1] von ALDRED, BAU, HOLTON und MCKAY wurden sämtliche nichthamiltonschen zyklisch 5-zusammenhängenden Graphen bis einschließlich zur Größe 52 angegeben. Von diesen enthält jeder einen Hamiltonweg.

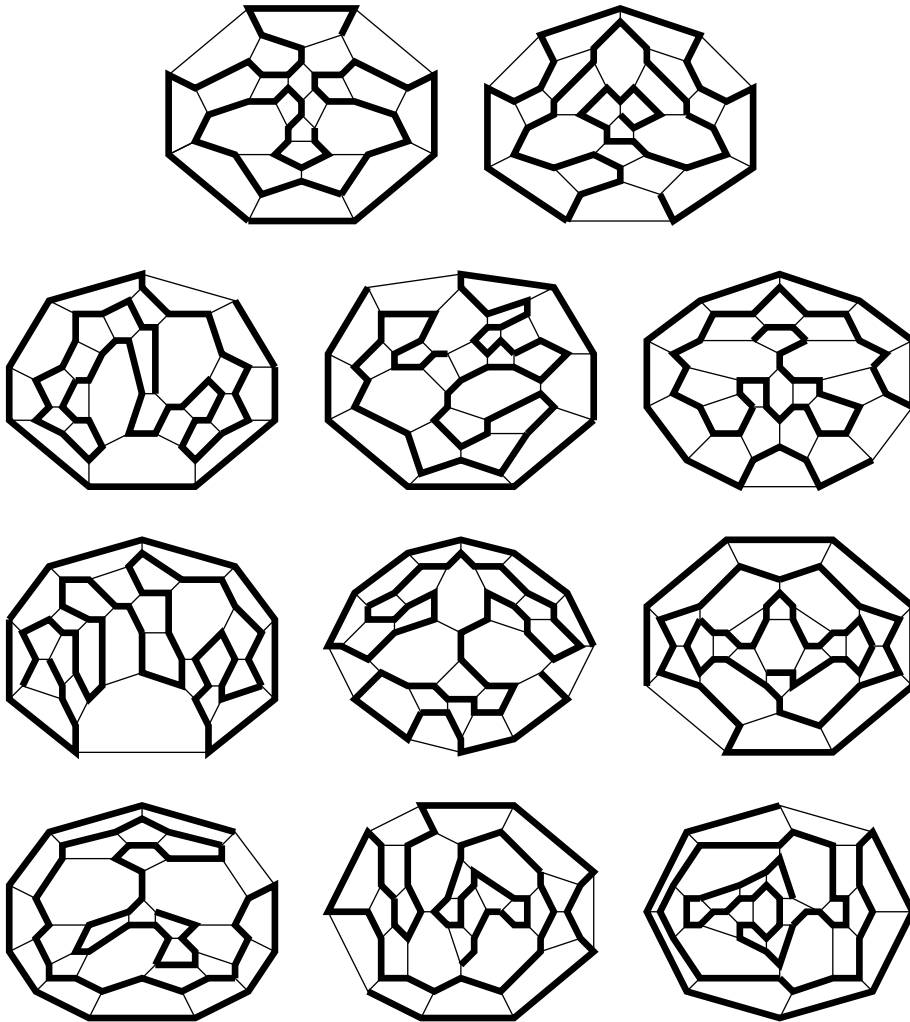


Abb. 5.7 Alle zyklisch 5-zusammenhängenden nichthamiltonschen Graphen mit  $\leq 52$  Punkten enthalten einen Hamiltonweg



**Proposition 9** *Alle einfach 3-polytopalen zyklisch 5-zusammenhängenden Graphen mit maximal 52 Punkten sind trassabel.*

Diese Grenze lässt sich mit den mir bekannten, von BARNETTE, WEGNER und OKAMURA eingeführten Methoden (vgl. [3], [12]) nicht heben. Daher sind 52 Punkte die oberste Grenze dessen, was in meinen Möglichkeiten steht.

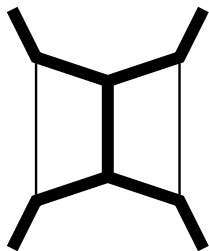
### 5.2.3 Zyklisch 4-zusammenhängende Graphen mit wesentlichem 4-Schnitt

In diesem Abschnitt wird bewiesen:

**Proposition 10** *Sei  $G \in \mathcal{F}$  ein minimaler nichttrassabler Graph. Enthält  $G$  keinen zyklischen 3-Schnitt, wohl aber einen wesentlichen 4-Schnitt, so enthält  $G$  mindestens 54 Punkte.*

*Beweis:* Der zyklische 4-Schnitt ist wesentlich, d. h., keines der entstehenden 4-Stücke besteht nur aus einem Viereck. Jedes Stück besteht also aus mindestens sechs Punkten.

Erster Fall:  $G$  enthalte ein *Doppelviereck* (zwei Vierecke mit gemeinsamer Kante).

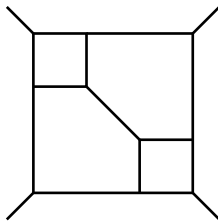


**Abb. 5.8** Reduktion benachbarter Vierecke in einem zyklisch 4-zusammenhängenden Graphen

Wenn man die beiden Vierecke durch eine Kante ersetzt, erhält man nach [3] einen einfach 3-polytopalen Graphen  $G'$ . Da  $|V(G)| = |V(G')| + 4$

und  $G$  ein *minimaler* nichttrassabler Graph ist, ist  $G'$  trassabel. Aber jeder Weg, der  $G'$  aufspannt, kann nach [3] zu einem Weg umgeformt werden, der  $G$  aufspannt. Somit darf  $G$  keine zwei benachbarten Vierecke enthalten.

Es gibt ein weiteres 4-Stück, das aus den gleichen Gründen durch eine Kante ersetzt werden kann, ohne dass der Graph trassabel wird:  $Q_{4,10}$  (Abb. 5.9).

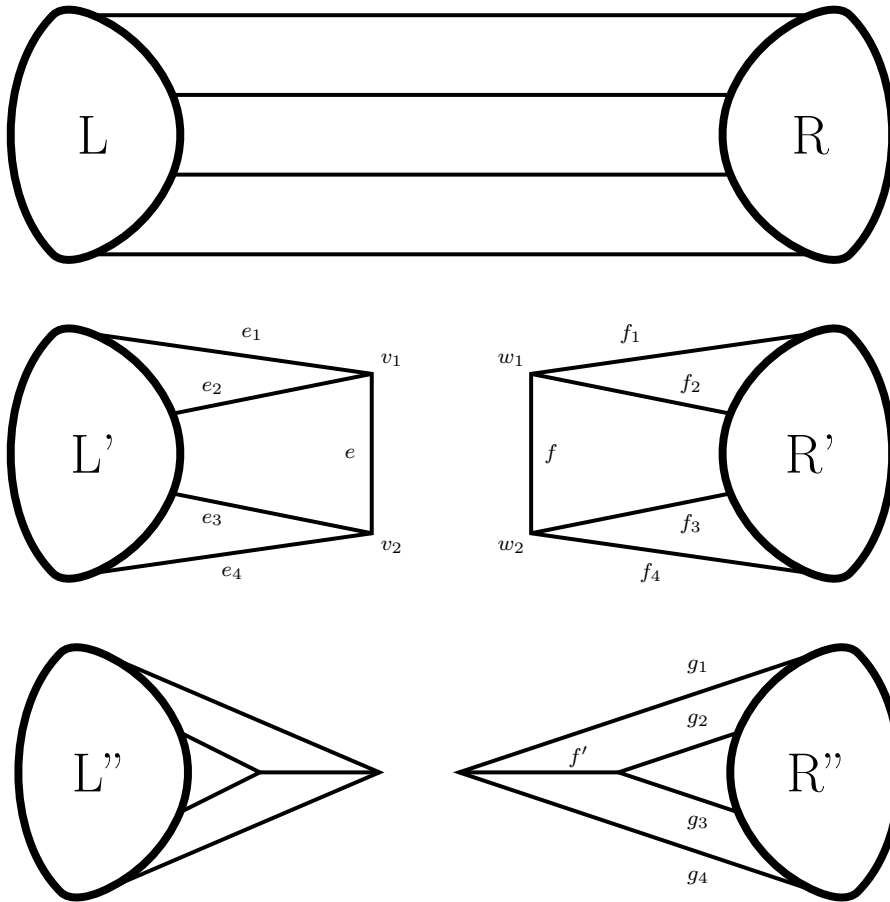


**Abb. 5.9**  $Q_{4,10}$ : ein 4-Stück mit zehn Punkten

$G$  enthält einen wesentlichen 4-Schnitt, d. h., keins von beiden 4-Stücken besteht nur aus einem Viereck. Es darf auch kein Paar adjazenter Vierecke, kein  $Q_{4,10}$  und kein Dreieck enthalten sein. Es lässt sich leicht überprüfen (z. B. im ATLAS OF GRAPHS, [13]), dass jedes 4-Stück eines Graphen aus  $\mathcal{F}$  mit mehr als vier und weniger als zwölf Punkten einen dieser Teilgraphen enthält. Wenn ein nichttrassabler Graph  $G$  ein solches 4-Stück enthält, dann ist ein Graph  $G'$ , in dem dieses 4-Stück durch eine Kante ersetzt wird, ebenfalls nicht trassabel. Damit ist bewiesen:

**Lemma 5.3** *Sei  $G$  ein minimaler nichttrassabler einfach 3-polytopaler Graph. Wenn  $G$  einen wesentlichen 4-Schnitt enthält, dann enthalten beide 4-Stücke, die bei diesem Schnitt entstehen, mindestens je 12 Punkte.*

Die beiden 4-Stücke, die durch den zyklischen 4-Schnitt entstehen, heißen im Folgenden  $L$  und  $R$ , wobei oBdA gilt  $|V(L)| \geq |V(R)|$ . Sie können auf zwei Weisen durch Hinzunahme zweier Punkte  $v_1, v_2$  bzw.  $w_1, w_2$  (und einer Kante  $e$  bzw.  $f$ , die  $v_1$  und  $v_2$  bzw.  $w_1$  und  $w_2$  verbindet) zu Graphen  $L'$  und  $R'$  bzw.  $L''$  und  $R''$  ( $\in \mathcal{F}$ ) erweitert werden (Abb. 5.10). Hierbei sind  $L'$  und  $L''$  bzw.  $R'$  und  $R''$  zueinander  $e$ -transponiert.



**Abb. 5.10** Oben: Ein zyklisch 4-zusammenhängender Graph  
 Unten: Zyklische 4-Stücke werden auf zweierlei Weise zu Graphen aus  $\mathcal{F}$  verbunden.

**Fall 1:**  $L'$  oder  $L''$  ist nicht trassabel.

Dies würde der Minimalität von  $G$  widersprechen.  $\square$

**Fall 2:**  $L'$  und  $L''$  sind trassabel,  $L'$  oder  $L''$  ist nicht homogen trassabel.

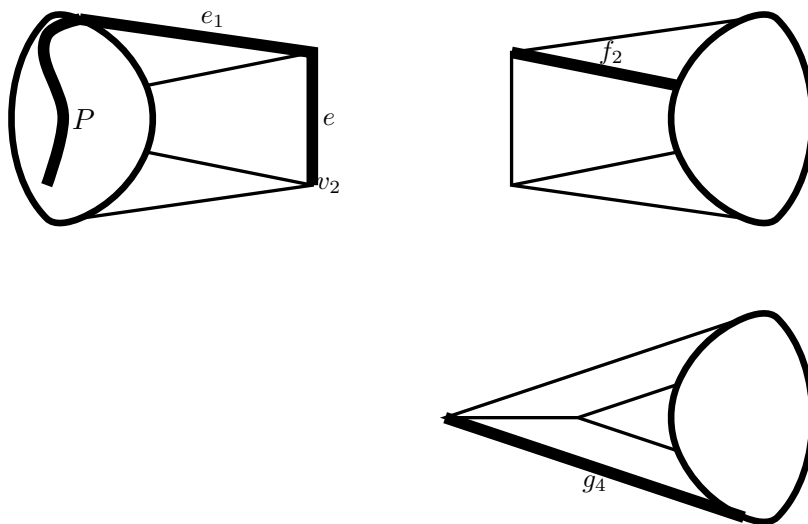
Damit ist  $|V(L')| \geq 44$ , also  $|V(L)| \geq 42$ . Weil nach Lemma 5.3  $|V(R)| \geq 12$  gilt, ist  $|V(G)| \geq 54$ .  $\square$

**Fall 3:**  $L'$  und  $L''$  sind homogen trassabel,  $L'$  oder  $L''$  ist nicht hamiltonsch.

OBdA sei  $L'$  nicht hamiltonsch.

Weil  $L'$  homogen trassabel ist, gibt es einen Hamiltonweg  $P$ , der in  $v_2$  endet.

**Fall 3(a):**  $e \in E(P)$ .



**Abb. 5.11** Fall 3(a); die A-Kanten sind fett markiert

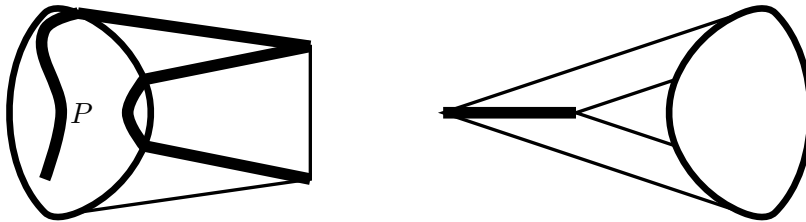
Dann muss auch eine der anderen Kanten  $e_1$  und  $e_2$  benutzt werden, die zu  $v_1$  inzident ist. OBdA sei dies  $e_1$ . Findet man in  $R'$  einen Hamiltonkreis, der  $f_2$  auslässt, so enthält dieser Hamiltonkreis  $f$  und  $f_1$ . Einen solchen Kreis

kann man mit  $P$  zu einem Hamiltonweg in  $G$  vereinigen. Dasselbe muss für die Kante  $g_4$  in  $R''$  gelten.

Mit anderen Worten: Damit  $G$  nicht trassabel ist, darf es weder in  $R'$  noch in  $R''$  einen Hamiltonkreis geben, der die Kanten  $f_2$  respektive  $g_4$  vermeidet.  $f_2$  und  $g_4$  sind also A-Kanten, und  $R'$  und  $R''$  sind A-Kanten-Graphen.

**Fall 3(b):**  $e \notin E(P)$ .

Wenn es in  $R''$  einen Hamiltonkreis  $H$  gibt, der  $f'$  auslässt, dann kann man  $P$  und  $H$  zu einem Hamiltonweg in  $G$  kombinieren.



**Abb. 5.12** Fall 3(b)

Damit  $G$  nicht trassabel ist, muss und  $f'$  eine A-Kante und damit  $R''$  ein A-Kanten-Graph sein.

Hier ist eine Erinnerung an die Gestalt der nichthamiltonschen Graphen mit 38 oder 40 Punkten erforderlich.

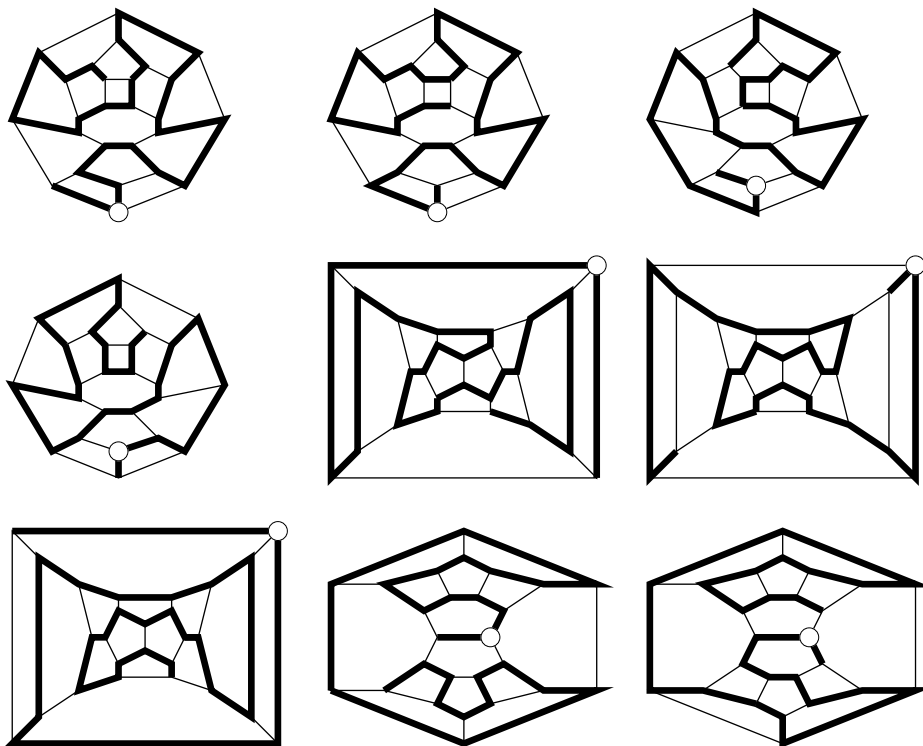
Im Fall  $|V(L')| = 38$  entsteht  $L'$  aus  $bb_{10}$ , indem in zwei nicht adjazente Punkte  $v_1, v_2$  je eine Kopie des  $T_1$  eingesetzt wird. Zu diesen beiden Kopien sind je drei Kanten  $e_1^1, e_2^1, e_3^1$  und  $e_1^2, e_2^2, e_3^2$  inzident, die paarweise verschieden sind.

Beim Übergang von  $L'$  zu  $G$  wird eine Kante  $e$  in  $L'$  durch das 4-Stück  $R'$  ersetzt. Ist  $e \notin \{e_1^1, e_2^1, e_3^1\}$ , dann ist  $\{e_1^1, e_2^1, e_3^1\}$  auch in  $G$  noch ein zyklischer 3-Schnitt, sonst ist  $\{e_1^2, e_2^2, e_3^2\}$  einer. In beiden Fällen ist  $G$  nicht zyklisch 4-zusammenhängend, also ist der Fall  $|V(L')| = 38$  ausgeschlossen.

Sei nun  $|V(L')| = 40$ . Hier gibt es drei Möglichkeiten: Entweder entsteht  $L'$  aus einem der nichthamiltonschen Graphen mit 38 Punkten durch

Einsetzung eines Dreiecks (was die Anzahl der 3-Schnitte nicht verringern kann), oder  $L'$  entsteht aus  $bb_{10}$  durch Ersetzung zweier nicht adjazenter Punkte durch zwei  $A$ -Stücke (was zum gleichen Problem wie bei 38 Punkten führt), oder  $L'$  entsteht aus  $b_{26}^1, b_{26}^2$  oder  $b_{26}^3$ , indem man einen der Punkte, die zu einer  $B$ -Kante inzident sind, durch eine Kopie  $I$  des  $T_1$  ersetzt.

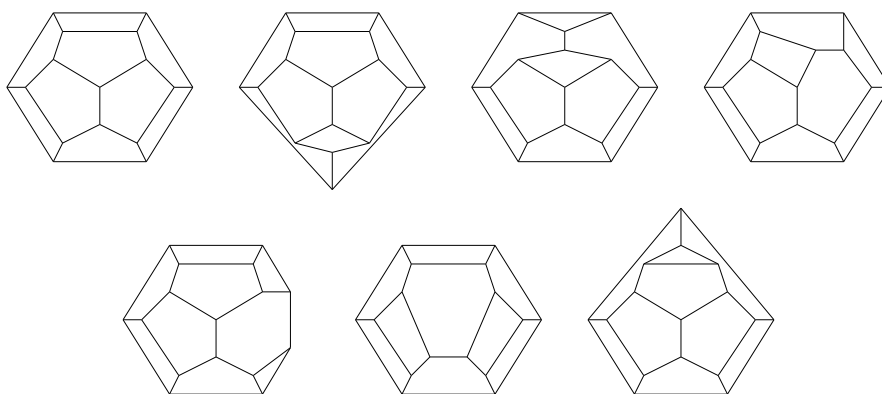
Man betrachte den letzten Fall genauer. Es ist bekannt, dass eine der drei zu  $I$  inzidenten Kanten ersetzt werden muss, um einen zyklisch 4-zusammenhängenden Graphen  $G$  zu erzeugen. Zu jeder dieser Kanten findet man einen Hamiltonweg  $W$ , der mit dieser Kante endet (Abb. 5.13).



**Abb. 5.13** Hamiltonwege in nichthamiltonschen Graphen mit 40 Punkten.  
 Der Kreis steht für eine Kopie des  $T_1$ .  
 (Symmetrien beachten!)

Damit ist klar, dass für  $|V(L')| = 40$  der Fall 3(a) gelten muss. Folglich ist sowohl  $R'$  als auch der dazu  $e$ -transponierte Graph  $R''$  ein A-Kanten-Graph.

Angenommen,  $|V(R')| = 16$ . Weil es außer  $a_{16}$  keinen einfach 3-polytopalen A-Kanten-Graphen mit 16 oder weniger Punkten gibt, müssen sowohl  $R'$  als auch  $R''$  isomorph zu  $a_{16}$  sein. Das würde bedeuten, dass es eine Kante  $e \in E(a_{16})$  gibt, sodass die  $e$ -Transponierte von  $a_{16}$  zu  $a_{16}$  isomorph ist. Man kann für jede Kante des Graphen  $a_{16}$  die  $e$ -Transponierte betrachten (Abb. 5.14) und erkennt, dass keine von ihnen zu  $a_{16}$  isomorph ist.



**Abb. 5.14**  $a_{16}$  und seine möglichen  $e$ -Transponierten

Im Falle  $|V(L')| = 40$  muss also  $|V(R')| \geq 18$  gelten. Ist  $|V(L')| \geq 42$  sein, dann ist immerhin  $R''$  noch ein A-Kanten-Graph, also  $|V(R'')| \geq 16$ . Damit ist  $|V(G)| = |V(L)| + |V(R)| \geq 54$ .

**Fall 4:  $L'$  und  $L''$  sind hamiltonsch.**

Angenommen,  $R'$  oder  $R''$  wäre nicht hamiltonsch. Dann ist  $|V(R)| \geq 36 \Rightarrow |V(G)| \geq 72$ , weil ja  $|V(L)| \geq |V(R)|$ .

Seien  $R'$  und  $R''$  von nun an beide hamiltonsch. Wenn man die Hamiltonkreise in  $L'$  und  $L''$  sowie in  $R'$  und  $R''$  auf  $L$  und  $R$  einschränkt, so ergeben sich folgende Möglichkeiten (Abb. 5.15).

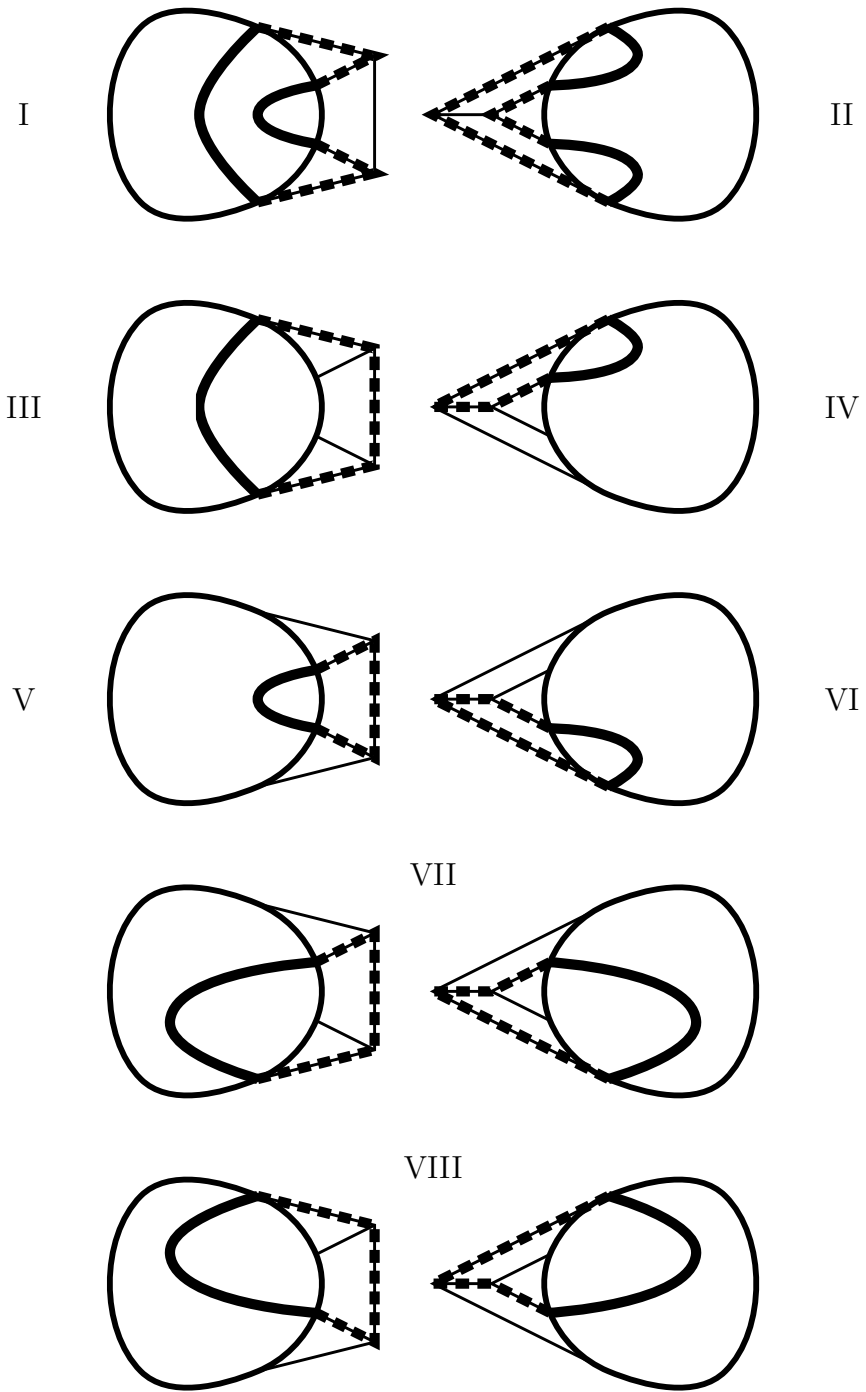
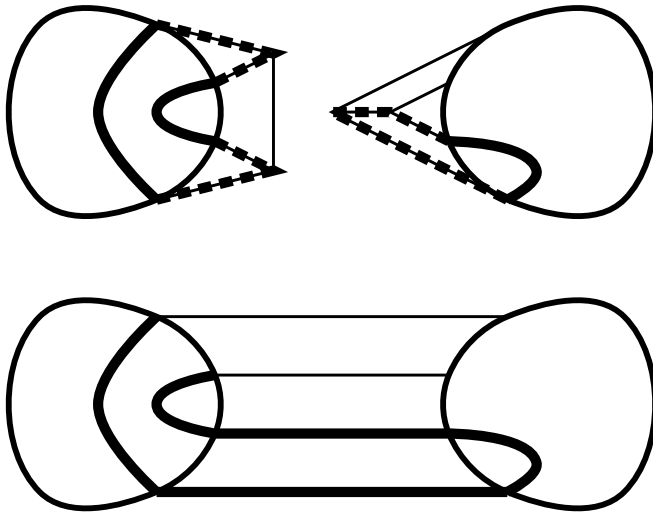


Abb. 5.15 Hamiltonkreise in  $L$  und  $R$



Man beachte, dass die Möglichkeiten I, III und V nur in  $L'$  bzw.  $R'$  auftreten können, die Möglichkeiten II, IV und VI nur in  $L''$  bzw.  $R''$ . Sie können also nicht die einzigen Möglichkeiten sein. (VII und VIII sind in beiden Fällen zu Hamiltonkreisen erweiterbar!)

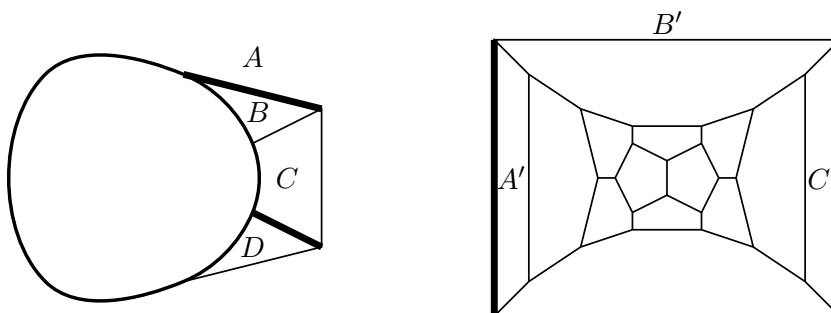
Nun lässt sich jede Konstellation für  $L'$  mit jeder Konstellation für  $R''$  so kombinieren, dass man daraus einen Hamiltonweg in  $G$  zusammenfügen kann.



**Abb. 5.16** Beispiel: Verbindung von I und VI zu einem Hamiltonweg

Einzige Ausnahme: VII lässt sich nicht mit VIII kombinieren. Das bedeutet: Damit  $G$  nicht trassabel ist, muss auf der einen Seite VII und auf der anderen Seite VIII die einzig mögliche Konstellation sein.

Angenommen, bei  $L'$  und  $L''$  wäre nur VII möglich, bei  $R'$  und  $R''$  nur VIII. Das bedeutet analog zu Fall 3, dass  $L'$ ,  $L''$ ,  $R'$  und  $R''$  allesamt je mindestens zwei B-Kanten enthalten. Bei Betrachtung dieser B-Kanten in den Konstellationen VII und VIII fällt außerdem auf, dass sie durch eine weitere Kante zu einem Streckenzug verbunden werden können (diese Kante ist nämlich das obige  $e$  oder  $f$  bzw.  $f'$ ). Andererseits darf es kein Polygon  $k \in F(G)$  geben, zu deren Rand beide B-Kanten gehören. (Deswegen darf zum Beispiel  $b_{26}^2$  keiner dieser Graphen sein; vgl. Abb. 5.17.) Nur Graphen, die ein solches Paar B-Kanten aufweisen, kommen also für  $L'$ ,  $L''$ ,  $R'$  und  $R''$  infrage.



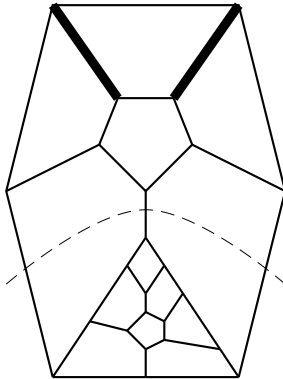
**Abb. 5.17** Lage der B-Kanten und benachbarten Polygone in VII und in  $b_{26}^2$

Die B-Kanten-Graphen mit bis zu 28 Punkten sind aus Kapitel 3 bekannt. Der Graph  $b_{26}^2$  wurde oben bereits ausgeschlossen. Die Graphen  $b_{26}^1$ ,  $b_{26}^3$  und  $b_{28}$  sind auch keine Kandidaten für  $L'$ ,  $L''$ ,  $R'$  oder  $R''$ , weil jeder von ihnen genau eine B-Kante hat. Weil dies die einzigen zyklisch 4-zusammenhängenden B-Kanten-Graphen mit weniger als 30 Punkten sind, müssen die Graphen  $L'$ ,  $L''$ ,  $R'$  und  $R''$  also jeweils mindestens einen zyklischen 3-Schnitt haben.

$G$  ist allerdings nach Voraussetzung zyklisch 4-zusammenhängend. Der zyklische 3-Schnitt in  $L'$ ,  $L''$ ,  $R'$  und  $R''$  muss also verschwinden, wenn man die Kante  $e$ ,  $f$  oder  $f'$  durch ein 4-Stück ersetzt. Mit anderen Worten: Eine Kante dieses 3-Schnitts muss  $e$ ,  $f$  oder  $f'$  sein, und diese Kante verbindet gleichzeitig zwei B-Kanten miteinander.

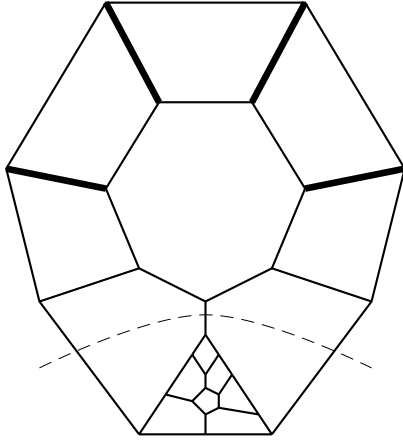
Nach Kapitel 3 gibt es drei Möglichkeiten, wie die übrigen B-Kanten-Graphen mit weniger als 30 Punkten strukturiert sein können. Entweder handelt es sich um den  $bb_{10}$ , in dem ein Punkt durch ein A-Stück ersetzt wurde, oder um einen  $bb_{14}$ -Graphen, in dem ein Punkt durch  $T_1$  ersetzt wurde, oder um einen beliebigen B-Kanten-Graphen, in dem ein Punkt durch ein Dreieck ersetzt wurde.

**Erster Fall:** Wenn man in  $bb_{10}$  einen Punkt durch ein A-Stück ersetzt, so erhält man einen Graphen mit einem zyklischen 3-Schnitt. (Dieser trennt das A-Stück vom Rest.) Keine Kante dieses zyklischen 3-Schnitts verbindet zwei B-Kanten miteinander. Die Graphen  $L', L'', R'$  und  $R''$  haben also nicht diese Gestalt.



**Abb. 5.18**  $b_{24}$  mit eingezeichnetem zyklischem 3-Schnitt  
fett markiert: die beiden B-Kanten

**Zweiter Fall:** Wenn man in einem  $bb_{14}$ -Graphen einen Punkt durch  $T_1$  ersetzt, so entsteht ein Graph mit 28 Punkten. (Dies ist wichtig, weil hier nicht untersucht werden muss, was bei Einsetzung eines Dreiecks passiert.) War der ursprüngliche Graph  $bb_{14}^1$ , so entstehen durch die Einsetzung vier B-Kanten. Keine Kante, die eine dieser B-Kanten miteinander verbindet, ist am zyklischen 3-Schnitt beteiligt, die  $T_1$  vom Rest trennt.



**Abb. 5.19**  $bb_{14}^1$  mit eingesetztem  $T_1$   
fett markiert: die vier B-Kanten

War der ursprüngliche Graph  $bb_{14}^2$  oder  $bb_{14}^3$ , so enthält der fertige Graph nur eine B-Kante. Auch die Graphen dieser Kategorie sind also keine Teilgraphen von  $G$ .

**Dritter Fall:** Man setzt ein Dreieck  $d$  in den Punkt  $v$  eines Graphen  $H' \in \mathcal{F}$  ein. Der so entstandene Graph heie  $H$ . Dabei entsteht nach Lemma 2.1 genau dann eine neue B-Kante  $f^*$ , wenn  $v$  zu einer B-Kante inzident war. Zu  $v$  muss also eine B-Kante  $b_1$  inzident sein (Abb. 5.20).

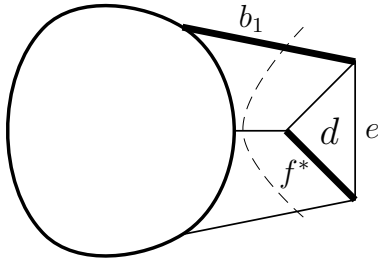


Abb. 5.20

Und zwar genau eine, weil  $v$  nicht zu zwei B-Kanten inzident sein kann. Deswegen enthält  $d$  keine Kante, die zwei B-Kanten aus  $H'$  miteinander verbindet.

Nun soll es in  $H$  (im Gegensatz zu  $H'$ ) zwei B-Kanten  $f_1, f_2$  geben, die nicht zum gleichen Polygon gehören und durch eine weitere Kante  $e$  miteinander verbunden sind. Angenommen,  $f_1$  und  $f_2$  waren schon Kanten in  $H'$ . Alle Polygone, die in  $H'$  eine gemeinsame Kante haben, haben sie auch noch in  $H$ . Die einzigen Kanten, die neu hinzugekommen sind, gehören zum Dreieck  $d$  und können  $f_1$  und  $f_2$  nicht verbinden. Deswegen muss es schon in  $H'$  eine Kante gegeben haben, die  $f_1$  und  $f_2$  miteinander verbindet, und es gab schon in  $H'$  kein Polygon, zu deren Rand sowohl  $f_1$  als auch  $f_2$  gehörte. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, also muss eine der Kanten  $f_1$  oder  $f_2$  die Kante  $f^*$  sein.

Nächste Annahme: Die andere B-Kante ist die Kante  $b_1$ , die zu  $v$  inzident war. Die beiden Kanten, die  $f^*$  und  $b_1$  miteinander verbinden, gehören allerdings zum Dreieck  $d$ . Wenn man eine dieser Kanten durch einen

zyklischen 4-Schnitt ersetzt, dann ist der fertige Graph  $G$  nach Lemma 2.3 nicht zyklisch 4-zusammenhängend.

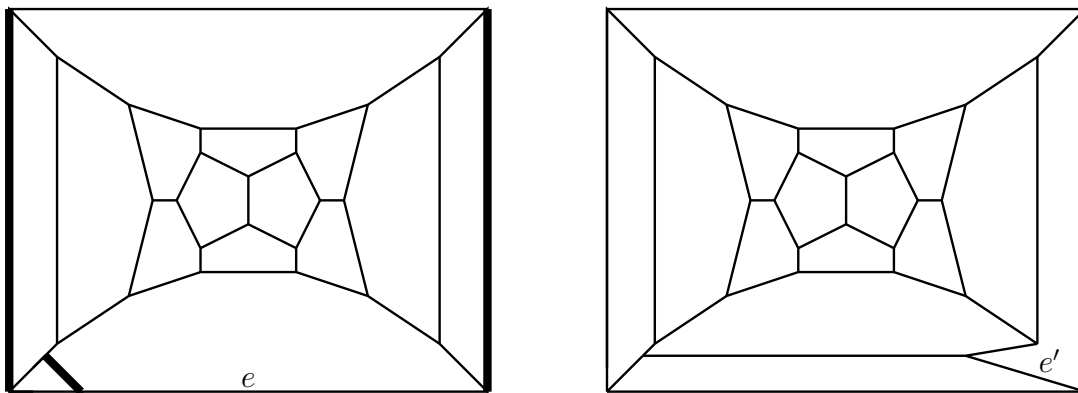
Also muss es eine weitere B-Kante  $b_2$  in  $H$  geben, die durch eine Kante  $e$  mit  $b^*$  verbunden ist. Da  $e$  nicht zum Dreieck  $d$  gehört, existiert  $e$  bereits in  $H'$  und verbindet dort  $b_2$  mit dem Punkt  $v$ , der ja zu  $b_1$  inzident ist.

So gewinnt man mehrere Informationen über  $H'$ :

- (i)  $H'$  enthält mehr als eine B-Kante (ist also nicht  $b_{26}^1$ ,  $b_{26}^3$  oder  $b_{28}$ ),
- (ii)  $H'$  hat maximal 26 Punkte (damit scheiden alle Graphen der zweiten Klasse aus),
- (iii) wenn  $H'$  bereits einen 3-Schnitt enthält, dann muss eine Kante dieses 3-Schnitts die Kanten  $b_1$  und  $b_2$  verbinden (was für die Graphen der ersten Klasse ausgeschlossen ist).

Der einzige Kandidat für  $H'$ , der damit übrigbleibt, ist der Graph  $b_{26}^2$ .

Wenn man in  $b_{26}^2$  ein Dreieck in einem Punkt einsetzt, der zu einer B-Kante inzident ist, dann ergibt dies den Graphen  $b_{28}^*$  mit drei B-Kanten (Abb. 5.21). Hier gibt es zwei B-Kanten, die durch eine Kante  $e$  miteinander verbunden werden und nicht zum Rand des gleichen Polygons gehören. Damit ist  $b_{28}^*$  ein möglicher Kandidat für  $R'$  oder  $R''$ .



**Abb. 5.21** Links:  $b_{28}^*$  (fettgedruckt: B-Kanten)  
Rechts: Die  $e$ -Transponierte von  $b_{28}^*$

Man beachte allerdings, dass es nur eine Kante  $e$  gibt, die in geforderter Weise durch einen 4-Schnitt ersetzt werden kann. Nach Voraussetzung muss auch die  $e$ -Transponierte von  $b_{28}^*$  ein B-Kanten-Graph sein. Sie wäre also zu einem der aus [1] bekannten 26 B-Kanten-Graphen isomorph, oder sie enthielte ein Dreieck. Beides ist nicht der Fall, darum scheidet auch  $b_{28}^*$  aus.

Damit kommen für  $L'$ ,  $L''$ ,  $R'$  und  $R''$  keine Graphen infrage, die weniger als 30 Punkte enthalten. Es gilt also  $|V(L)| \geq |V(R)| \geq 28$  und damit  $|V(G)| \geq 2 \cdot 28 = 56$ . Also ist Proposition 10 bewiesen.

## 5.2.4 Zyklisch 4\*-zusammenhängende Graphen

Inhalt dieses Abschnittes ist der Beweis des folgenden Satzes:

**Proposition 11** *Sämtliche zyklisch 4\*-zusammenhängenden Graphen mit maximal 52 Punkten sind trassabel.*

*Beweis:* **Schritt I: Die Okamura-Reduktionen (i)**

Die Graphen mit maximal 42 Punkten sind nach Kapitel 3 allesamt homogen trassabel. Wegen Lemma 5.2 gilt ja, dass ein homogen trassabler Graph keine  $\beta$ -Kante enthält. Es gibt also zu jeder Kante  $e \in E(G)$  einen Hamiltonweg in  $G$ , der  $e$  enthält.

Nun kann man auf die sogenannten OKAMURA-II-Reduktionen  $O2(a) \dots O2(o)$  zurückgreifen (Abb. 5.22; vergleiche [12]).

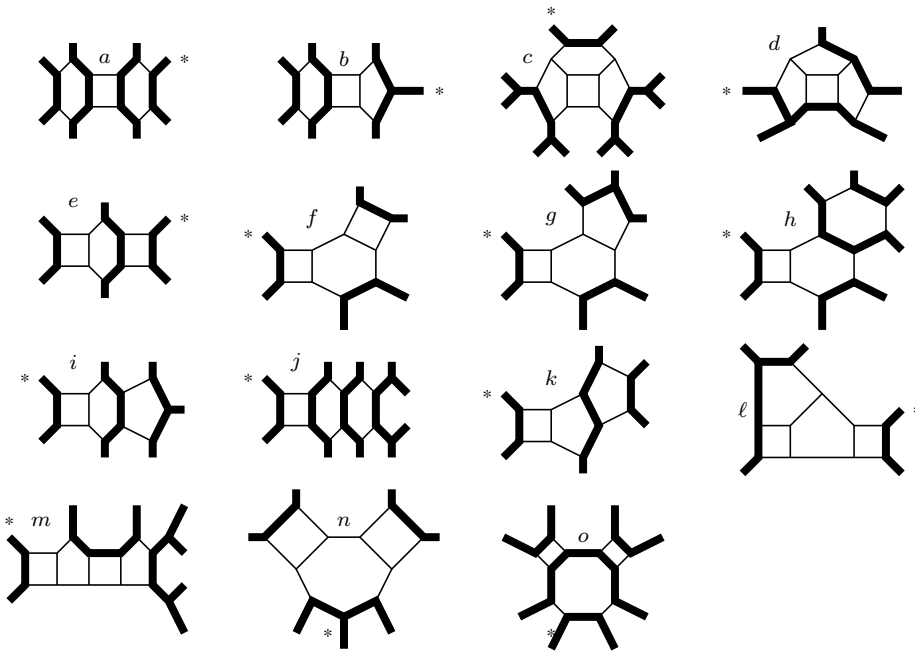


Abb. 5.22 Die OKAMURA-II-Reduktionen



Die Abbildung stellt Teilgraphen (genauer:  $n$ -Stücke) von  $G$  dar. Es wird geprüft, ob  $G$  einen dieser Teilgraphen enthält. Bei dieser Überprüfung ist wichtig, dass zunächst nach dem ersten Teilgraphen gesucht wird, dann nach dem zweiten, dann dem dritten und so weiter.

Sobald man einen dieser Teilgraphen findet, werden die in der Zeichnung dünn gezeichneten Kanten nacheinander entfernt. Bei der Entfernung einer Kante wird jeder zu ihr inzidente Punkt mit den übriggebliebenen zwei Kanten zu einer neuen Kante vereinigt. So verschwinden die Punkte von Grad 2. Diesen Vorgang bezeichnet man als OKAMURA-II-Reduktion. (OKAMURA hatte in einer früheren Arbeit [11] mit anderen Reduktionen gearbeitet, den OKAMURA-I-Reduktionen.)

**Lemma 5.4** *Sei  $G$  ein zyklisch  $4^*$ -zusammenhängender nichttrassabler Graph, der eines dieser  $n$ -Stücke enthält.  $H$  entstehe aus  $G$  durch Entfernung der dünn gezeichneten Kanten. Dann ist  $H$  weiterhin einfach 3-polytopal und enthält keinen Hamiltonweg, der die markierte Kante enthält. Insbesondere ist  $H$  nicht homogen trassabel.*

*Beweis:* Dass  $H$  weiterhin einfach 3-polytopal ist, wurde in [12] bereits bewiesen. (Hierbei war wichtig, dass in einem Graphen  $G$ , bei dem eine Reduktion durchgeführt wird, keine der vorhergehenden Reduktionen möglich war. Sonst wäre in einigen Fällen der 3-Zusammenhang zweifelhaft gewesen.) Wenn es in  $H$  einen Hamiltonweg  $P$  gibt, der die markierte Kante benutzt, so kann man diesen zu einem Hamiltonweg in  $G$  erweitern, womit  $G$  trassabel wäre.

**Korollar:** Da jeder Graph mit bis zu 42 Punkten homogen trassabel ist und bei jeder dieser Reduktionen mindestens zehn Punkte wegfallen, muss ein solcher Graph  $G$  mindestens 54 Punkte enthalten.

Für den Beweis der Proposition werden allerdings weitere Reduktionen benötigt: Die *erweiterten* OKAMURA-II-Reduktionen. Abb. 5.23 stellt die ersten zwölf von ihnen dar:  $Oe(a)$  bis  $Oe(\ell)$ .

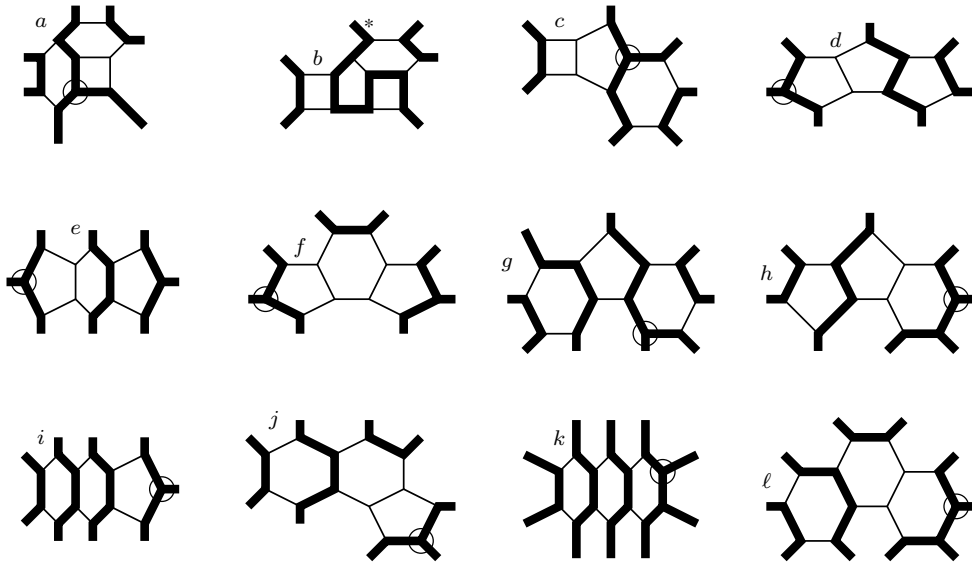


Abb. 5.23 Die erweiterten OKAMURA-II-Reduktionen (1. Teil)

**Definition 5.1** Das Polygon  $f \in F(G)$  heißt *Randpolygon* eines  $n$ -Stücks  $L \subseteq G$ , wenn eine, aber nicht alle Kanten, die  $f$  begrenzen, in  $L$  enthalten sind.

**Lemma 5.5** Sei  $G$  ein zyklisch  $4^*$ -zusammenhängender nichttrassabler Graph, der eines dieser  $n$ -Stücke  $L$  enthält.  $H$  entstehe aus  $G$  durch Entfernung der dünn gezeichneten Kanten. Dann ist  $H$  weiterhin einfach 3-polytopal und enthält keinen Hamiltonweg, der im markierten Punkt endet. Insbesondere ist  $H$  nicht homogen trassabel.

*Beweis:* Zunächst muss gezeigt werden, dass auch  $H$  einfach 3-polytopal ist.  $H$  entstand aus dem planaren Graphen  $G$  durch Entfernung von Kanten, ist also ebenfalls planar. Kubisch ist  $H$  per Definition der Reduktion.

Angenommen,  $H$  ist nicht 3-zusammenhängend. Wenn  $H$  überhaupt nicht zusammenhängend ist, trennt eins der Polygone, die durch Entfernung von

Kanten aus  $G$  neu entstanden sind, zwei Teilgraphen voneinander. In diesem Fall müssen in  $G$  zwei Randpolygone des  $n$ -Stücks übereinstimmen.

Wenn  $H$  zusammenhängend ist, dann gibt es in  $H$  einen 2-Schnitt. Durch die Entfernung zweier weiterer Kanten würde der Graph also zerfallen.

Wenn ein zusammenhängender Graph durch die Entfernung einer Kante  $g$  unzusammenhängend wird, dann liegt dasselbe Polygon  $k$  beiderseits von  $g$ .

Weil  $H$  aber kubisch ist, gibt es einen zu  $g$  inzidenten Punkt  $v$  sowie zwei zu  $v$  inzidente Kanten  $e$  und  $f$ , die  $k$  von einem weiteren Polygon  $\ell$  trennen.

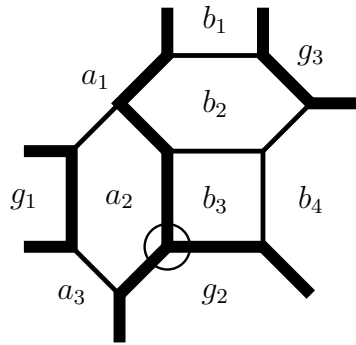
Wird er durch die Entfernung zweier Kanten unzusammenhängend, dann trennen diese Kanten dieselben zwei Polygone voneinander.

Mit anderen Worten: Ist ein kubischer planarer Graph zusammenhängend, aber nicht 3-zusammenhängend, so gibt es zwei Polygone mit mindestens zwei gemeinsamen Kanten  $e$  und  $f$ .

$G$  ist zyklisch 4\*-zusammenhängend; d. h., wenn es einen zyklischen 4-Schnitt in  $G$  gibt, dann trennt dieser ein Viereck vom Rest des Graphen.

Die Überprüfung soll zunächst am ersten  $n$ -Schnitt  $Oe(a)$  näher erläutert werden. Die Polygone  $a_1$  bis  $a_3$  in Abb. 5.24 werden in  $H$  zum Polygon  $A$ , die Polygone  $b_1$  bis  $b_4$  zu  $B$ . Zur Erinnerung:  $G$  darf keinen 2-Schnitt, keinen zyklischen 3-Schnitt, keinen wesentlichen 4-Schnitt und keine OKAMURA-2-Reduktion enthalten.

Ziel wird sein, dass man einen 2-Schnitt, einen zyklischen 3-Schnitt, einen wesentlichen 4-Schnitt oder eine OKAMURA-2-Reduktion in  $G$  findet, wenn  $H$  nicht 3-zusammenhängend ist. Um zu beweisen, dass ein gegebener 3-Schnitt zyklisch ist, werden zwei Polygone angegeben, die vollständig zu verschiedenen Stücken dieses Schnitts gehören. Um zu beweisen, dass ein 4-Schnitt wesentlich ist, muss man in zwei verschiedenen Stücken dieses Schnitts Polygone der Länge  $\geq 5$  finden. (Wenn man in einem der Stücke zwei adjazente Polygone unbekannter Länge findet, genügt dies ebenfalls, da  $G$  keine Doppelvierecke enthalten darf.)



**Abb. 5.24** Der  $n$ -Schnitt  $Oe(a)$

Wäre  $g_1$  ein Viereck, dann ergäbe sich  $O2(e)$ . Bei einem Fünfeck ergäbe sich  $O2(i)$ , bei einem Sechseck wäre es  $O2(j)$ . Also ist  $g_1$  mindestens ein Siebeneck.

Wäre  $g_2$  ein Viereck, dann ergäbe sich ein Doppelviereck, und  $G$  wäre nicht  $4^*$ -zusammenhängend. Wäre es ein Fünfeck, so erhielte man  $O2(b)$ , bei einem Sechseck wäre es  $O2(a)$ . Auch  $g_2$  ist also mindestens ein Siebeneck.

Wäre  $g_3$  ein Viereck, dann hätte man  $O2(f)$ , bei einem Fünfeck  $O2(g)$ , bei einem Sechseck  $O2(h)$ . Damit ist auch  $g_3$  mindestens ein Siebeneck.

Des Weiteren stimmen keine zwei dieser drei Polygone überein. Wäre nämlich  $g_1 = g_2$  oder  $g_2 = g_3$ , dann gäbe es in  $G$  einen 2-Schnitt. Für  $g_1 = g_3$  würde keins der Polygone  $a_1, b_1$  mit  $a_3, g_2$  oder  $b_4$  übereinstimmen.

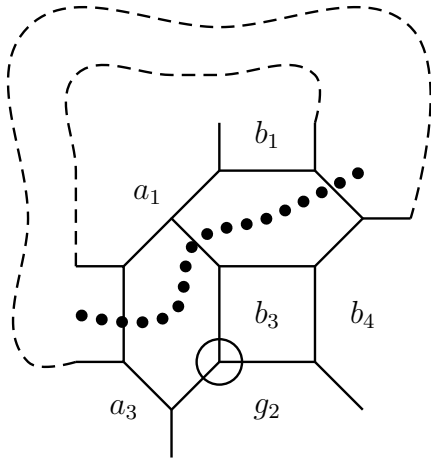
In diesem Fall würde ein 3-Schnitt durch die Polygone  $g_1, a_2, b_2$  und  $g_3 = g_1$  gehen, der  $a_1$  und  $a_3$  voneinander trennt, also zyklisch ist (Abb. 5.25).

Angenommen, zwei Polygone in  $H$  hätten zwei Kanten  $e, f$  gemeinsam.

Von diesen Polygonen muss wenigstens eine  $g_1, g_2, g_3, A$  oder  $B$  sein; die übrigen haben sich ja gegenüber  $G$  nicht verändert.

Man betrachte als erstes  $A$ . Hätte  $A$  mit einem Polygon  $P$  außerhalb des Bildbereichs zwei Kanten  $e, f$  gemeinsam, so müsste in  $G$  die eine Kante  $e$  zu  $a_1$ , die andere Kante  $f$  zu  $a_3$  benachbart sein. Darum würde  $P$  mit  $a_1, a_2$  und  $a_3$  einen zyklischen 4-Schnitt in  $G$  bilden, der  $g_1$  von  $g_2$  und  $b_3$  trennt.

Da  $g_1$  kein Viereck ist, wäre dieser 4-Schnitt wesentlich und  $G$  nicht  $4^*$ -zusammenhängend.



**Abb. 5.25** 3-Schnitt (gepunktet) in  $Oe(a)$ , falls  $g_1 = g_3$  gilt.

Dieselbe Überlegung funktioniert auch für  $g_3$ , weil  $A$  und  $g_3$  nur außerhalb des abgebildeten Bereichs eine Kante gemeinsam haben können.

Hätte  $A$  mit  $g_1$  zwei Kanten gemeinsam, dann läge eine von ihnen außerhalb des abgebildeten Bereichs. Weil dort keine Kanten wegfallen, muss also schon  $a_1$  oder  $a_3$  diese Kante mit  $g_1$  gemeinsam gehabt haben, damit wäre  $G$  nicht 3-zusammenhängend.

Hätte  $A$  mit  $g_2$  zwei Kanten gemeinsam, dann wäre eine davon außerhalb des abgebildeten Bereichs. Hätte sie vorher zu  $a_1$  gehört, so würde ein 3-Schnitt durch  $a_1, a_2$  und  $g_2$  führen, der  $g_1$  und  $b_3$  voneinander trennt, also zyklisch ist. Hätte sie zu  $a_3$  gehört, dann wäre der 2-Schnitt schon in  $G$  vorhanden.

Hätte  $A$  mit  $B$  zwei Kanten gemeinsam, dann läge eine von ihnen außerhalb des abgebildeten Bereichs. Sie kann also nur zu  $a_1, a_3, b_1$  oder  $b_4$  gehören. Gehört sie zu  $a_1$  und  $b_1$ , dann wäre dieser 2-Schnitt auch in  $G$  vorhanden. Gehört sie zu  $a_1$  und  $b_4$ , dann würde ein 3-Schnitt durch  $a_1, b_2$  und  $b_4$  verlaufen, der  $a_2$  und  $g_3$  voneinander trennt, also zyklisch ist. Gehört sie zu  $a_3$  und  $b_1$ , dann verläuft ein 4-Schnitt durch  $a_3, a_2, b_2$  und  $b_1$  und trennt  $g_1$  von  $g_2$ . (Da beide keine Vierecke sind, ist dieser 4-Schnitt wesentlich.)

Gehört sie zu  $a_3$  und  $b_4$ , dann würde ein 4-Schnitt durch  $a_3, a_2, b_3$  und  $b_4$  entstehen, der  $g_2$  von  $g_3$  trennt. Dieser wäre also auch wesentlich. Folglich kann  $A$  nicht zwei Kanten mit einem anderen Polygon gemeinsam haben.

Hätte  $B$  mit einem Polygon  $P$  zwei Kanten gemeinsam (und läge  $P$  außerhalb des abgebildeten Bereichs), dann gäbe es einen 4-Schnitt durch  $P, b_1, b_2$  und  $b_4$ , der  $g_3$  von  $g_2$  trennt. Dieser 4-Schnitt wäre also wesentlich. Hätte  $B$  mit  $g_3$  zwei Kanten gemeinsam, dann wäre eine dieser Kanten außerhalb des abgebildeten Bereiches, würde also zu  $b_1$  oder  $b_4$  gehören. Aber  $b_1$  und  $b_4$  haben ja schon im abgebildeten Bereich je eine Kante mit  $g_3$  gemeinsam.

Hätte  $B$  mit  $g_1$  zwei Kanten gemeinsam, dann wären beide Kanten außerhalb des abgebildeten Bereichs. Entweder gehören sie beide zu  $b_1$  bzw.  $b_4$  (womit dieses Polygon auch in  $G$  zwei Kanten mit  $g_1$  gemeinsam hätte), oder eine zu  $b_1$  und die andere zu  $b_4$ . Das würde zu einem 4-Schnitt durch  $b_1, b_2, b_4$  und  $g_1$  führen, der  $g_3$  und  $g_2$  trennt.

Damit  $B$  mit  $g_2$  zwei Kanten gemeinsam hätte, müsste eine dieser Kanten außerhalb des abgebildeten Bereichs liegen und zu  $b_1$  oder  $b_4$  gehören. Wäre es  $b_4$ , dann hätten  $b_4$  und  $g_2$  auch in  $G$  zwei Kanten gemeinsam, wäre es  $b_1$ , dann würde durch  $b_1, b_2, b_3$  und  $g_2$  ein 4-Schnitt verlaufen, der  $g_1$  und  $g_3$  voneinander trennt, also wesentlich ist.

Hätte  $g_1, g_2$  oder  $g_3$  mit einem anderen Polygon außer  $A$  und  $B$  mehr als eine Kante gemeinsam, dann würde dies in  $G$  genauso gelten. Weil somit keine zwei Polygon in  $H$  existieren, die mehr als eine Kante gemeinsam haben, ist  $H$  3-zusammenhängend.

Abb. 5.26 zeigt zudem, dass jeder Hamiltonweg, der in  $H$  im markierten Punkt endet, zu einem Hamiltonweg in  $G$  ausgeweitet werden kann. Ein zyklisch 4\*-zusammenhängender nichttrassabler Graph  $G$  mit  $|V(G)| \leq 52$  darf also  $Oe(a)$  nicht enthalten.  $\square$

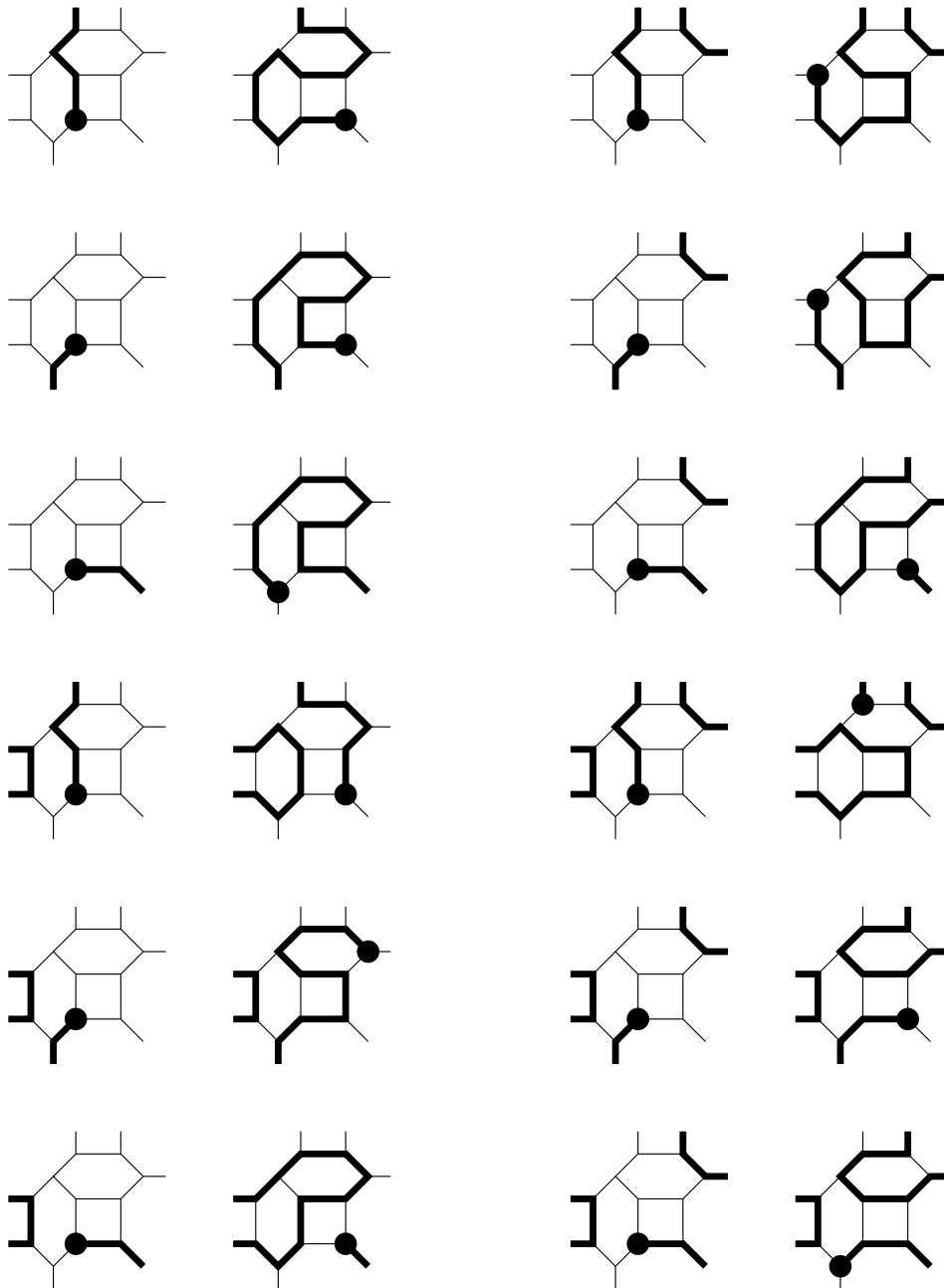
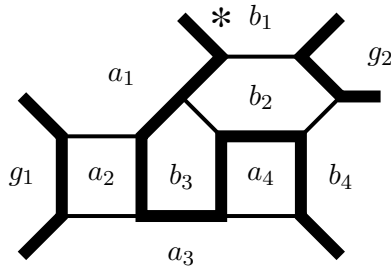


Abb. 5.26 Umgeleitete Hamiltonwege durch  $Oe(a)$ .

Nächste zu prüfende Reduktion:  $Oe(b)$ . Nun wird angenommen, dass  $Oe(b)$  in  $G$  enthalten ist, und dass  $H$  aus  $G$  entsteht, indem man die dünn gezeichneten Kanten entfernt. So werden die Polygone  $a_1, a_2, a_3$  und  $a_4 \in F(G)$  zu einem Polygon  $A \in F(H)$  sowie  $b_1, b_2, b_3$  und  $b_4 \in F(G)$  zu  $B \in F(H)$  vereinigt.



**Abb. 5.27** Die erweiterte Okamura-Reduktion  $Oe(b)$

Die Regeln für diese Reduktion entsprechen denen der ursprünglichen OKAMURA-Reduktionen: Wenn ein Hamiltonweg in  $H$  die Kante benutzt, die mit einem Stern markiert wurde, dann lässt er sich zu einem Hamiltonweg in  $G$  umleiten.

Wäre  $g_1$  ein Viereck, ergäbe sich mit  $a_2$  ein Doppelviereck. Wäre  $g_2$  ein Viereck, ergäbe sich  $O2(f)$ . Wäre  $g_1 = g_2$ , dann würde ein 3-Schnitt durch  $g_1, a_1, b_2$  und  $g_2 = g_1$  die Polygone  $b_1$  und  $b_3$  trennen. Dieser 3-Schnitt wäre also zyklisch.

Die Überprüfungen aus dem ersten Beispiel werden ab sofort in tabellarischer Form durchgeführt. Wenn man annimmt, dass die zwei angegebenen Polygone in  $H$  zwei Kanten gemeinsam haben, folgt in jedem Fall daraus, dass mindestens eine dieser Kante außerhalb der Abbildung liegt. Die Polygone in  $G$ , die außerhalb der Abbildung gemeinsame Kanten haben, stehen in der dritten Spalte. In diesem Fall existiert ein 3- oder 4-Schnitt durch die Polygone in der vierten Spalte, der die Polygone in der fünften Spalte von denen in der sechsten trennt.



1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von
$A$	$P$ (außen)	$P$ zu $a_1$ und $a_3$	$P, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$g_2$
	$g_2$	$g_2$ zu $a_1$ und $a_3$	$g_2, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$
	$B$	$a_1, b_4$	$a_1, b_2, b_4$	$g_1$	$g_2$
		$a_3, b_1$	$b_1, b_2, a_4, b_3$	$g_1$	$g_2$
$B$	$P$ (außen)	$P$ zu $b_1$ und $b_4$	$P, b_1, b_2, b_4$	$g_1$	$g_2$
	$g_1$	$g_1$ zu $b_1$ und $b_4$	$g_1, b_1, b_2, b_4$	$b_3$	$g_2$

In den Fällen  $Oe(e), Oe(f), Oe(i), Oe(k)$  sowie später  $Oe(w)$  und  $Oe(x)$  werden diese Tabellen aus Symmetriegründen gekürzt.

Abbildung 5.28 verdeutlicht, wie ein Hamiltonweg in  $H$ , der die mittlere Kante benutzt, zu einem Hamiltonweg in  $G$  ausgeweitet werden kann. Daraus folgt, dass  $Oe(b)$  nicht in einem nichttrassablen Graphen mit maximal 52 Punkten enthalten sein kann.

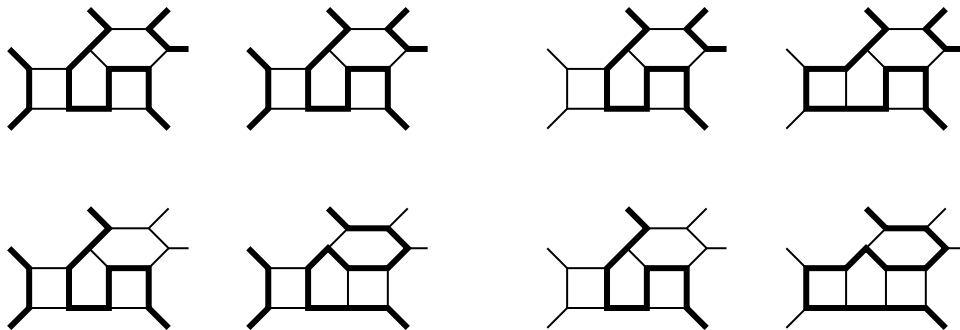
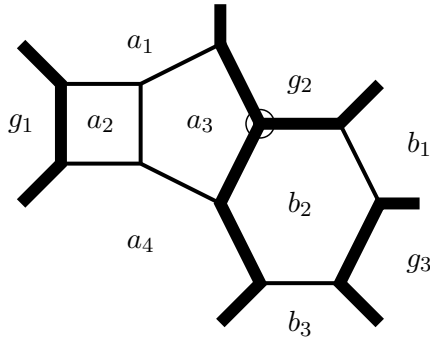


Abb. 5.28 Umleitung von Hamiltonwegen in  $Oe(b)$

Das gleiche Verfahren für  $Oe(c)$ : Die Polygone  $a_1, a_2, a_3$  und  $a_4$  werden zu  $A$ ,  $b_1, b_2$  und  $b_3$  werden zu  $B$ .



**Abb. 5.29** Das  $n$ -Stück  $Oe(c)$

Das Polygon  $g_1$  hat mindestens Länge 5, weil  $a_1$  ein Viereck ist. Wäre  $g_2$  ein Viereck, dann läge  $Oe(b)$  vor, wäre es  $g_3$ , so hätte man  $O2(i)$ .

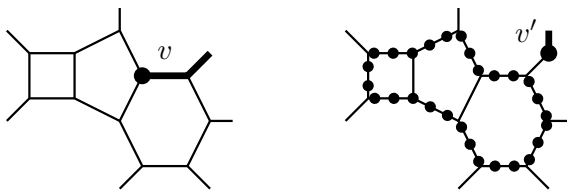
Wäre  $g_1 = g_2$ , dann wäre  $g_1, a_2, a_3, g_2 = g_1$  ein 3-Schnitt, der  $a_1$  und  $a_4$  voneinander trennt. Wäre  $g_2 = g_3$ , dann würde durch  $g_2, b_1$  und  $g_3 = g_2$  ein 2-Schnitt in  $G$  verlaufen. Wäre  $g_1 = g_3$ , dann würde durch  $g_1, a_2, a_3, b_2$  und  $g_3 = g_1$  ein 4-Schnitt verlaufen, der  $g_2$  von  $a_4$  und  $b_3$  trennt. Er wäre also wesentlich.

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von	
$A$	$P$ (außen)	$P$ zu $a_1$ und $a_4$	$P, a_1, a_2, a_4$	$g_1$	$g_2$	
	$g_3$	$g_3$ zu $a_1$ und $a_4$	$g_3, a_1, a_2, a_4$	$g_1$	$g_2$	
	$g_2$	$g_2, a_4$	$g_2, a_3, a_4$	$g_1$	$b_2$	
	$B$		$a_1, b_3$	$a_1, a_3, b_2, b_3$	$g_1$	$g_3$
			$a_4, b_1$	$a_4, b_2, b_1$	$g_2$	$g_3$
$B$	$P$ (außen)	$a_1, b_1$	$a_1, a_3, b_2, b_1$	$g_2$	$g_3$	
		$P$ zu $b_1$ und $b_3$	$P, b_1, b_2, b_3$	$g_2$	$g_3$	
		$g_1$	$g_1$ zu $b_1$ und $b_3$	$g_1, b_1, b_2, b_3$	$g_2$	$g_3$
		$g_2, b_3$	$g_2, b_2, b_3$	$g_1$	$g_3$	

Wenn es in  $H$  einen Hamiltonweg gibt, der im einzigen Knoten endet, der in  $Oe(c)$  übrig bleibt, dann kann man diesen Weg zu einem Hamiltonweg in  $G$  ausweiten. An dieser Stelle kann man sich zwei Methoden zu Nutze machen, die im Folgenden häufiger verwendet werden.

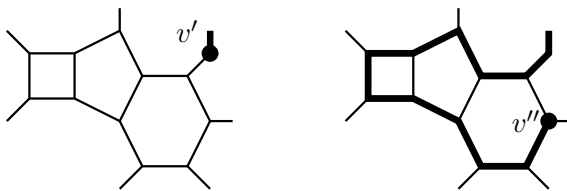
Wenn man im  $n$ -Stück  $Oe(c)$  die dünn gezeichneten Kanten entfernt, bleiben insgesamt fünf Kanten übrig, von denen drei zum Punkt  $v$  inzident sind. Die anderen beiden Kanten heißen im Folgenden  $e_1$  und  $e_2$ .

Ein Hamiltonweg  $W \subseteq E(H)$  enthält nur eine der drei Kanten, die zu  $v$  inzident sind. Nun betrachte man diesen Weg in  $G$ . Dann kann man ein Stück dieses Weges abtrennen, so dass er in einem Punkt  $v'$  endet, der nicht mehr zu  $Oe(c)$  gehört (Abb. 5.30). Man beachte, dass die Punkte in  $Oe(c)$  auf einem Kreis liegen.



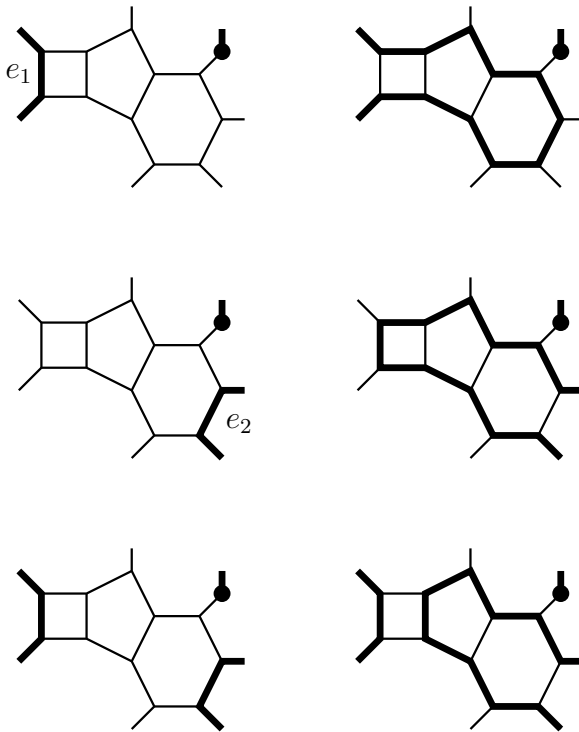
**Abb. 5.30** Das Ende eines Hamiltonweges wird abgetrennt, ein Kreis bleibt leer.

Wenn  $W$  weder  $e_1$  noch  $e_2$  enthält, dann kann man den abgeschnittenen Weg über diesen Kreis fortsetzen, sodass er in einem Punkt  $v''$  endet (Abb. 5.31).



**Abb. 5.31** Der Hamiltonweg wird fortgesetzt.

Wenn  $W$  aber  $e_1$  oder  $e_2$  enthält, dann belässt man das Ende des Hamiltonweges in  $v'$  und leitet stattdessen  $e_1$  bzw.  $e_2$  durch den Kreis um (Abb. 5.32).

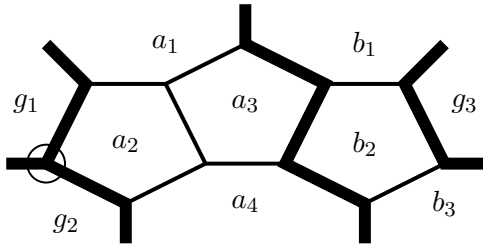


**Abb. 5.32** Eine Kante wird umgeleitet.

Man beachte, dass beide Methoden unabhängig davon funktionieren, von welcher Seite der Punkt  $v$  erreicht wurde. Um dies zu verdeutlichen, werden in solchen Fällen die Kanten, die zu  $v$  führen, gestrichelt gezeichnet. Falls dabei ein Kreis übrigbleibt (wie in Abb. 5.30), durch den man einen abgeschnittenen Hamiltonweg fortsetzt (wie in Abb. 5.31), dann wird dieser Kreis gepunktet dargestellt. Wichtig ist, dass für jeden denkbaren Verlauf von  $W$  der Punkt  $v'$  zu einem Punkt des Kreises adjazent ist.

Dies genügt als Beweis, dass ein nichttrassabler Graph aus  $\mathcal{F}$  mit weniger als 54 Punkten auch das  $n$ -Stück  $Oe(c)$  nicht enthalten darf.

Weiter mit  $Oe(d)$  (Abb. 5.33). Die Polygone  $a_1 \dots a_4$  werden zu  $A$ , und  $b_1 \dots b_3$  werden zu  $B$ .



**Abb. 5.33** Der  $n$ -Schnitt  $Oe(d)$ .

Ist  $g_1, g_2$  oder  $g_3$  ein Viereck, dann liegt  $O2(k)$  vor. Da  $g_1$  und  $g_2$  in  $G$  eine gemeinsame Kante haben, können sie nicht gleich sein.

Wenn  $g_3$  mit  $g_1$  übereinstimmt, dann gibt es einen 4-Schnitt durch  $g_3, a_2, a_3$  und  $b_2$ , der  $a_1$  und  $b_1$  von  $g_2$  und  $b_3$  trennt. Da die vier Polygone  $a_1, b_1, g_2$  und  $b_3$  je mindestens eine Kante mit  $g_1$  oder  $g_3$  gemeinsam haben, können sie nicht ihrerseits mit  $g_3$  und  $g_1$  übereinstimmen. Dieser 4-Schnitt ist also wesentlich.

Wenn  $g_3$  mit  $g_2$  übereinstimmt, dann gibt es einen analogen 4-Schnitt, der  $g_1$  und  $b_1$  von  $a_4$  und  $b_3$  trennt. Die Schlussfolgerungen übertragen sich.

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von
A	$P$ (außen)	$P$ zu $a_1$ und $a_4$	$P, a_1, a_2, a_4$	$g_1$	$g_2$
	$g_3$	$g_3$ zu $a_1$ und $a_4$	$g_3, a_1, a_2, a_4$	$g_1$	$g_2$
	$g_1$	$g_1, a_4$	$g_1, a_2, a_4$	$g_2$	$g_3$
	$g_2$	$a_1, g_2$	$g_2, a_2, a_1$	$g_1$	$g_3$
	$B$	$a_1, b_3$	$a_1, a_2, b_2, b_3$	$a_2$	$g_3$
B	$P$ (außen)	$P$ zu $b_1$ und $b_3$	$P, b_1, b_2, b_3$	$a_3$	$g_3$
	$g_1$	$g_1$ zu $b_1$ und $b_3$	$g_1, b_1, b_2, b_3$	$a_3$	$g_3$
	$g_2$	$g_2$ zu $b_1$ und $b_3$	$g_2, b_1, b_2, b_3$	$a_3$	$g_3$

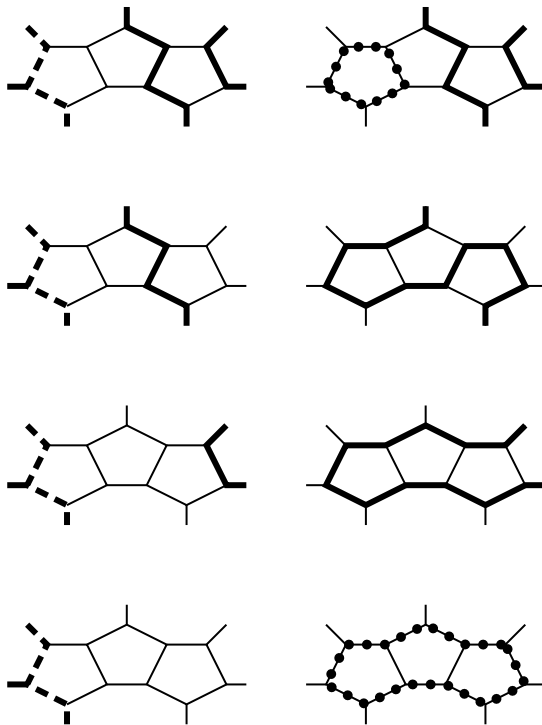
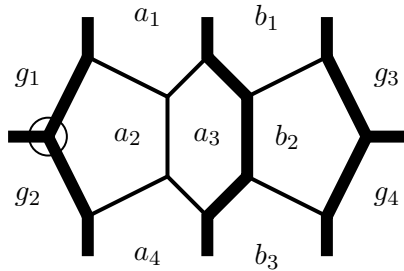


Abb. 5.34 Umleitung von Hamiltonwegen durch  $Oe(d)$

In  $Oe(e)$  (Abb. 5.35) werden die Polygone  $a_1 \dots a_4$  zu  $A$  und  $b_1 \dots b_3$  zu  $B$  vereinigt.



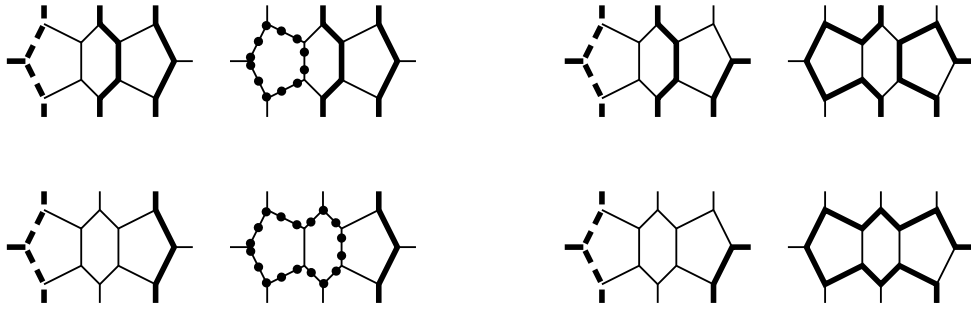
**Abb. 5.35** Der  $n$ -Schnitt  $Oe(e)$ .

Ist eins der Polygone  $g_1 \dots g_4$  ein Viereck, dann entspricht dies  $Oe(c)$ . Die Polygone  $g_1$  und  $g_2$  dürfen genausowenig übereinstimmen wie  $g_3$  und  $g_4$ , weil sie in  $G$  eine gemeinsame Kante haben. Wenn  $g_1$  mit  $g_3$  oder  $g_4$  übereinstimmt, dann würde durch dieses Polygon und  $a_2, a_3$  und  $b_2$  ein 4-Schnitt verlaufen, der  $a_1$  und  $b_1$  von  $a_4$  und  $b_3$  trennt. Das gleiche würde passieren, wenn  $g_2$  mit  $g_3$  oder  $g_4$  übereinstimmt.

In der folgenden Tabelle können einige Zeilen aus Symmetriegründen eingespart werden:

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von
$A$	$P$ (außen)	$P$ zu $a_1$ und $a_4$	$P, a_1, a_3, a_4$	$g_1$	$b_2$
	$g_3$	$g_3$ zu $a_1$ und $a_4$	$g_3, a_1, a_3, a_4$	$g_2$	$b_2$
	$g_1$	$g_1, a_4$	$g_1, a_2, a_4$	$g_2$	$b_2$
	$B$	$b_1, a_4$	$b_1, a_3, a_4$	$g_1$	$g_4$
$B$	$P$ (außen)	$P$ zu $b_1$ und $b_3$	$P, b_1, b_2, b_3$	$g_3$	$a_2$
	$g_1$	$g_1$ zu $b_1$ und $b_3$	$g_1, b_1, b_2, b_3$	$g_3$	$a_2$
	$g_3$	$b_3, g_3$	$b_3, b_2, g_3$	$g_4$	$a_2$

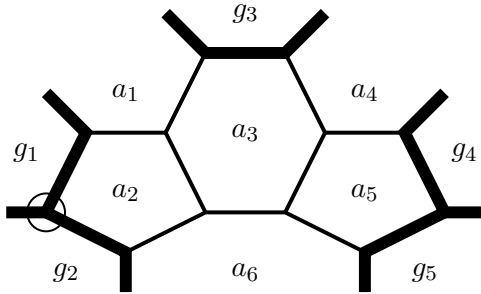
Also ist auch  $H$  3-zusammenhängend. Die Hamiltonwege, die im markierten Punkt enden, werden der Abbildung 5.36 entsprechend umgeleitet. Hierbei ist wichtig, zu beachten, dass die Abbildung außer dem markierten Punkt noch einen weiteren Punkt in  $H$  enthält. Auch dieser Punkt muss von jedem Hamiltonweg besucht werden.



**Abb. 5.36** Umleitung von Hamiltonwegen durch  $Oe(e)$   
 (Man beachte die Symmetrien!)



Im  $n$ -Stück  $Oe(f)$  (Abb. 5.37) entsteht nur ein neues Polygon  $A \in F(H)$  aus sechs Polygonen  $a_1 \dots a_6 \in F(G)$ .



**Abb. 5.37** Der  $n$ -Schnitt  $Oe(f)$ .

Falls  $g_3$  ein Viereck ist, enthält  $G$  den  $n$ -Schnitt  $O2(g)$ . Auch  $a_6$  ist kein Viereck, sonst läge  $O2(c)$  vor. Falls  $g_1, g_2, g_4$  oder  $g_5$  ein Viereck ist, findet man  $Oe(c)$ .

Stimmen  $g_1$  und  $g_3$  überein, dann gibt es in  $G$  einen 2-Schnitt durch  $g_1$  und  $a_1$ . Stimmen  $g_3$  und  $g_4$  überein, dann geht dieser Schnitt durch  $g_3$  und  $a_4$ . Stimmt eins der Polygone  $g_1$  oder  $g_2$  mit  $g_4$  oder  $g_5$  überein, dann würde durch dieses Polygon  $g_i$  sowie  $a_2, a_3$  und  $a_5$  ein 4-Schnitt gehen, der  $g_3$  und  $a_6$  trennt. Wäre  $g_3 = g_2$  oder  $g_3 = g_5$ , dann würde ein 3-Schnitt durch  $g_3, a_3$  und  $a_2$  respektive  $g_3, a_3$  und  $a_5$  verlaufen, der  $g_1$  und  $g_4$  voneinander trennt.

Die folgende Tabelle kann aus Symmetriegründen kurz gehalten werden.

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von
$A$	$P$ (außen)	$P$ zu $a_1$ und $a_4$	$P, a_1, a_3, a_4$	$g_1$	$g_3$
		$P$ zu $a_1$ und $a_6$	$P, a_1, a_3, a_6$	$g_1$	$g_3$
		$P$ zu $a_4$ und $a_6$	$P, a_4, a_3, a_6$	$g_3$	$g_5$
	$g_1$	$g_1, a_4$	$g_1, a_2, a_3, a_4$	$g_2$	$g_3$
		$g_1, a_6$	$g_1, a_2, a_6$	$g_2$	$g_3$
	$g_2$	$g_2, a_1$	$a_1, a_2, g_2$	$g_1$	$g_3$
		$g_2, a_4$	$g_2, a_2, a_3, a_4$	$g_3$	$g_5$
	$g_3$	$g_3, a_6$	$g_3, a_3, a_6$	$g_1$	$g_4$

Daraus folgt:  $H$  bleibt 3-zusammenhängend. Weil ein Hamiltonweg, der im markierten Punkt endet, wie in Abb. 5.38 umgeleitet werden kann, darf ein zyklisch 4\*-zusammenhängender nichttrassabler Graph mit maximal 52 Punkten den Teilgraphen  $Oe(f)$  nicht enthalten.

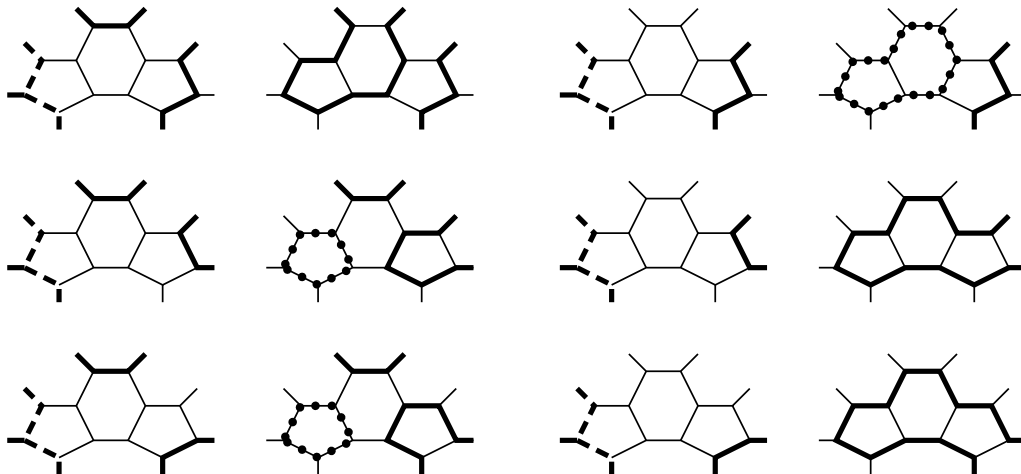
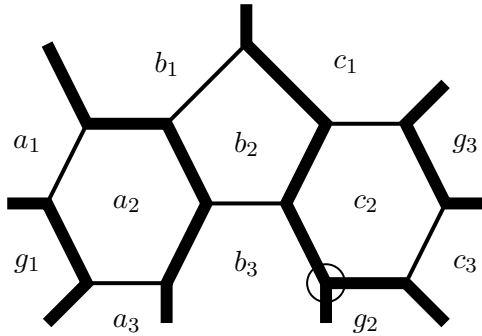


Abb. 5.38 Umleitung von Hamiltonwegen durch  $Oe(f)$

In  $Oe(g)$  (Abb. 5.39) werden  $a_1, a_2$  und  $a_3$  zu  $A$ ,  $b_1, b_2$  und  $b_3$  zu  $B$  sowie  $c_1, c_2$  und  $c_3$  zu  $C$  vereinigt.



**Abb. 5.39** Der  $n$ -Schnitt  $Oe(g)$ .

Ist  $g_1$  ein Viereck, dann findet man in  $G$  das  $n$ -Stück  $O2(i)$ . Hat eines der Polygone  $g_2$  oder  $g_3$  die Länge 4, dann findet man  $O2(g)$ .

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von	
A	P (außen)	$P$ zu $a_1$ und $a_3$	$P, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$	
		$g_2$ zu $a_1$ und $a_3$	$g_2, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$	
		$g_3$ zu $a_1$ und $a_3$	$g_3, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$	
	B	B	$a_1, b_3$	$a_1, a_2, b_3$	$g_1$	$b_2$
			$a_3, b_1$	$b_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$
		C	$c_1$ zu $a_1$ und $a_3$	$a_1, a_2, a_3, c_1$	$g_1$	$b_2$
			$c_3$ zu $a_1$ und $a_3$	$a_1, a_2, a_3, c_3$	$g_1$	$b_2$
			$a_1$ zu $c_1$ und $c_3$	$c_1, c_2, c_3, a_1$	$g_3$	$b_2$
			$a_3$ zu $c_1$ und $c_3$	$c_1, c_2, c_3, a_3$	$g_3$	$b_2$
			$a_3, c_1$ und $a_1, c_3$	$c_1, b_2, a_2, a_3$	$g_1$	$g_2$
B	P (außen)	$P$ zu $b_1$ und $b_3$	$P, b_1, b_2, b_3$	$a_2$	$c_2$	
		$g_1$ zu $b_1$ und $b_3$	$g_1, b_1, b_2, b_3$	$a_2$	$c_2$	
		$g_2, b_1$	$g_2, b_1, b_2, c_2$	$g_1$	$g_3$	
	C	$g_3$ zu $b_1$ und $b_3$	$g_3, b_1, b_2, b_3$	$a_2$	$c_2$	
		$b_1, c_3$	$b_1, b_2, c_2, c_3$	$g_2$	$g_3$	
		$b_3, c_1$	$c_1, b_2, b_3$	$a_2$	$c_2$	
		C	P (außen)	$P$ zu $c_1$ und $c_3$	$P, c_1, c_2, c_3$	$g_2$
$g_1$ zu $c_1$ und $c_3$	$g_1, c_1, c_2, c_3$			$g_2$	$g_3$	
$c_1, g_2$	$c_1, c_2, g_2$			$b_2$	$g_3$	

Die Umformungen eines Hamiltonweges, der in  $H$  im markierten Punkt endet, wird in Abb. 5.40 dargestellt.

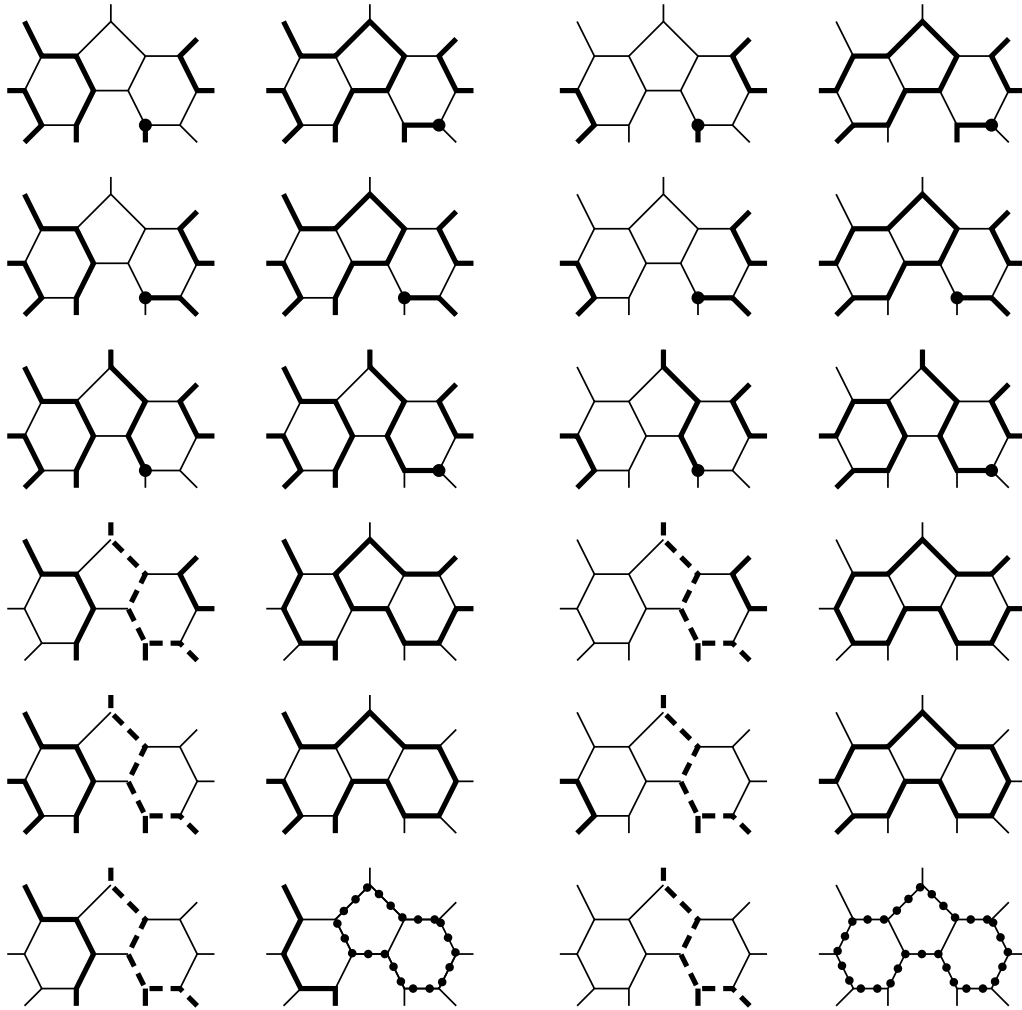
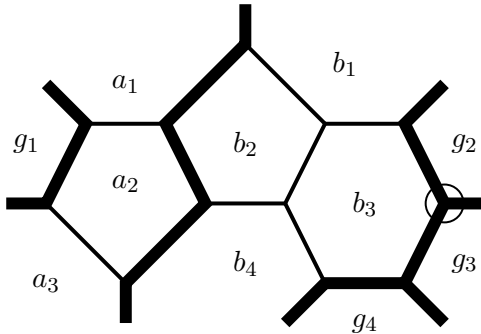


Abb. 5.40 Umleitung von Hamiltonwegen durch  $Oe(g)$

Nächster Teilgraph:  $Oe(h)$  (Abb. 5.41). Hier werden die Polygone  $a_1, a_2$  und  $a_3$  zu  $A$  und  $b_1, b_2, b_3$  und  $b_4$  zu  $B$  vereinigt.



**Abb. 5.41** Der  $n$ -Schnitt  $Oe(h)$

Wenn  $g_1$  ein Viereck ist, liegt  $O2(k)$  vor. Ist  $g_2$  oder  $g_4$  ein Viereck, dann hat man  $O2(g)$ , mit  $g_3$  als Viereck wird  $O2(i)$  daraus.

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von
$A$	$P$ (außen)	$P$ zu $a_1$ und $a_3$	$P, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$
	$g_2$	$g_2$ zu $a_1$ und $a_3$	$g_2, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$
	$g_3$	$g_3$ zu $a_1$ und $a_3$	$g_3, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$
	$g_4$	$g_4$ zu $a_1$ und $a_3$	$g_4, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$
	$B$	$a_1, b_4$	$a_1, b_2, b_4$	$a_2$	$b_3$
		$b_1, a_3$	$b_1, b_2, a_2, a_1$	$g_1$	$b_3$
$B$	$P$ (außen)	$P$ zu $b_1$ und $b_4$	$P, b_1, b_2, b_4$	$a_2$	$g_2$
	$g_1$	$g_1$ zu $b_1$ und $b_4$	$g_1, b_1, b_2, b_4$	$a_2$	$g_2$
	$g_2$	$g_2, b_4$	$g_2, b_3, b_4$	$b_2$	$g_3$
	$g_3$	$g_3, b_1$	$b_1, b_3, g_3$	$g_2$	$g_4$
		$g_3, b_4$	$b_4, b_3, g_3$	$g_2$	$g_4$

Bei der Fortsetzung von Hamiltonwegen, die im markierten Punkt enden, ist diesmal eine Besonderheit zu beachten. Der markierte Punkt  $v$  kann nämlich auf vier Weisen mit  $G \setminus Oe(h)$  verbunden werden. In zweien dieser

vier Fälle wird die Kante  $e$  benutzt, die  $b_3$  und  $g_3$  trennt, in den anderen beiden Fällen wird sie es nicht. Die Kante  $e$  verbindet  $v$  mit einem anderen Punkt  $v' \in V(H)$  (Abb.5.42).

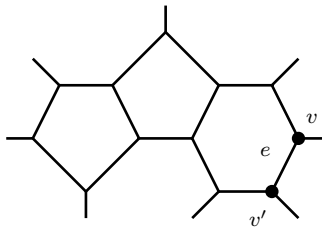


Abb. 5.42 Lage von  $v, v'$  und  $e$  in  $Oe(h)$

Ein Hamiltonweg  $W$  in  $H$ , der in  $v$  endet und  $e$  nicht enthält, muss zwangsläufig die anderen zu  $v'$  inzidenten Kanten enthalten. (Oder  $v'$  wäre der andere Endpunkt von  $W$ . Dann wäre aber  $W \cup \{e\} =: K$  ein Hamiltonkreis. Entfernt man aus  $K$  die andere zu  $v$  inzidente Kante, so entsteht ein neuer Hamiltonweg  $W'$  in  $v$ , der  $e$  enthält. Für die Erweiterung zu einem Hamiltonkreis in  $G$  benutzt man dann  $W'$  statt  $W$ .)

Damit (wie bei  $Oe(c)$ ) für zwei analoge Fälle nur ein Diagramm benötigt wird, wird in Abb. 5.43 eine Notation mit gestrichelten Linien eingeführt.

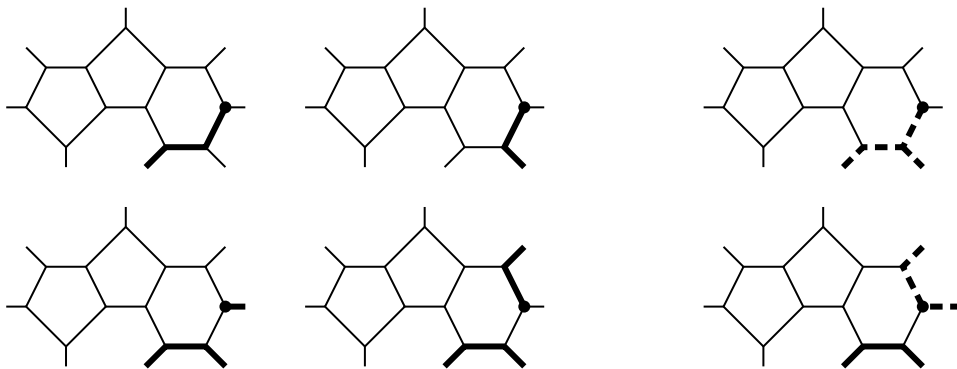


Abb. 5.43 oben: Verallgemeinerung der Fälle, in denen  $e$  benutzt wird  
 unten: Verallgemeinerung der beiden anderen Fälle

Nun kann man die einzelnen Hamiltonwege umleiten (Abb. 5.44).

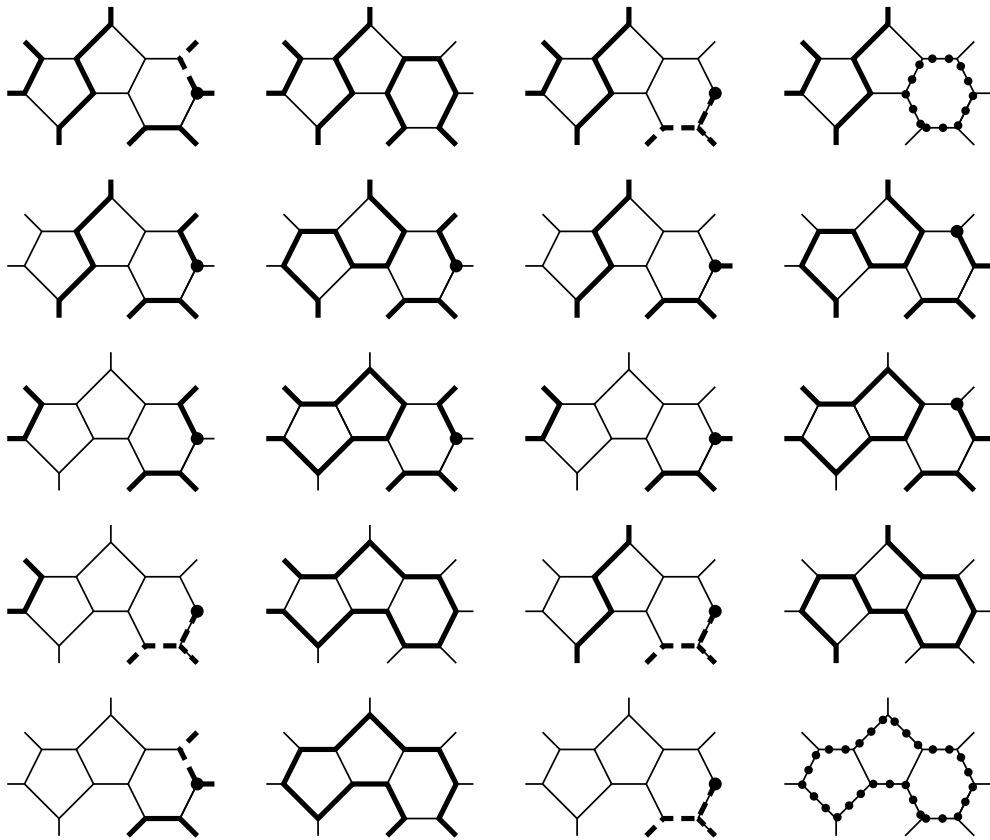


Abb. 5.44 Umleitung von Hamiltonwegen durch  $Oe(h)$



Nächster Schnitt:  $Oe(i)$  (Abb. 5.45).

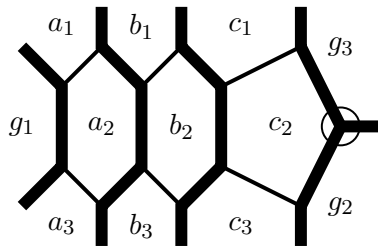


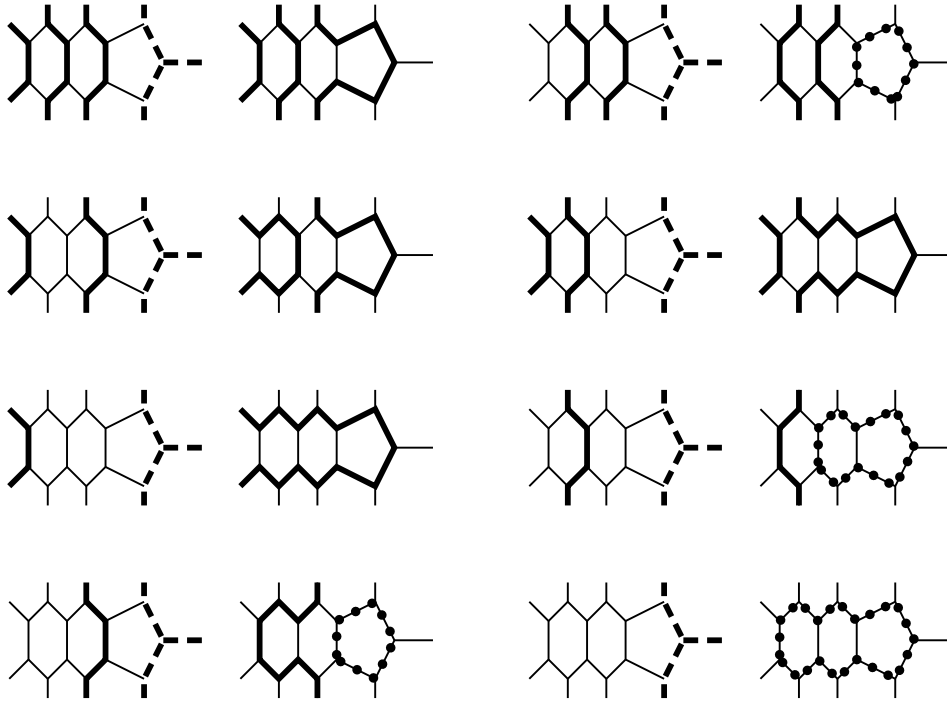
Abb. 5.45 Der  $n$ -Schnitt  $Oe(i)$

Die Polygone  $g_2$  und  $g_3$  sind wegen  $Oe(c)$  keine Vierecke, und  $g_1$  ist wegen  $O2(j)$  kein Viereck. Außerdem stimmt  $g_1$  weder mit  $g_2$  noch mit  $g_3$  überein, weil sonst ein 4-Schnitt durch  $g_1, a_2, b_2$  und  $c_2$  ginge, der  $a_1$  und  $b_1$  von  $a_3$  und  $b_3$  trennen würde.

Außerdem sind wegen  $Oe(a)$  weder  $b_1$  noch  $b_3$  Vierecke.

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von	
$A$	$P$ (außen)	$P$ zu $a_1$ und $a_3$	$P, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$	
	$g_2$	$g_2$ zu $a_1$ und $a_3$	$g_2, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$	
	$B$	$a_1, b_3$	$a_1, b_3$	$a_1, a_2, b_3$	$g_1$	$b_2$
		$a_3, b_1$	$a_3, b_1$	$a_3, a_2, b_1$	$g_1$	$b_2$
	$C$	$a_1, c_1$ und $a_3, c_3$	$a_1, c_1$ und $a_3, c_3$	$a_1, a_2, b_2, c_1$	$b_1$	$b_3$
	$C$	$a_1, c_3$ und $a_3, c_1$	$a_1, c_3$ und $a_3, c_1$	$a_1, a_2, b_2, c_3$	$b_1$	$b_3$
$B$	$P$ (außen)	$P$ zu $b_1$ und $b_3$	$P, b_1, b_2, b_3$	$a_2$	$c_2$	
	$g_1$	$g_1$ zu $b_1$ und $b_3$	$g_1, b_1, b_2, b_3$	$a_2$	$c_2$	
	$g_2$	$g_2$ zu $b_1$ und $b_3$	$g_2, b_1, b_2, b_3$	$a_2$	$c_2$	
	$C$	$b_1, c_3$	$b_1, c_3$	$b_1, b_2, c_3$	$a_2$	$g_2$
$C$	$P$ (außen)	$P$ zu $c_1$ und $c_3$	$P, c_1, c_2, c_3$	$b_2$	$g_2$	
	$g_1$	$g_1$ zu $c_1$ und $c_3$	$g_1, c_1, c_2, c_3$	$b_2$	$g_2$	
	$g_2$	$g_2, c_3$	$g_2, c_2, c_3$	$g_3$	$b_2$	

Damit ist  $H$  3-zusammenhängend, und die Möglichkeiten, einen Hamiltonweg in  $H$  durch  $G$  umzuleiten, sind in Abb. 5.46 aufgeführt.



**Abb. 5.46** Umleitung von Hamiltonwegen durch  $Oe(i)$

In  $Oe(j)$  (Abb. 5.47) werden  $a_1, a_2, a_3$  zu  $A$  und  $b_1, \dots, b_5$  zu  $B$  zusammengefasst.

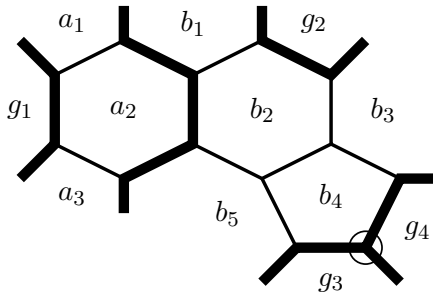


Abb. 5.47 Der  $n$ -Schnitt  $Oe(j)$

Hier sind  $g_3$  und  $g_4$  wegen  $Oe(c)$  keine Vierecke. Dasselbe gilt wegen  $Oe(h)$  für  $g_2$  und wegen  $Oe(j)$  für  $g_1$ .

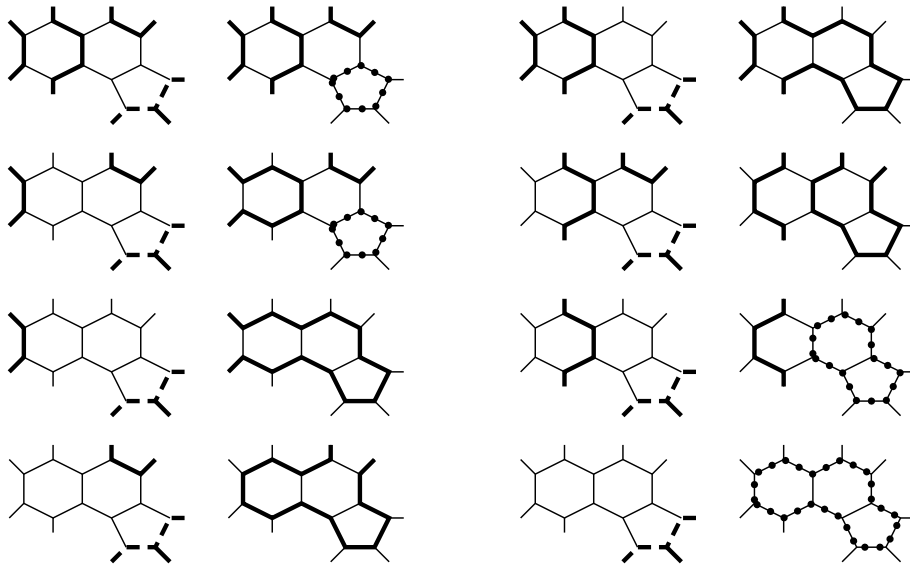
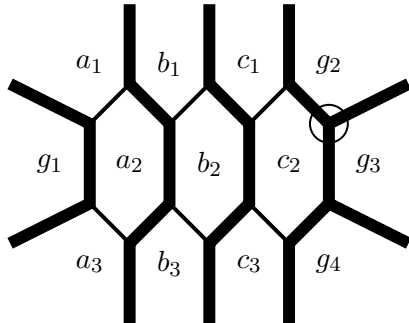


Abb. 5.48 Umleitung von Hamiltonwegen durch  $Oe(j)$  (aus Platzgründen vorangestellt)

Diesmal aus Platzgründen zuerst die Umleitungen der Hamiltonwege (Abb. 5.48), dann die Tabelle zur Überprüfung, dass  $H$  3-zusammenhängend bleibt:

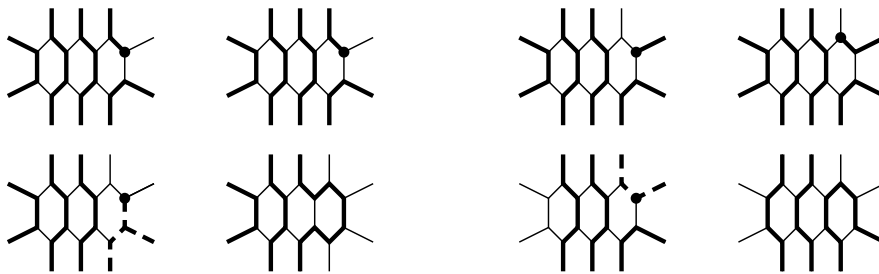
1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von				
A	P (außen)	$P$ zu $a_1$ und $a_3$	$P, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$				
		$g_2$	$g_2$ zu $a_1$ und $a_3$	$g_2, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$			
		$g_3$	$g_3$ zu $a_1$ und $a_3$	$g_3, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$			
		$g_4$	$g_4$ zu $a_1$ und $a_3$	$g_4, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$			
		B	B	$a_1, b_5$	$a_1, a_2, b_5$	$g_1$	$b_2$		
				$a_3, b_1$	$b_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$		
				$a_1, b_3$	$a_1, a_2, b_2, b_3$	$g_1$	$g_2$		
				$a_3, b_3$	$a_3, a_2, b_2, b_3$	$g_1$	$g_3$		
				B	P (außen)	$P$ zu $b_1$ und $b_3$	$P, b_1, b_2, b_3$	$g_1$	$g_2$
						$P$ zu $b_1$ und $b_5$	$P, b_1, b_2, b_5$	$g_1$	$g_2$
$P$ zu $b_3$ und $b_5$	$P, b_3, b_4, b_5$	$g_2$	$g_3$						
$g_1$	B	$g_1$ zu $b_1$ und $b_3$	$g_1, b_1, b_2, b_3$			$a_2$	$g_2$		
		$g_1$ zu $b_1$ und $b_5$	$g_1, b_1, b_2, b_5$			$a_2$	$g_2$		
		$g_1$ zu $b_3$ und $b_5$	$g_1, b_3, b_4, b_5$			$g_2$	$g_3$		
		$g_2, b_5$	$g_2, b_2, b_5$			$a_2$	$b_4$		
$g_3$	B	$g_3, b_1$	$g_3, b_4, b_2, b_1$			$a_2$	$g_4$		
		$g_3, b_3$	$g_2, b_2, b_3$			$g_2$	$g_4$		
		$g_4$	B			$g_4, b_1$	$g_4, b_4, b_2, b_1$	$g_2$	$g_3$
				$g_4, b_5$	$g_4, b_4, b_5$	$g_2$	$g_3$		

In  $Oe(k)$  (Abb. 5.49) werden die Polygone  $a_1, a_2, a_3$  zu  $A$ ,  $b_1, b_2, b_3$  zu  $B$  und  $c_1, c_2, c_3$  zu  $C$  zusammengefasst.

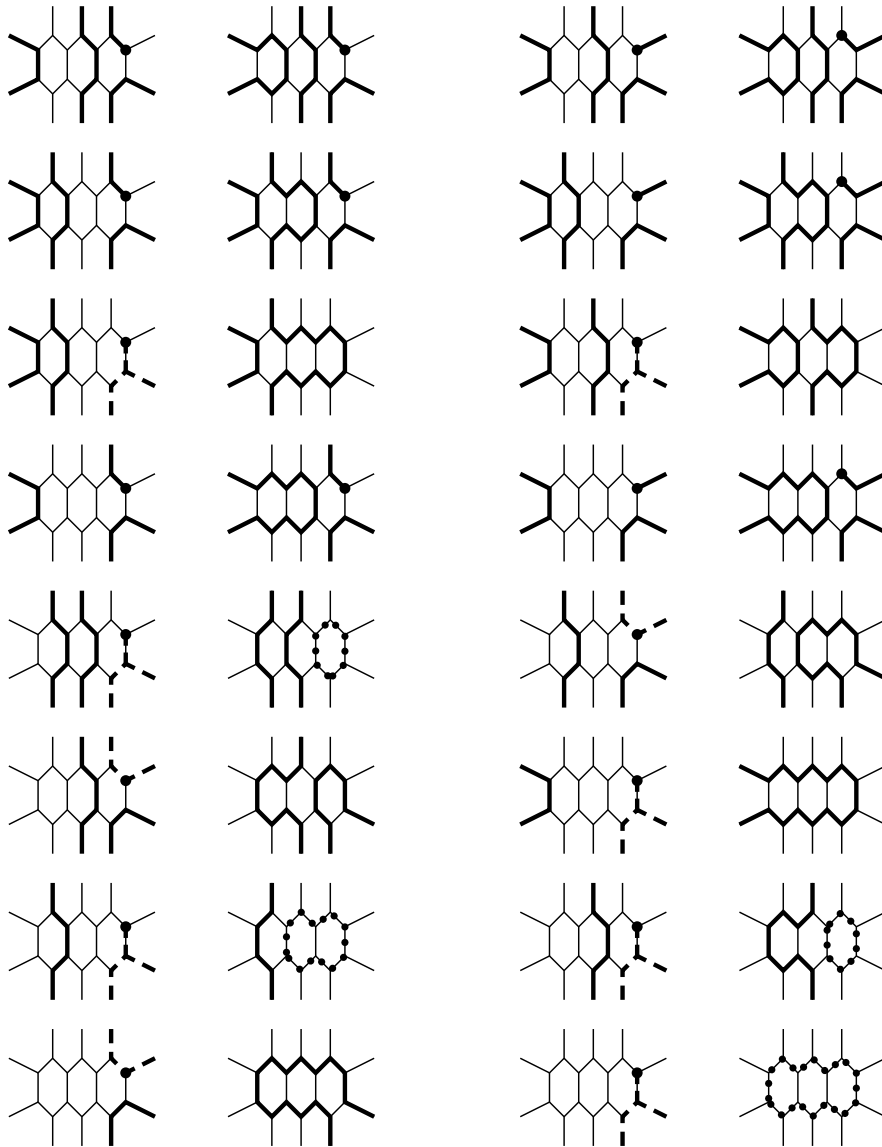


**Abb. 5.49** Der  $n$ -Schnitt  $Oe(k)$

Die Polygone  $g_1$  und  $g_3$  können wegen  $O2(j)$  keine Vierecke sein,  $g_2, g_4, a_1, a_3, b_1, b_3, c_1$  und  $c_3$  können es wegen  $O2(h)$  nicht sein. Stimmt  $g_1$  mit  $g_2, g_3$  oder  $g_4$  überein, dann verläuft ein 4-Schnitt durch  $g_1, a_2, b_2$  und  $c_2$ , der  $a_1$  von  $a_3$  trennt. Im Fall  $g_2 = g_4$  läge ein 2-Schnitt durch  $g_2$  und  $c_2$  vor.



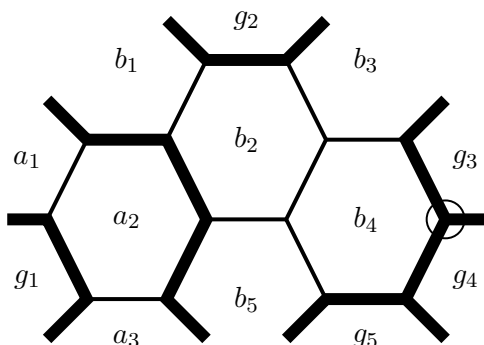
**Abb. 5.50** Umleitung von Hamiltonwegen durch  $Oe(k)$  (1. Teil)



**Abb. 5.51** Umleitung von Hamiltonwegen durch  $Oe(k)$  (2. Teil)

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von	
$A$	$P$ (außen)	$P$ mit $a_1$ und $a_3$	$P, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$	
	$g_2$	$g_2$ mit $a_1$ und $a_3$	$g_2, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$	
	$g_3$	$g_2$ mit $a_1$ und $a_3$	$g_2, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$	
	$B$	$a_1, b_3$	$a_1, b_3$	$a_1, a_2, b_3$	$g_1$	$b_2$
		$b_1, a_3$	$b_1, a_3$	$b_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$
		$C$	$a_1, c_1$ und $a_3, c_3$	$a_1, a_2, b_2, c_1$	$b_1$	$b_3$
	$a_1, c_3$ und $a_3, c_1$		$a_1, a_2, b_2, c_3$	$g_1$	$c_2$	
	$B$	$P$ (außen)	$P$ mit $b_1$ und $b_3$	$P, b_1, b_2, b_3$	$a_2$	$c_2$
		$g_1$	$g_1$ mit $b_1$ und $b_3$	$g_1, b_1, b_2, b_3$	$a_2$	$c_2$
$g_2$		$g_2$ mit $b_1$ und $b_3$	$g_2, b_1, b_2, b_3$	$a_2$	$c_2$	
$g_3$		$g_3$ mit $b_1$ und $b_3$	$g_3, b_1, b_2, b_3$	$a_2$	$c_2$	
$C$		$b_1, c_3$	$b_1, c_3$	$b_1, b_2, c_3$	$a_2$	$c_2$
		$c_1, b_3$	$c_1, b_3$	$c_1, b_2, b_3$	$a_2$	$c_2$
		$C$	$P$ (außen)	$P$ mit $c_1$ und $c_3$	$P, c_1, c_2, c_3$	$b_2$
$g_1$			$g_1$ mit $b_1$ und $b_3$	$g_1, b_1, b_2, b_3$	$b_2$	$g_3$
$g_2$			$g_2, c_3$	$g_2, c_2, c_3$	$b_2$	$g_4$
$g_3$	$g_3, c_1$		$g_3, c_2, c_1$	$b_2$	$g_2$	

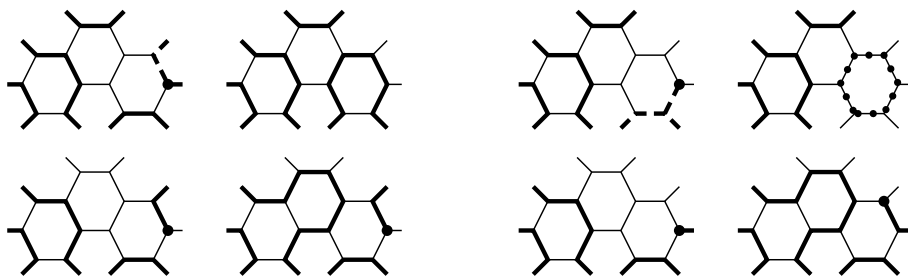
Schließlich wird  $Oe(\ell)$  untersucht, wo  $a_1, a_2, a_3$  zu  $A$  und  $b_1, \dots, b_5$  zu  $B$  vereinigt werden (Abb. 5.52).



**Abb. 5.52** Der  $n$ -Schnitt  $Oe(\ell)$

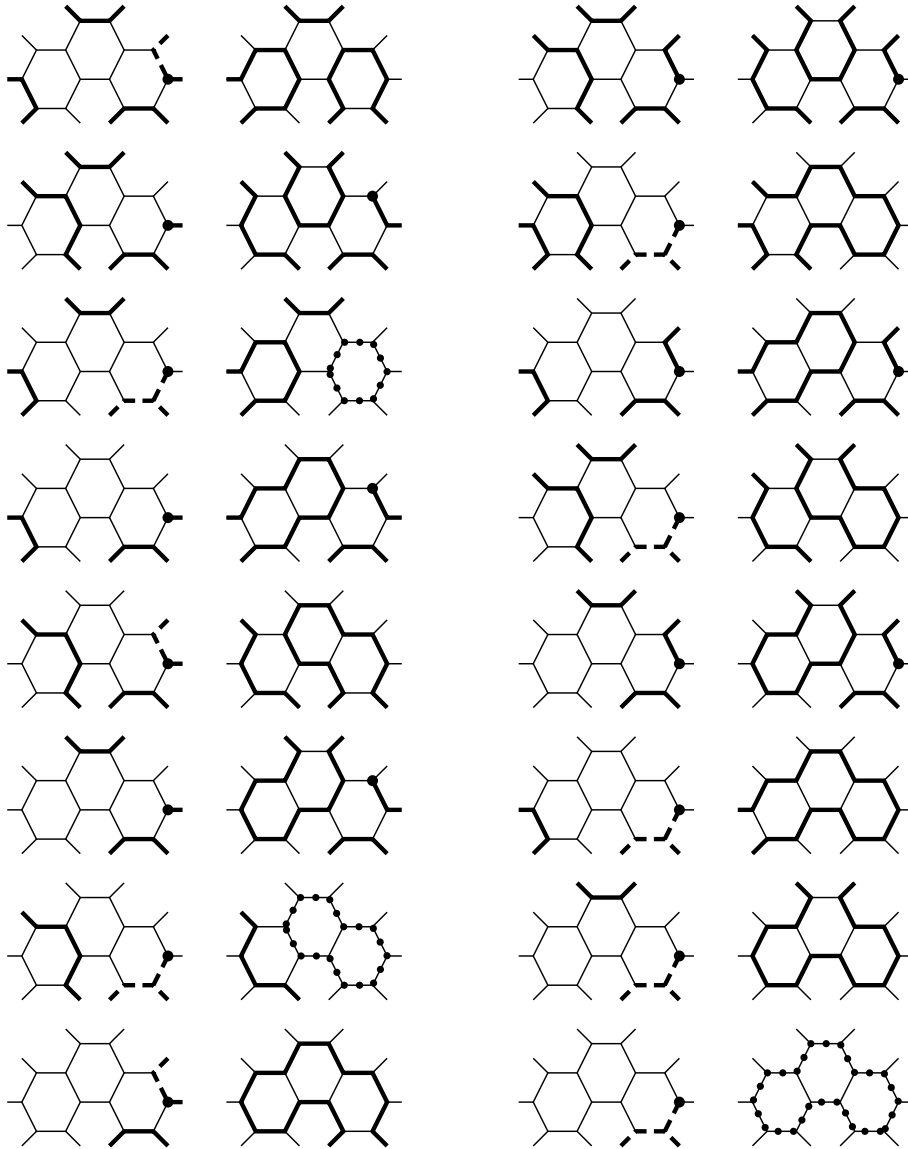
Die Polygone  $g_1$  und  $g_4$  dürfen wegen  $O2(j)$  keine Vierecke sein,  $g_2, g_3$  und  $g_5$  wegen  $O2(h)$  und  $b_5$  wegen  $O2(a)$ .

Ist  $g_1 = g_2$ , dann trennt ein 3-Schnitt durch  $g_1, a_2$  und  $b_2$  die Polygone  $b_1$  und  $b_5$ . Ist  $g_1 \in \{g_3, g_4, g_5\}$ , dann trennt ein 4-Schnitt durch  $g_1, a_2, b_2$  und  $b_4$  die Polygone  $g_2$  und  $b_5$ . Ist  $g_2 \in \{g_3, g_4, g_5\}$ , dann trennt ein 3-Schnitt durch  $g_2, b_2$  und  $b_4$  die Polygone  $b_3$  und  $b_5$ .



**Abb. 5.53** Umleitung von Hamiltonwegen durch  $Oe(\ell)$  (1. Teil)





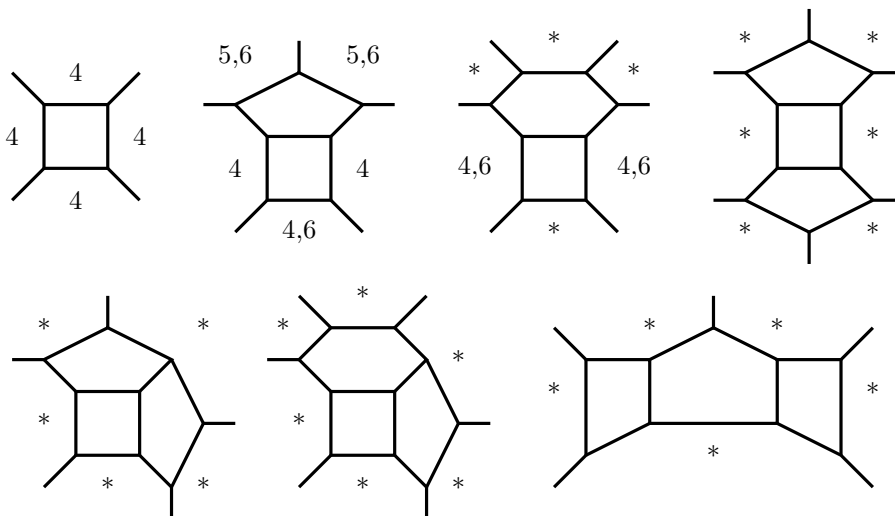
**Abb. 5.54** Umleitung von Hamiltonwegen durch  $Oe(\ell)$  (2. Teil)

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von	
$A$	$P$ (außen)	$P$ zu $a_1$ und $a_3$	$P, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$	
		$g_2$ zu $a_1$ und $a_3$	$g_2, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$	
		$g_3$ zu $a_1$ und $a_3$	$g_3, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$	
		$g_4$ zu $a_1$ und $a_3$	$g_4, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$	
		$g_5$ zu $a_1$ und $a_3$	$g_5, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$	
		$B$	$B$	$a_1, b_3$ und $a_3, b_1$	$b_1, a_2, a_3$	$g_1$
$a_1, b_5$ und $a_3, b_1$	$b_1, a_2, a_3$			$g_1$	$b_2$	
$a_1, b_5$ und $a_3, b_3$	$a_1, a_2, b_5$			$g_1$	$b_2$	
$B$	$P$ (außen)	$P$ zu $b_1$ und $b_3$	$P, b_1, b_2, b_3$	$g_2$	$b_4$	
		$P$ zu $b_1$ und $b_5$	$P, b_1, b_2, b_5$	$a_2$	$b_4$	
		$P$ zu $b_3$ und $b_5$	$P, b_3, b_2, b_5$	$a_2$	$b_4$	
		$g_1$	$g_1$ zu $b_1$ und $b_3$	$g_1, b_1, b_2, b_3$	$g_2$	$b_4$
			$g_1$ zu $b_1$ und $b_5$	$g_1, b_1, b_2, b_5$	$a_2$	$b_4$
			$g_1$ zu $b_3$ und $b_5$	$g_1, b_3, b_2, b_5$	$a_2$	$b_4$
		$g_2$	$g_2, b_5$	$g_2, b_2, b_5$	$a_2$	$b_4$
			$g_3, b_1$	$g_3, b_1, b_2, b_4$	$g_2$	$b_5$
			$g_3, b_5$	$g_3, b_4, b_5$	$b_2$	$g_4$
		$g_4$	$g_4, b_1$	$g_4, b_1, b_2, b_4$	$g_2$	$b_5$
			$g_4, b_3$	$g_4, b_4, b_3$	$g_3$	$g_5$
			$g_4, b_5$	$g_4, b_4, b_5$	$g_3$	$g_5$
		$g_5$	$g_5, b_1$	$g_5, b_1, b_2, b_4$	$g_2$	$b_5$
			$g_5, b_3$	$g_5, b_4, b_3$	$b_2$	$g_4$

## Schritt II: Die möglichen Umgebungen von Vierecken

Ein zyklisch 4\*-zusammenhängender Graph, der nicht zyklisch 5-zusammenhängend ist, enthält mindestens ein Viereck. Ein minimaler nichttrassabler zyklisch 4\*-zusammenhängender Graph  $G$  darf außerdem keine der Reduktionen  $O2(a) \dots O2(o)$  und  $Oe(a) \dots Oe(\ell)$  sowie kein Dreieck, kein doppeltes Viereck und keinen wesentlichen 4-Schnitt der Gestalt  $Q_{4,10}$  (siehe Abb. 5.9) enthalten.

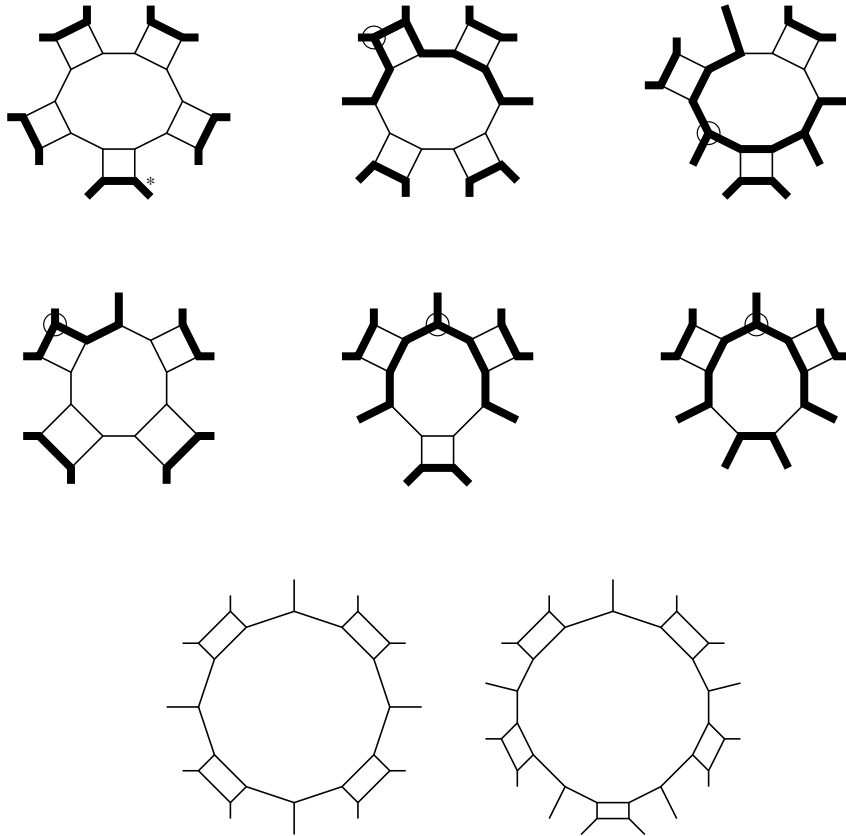
Damit bleiben sieben Möglichkeiten, wie die Umgebung eines Vierecks in  $G$  aussieht. Diese sind in Abb. 5.55 aufgeführt. Die Zahlen, mit denen die Nachbarpolygone markiert sind, stehen dafür, welche Länge sie *nicht* haben dürfen. Ein Stern bedeutet, dass dieses Polygon mindestens Länge 7 haben muss.



**Abb. 5.55** Alle Möglichkeiten, welche Polygone zu einem Viereck benachbart sein können.

### Schritt III: Große Polygone und benachbarte Vierecke

Es gibt noch eine weitere Klasse verbotener  $n$ -Stücke in  $G$ . Beispiele für solche Stücke sind in Abb. 5.56 dargestellt.



**Abb. 5.56** Oben: Reduktionen eines  $2n + 1$ -Ecks mit  $k$  benachbarten Vierecken  
 Mitte: Reduktionen eines  $2n$ -Ecks mit  $k$  benachbarten Vierecken  
 (links:  $k = n$ , Mitte:  $k = n - 1$ , rechts:  $k = n - 2$ )  
 Unten: Ein  $2n$ -Eck und ein  $2n + 1$ -Eck mit  $n - 2$  benachbarten Vierecken,  
 die nicht nach dem Muster oben reduziert werden können.

Jedes in Abb. 5.56 dargestellte  $n$ -Stück enthält ein Polygon  $z$  der Länge größergleich 7 sowie mindestens zwei benachbarte Vierecke und mindestens vier benachbarte Polygone der Länge fünf oder mehr.

Aus diesen Polygonen und ihren Umgebungen werden Reduktionen nach dem Muster der Arbeiten [11] und [12] von H. OKAMURA entwickelt.

Hierbei entsteht aus dem Ursprungsgraphen  $G$  bekanntlich durch Entfernung bestimmter Kanten ein Graph  $H$ , von dem bewiesen werden muss, dass er 3-zusammenhängend ist. Um diesen Beweis vorzubereiten, folgen Analysen über die Lage der Polygone, die  $z$  umgeben.

**Lemma 5.6** *Sei  $G \in \mathcal{F}$  ein 4\*-zusammenhängender Graph, der ein  $n$ -Eck  $z$  enthält ( $n \geq 7$ ). Sei ferner  $m \geq 2$ , und es seien  $m$  Vierecke  $q_1 \dots q_m$  und  $\ell$  Polygone  $r_1 \dots r_\ell$ , die keine Vierecke sind, zu  $z$  benachbart. (Weil in  $G$  keine zwei Vierecke benachbart sind, folgt  $\ell \geq m$  und  $\ell \geq 4$ .)*

*Ferner seien diese Polygone so angeordnet, dass  $q_1$  zwischen  $r_\ell$  und  $r_1$  liegt, und dass sowohl die  $q_1 \dots q_m$  als auch die  $r_1 \dots r_\ell$  in der Reihenfolge indiziert sind, in der sie auf Rand von  $z$  liegen.*

*Sei  $i \in \{1 \dots m\}$ , und  $q_i$  sei am Rand von  $z$  von  $r_j$  und  $r_k$  benachbart. Dann ist  $s_i$  definiert als das zu  $q_i$  benachbarte Polygon, das nicht mit  $z, r_j$  oder  $r_k$  übereinstimmt (Abb. 5.57).*

*Dann gilt:*

*(i) Die Polygone  $z, q_1 \dots q_m, r_1 \dots r_\ell, s_1 \dots s_m$  sind paarweise verschieden.*

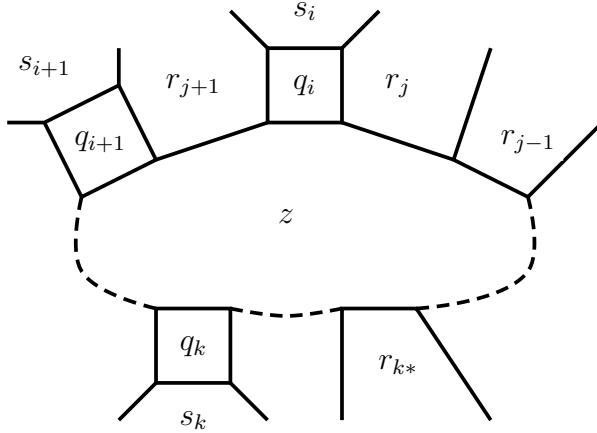
*(ii) Wenn zwei Polygone  $r_i, r_j$  eine gemeinsame Kante haben, dann führt diese zu  $z$  hin, und  $j = i \pm 1$ .*

*(iii) Es liege  $q_i$  zwischen  $r_j$  und  $r_{j+1}$ . Dann hat  $s_i$  mit keinem Polygon  $r_k$  ( $k \notin \{j, j+1\}$ ) eine gemeinsame Kante.*

*(iv) Zwei Polygone  $r_j, r_{j+1}$  haben genau dann eine gemeinsame Kante, wenn es kein  $q_k$  gibt, das zu beiden benachbart ist.*

*(v) Wenn  $q_i$  zwischen  $r_j$  und  $r_{j+1}$  (bzw.  $q_1$  zwischen  $r_\ell$  und  $r_1$ ) liegt, dann haben  $r_j$  und  $r_{j+1}$  genau drei gemeinsame Nachbarn:  $z, q_i$  und  $s_i$ .*

*(vi) Wenn  $k \neq j \pm 1$  (für  $j = 1 : k \neq \ell, 2$ ) ist, dann haben  $r_j$  und  $r_k$  nur  $z$  als gemeinsamen Nachbarn.*



**Abb. 5.57** Lage der Polygone  $z, q_i, r_j, s_i$  in  $G$

*Beweis:* Zu (i): Würde  $z$  mit einem der Polygone übereinstimmen, die direkt an  $z$  grenzen, dann läge  $z$  beiderseits einer Kante  $e$ .  $G \setminus \{e\}$  wäre unzusammenhängend, also wäre  $G$  nicht 3-zusammenhängend.

Weil in einem 3-zusammenhängenden Graphen keine zwei Polygone mehr als eine gemeinsame Kante haben, können keine zwei Polygone übereinstimmen, die eine Kante mit  $z$  gemeinsam haben. Damit sind  $q_1 \dots q_m$  und  $r_1 \dots r_\ell$  paarweise verschieden.

Das Polygon  $s_i$  kann kein Viereck sein, weil es zum Viereck  $q_i$  benachbart ist. Es kann nicht mit  $r_j$  oder  $r_{j+1}$  übereinstimmen, zwischen denen  $q_i$  liegt, weil es mit diesen Polygonen ebenfalls je eine Kante gemeinsam hat. Würde es mit einem anderen Polygon  $r_{k^*}$  übereinstimmen, so würde ein 3-Schnitt durch  $z, q_i$  und  $s_i$  die Polygone  $r_j$  und  $r_{j+1}$  trennen. Es kann auch nicht mit  $z$  übereinstimmen, weil sonst  $q_i$  und  $z$  zwei gemeinsame Kanten hätten.

Auch  $s_i = s_k$  ist nicht möglich. Sonst würde ein 4-Schnitt durch  $z, q_i, s_i$  und  $q_k$  die Polygone  $r_j$  und  $r_{j+1}$  trennen. Da diese nach Voraussetzung beide keine Vierecke sind, ist ein solcher 4-Schnitt wesentlich und damit in  $G$  verboten.

Zu (ii): Angenommen, ein Polygon  $r_i$  hat (entlang des Randes von  $z$ ) zwei Nachbarn  $y_1, y_2 \in \{q_1 \dots q_m, r_1 \dots r_\ell\}$ . Hat  $r_i$  mit einem weiteren Polygon  $r_k \notin \{y_1, y_2\}$  eine gemeinsame Kante, dann trennt ein 3-Schnitt durch  $z, r_j$

und  $r_k$  die Polygone  $y_1$  und  $y_2$  voneinander.  $G$  wäre somit nicht 4\*-zusammenhängend.

Zu (iii): Angenommen, es gäbe ein weiteres Polygon  $r_k, k \notin \{j, j+1\}$ , zu dem  $s_i$  benachbart wäre. Dann würde ein 4-Schnitt durch  $z, q_i, s_i$  und  $r_k$  die Polygone  $r_j$  und  $r_{j+1}$  voneinander trennen.

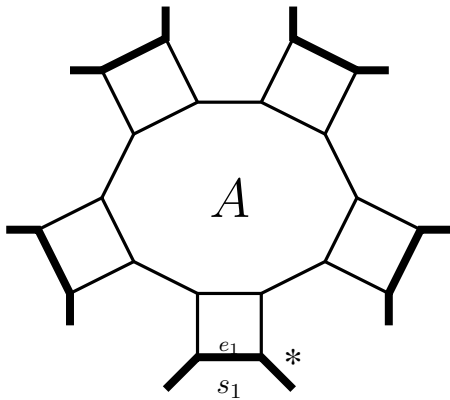
Zu (iv): Liegt ein Viereck  $q_i$  zwischen  $r_j$  und  $r_{j+1}$ , und haben  $r_j$  und  $r_{j+1}$  eine gemeinsame Kante, dann existiert ein 3-Schnitt durch  $q_i, r_j$  und  $r_{j+1}$ , der  $z$  von  $s_j$  trennt.

Zu (v): Dass  $r_j$  und  $r_{j+1}$  zu  $z, q_i$  und  $s_i$  benachbart sind, erkennt man an der Zeichnung. Gibt es noch ein weiteres Polygon  $p$ , das zu  $r_j$  und  $r_{j+1}$  benachbart ist, dann würde ein 4-Schnitt durch  $q_i, r_j, p$  und  $r_{j+1}$  die Polygone  $s_i$  und  $z$  trennen, die beide mindestens die Länge 5 haben. Dieser 4-Schnitt wäre also wesentlich.

Zu (vi): Sei  $r_{k*} \notin \{r_{j-1}, r_j, r_{j+1}\}$  (Fall  $j = 1$ :  $r_{k*} \notin \{r_\ell, r_1, r_2\}$ ). Wenn es ein Polygon  $p \neq z$  gibt, das sowohl mit  $r_j$  als auch mit  $r_k$  eine gemeinsame Kante hat, dann trennt ein 4-Schnitt durch  $p, r_j, z, r_{k*}$  die Polygone  $r_{j-1}$  und  $r_{j+1}$  (bzw.  $r_\ell$  und  $r_2$ ) voneinander, die beide keine Vierecke sind  $\square$

Die folgenden Reduktionen lassen sich danach unterscheiden, wie stark die Anzahl  $m$  der zu  $z$  benachbarten Vierecke von der Anzahl  $\ell$  der übrigen benachbarten Polygone abweicht. Zur Erinnerung:  $\ell \geq m$ .

**Fall 1:**  $\ell = m$ . Dann ist  $z$  ein  $2m$ -Eck. In diesem Fall werden alle Kanten und Punkte von  $z$  sowie alle zu  $z$  hinführenden Kanten entfernt. Dann entfernt man jeden Punkt von Grad 2 und vereinigt die zu ihm inzidenten Kanten. So entsteht aus  $z, q_1 \dots q_m$  und  $r_i \dots r_\ell$  ein großes Polygon  $A$ .



**Abb. 5.58** Beispiel einer Reduktion, wenn ein  $2n$ -Eck zu  $n$  Vierecken benachbart ist.

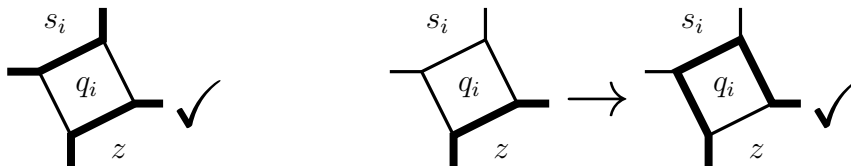
Weil keine zwei Polygone  $r_i, r_j$  übereinstimmen oder eine gemeinsame Kante haben, bleibt  $H$  2-zusammenhängend. Ist  $i \neq j \pm 1$  (und ist  $\{i, j\} \neq \{1, \ell\}$ ), dann haben  $r_i$  und  $r_j$  nur  $z$  als gemeinsamen Nachbarn, und die Kanten, die  $r_i$  und  $r_j$  von  $z$  trennen, sind in  $H$  nicht mehr vorhanden. Die Polygone  $r_j$  und  $r_{j+1}$  haben nur  $z, q_i$  und  $s_i$  als gemeinsame Nachbarn. In  $H$  werden all diese Polygone bis auf  $s_i$  zu Teilen von  $A$ . Weil die Kanten, die  $s_i$  von  $r_j, q_i$  und  $r_{j+1}$  getrennt haben, zu einer Kante vereinigt werden, ist  $H$  3-zusammenhängend.

Die Kante, die  $s_1$  von  $A$  trennt, heie  $e_1$ . Zu zeigen ist, dass jeder Hamiltonweg, der in  $H$  die Kante  $e$  benutzt, auch in  $G$  zu einem Hamiltonweg umgeformt werden kann. Um dies allgemein zu beweisen, benötigt man allerdings eine Teilkonstruktion, die auch bei den späteren Reduktionen hilfreich sein wird.

Die Polygone  $s_i$  bleiben in  $H$  erhalten. Die Kanten  $e_i^* \in E(G)$ , die sie ursprünglich von  $q_i$  getrennt haben, werden mit anderen Kanten zu einer neuen Kante  $e_i \in E(H)$  vereinigt.

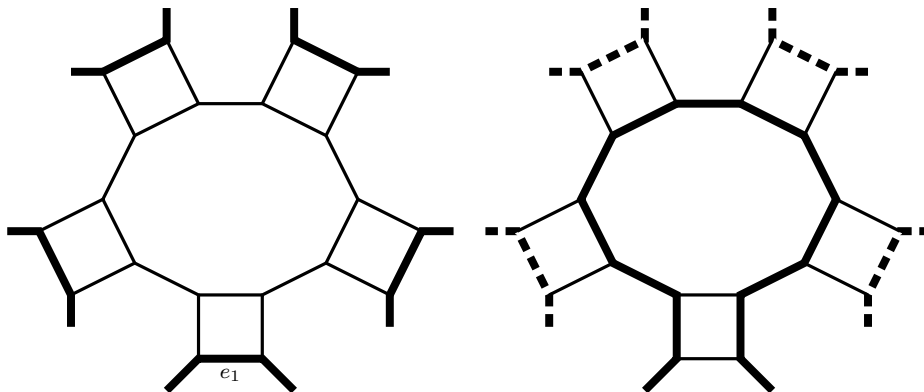


Jede dieser Kanten kann von einem Hamiltonweg benutzt werden – oder eben nicht. Angenommen, es gibt einen Hamiltonweg  $W$  in  $G$ , der alle Kanten von  $z$  benutzt. Benutzt er auch die Kante  $e_i$ , dann braucht nichts geändert zu werden. Benutzt er sie nicht, dann wird  $W$  einfach durch  $e_i^*$  umgeleitet (Abb. 5.59). Um dies zu verdeutlichen, werden die Kanten  $e_i$  bei der Umleitung der Hamiltonwege im Folgenden gestrichelt dargestellt.



**Abb. 5.59** Der Hamiltonweg  $W$  wird durch ein Viereck  $q_i$  umgeleitet

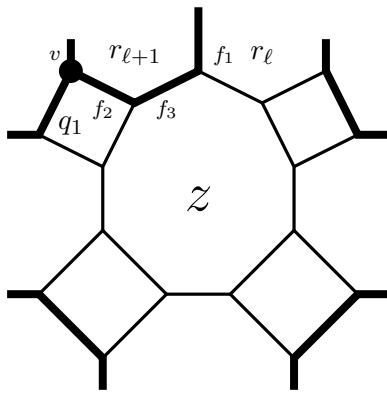
Wenn es in  $H$  einen Hamiltonweg gibt, der  $e_1$  enthält, dann kann dieser Hamiltonkreis umgewandelt werden zu einem Hamiltonweg in  $G$  (Abb. 5.60). Bei dieser Reduktion fallen  $4m$  (also mindestens 16) Punkte weg. Weil es für jeden Graphen  $H$  mit maximal 42 Punkten einen solchen Hamiltonweg geben muss, ist dieser Teilgraph in einem nichttrassablen zyklisch  $4^*$ -zusammenhängenden Graphen verboten.



**Abb. 5.60** Umleitung eines Hamiltonwegs, der  $e_1$  enthält

**Fall 2:**  $\ell = m + 1$ . Dann gibt es genau eine Kante  $f_1 \in E(G)$ , die zu  $z$  hinführt, ohne zu einem Viereck  $q_i$  zu gehören. Diese Kante trenne oBdA die Polygone  $r_{\ell-1}$  und  $r_\ell$  voneinander.

Das Polygon  $q_1$  liegt zwischen  $r_\ell$  und  $r_1$ . Die Kante, die  $q_1$  von  $r_\ell$  trennt, heiÙe  $f_2$  und die Kante, die  $r_\ell$  von  $z$  trennt, heiÙe  $f_3$ . Dann entsteht  $H$  aus  $G$ , indem man bis auf  $f_1, f_2$  und  $f_3$  alle Kanten entfernt, die auf dem Rand von  $z$  liegen oder zu  $z$  hinführen. Dann entfernt man nacheinander jeden Punkt von Grad 2 und vereinigt die beiden jeweils inzidenten Kanten. Von  $q_1$  bleibt nur ein Punkt  $v$  übrig.



**Abb. 5.61** Beispiel einer Reduktion, wenn ein  $2n + 1$ -Eck zu  $n$  Vierecken benachbart ist.

Die Polygone  $r_\ell$  und  $s_1 \dots s_m$  wurden mit keinem anderen Polygon vereinigt, die Polygone auÙerhalb der Abbildung auch nicht. Wenn also zwei Polygone in  $H$  mehr als eine Kante gemeinsam haben, dann muss eines davon  $A$  sein. Hat  $A$  mehr als eine Kante mit einem der Polygone  $s_i$  gemeinsam, dann muss eine dieser Kanten auÙerhalb der Abbildung liegen. Sie muss also (in  $G$ ) zu einem der  $r_j$  gehören, was nach Lemma 5.6 nicht möglich ist. Analog kann  $A$  weder mit  $r_\ell$  noch mit einem anderen Polygon in  $H$  mehr als eine Kante gemeinsam haben.

Die Punkte von  $q_1$  und  $z$  liegen auf einem Kreis, durch den jeder Weg umgeleitet werden kann, der in  $v$  endet. Jeder Hamiltonweg in  $H$ , der in  $v$  endet, kann also zu einem Hamiltonweg in  $G$  umgeformt werden. Da bei

dieser Reduktion  $2 \cdot 2m \geq 12$  Punkte wegfallen und für  $|V(H)| \leq 42$  immer ein solcher Hamiltonweg in  $H$  existiert, darf es keinen solchen Teilgraphen in  $G$  geben, wenn  $|V(G)| \leq 52$  ist.

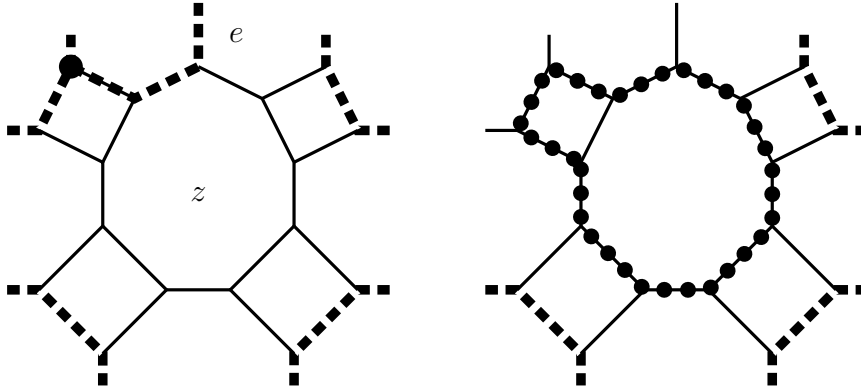
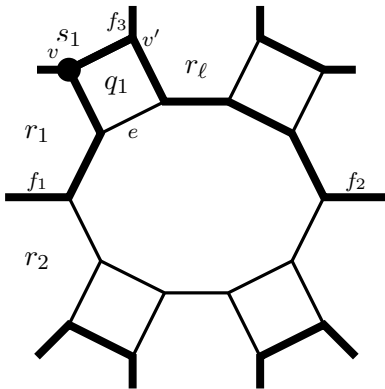


Abb. 5.62 Hamiltonwege und ihre Umleitungen (Fall 2)

**Fall 3:**  $\ell = m + 2$ . Dann gibt es genau zwei Kanten  $f_1, f_2 \in E(G)$ , die zu  $z$  hinführen, ohne zu einem Viereck  $q_i$  zu gehören. Die Kante  $f_1$  trenne oBdA die Polygone  $r_1$  und  $r_2$  voneinander. Die Kante, die  $s_1$  mit  $r_\ell$  gemeinsam hat, heiÙe  $f_3$ .

Der Rand von  $z$  kann in zwei Kantenzüge aufgeteilt werden, die  $f_1$  und  $f_2$  miteinander verbinden. Einer von ihnen enthält die Kante  $e$ , die  $z$  von  $q_1$  trennt. Dann entsteht  $H$  aus  $G$ , indem man den anderen Kantenzug entfernt. Dann entfernt man  $e$  und alle Kanten, die von  $s_2 \dots s_m$  nach  $z$  gehen (Abb. 5.63).

SchlieÙlich wird jeder Punkt von Grad 2 entfernt und die beiden inzidenten Kanten identifiziert. Von  $q_1$  bleiben zwei Punkte übrig. Den Punkt, der zu  $s_1, q_1$  und  $r_1$  gehört, nennt man  $v$ , den anderen  $v'$ .



**Abb. 5.63** Beispiel einer Reduktion, wenn ein  $2m + 2$ -Eck zu  $m$  Vierecken benachbart ist.

Hier entstehen zwei neue Polygone in  $H$ : Das eine ( $A$ ) enthält  $r_2$  und  $z$ , das andere ( $B$ ) enthält  $r_\ell$ . (Man beachte, dass  $B$  eventuell nur aus  $r_\ell$  besteht.) Wenn sie zwei gemeinsame Kanten haben, dann muss es außer  $f_1$  und  $f_2$  noch eine weitere Kante geben, die zu zweien der Polygone  $r_j (j \in \{1 \dots \ell\})$  gehört. Dies ist nach Lemma 5.6 nicht möglich. Aus dem gleichen Grund kann  $r_1$  keine zwei Kanten mit  $A$  oder  $B$  gemeinsam haben.

Analog zu Fall 2 haben  $A$  und  $B$  weder mit  $s_1 \dots s_m$  noch mit einem Polygon außerhalb der Abbildung je mehr als eine Kante gemeinsam.

Sei  $W$  ein Hamiltonweg in  $H$ , der in  $v$  endet. Ist  $v'$  in  $W$  zu  $v$  adjazent, dann kann man  $W$  durch den Kreis umleiten, der  $z$  und  $q_1$  umschließt. In jedem anderen Fall muss  $W$  auch den Kantenzug beinhalten, der  $f_2$  mit  $f_3$  verbindet.

Liegt  $f_1$  auf der zu  $v$  inzidenten Kante in  $W$ , dann leitet man diesen Kantenzug durch  $q_1$  um und setzt  $f_1$  durch die restlichen Kanten am Rand von  $z$  fort. Wenn die zu  $v$  inzidente Kante von  $W$  weder zu  $v'$  inzident ist noch  $f_1$  enthält, dann wird sie durch  $q_1$  und  $z$  fortgesetzt (Abb. 5.64).

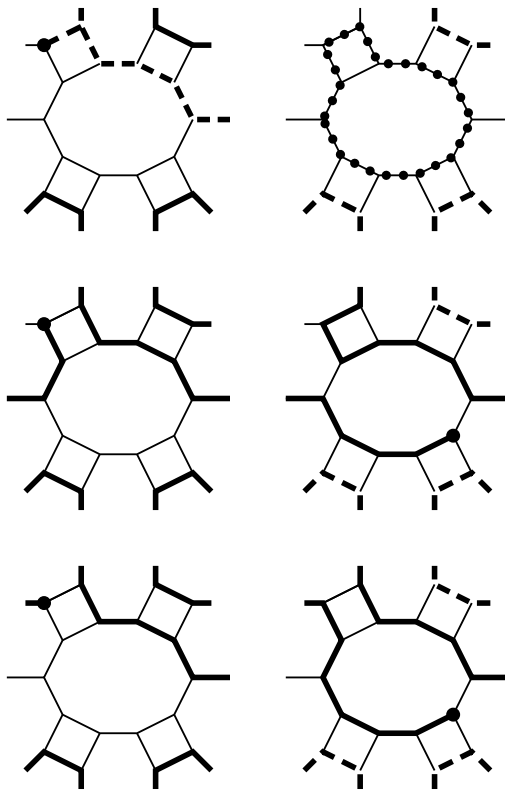
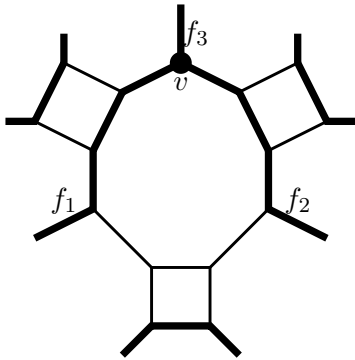


Abb. 5.64 Hamiltonwege und ihre Umleitungen (Fall 3)

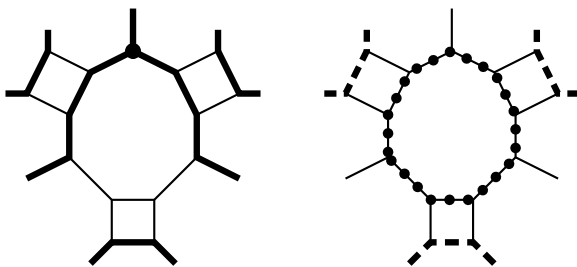
Weil  $H$  gerade  $2 \cdot 2m \geq 12$  Punkte weniger hat als  $G$ , darf solch ein Teilgraph in keinem nichttrassablen zyklisch  $4^*$ -zusammenhängenden Graphen  $G \in \mathcal{F}$  mit weniger als 54 Punkten auftreten.

**Fall 4:**  $\ell = m + 3$ . Dann gibt es genau drei Kanten  $f_1, f_2, f_3$ , die zu  $z$  hinführen und nicht zu einem Viereck gehören. Um  $H$  zu konstruieren, werden alle übrigen Kanten, die zu  $z$  hinführen, sowie alle Punkte und Kanten von  $z$  selbst entfernt. Die nun fehlenden zu  $f_1, f_2$  und  $f_3$  inzidenten Punkte werden durch einen einzigen neuen Punkt  $v$  identifiziert (Abb. 5.65).



**Abb. 5.65** Beispiel einer Reduktion, wenn ein  $2m + 3$ -Eck zu  $m$  Vierecken benachbart ist.

Wegen Lemma 5.2.4 ist  $H$  3-zusammenhängend. Jeder Hamiltonweg in  $H$ , der in  $v$  endet, kann durch  $z$  umgeleitet werden und enthält dann alle Punkte in  $G$  (Abb. 5.66). Weil bei dieser Reduktion  $4m + 2 \geq 10$  Punkte verschwinden, darf kein nichttrassabler Graph mit weniger als 54 Punkten diesen Teilgraphen enthalten.

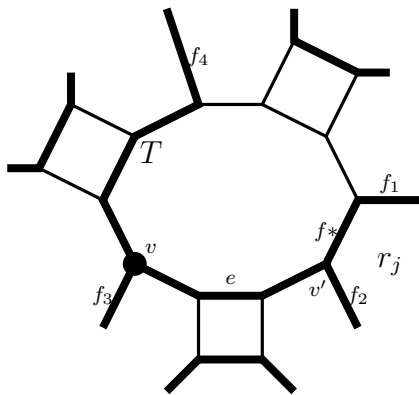


**Abb. 5.66** Hamiltonwege und ihre Umleitungen (Fall 4)

**Fall 5:**  $\ell = m + 4$ . Dann gibt es vier Kanten  $f_1 \dots f_4$ , die zu  $z$  hinführen, ohne zu einem Viereck zu gehören. Wenn es weniger als vier zu  $z$  benachbarte Vierecke gibt, kann man garantieren, dass zwei davon zum gleichen Polygon  $r_j$  gehören. Diese seien  $f_1$  und  $f_2$ . Durch die Kante  $f^*$ , die  $r_j$  mit  $z$  gemeinsam hat, können  $f_1$  und  $f_2$  zu einem Kantenzug vereinigt werden. (In Abb. 5.56 erkennt man, dass dies für  $m \geq 4$  im Allgemeinen nicht mehr gilt. Dann funktioniert auch die hier zu entwickelnde Reduktion nicht mehr. Sie ist also nur auf Acht- oder Zehnecke anwendbar.)

Die Kanten  $f_3$  und  $f_4$  können durch zwei Kantenzüge am Rand von  $z$  miteinander verbunden werden.  $T$  sei derjenige von beiden Kantenzügen, der  $f^*$  nicht beinhaltet.

Um  $H$  zu erhalten, werden alle Kanten von  $z$  außer  $f^*$  und  $T$  und alle zu  $z$  führenden Kanten außer  $f_1 \dots f_4$  entfernt. Dann wird eine neue Kante  $e$  eingefügt, die  $T$  direkt mit  $f_2$  verbindet. Diese hat zwei inzidente Punkte:  $v$ , der zu  $T$  gehört, und  $v'$ , der zu  $f_2$  inzident ist. Schließlich entfernt man jeden Punkt von Grad 2 und identifiziert die zu diesem Punkt inzidenten Kanten (Abb. 5.67).



**Abb. 5.67** Reduktion, wenn ein  $2m + 4$ -Eck zu  $m$  Vierecken benachbart ist

Der Beweis, dass  $H$  3-zusammenhängend ist, ist analog zu den anderen Fällen.

Sei  $W$  ein Hamiltonweg in  $H$ , der im Punkt  $v$  endet. Enthält  $W$  die Kante  $e$ , dann kann man  $W$  über den Kreis  $z$  zu einem Hamiltonweg in  $G$  erweitern. Enthält er  $e$  nicht, dann muss er  $f_2$  und/oder  $f_1 \cup f^*$  enthalten, weil er  $v'$  besuchen muss. In diesem Fall trennt man das Stück von  $W$  ab, das  $v$  mit  $f_3$  oder  $f_4$  verbindet. Dann entsteht ein Hamiltonweg in  $G$ , indem  $f^*$  durch  $z$  umgeleitet wird. Auch bei dieser Reduktion verschwinden  $4m + 2 \geq 10$  Punkte, sodass  $G$  auch diesen Teilgraphen nicht enthalten darf.

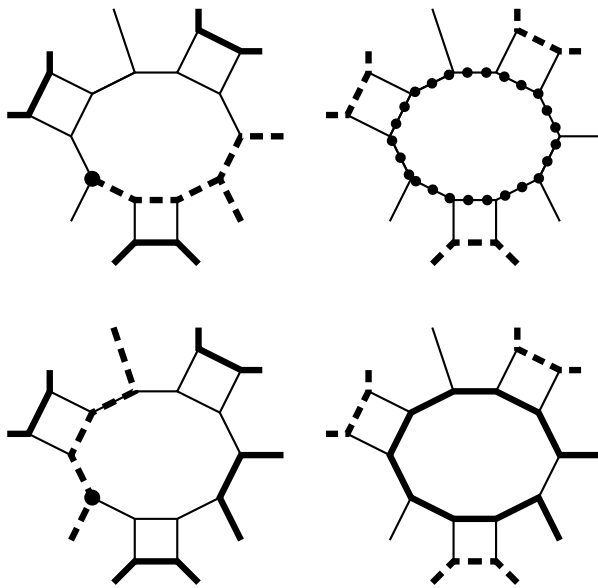
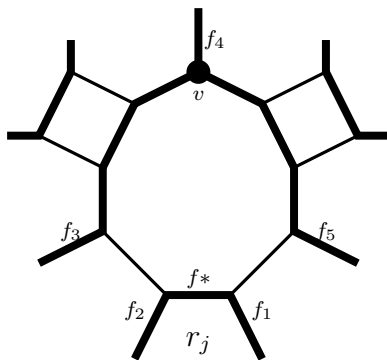


Abb. 5.68 Hamiltonwege und ihre Umleitungen (Fall 5)



**Fall 6:**  $\ell = m + 5$ . In diesem Fall ist zu beachten, dass  $m \geq 2$  vorausgesetzt wurde. (Für den Fall  $m = 1$  würden bei der Reduktion nämlich nur acht Punkte verschwinden.) Das Polygon  $z$  hat also mindestens die Länge 9. Es gibt in diesem Fall fünf Kanten  $f_1 \dots f_5$ , die zu  $z$  führen und nicht zu einem Viereck gehören. Wenn zwei von ihnen (im Folgenden  $f_1$  und  $f_2$ ) zum gleichen Polygon  $r_j$  gehören, dann kann man sie durch die Kante  $f^*$ , die  $r_j$  mit  $z$  gemeinsam hat, zu einem Kantenzug verbinden. Solange man maximal vier an  $z$  grenzende Vierecke hat, findet man immer zwei solche Kanten  $f_1$  und  $f_2$ . Ab  $m = 5$  geht das nicht mehr, darum gilt diese Reduktion nur für Neun-, Elf- und Dreizehnecke. Um  $H$  zu erhalten, entfernt man alle Kanten außer  $f_1 \dots f_5$ , die zu  $z$  hinführen, sowie alle Punkte und alle Kanten außer  $f^*$ , die am Rand von  $z$  liegen. Die zu  $f_3, f_4$  und  $f_5$  inzidenten Punkte, die dabei wegfallen, werden durch einen einzigen Punkt  $v$  ersetzt. Schließlich entfernt man jeden Punkt von Grad 2 und identifiziert jeweils die inzidenten Kanten. So entsteht aus  $f_1, f^*$  und  $f_2$  eine neue Kante  $e$  (Abb. 5.69).

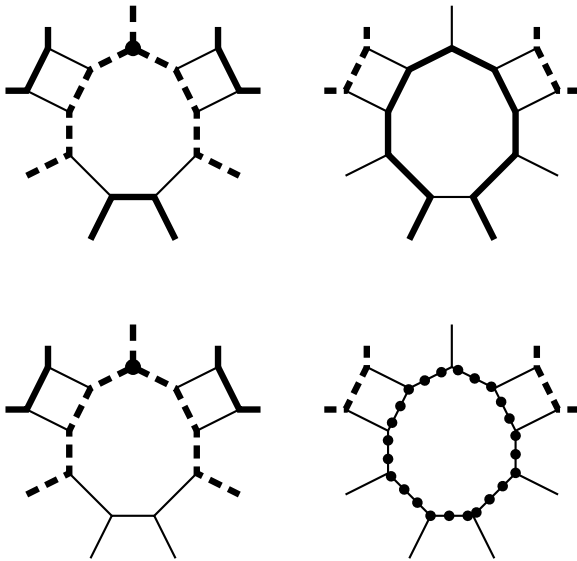


**Abb. 5.69** Reduktion, wenn ein  $2m + 5$ -Eck zu  $m$  Vierecken benachbart ist

Auch hier ist  $H$  wegen Lemma 5.6 3-zusammenhängend.

Sei  $W$  ein Hamiltonweg in  $H$ , der im Punkt  $v$  endet. Wenn  $W$  die Kante  $e$  enthält, dann entfernt man das Stück von  $W$ , das  $v$  mit  $f_3, f_4$  oder  $f_5$  verbindet, und leitet  $e$  über  $z$  um. Enthält  $W$  die Kante  $e$  nicht, dann kann man  $f_3, f_4$  oder  $f_5$  über den Rand von  $z$  zu einem Hamiltonkreis in  $G$  ausweiten (Abb. 5.70).

Bei dieser Reduktion fallen  $4m + 4 \geq 12$  Punkte weg. Auch dieser Teilgraph darf also in  $G$  nicht auftreten.



**Abb. 5.70** Hamiltonwege und ihre Umleitungen (Fall 6)

### Schritt IV: Abschätzung der Anzahl verschiedener $n$ -Ecke

Getreu der Annahme, dass ein minimaler nichttrassabler einfach 3-polytopaler Graph  $G$  zyklisch 4\*-zusammenhängend sei und maximal 52 Punkte enthalte, darf somit ein  $k$ -Eck in  $G$  maximal zu  $\ell$  Vierecken benachbart sein:

$k$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...	$2n$	$2n + 1$
$\ell$	1	1	1	2	2	4	3	5	5	...	$n - 2$	$n - 2$

Außerdem ist aus [5] folgende Formel bekannt:

**Lemma 5.7** *Sei  $p_k$  die Anzahl der  $k$ -Ecke in einem einfach 3-polytopalen Graphen  $G$ . Dann gilt:*

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 = 12 + \sum_{k \geq 7} (k - 6)p_k \quad (5.1)$$

(Weil  $G$  zyklisch 4\*-zusammenhängend ist, ist  $p_3 = 0$ .)

Außerdem gewinnt man aus der Euler-Formel, dass die Anzahl aller Polygone in einem einfach 3-polytopalen Graphen mit maximal 52 Punkten immer  $\leq 28$  sein muss, also

$$\sum_{k \geq 4} p_k \leq 28 \Leftrightarrow p_4 + p_5 \leq 28 - p_6 - p_7 - p_8 - \dots \quad (5.2)$$

Wenn man die zweite Formel von der ersten subtrahiert, erhält man

$$p_4 \geq p_6 + 2p_7 + 3p_8 + 4p_9 + \dots - 16 \quad (5.3)$$

Ferner gilt folgender Satz:

**Lemma 5.8** *Sei  $G$  ein zyklisch 4\*-zusammenhängender nichttrassabler Graph mit maximal 52 Punkten. Ferner seien  $f_1 \dots f_4 \in P(G)$  mit:  $f_i$  und  $f_j$  sind benachbart  $\Leftrightarrow i = j \pm 1$ . Dann hat wenigstens eins dieser Polygone mindestens die Länge 7.*

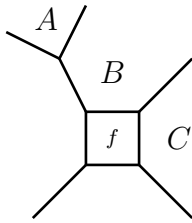
*Beweis:* Aus den Voraussetzungen folgt, dass  $G$  weder ein Doppel-Viereck noch eine Okamura-2-Reduktion noch eine erweiterte Okamura-Reduktion enthalten darf. Aber jede Folge von vier aufeinanderfolgenden Polygonen der Länge 4, 5 oder 6 enthält eine solche Reduktion.

Analog erhält man:

**Lemma 5.9** *Sei  $G$  ein zyklisch  $4^*$ -zusammenhängender nichttrassabler Graph mit maximal 52 Punkten. Ferner seien  $f_1, f_2, f_3 \in P(G)$  mit:  $f_1$  und  $f_2$  sowie  $f_2$  und  $f_3$  sind benachbart,  $f_1$  und  $f_3$  nicht. Ist keins dieser drei Polygone ein Viereck, so hat eines von ihnen mindestens Länge 7.*

*Beweis:* Jede Sequenz dreier Polygone der Länge  $\leq 7$  enthält ein Dreieck, ein Viereck oder eine Oe-Reduktion.

Es gibt noch einen Fall, der genauer untersucht werden muss.



**Abb. 5.71**

**Lemma 5.10** *Sei  $G$  ein zyklisch  $4^*$ -zusammenhängender nichttrassabler Graph mit maximal 52 Punkten. Enthält er die Konstellation aus Abb. 5.71, so hat  $A$ ,  $B$  oder  $C$  Länge 7 oder mehr.*

*Beweis:*  $B$  und  $C$  können keine Vierecke sein. Ist  $B$  ein Sechseck und hat  $A$  die Länge 4, 5 oder 6, dann bilden  $A$ ,  $B$  und  $f$  eine Okamura-2-Reduktion. Dasselbe gilt, wenn  $B$  ein Fünfeck und  $A$  ein Fünf- oder Sechseck ist. Ist  $B$  ein Fünfeck und  $A$  ein Viereck, dann kann  $C$  kein Fünf- oder Sechseck sein, weil  $A$ ,  $B$  und  $C$  sonst eine O2- oder Oe-Reduktion bilden.

### Schritt V: Die Okamura-Reduktionen (ii)

Nun folgt der zweite Teil der erweiterten OKAMURA-II-Reduktionen (Abb. 5.72). Diese  $n$ -Stücke sind mit  $Oe(m)$  bis  $Oe(y)$  bezeichnet. Auch hier gilt (analog zum ersten Teil der Reduktionen), dass ein zyklisch 4\*-zusammenhängender nichttrassabler Graph  $G$  mit  $|V(G)| \leq 52$  keins dieser  $n$ -Stücke enthalten darf.

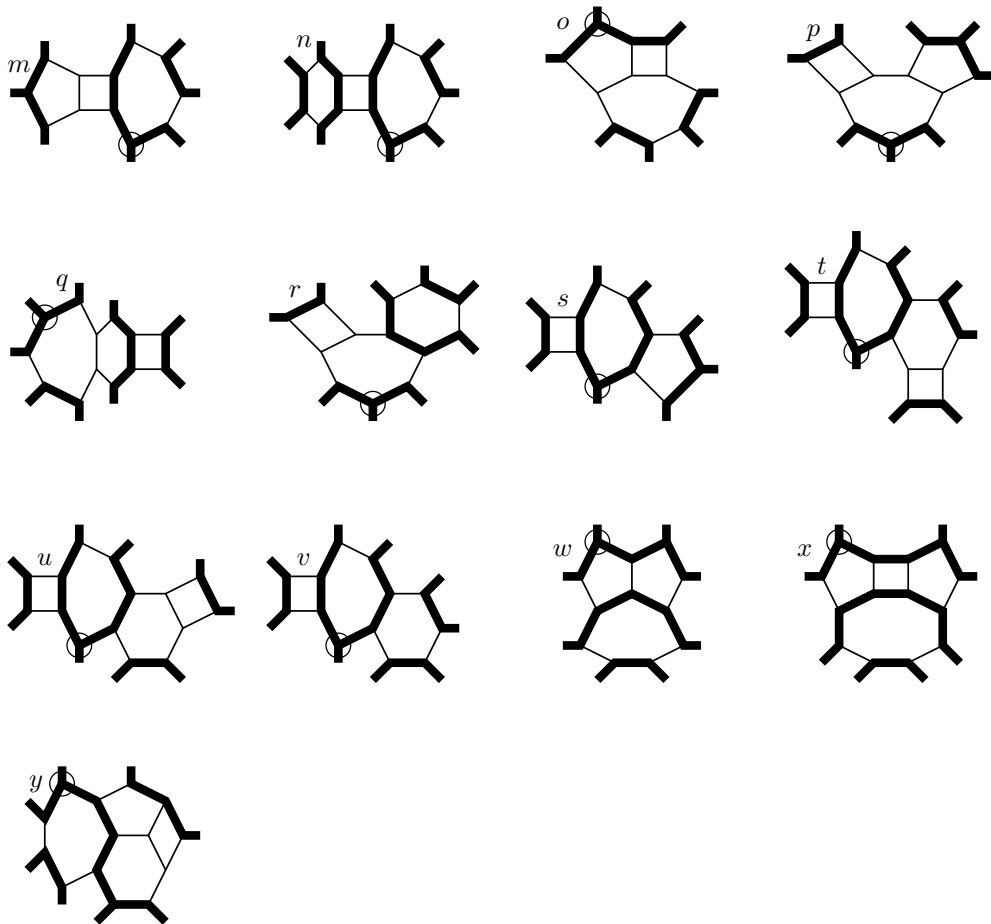
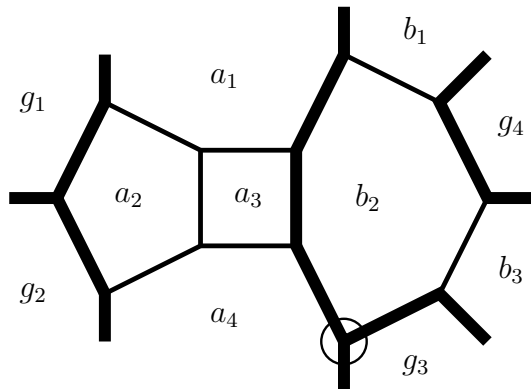


Abb. 5.72 Die erweiterten OKAMURA-II-Reduktionen (2. Teil)

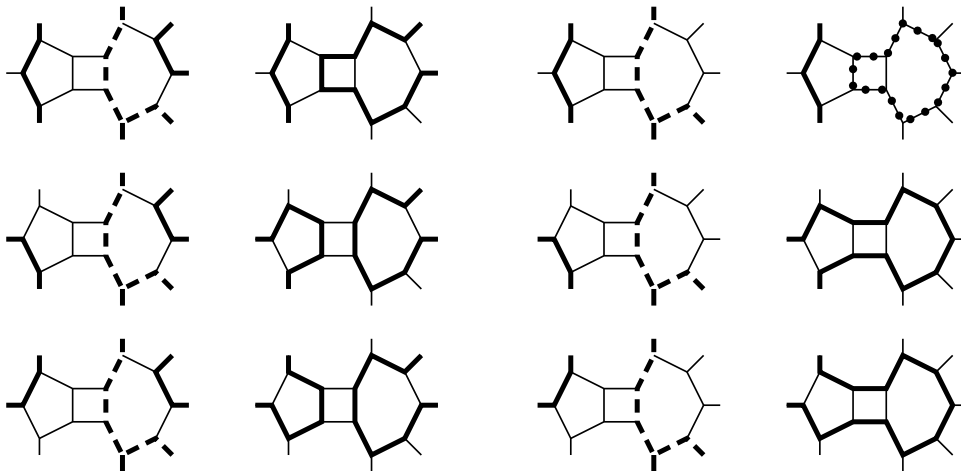
Sei  $H$  der Graph, der durch die Entfernung der dünn gezeichneten Kanten aus  $G$  entsteht. Auch bei diesen Reduktionen muss man (wie bei  $Oe(a)$  bis  $Oe(\ell)$ ) überprüfen, ob  $H$  3-zusammenhängend bleibt. Es geht los mit  $Oe(m)$  (Abb. 5.73), wo  $a_1 \dots a_4$  zu  $A$  und  $b_1, b_2, b_3$  zu  $B$  zusammengefasst werden.



**Abb. 5.73** Der  $n$ -Schnitt  $Oe(m)$

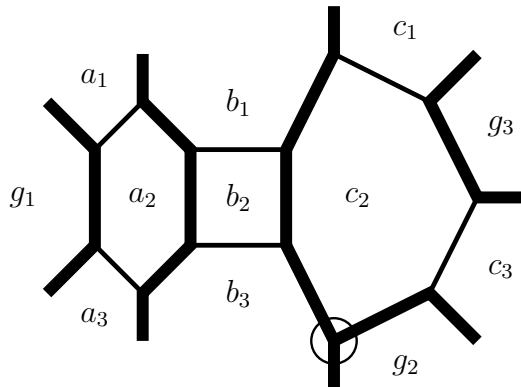
Die Polygone  $g_1$  und  $g_2$  sind wegen  $O2(k)$  keine Vierecke,  $b_1, g_3$  und  $g_4$  sind es nicht, weil kein Siebeneck mehr als ein benachbartes Viereck haben darf. Stimmt  $g_1$  mit  $g_3$  oder  $g_4$  überein, so gibt es einen 3-Schnitt durch  $g_1, a_1$  und  $b_2$ , der  $b_1$  von  $a_2$  trennt. Stimmt  $g_2$  mit  $g_4$  überein, dann gibt es einen 4-Schnitt durch  $g_2, a_2, a_3$  und  $b_2$ , der  $g_1$  von  $g_3$  trennt.

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von
$A$	$P$ (außen)	$P$ zu $a_1$ und $a_4$	$P, a_1, a_3, a_4$	$a_2$	$b_2$
	$g_4$	$g_4$ zu $a_1$ und $a_4$	$g_4, a_1, a_3, a_4$	$a_2$	$b_2$
	$g_3$	$a_1, g_3$	$a_1, b_2, g_3$	$a_2$	$g_4$
	$B$	$a_1, b_3$	$a_1, b_2, b_3$	$a_2$	$g_4$
$B$		$a_4, b_1$	$b_1, b_2, a_4$	$a_2$	$g_4$
		$a_4, b_3$	$a_4, b_2, b_3$	$a_2$	$g_3$
	$P$ (außen)	$P$ zu $b_1$ und $b_3$	$P, b_1, b_2, b_3$	$a_2$	$g_4$
	$g_1$	$g_1$ zu $b_1$ und $b_3$	$g_1, b_1, b_2, b_3$	$a_2$	$g_4$
	$g_2$	$g_2$ zu $b_1$ und $b_3$	$g_2, b_1, b_2, b_3$	$a_2$	$g_4$
	$g_3$	$g_3, b_1$	$b_1, b_2, g_3$	$a_2$	$g_4$



**Abb. 5.74** Umgeleitete Hamiltonwege durch  $Oe(m)$ .

In  $Oe(n)$  (Abb. 5.75) werden die Polygone  $a_1, a_2, a_3$  zu  $A$ ,  $b_1, b_2, b_3$  zu  $B$  und  $c_1, c_2, c_3$  zu  $C$ .



**Abb. 5.75** Der  $n$ -Schnitt  $Oe(n)$

Ist  $g_1$  ein Viereck, dann liegt  $O2(e)$  vor. Die Polygone  $g_2$  und  $g_3$  dürfen keine Vierecke sein, weil ein Siebeneck zu maximal einem Viereck ( $b_2$ ) benachbart sein darf. Da  $b_1$  und  $b_3$  zu  $b_2$  benachbart sind, dürfen diese beiden Polygone keine Vierecke sein.

Ist  $g_1 = g_3$  oder  $g_1 = g_4$ , dann trennt ein 4-Schnitt durch  $g_1, a_2, b_2$  und  $c_2$  die Polygone  $b_1$  und  $b_3$ .



1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von	
A	$P$ (außen)	$P$ zu $a_1$ und $a_3$	$P, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$c_2$	
	$g_2$	$g_2$ zu $a_1$ und $a_3$	$g_2, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$c_2$	
	$g_3$	$g_3$ zu $a_1$ und $a_3$	$g_3, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$c_2$	
	B	$a_1, b_3$	$a_1, b_3$	$a_1, a_2, b_3$	$g_1$	$c_2$
		$a_3, b_1$	$a_3, b_1$	$a_3, a_2, b_1$	$g_1$	$c_2$
		C	$a_1, c_3$ und $a_3, c_1$	$a_1, b_1, c_2, c_3$	$g_1$	$g_3$
$a_1, c_1$ und $a_3, c_3$	$a_3, b_3, c_2, c_3$		$g_1$	$g_2$		
B	$P$ (außen)	$P$ zu $b_1$ und $b_3$	$P, b_1, b_2, b_3$	$a_2$	$c_2$	
	$g_1$	$g_1$ zu $b_1$ und $b_3$	$g_1, b_1, b_2, b_3$	$a_2$	$c_2$	
	$g_3$	$g_3$ zu $b_1$ und $b_3$	$g_3, b_1, b_2, b_3$	$a_2$	$c_2$	
	C	$b_1, c_3$	$b_1, c_3$	$b_1, c_2, c_3$	$a_2$	$g_3$
		$b_3, c_1$	$b_3, c_1$	$b_3, c_2, c_1$	$a_2$	$g_3$
		$b_3, c_3$	$b_3, c_3$	$b_3, c_2, c_3$	$a_2$	$g_2$
C	$P$ (außen)	$P$ zu $c_1$ und $c_3$	$P, c_1, c_2, c_3$	$a_2$	$g_3$	
	$g_1$	$g_1$ zu $c_1$ und $c_3$	$g_1, c_1, c_2, c_3$	$a_2$	$g_3$	
	$g_2$	$c_1, g_2$	$c_1, c_2, g_2$	$a_2$	$g_3$	

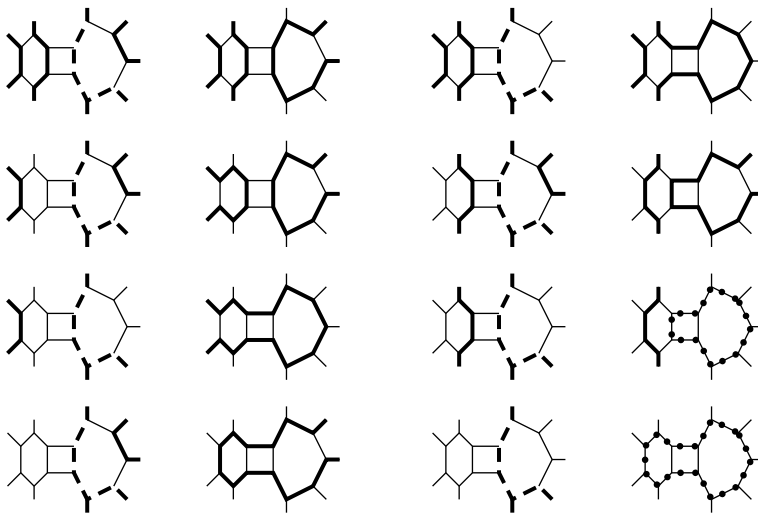
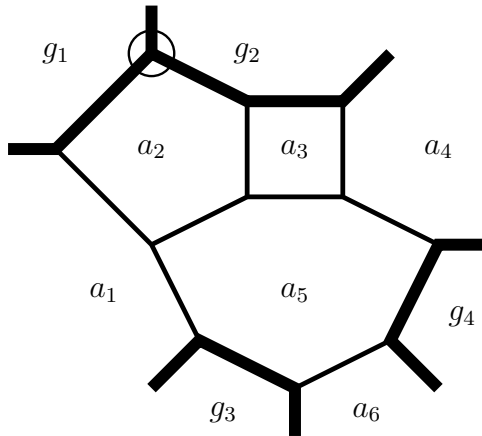


Abb. 5.76 Umgeleitete Hamiltonwege durch  $Oe(n)$ .

Es folgt  $Oe(o)$ , wo  $a_1 \dots a_6$  zu einem Polygon  $A$  verbunden werden.



**Abb. 5.77** Der  $n$ -Schnitt  $Oe(o)$

Das Polygon  $g_2$  ist zu einem Viereck benachbart, darf also selbst keines sein. Das gleiche gilt für  $a_1, g_3$  und  $g_4$ , weil das Siebeneck  $a_5$  als Nachbarn haben, das bereits an das Viereck  $a_3$  grenzt. (Aber  $g_1$  darf ein Viereck sein.) Wäre  $g_1 = g_3$  oder  $g_1 = g_4$ , dann ginge durch  $g_1, a_2, a_4$  ein 3-Schnitt, der  $a_1$  und  $a_4$  voneinander trennt. (Analog für  $g_2 \in \{g_3, g_4\}$ .)

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von
$A$	$P$ (außen)	$P$ zu $a_1$ und $a_4$	$P, a_1, a_5, a_4$	$a_2$	$g_4$
		$P$ zu $a_1$ und $a_6$	$P, a_1, a_5, a_6$	$g_3$	$g_4$
		$P$ zu $a_4$ und $a_6$	$P, a_4, a_5, a_6$	$g_3$	$g_4$
	$g_1$	$g_1, a_4$	$g_1, a_2, a_3, a_4$	$g_2$	$a_5$
		$g_1, a_6$	$g_1, a_2, a_5, a_6$	$a_1$	$g_4$
	$g_2$	$g_2, a_1$	$a_1, a_2, g_2$	$g_1$	$a_5$
		$g_2, a_6$	$g_2, a_3, a_5, a_6$	$a_2$	$g_4$
	$g_3$	$g_3, a_4$	$a_4, a_5, g_3$	$a_2$	$g_4$
	$g_4$	$g_4, a_1$	$a_1, a_5, g_4$	$a_2$	$g_3$

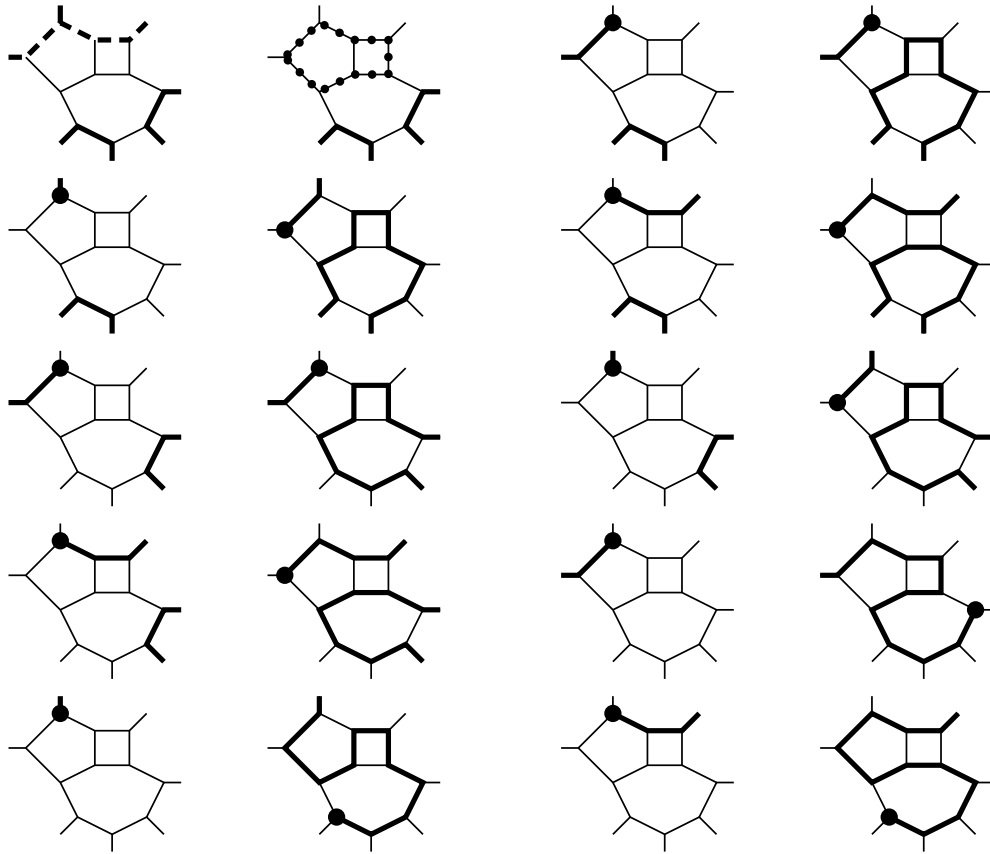
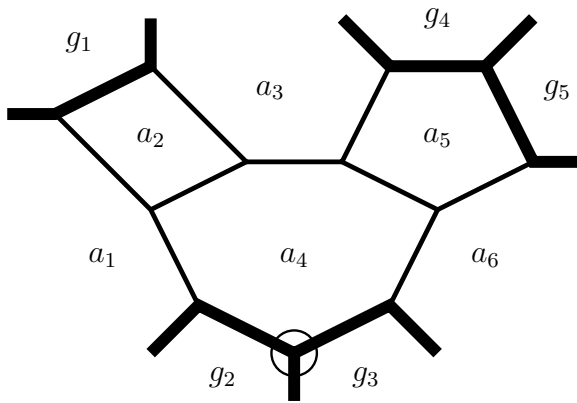


Abb. 5.78 Umgeleitete Hamiltonwege durch  $Oe(o)$ .

In  $Oe(p)$  (Abb. 5.79) werden die Polygone  $a_1 \dots a_6$  zu  $A$  vereinigt.



**Abb. 5.79** Der  $n$ -Schnitt  $Oe(p)$

Weil Doppelpvierecke verboten sind, sind  $g_1$ ,  $a_1$  und  $a_3$  keine Vierecke. Weil maximal ein Viereck zum Siebeneck  $a_4$  benachbart sein darf, sind  $g_2$  und  $g_3$  keine Vierecke. Von den Polygonen  $g_4$  und  $g_5$  darf maximal eins ein Viereck sein.

Wenn  $g_1$  mit  $g_2$  oder  $g_3$  übereinstimmt, dann geht ein 3-Schnitt durch  $g_1$ ,  $a_2$  und  $a_4$ , der  $a_1$  von  $a_5$  trennt. Stimmt  $g_1$  mit  $g_4$  oder  $g_5$  überein, dann geht ein 4-Schnitt durch  $g_1$ ,  $a_2$ ,  $a_4$  und  $a_5$ , der  $a_1$  von  $a_3$  trennt. Sind zwei der Polygone  $g_2 \dots g_5$  gleich, dann gibt es einen 3-Schnitt durch  $a_4$ ,  $a_5$  und dieses Polygon, und dieser Schnitt trennt  $a_3$  von  $a_6$ .

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von
A	$P$ (außen)	$P$ zu $a_1$ und $a_3$	$P, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$a_4$
		$P$ zu $a_1$ und $a_6$	$P, a_1, a_4, a_6$	$g_3$	$a_3$
		$P$ zu $a_3$ und $a_6$	$P, a_3, a_4, a_6$	$g_2$	$a_5$
	$g_1$	$g_1, a_6$	$g_1, a_2, a_4, a_6$	$g_3$	$a_3$
		$g_2, a_3$	$g_2, a_4, a_3$	$g_1$	$a_5$
		$g_2, a_6$	$g_2, a_4, a_6$	$g_3$	$a_3$
	$g_3$	$g_3, a_3$	$g_3, a_4, a_3$	$g_1$	$a_5$
		$g_3, a_1$	$a_1, a_4, g_3$	$g_2$	$a_3$
		$g_4, a_1$	$a_1, a_4, a_5, g_4$	$g_3$	$a_3$
	$g_4$	$g_4, a_6$	$g_4, a_5, a_6$	$a_4$	$g_5$
		$g_5, a_1$	$a_1, a_4, a_5, g_5$	$g_3$	$a_3$
		$g_5, a_3$	$a_3, a_5, g_5$	$a_4$	$g_4$

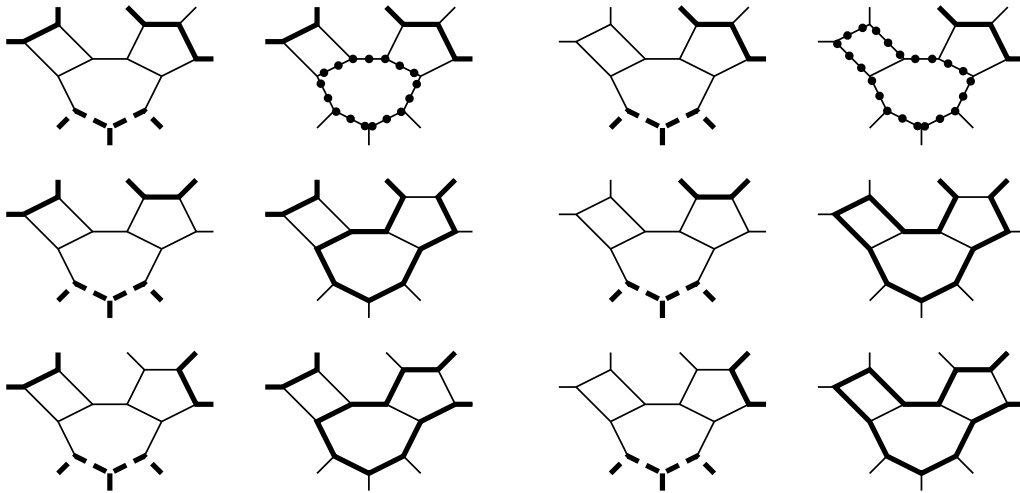
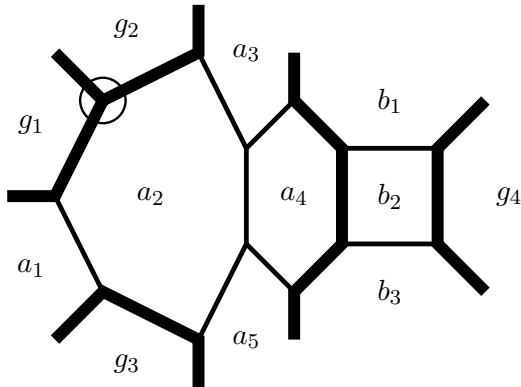


Abb. 5.80 Umgeleitete Hamiltonwege durch  $Oe(p)$ .

Bei  $Oe(q)$  (Abb. 5.81) werden die Polygone  $a_1 \dots a_5$  zu  $A$  und  $b_1, b_2, b_3$  zu  $B$  vereinigt. Hier ist darauf zu achten, dass nicht sowohl  $g_2$  als auch  $g_3$  Vierecke sein dürfen. Da dieser Teilgraph symmetrisch ist, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $g_3$  kein Viereck ist.

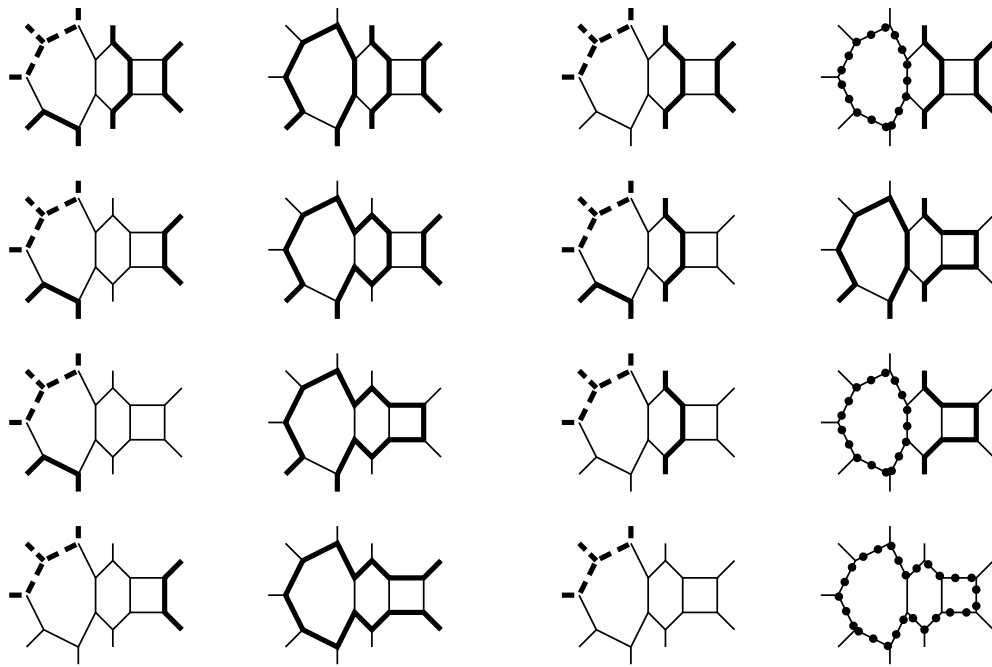


**Abb. 5.81** Der  $n$ -Schnitt  $Oe(q)$

Die Polygone  $a_3$  und  $a_5$  können wegen  $O2(f)$  keine Vierecke sein. Von den Polygonen  $g_1$  und  $g_2$  kann nur eins ein Viereck sein,  $g_4$  ist keins, weil  $b_2$  eines ist.

Ist  $g_3 = g_1$  oder  $g_3 = g_2$ , dann hat dieses Polygon zwei Kanten mit  $a_2$  gemeinsam. Stimmt  $g_4$  mit  $g_1, g_2$  oder  $g_3$  überein, dann verläuft ein 4-Schnitt durch  $a_2, a_4, b_2$  und  $g_4$  und trennt  $a_3$  und  $a_5$  voneinander.

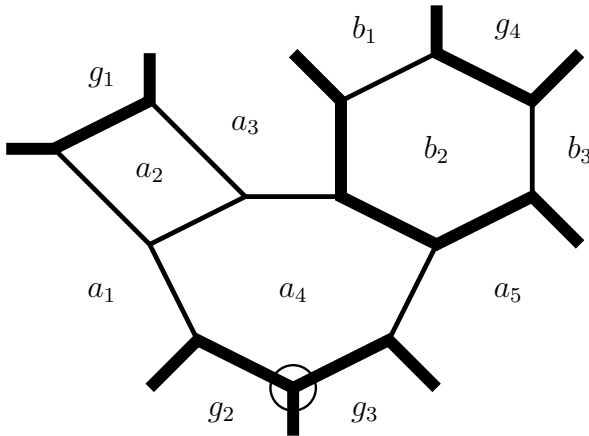
1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von	
$A$	$P$ (außen)	$P$ zu $a_1$ und $a_3$	$P, a_1, a_2, a_3$	$g_1, g_2$	$g_3$	
		$P$ zu $a_1$ und $a_5$	$P, a_1, a_2, a_5$	$g_1, g_2$	$g_3$	
		$P$ zu $a_3$ und $a_5$	$P, a_3, a_2, a_5$	$g_3$	$g_4$	
	$g_1$	$g_1, a_3$	$g_1, a_2, a_3$	$g_2$	$g_3$	
		$g_1, a_5$	$g_1, a_2, a_5$	$g_2$	$g_3$	
	$g_2$	$g_2, a_1$	$a_1, a_2, g_2$	$g_1$	$g_3$	
		$g_2, a_5$	$g_2, a_2, a_5$	$g_1$	$a_4$	
	$g_3$	$g_3, a_3$	$a_3, a_2, g_3$	$g_1$	$a_4$	
	$g_4$	$g_4$ zu $a_1$ und $a_3$	$g_4, a_1, a_2, a_3$	$g_1, g_2$	$g_3$	
		$g_4$ zu $a_1$ und $a_5$	$g_4, a_1, a_2, a_5$	$g_1, g_2$	$g_3$	
		$g_4$ zu $a_3$ und $a_5$	$g_4, a_3, a_2, a_5$	$g_3$	$g_4$	
	$B$	$B$	$a_1, b_1$	$a_1, a_2, a_4, b_1$	$a_3$	$a_5$
			$a_1, b_3$	$a_1, a_2, a_4, b_3$	$a_3$	$a_5$
			$a_3, b_3$	$a_3, a_4, b_3$	$g_4$	$a_5$
$a_5, b_1$			$b_1, a_4, a_5$	$g_4$	$a_5$	
$B$	$P$ (außen)	$P$ zu $b_1$ und $b_3$	$P, b_1, b_2, b_3$	$a_4$	$g_4$	
		$g_1$ zu $b_1$ und $b_3$	$g_1, b_1, b_2, b_3$	$a_4$	$g_4$	
		$g_2$ zu $b_1$ und $b_3$	$g_2, b_1, b_2, b_3$	$a_4$	$g_4$	
		$g_3$ zu $b_1$ und $b_3$	$g_3, b_1, b_2, b_3$	$a_4$	$g_4$	



**Abb. 5.82** Umgeleitete Hamiltonwege durch  $Oe(q)$ .



In der Reduktion  $Oe(r)$  (Abb. 5.83) werden die Polygone  $a_1 \dots a_5$  zu  $A$  und  $b_1, b_2, b_3$  zu  $B$  vereinigt.



**Abb. 5.83** Der  $n$ -Schnitt  $Oe(r)$

Die Polygone  $g_1 \dots g_4$  und  $a_3$  dürfen keine Vierecke sein, denn  $g_1$  und  $a_3$  sind zum Viereck  $a_2$  benachbart,  $g_2$  und  $g_3$  sind zum Siebeneck  $a_4$  benachbart, zu dem bereits ein anderes Viereck benachbart ist, und  $g_4$  ist wegen  $Oe(q)$  kein Viereck.

Würde  $g_1$  mit  $g_2$  oder  $g_3$  übereinstimmen, dann würde ein 3-Schnitt durch  $g_1, a_2$  und  $a_4$  die Polygone  $a_1$  und  $b_2$  trennen. Würde  $g_4$  mit einer von ihnen übereinstimmen, dann würde ein 3-Schnitt durch  $a_4, b_2$  und  $g_4$  die Polygone  $a_1$  und  $a_5$  voneinander trennen.

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von	
A	$P$ (außen) oder $P = g_4$	$P$ zu $a_1$ und $a_3$	$P, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$a_4$	
		$P$ zu $a_1$ und $a_5$	$P, a_1, a_4, a_5$	$g_2$	$b_2$	
		$P$ zu $a_3$ und $a_5$	$P, a_3, a_4, a_5$	$g_2$	$b_2$	
	$g_1$	$g_2$	$g_1, a_5$	$g_1, a_2, a_4, a_5$	$g_2$	$b_2$
			$g_2, a_3$	$g_2, a_4, a_3$	$g_1$	$g_4$
			$g_2, a_5$	$g_2, a_4, a_5$	$g_1$	$g_4$
			$g_3, a_1$	$a_1, a_4, g_3$	$g_2$	$b_2$
			$g_3, a_3$	$g_3, a_4, a_3$	$g_1$	$g_4$
			$a_1, b_1$	$a_1, a_2, a_3, b_1$	$g_1$	$a_4$
	B	$P$ (außen) oder $P \in \{g_1, g_2, g_3\}$	$a_1, b_3$	$a_1, a_4, b_2, b_3$	$g_1$	$g_3$
			$a_3, b_3$	$a_3, b_2, b_3$	$a_4$	$g_4$
			$a_5, b_1$	$b_1, b_2, a_5$	$a_4$	$g_4$
			$P$ zu $b_1$ und $b_3$	$P, b_1, b_2, b_3$	$a_4$	$g_4$

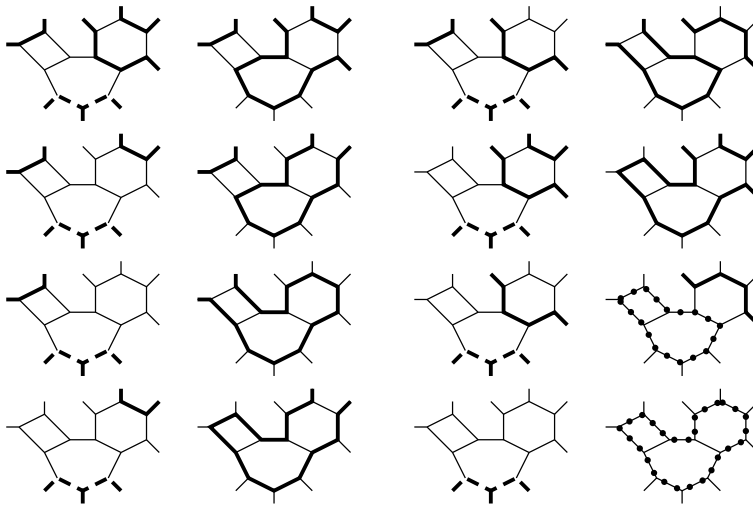
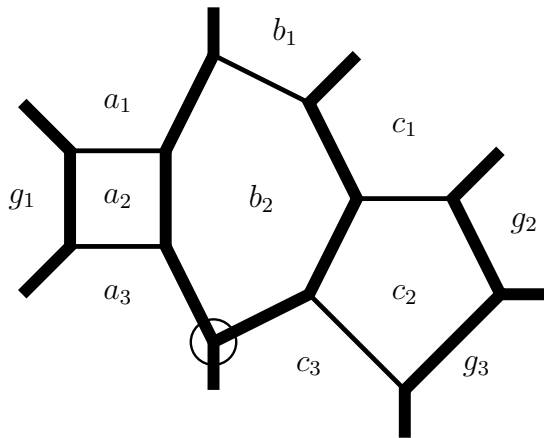


Abb. 5.84 Umgeleitete Hamiltonwege durch  $Oe(r)$ .

In  $Oe(s)$  (Abb. 5.85) werden die Polygone  $a_1, a_2, a_3$  zu  $A$ ,  $b_1, b_2$  zu  $B$  und  $c_1, c_2, c_3$  zu  $C$  vereinigt.



**Abb. 5.85** Der  $n$ -Schnitt  $Oe(s)$

Die benachbarten Polygone  $g_2$  und  $g_3$  können nicht beide Vierecke sein. Da  $g_1$  zu einem Viereck benachbart ist, kann es selbst auch keins sein. Da mit  $a_2$  bereits ein Viereck zum Siebeneck  $b_2$  benachbart sind, dürfen  $c_1$  und  $c_3$  ihrerseits keine Vierecke sein.

Wäre  $g_1 \in \{g_2, g_3\}$ , dann würde ein 4-Schnitt durch  $g_1, a_2, b_2$  und  $c_2$  die Polygone  $c_1$  und  $c_3$  voneinander trennen.

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von
$A$	$P$ (außen) oder $P \in \{g_2, g_3\}$	$P$ zu $a_1$ und $a_3$	$P, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$
	$B$	$a_3, b_1$	$b_1, b_2, a_3$	$g_1$	$c_2$
	$C$	$a_1, c_1$	$a_1, b_2, c_1$	$b_1$	$c_2$
		$a_1, c_3$	$a_1, b_2, c_3$	$g_1$	$c_2$
		$a_3, c_1$	$a_3, b_2, c_1$	$g_1$	$c_2$
$B$	$C$	$b_1, c_3$	$b_1, b_2, c_3$	$g_1$	$c_2$
$C$	$P$ (außen) oder $P = g_1$	$P$ zu $c_1$ und $c_3$	$P, c_1, b_2, c_3$	$g_1$	$c_2$
	$g_2$	$g_2, c_3$	$g_2, c_2, c_3$	$b_2$	$g_3$
	$g_3$	$g_3, c_1$	$c_1, c_2, g_3$	$b_2$	$g_2$

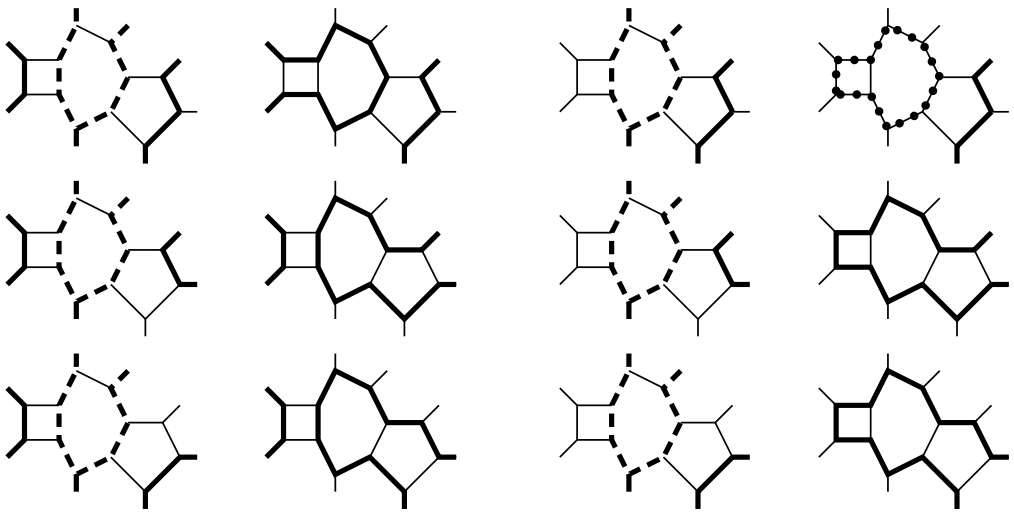
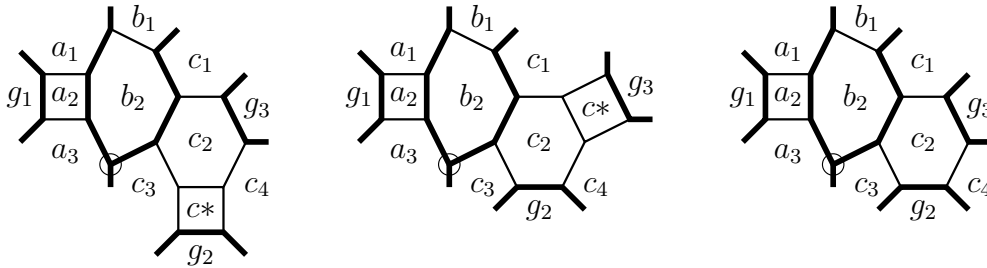


Abb. 5.86 Umgeleitete Hamiltonwege durch  $Oe(s)$ .

Die nächsten drei Teilgraphen  $Oe(t)$ ,  $Oe(u)$  und  $Oe(v)$  ähneln einander. Sie unterscheiden sich nur dadurch, dass in  $Oe(t)$  und  $Oe(u)$  im Vergleich zu  $Oe(v)$  je eine Kante durch ein Viereck  $c^*$  ersetzt wurde. In allen Fällen werden  $a_1, a_2, a_3$  zu  $A$ ,  $b_1, b_2$  zu  $B$  und  $c_1 \dots c_4$  mit  $c^*$  zu  $C$  vereinigt.



**Abb. 5.87** Die  $n$ -Schnitte  $Oe(t)$ ,  $Oe(u)$  und  $Oe(v)$

Die Teilgraphen  $Oe(t)$  und  $Oe(u)$  werden eingeführt, damit man bei  $Oe(v)$  voraussetzen kann, dass  $g_2$  und  $g_3$  keine Vierecke sind. (Wegen  $O2(f)$  dürfen ohnehin nicht beide Polygone zugleich Vierecke sein.) Da die  $c^*$  in beiden Fällen ein Viereck ist, sind es  $g_2$  und  $g_3$  in keinem Fall.

Die Polygone  $g_1, a_1$  und  $a_3$  sind keine Vierecke, weil  $a_2$  ein Viereck ist. Stimmt in einem dieser Graphen  $g_1$  mit  $g_2$  überein, dann trennt ein 4-Schnitt durch  $g_1, a_2, b_2$  und  $c_1$  die Polygone  $a_1$  und  $a_3$ . Ist  $g_1 = g_3$ , dann gilt das Gleiche für einen 4-Schnitt durch  $g_1, a_2, b_2$  und  $c_3$ .

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von
$A$	$P$ (außen) oder $P \in \{g_2, g_3\}$	$P$ zu $a_1$ und $a_3$	$P, a_1, a_2, a_3$	$g_1$	$b_2$
	$B$	$a_3, b_1$	$b_1, b_2, a_3$	$g_1$	$c_2$
	$C$	$a_1, c_1$	$a_1, b_2, c_1$	$b_1$	$c_2$
		$a_1, c_3$	$a_1, b_2, c_3$	$g_1$	$c_2$
		$a_1, c_4$	$a_1, b_2, c_2, c_4$	$g_2$	$g_3$
		$a_3, c_1$	$c_1, b_2, a_3$	$g_1$	$c_2$
		$a_3, c_4$	$a_3, b_2, c_2, c_4$	$g_2$	$g_3$
		$B$	$C$	$b_1, c_3$	$b_1, b_2, c_3$
$C$	$P$ (außen) oder $P = g_1$	$b_1, c_4$	$b_1, b_2, c_2, c_4$	$g_2$	$g_3$
		$P$ zu $c_1$ und $c_3$	$P, c_1, c_2, c_3$	$b_2$	$g_2$
		$P$ zu $c_1$ und $c_4$	$P, c_1, c_2, c_4$	$b_2$	$g_3$
	$P$ zu $c_3$ und $c_4$	$P, c_3, c_2, c_4$	$b_2$	$g_2$	
	$g_2$	$g_2, c_1$	$c_1, c_2, c_3, g_2$	$b_2$	$g_3$
	$g_3$	$g_3, c_3$	$c_1, c_2, c_3, g_3$	$b_2$	$g_2$

Auch die Umleitungen der Hamiltonwege brauchen nur für  $Oe(v)$  durchgeführt zu werden. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass jeder dieser Hamiltonwege genauso funktioniert, wenn man eins der  $c^*$ -Vierecke einfügt.

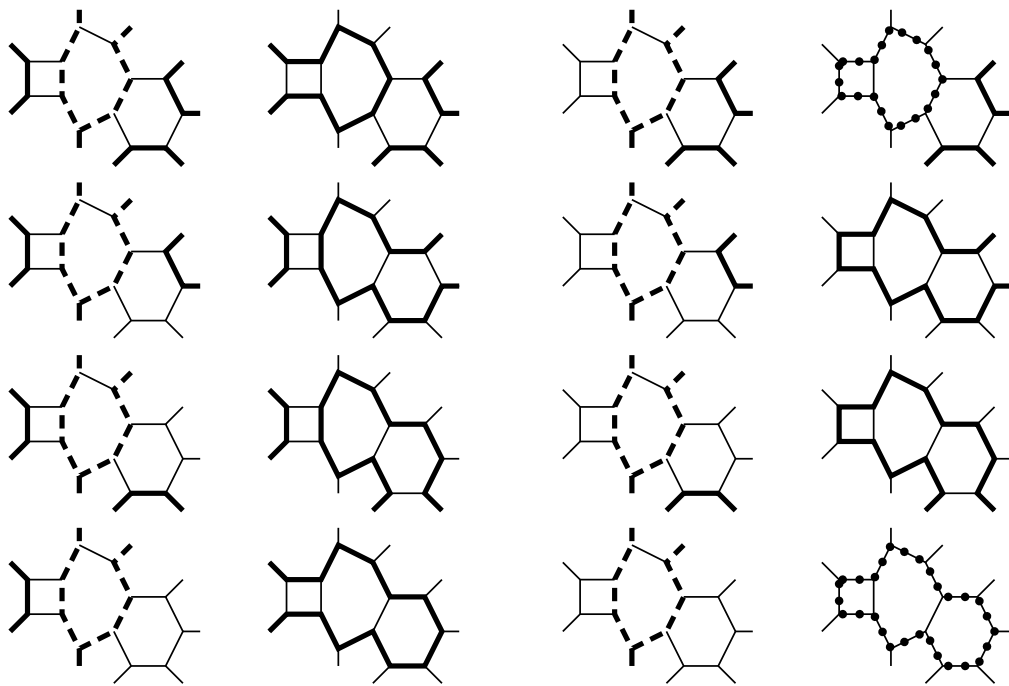
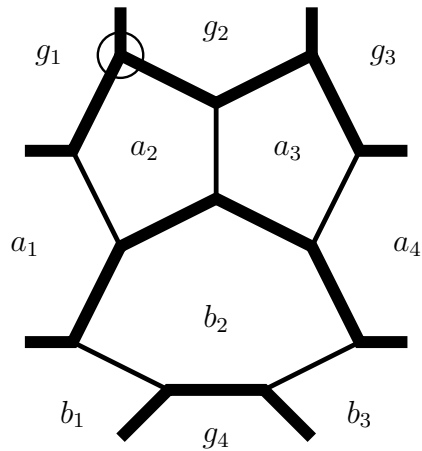


Abb. 5.88 Umgeleitete Hamiltonwege durch  $Oe(v)$ .

In  $Oe(w)$  (Abb. 5.89) werden die Polygone  $a_1 \dots a_4$  zu  $A$  und  $b_1, b_2, b_3$  zu  $B$  zusammengefasst.



**Abb. 5.89** Der  $n$ -Schnitt  $Oe(w)$

Wegen  $O2(k)$  ist weder  $g_1$  noch  $g_3$  ein Viereck. Wegen  $Oe(s)$  ist  $g_4$  auch keins.

Wäre  $g_4 \in \{g_1, g_2, g_3\}$ , dann würde durch  $g_4, b_2$  und  $a_2$  oder  $a_3$  ein 3-Schnitt gehen, der  $b_1$  von  $b_3$  trennt. Ist  $g_1 = g_3$ , dann trennt ein 3-Schnitt durch  $g_1, a_2$  und  $a_3$  die Polygone  $g_2$  und  $b_2$  voneinander.

In der folgenden Tabelle wurden einige Einträge aus Symmeriegründen weggelassen.

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von
$A$	$P$ (außen) oder $P = g_4$	$P$ zu $a_1$ und $a_4$	$P, a_1, b_2, a_4$	$a_2$	$g_4$
	$g_2$	$a_1, g_2$	$a_1, a_2, g_2$	$g_1$	$b_2$
	$g_3$	$a_1, g_3$	$a_1, a_2, a_3, g_3$	$g_2$	$b_2$
	$B$	$a_1, b_3$	$a_1, b_2, b_3$	$a_2$	$g_4$
$B$	$P$ (außen) oder $P \in \{g_1, g_2, g_3\}$	$P$ zu $b_1$ und $b_3$	$P, b_1, b_2, b_3$	$a_2$	$g_4$



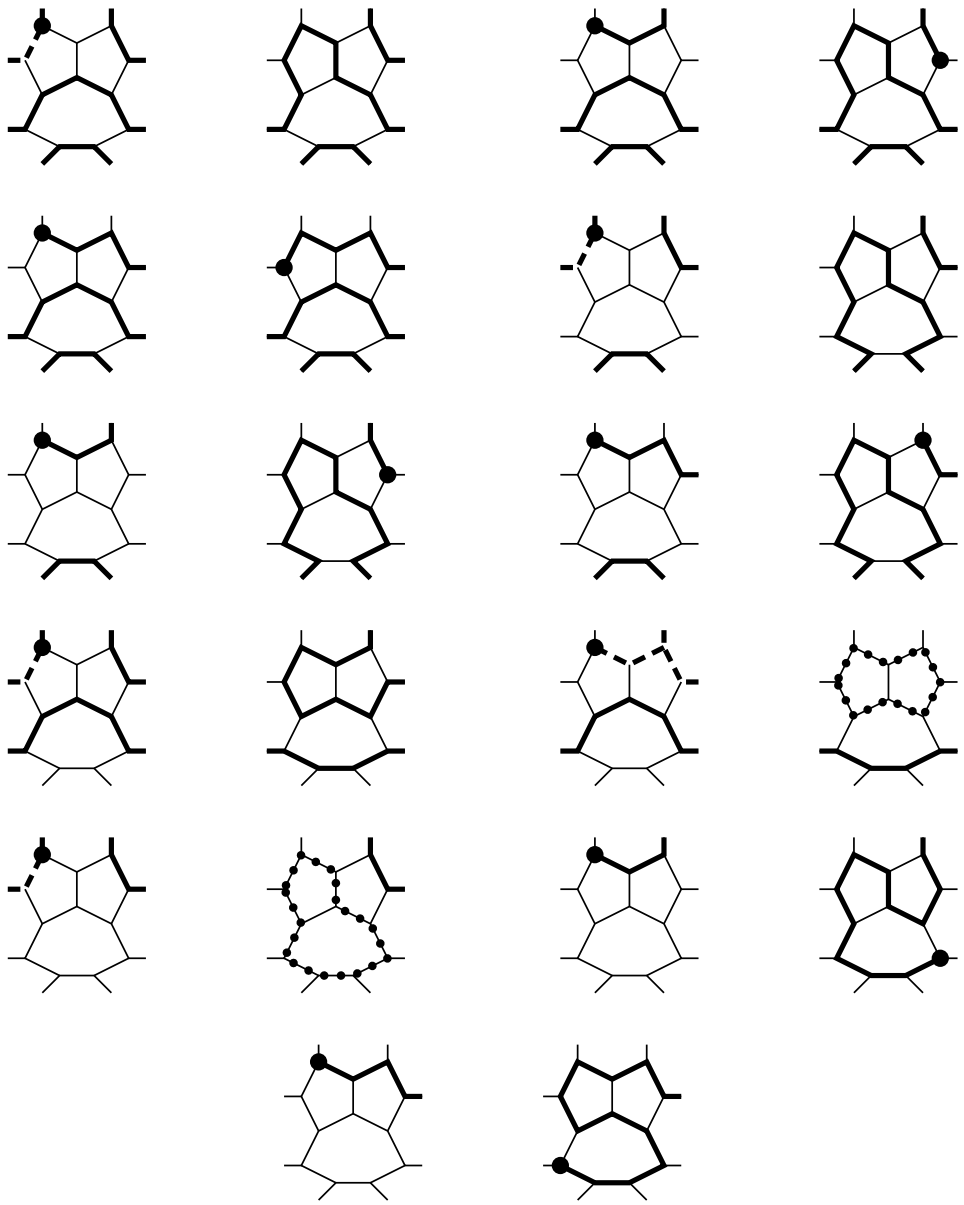


Abb. 5.90 Umgeleitete Hamiltonwege durch  $Oe(w)$ .

Vorletzte Reduktion:  $Oe(x)$  (Abb. 5.91). Die Polygone  $a_1 \dots a_5$  werden zu  $A$  vereinigt,  $b_1, b_2, b_3$  zu  $B$ .

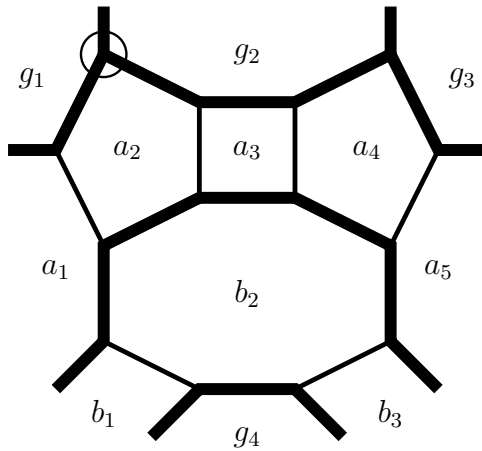


Abb. 5.91 Der  $n$ -Schnitt  $Oe(x)$

Die Polygone  $g_1$  und  $g_3$  können wegen  $O2(m)$  keine Vierecke sein,  $g_2$  kann es auch nicht sein, weil  $a_3$  eines ist, und weil zum Achteck  $b_2$  keine zwei Vierecke benachbart sein können, ist auch  $g_4$  keines.

Wäre  $g_1 = g_3$ , dann würde durch  $g_1, a_2, a_3, a_4$  ein 4-Schnitt gehen, der  $g_2$  von  $b_2$  trennt. Wäre  $g_4 = g_1$  oder  $g_4 = g_2$ , dann würde ein 3-Schnitt durch  $a_2, b_2$  und  $g_4$  die Polygone  $a_1$  und  $a_3$  voneinander trennen.

Der Fall  $g_3 = g_4$  wird aus Symmetriegründen weggelassen. Deswegen ist auch die folgende Tabelle recht kurz.

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von
$A$	$P$ (außen) oder $P = g_4$	$P$ zu $a_1$ und $a_5$	$P, a_1, b_2, a_5$	$g_4$	$a_4$
	$g_1$	$g_1, a_5$	$g_1, a_2, b_2, a_5$	$a_4$	$g_4$
	$g_2$	$a_1, g_2$	$a_1, a_2, g_2$	$g_1$	$b_2$
	$B$	$a_1, b_3$	$a_1, b_2, b_3$	$b_2$	$g_4$
$B$	$P$ (außen) oder $P \in \{g_1, g_2, g_3\}$	$P$ zu $b_1$ und $b_3$	$P, b_1, b_2, b_3$	$b_2$	$a_4$

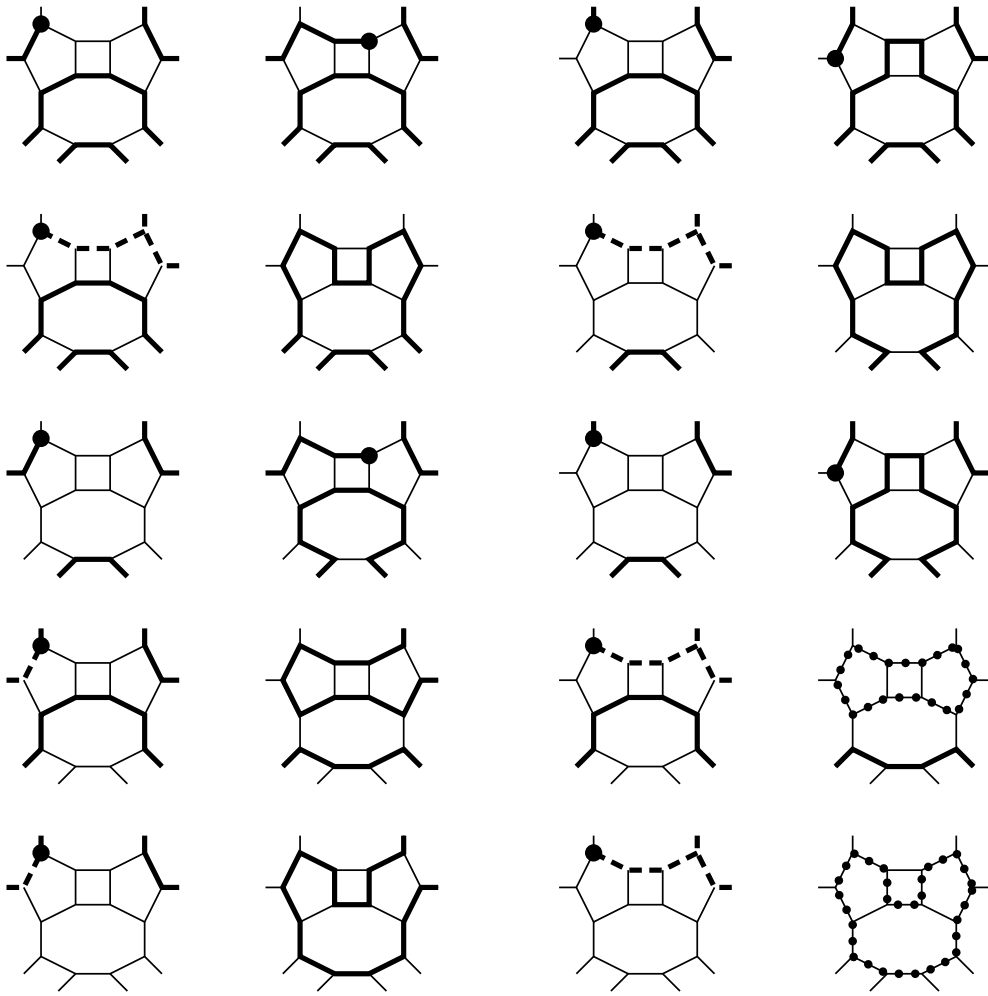
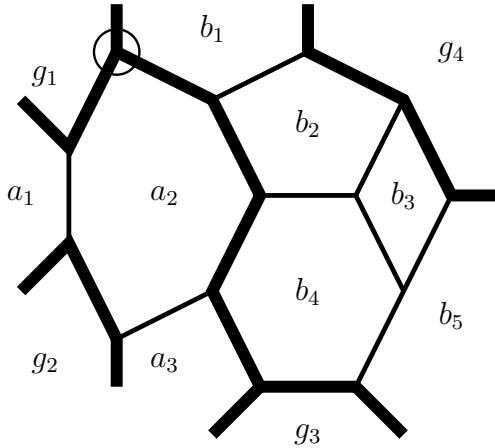


Abb. 5.92 Umgeleitete Hamiltonwege durch  $Oe(x)$ .

Der letzte  $n$ -Schnitt ist  $Oe(y)$  (Abb. 5.93). Hier werden die Polygone  $a_1, a_2, a_3$  zu  $A$  und  $b_1 \dots b_5$  zu  $B$  zusammengefasst.



**Abb. 5.93** Der  $n$ -Schnitt  $Oe(y)$

Wegen  $Oe(p)$  ist  $g_1$  kein Viereck. Das Gleiche gilt wegen  $Oe(s)$  für  $g_2$  und wegen  $O2(i)$  für  $g_3$ .

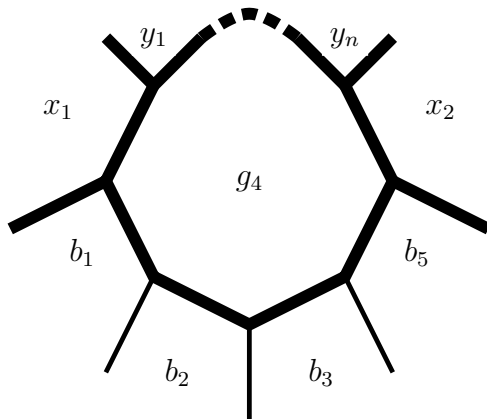
Das Polygon  $g_4$  muss gesondert betrachtet werden. Es ist wegen  $b_3$  kein Viereck, wegen  $O2(b)$  kein Fünfeck, wegen  $O2(a)$  kein Sechseck und wegen  $Oe(n)$  kein Siebeneck. Es muss sich also mindestens um ein Achteck handeln.

Es gilt  $g_1 \neq g_2$ , weil sonst ein 2-Schnitt durch  $g_1$  und  $a_2$  vorläge. Wäre  $g_1 = g_3$ , dann würde ein 3-Schnitt durch  $g_1, a_2$  und  $b_4$  die Polygone  $g_2$  und  $b_2$  trennen. Im Falle  $g_1 = g_4$  trennt ein 3-Schnitt durch  $g_1, a_2$  und  $b_2$  die Polygone  $b_1$  und  $b_4$  voneinander.

Außerdem muss  $g_2 \neq g_3$  gelten, weil es sonst in  $G$  einen 2-Schnitt durch  $g_2$  und  $a_3$  gäbe. Ferner würde im Falle  $g_2 = g_4$  ein 3-Schnitt durch  $g_2, a_2$  und  $b_2$  entstehen, der  $g_1$  von  $b_4$  trennt. Schließlich kann  $g_3 = g_4$  nicht gelten, sonst würde ein 3-Schnitt durch  $g_3, b_4$  und  $b_2$  die Polygone  $a_2$  und  $b_3$  trennen.

Die Abbildung 5.93 ist noch unvollständig. Falls nämlich sowohl  $b_1$  als auch  $b_5$  jeweils eine Kante außerhalb der Abbildung mit demselben Polygon  $P$  gemeinsam haben, entsteht in  $H$  ein 2-Schnitt, ohne dass in  $G$  zwei in dieser Abbildung sichtbare Polygone durch einen 3- oder 4-Schnitt getrennt würden.

Um diesem Problem beizukommen, betrachte man die Umgebung des Polygons  $g_4$  (Abb. 5.94).



**Abb. 5.94** Das Polygon  $g_4$  und ihre Umgebung

An der gestrichelten Linie können weitere Polygone  $y_k$  mit  $k \in \{2 \dots n - 1\}$  liegen.

Weil  $g_4$  mindestens ein Achteck ist, gilt  $n \geq 2$ .

Die neun abgebildeten Polygone müssen paarweise verschieden sein, weil andernfalls ein 2-Schnitt in  $G$  vorliegen würde.

Angenommen, es gibt ein Polygon  $P \neq g_4$ , mit dem  $b_1$  und  $b_5$  je eine Kante gemeinsam haben. Wäre  $P = x_1$ , dann würde ein 3-Schnitt durch  $x_1, g_4$  und  $b_5$  das Polygon  $b_1$  und  $x_2$  voneinander trennen. (Aus Symmetriegründen ist somit auch  $P \neq x_2$ .) Wäre hingegen  $P \in \{y_1 \dots y_n\}$ , dann trennt ein 3-Schnitt durch  $P, g_4$  und  $b_1$  die Polygone  $x_1$  und  $x_2$  voneinander. Wenn  $P$  aber keine Kante mit  $g_4$  gemeinsam hat, dann trennt ein 4-Schnitt durch  $P, b_1, g_4$  und  $b_5$  die Polygone  $b_2$  und  $b_3$  auf der einen von  $x_1$  und  $y_1$  auf der anderen Seite. Somit gibt es kein solches  $P$ .

Alle übrigen Fälle werden wie gehabt per Tabelle geprüft.

1. Polygon	2. Polygon	in $G$ benachbart	Schnitt durch	trennt in $G$	von	
$A$	$P$ (außen) oder $P = g_4$	$P$ zu $a_1$ und $a_3$	$P, a_1, a_2, a_3$	$g_2$	$b_4$	
	$g_1$	$g_1, a_3$	$g_1, a_2, a_3$	$g_2$	$b_4$	
	$g_3$	$a_1, g_3$	$a_1, a_2, b_4, g_3$	$g_2$	$b_2$	
	$B$		$a_1, b_1$	$a_1, a_2, b_1$	$g_1$	$b_4$
			$a_1, b_5$	$a_1, a_2, b_4, b_5$	$g_2$	$b_2$
			$a_3, b_1$	$b_1, a_2, a_3$	$g_2$	$b_4$
			$a_3, b_5$	$a_3, b_4, b_5$	$b_2$	$g_3$
$B$	$P$ (außen) oder $P = g_2$	(siehe Abb. 5.94)				
	$g_1$	$g_1, b_5$	$g_1, a_2, b_4, b_5$	$g_2$	$b_2$	
	$g_3$	$b_1, g_3$	$b_1, b_2, b_4, g_3$	$a_2$	$g_4$	

Nach der in Abb. 5.95 erfolgenden Überprüfung, dass alle Hamiltonwege durch den Teilgraphen  $Oe(y)$  umgeleitet werden können, ist bewiesen, dass ein nichttrassabler Graph  $G$  mit maximal 52 Punkten keins der  $n$ -Stücke  $Oe(a) \dots Oe(y)$  enthalten darf.

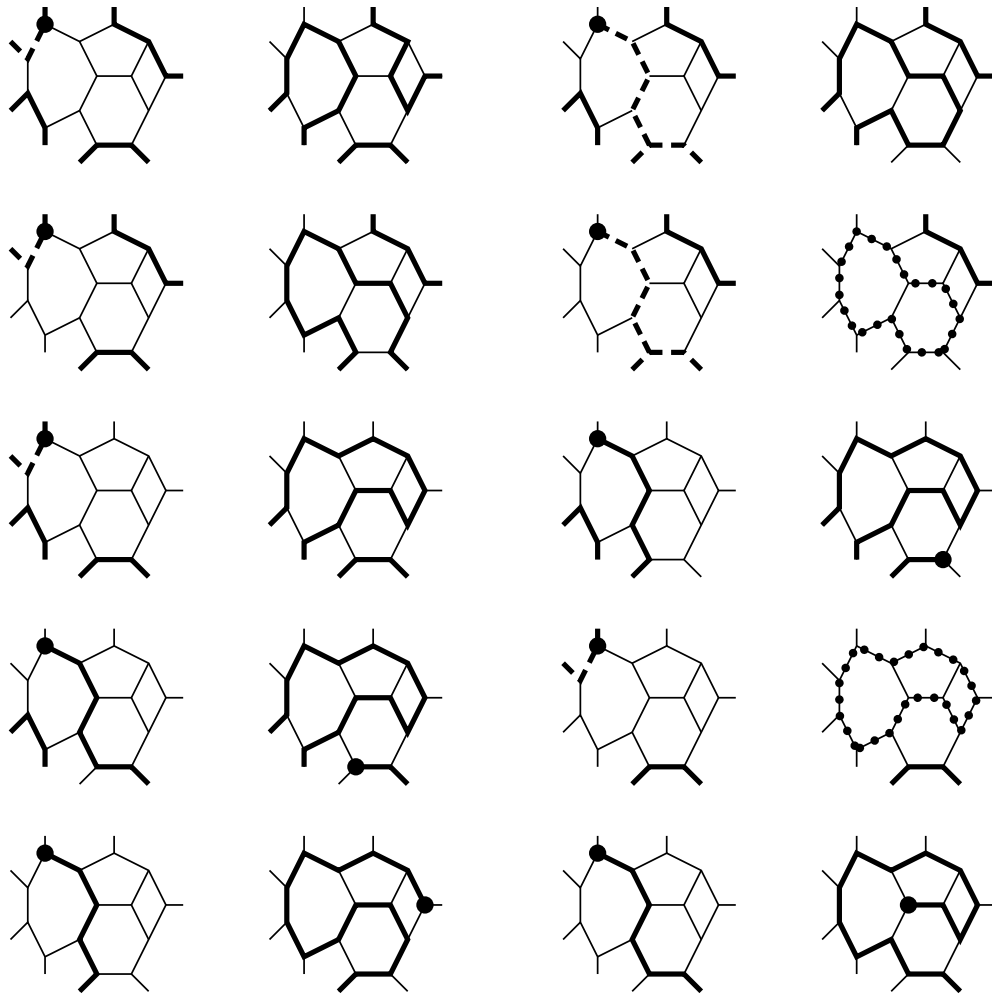


Abb. 5.95 Umgeleitete Hamiltonwege durch  $Oe(y)$ .





In Abb. 5.96 können keine zwei Polygone in der Skizze identisch sein, weil sonst ein wesentlicher 4-Schnitt vorläge. Seien zunächst  $A$  und  $B$  Siebenecke sowie  $C$  ein Achteck. Dann hat jedes mit einem Stern markierte Polygon mindestens Länge 7. Die drei Polygone, die mit je zwei Sternen markiert sind, können keine Vierecke sein. Nach Lemma 5.9 ist mindestens eins der Länge 7 oder mehr darunter.

$G$  enthält also mindestens ein Sechseck, zwei Siebenecke, zwei Achtecke und neun weitere Polygone der Länge 7 oder mehr. Aus Formel 5.3 folgt, dass  $G$  mindestens 13 Vierecke enthalten muss. Von den maximal 28 Polygonen, die  $G$  enthält, können 16 bereits keine Vierecke sein. Widerspruch!

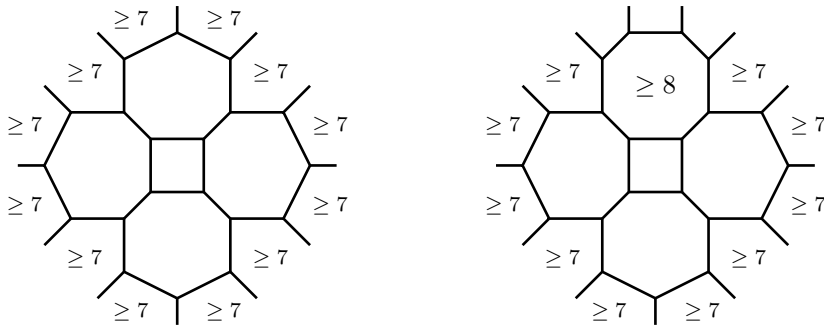
Nun sei  $C$  ein  $k$ -Eck mit  $k \geq 9$ . Damit ist die Anzahl der Polygone mit zwei Sternen  $k - 5$ . Von diesen Polygonen darf für  $k = 9$  keins ein Viereck sein, bei  $k = 10$  oder  $k = 11$  darf es nur ein Polygon sein, bei  $k = 12$  drei und so weiter. Unter ihnen sind also in jedem Fall mindestens vier, die *keine* Vierecke sein dürfen. Eins davon muss wegen Lemma 5.8 auch wieder mindestens ein Siebeneck sein.

Man findet also weiterhin neun Polygone der Länge 7 oder mehr, zusätzlich zu den Siebenecken  $A$  und  $B$ , dem Sechseck  $f^*$  und dem  $k$ -Eck  $C$ . Das ergibt mit Formel 5.3, dass mindestens  $k + 5 \geq 14$  Vierecke auftreten müssen.  $A, B, C, f^*$  sowie die mit „ $\geq 8$ “ und mit einem Stern gekennzeichneten Polygone gehören nicht dazu; das sind schon 13 Stück. Unter den mit zwei Sternen gekennzeichneten Polygone findet man ebenfalls vier, die keine Vierecke sind. Widerspruch!

**Fall 3:** Zu  $f$  seien nur Polygone der Länge mindestens 7 benachbart.

Sind alle zu  $f$  benachbarten Polygone Siebenecke, so müssen auch alle zu diesen benachbarten Polygone mindestens Siebenecke sein, weil sich sonst eine  $Oe$ -Reduktion ergäbe.  $G$  enthält damit mindestens 16 Polygone der Länge  $\geq 7$ . Nach Einsetzung in die Formel ergibt sich  $p_4 \geq 16$ , was bei maximal 28 Polygonen zu einem Widerspruch führt.

Seien nun zu  $f$  drei Siebenecke und eine Achteck  $f^*$  benachbart. Damit sind wieder alle zehn weiteren zu den Siebenecken benachbarten Polygone mindestens Siebenecke, und von den übrigen drei zu  $f^*$  benachbarten Polygonen ist maximal eins ein Viereck. Die Formel liefert nun  $p_4 \geq 13$ , und



**Abb. 5.97** links: Ein Viereck zwischen vier Siebenecken  
rechts: Ein Viereck zwischen drei Siebenecken und einem  $\geq 8$ -Eck

16 Polygone in  $G$  können keine Vierecke sein. Widerspruch!

Schließlich der Fall, dass zu  $f$  drei Siebenecke und ein  $k$ -Eck  $f^*$  mit  $k \geq 9$  benachbart sind. Dann ergibt dies eine Reihe von mindestens vier Polygonen, die zu  $f^*$  benachbart sind. Davon muss eine mindestens ein Siebeneck sein. Die Formel liefert nun  $p_4 \geq 16$ , und 14 Polygone sind mindestens Siebenecke.  $\square$

Zu jedem Acht- oder Neuneck ist maximal ein Viereck benachbart, zu jedem Zehn- oder Elfeck maximal zwei etc. (vgl. Tabelle S. 145). Durch Proposition 12 weiß man, dass zu jedem Viereck mindestens zwei Polygone der Länge größergleich 8 benachbart sind.

Zusammen ergibt das:

**Lemma 5.11** Sei  $G$  ein minimaler nichthamiltonscher Graph in  $\mathcal{F}$  mit  $\leq 52$  Punkten. Ist  $G$  zyklisch 4\*-zusammenhängend, so gilt:

$$2p_4 \leq p_8 + p_9 + 2p_{10} + 2p_{11} + 4p_{12} + 3p_{13} + \sum_{k \geq 7} (k-2)(p_{2k} + p_{2k+1})$$

## Schritt VII: Abschätzung der Höchstanzahl an Vierecken

An dieser Stelle sei an die Formel 5.3 erinnert:

$$p_4 \geq p_6 + 2p_7 + 3p_8 + 4p_9 + \cdots - 16$$

Dieses Ergebnis fasst man nun mit Lemma 5.11 zusammen:

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 6} 2(k-5) \cdot p_k - 32 \\ &= 2p_6 + 4p_7 + 6p_8 + 8p_9 + 10p_{10} + 12p_{11} + 14p_{12} + 16p_{13} \\ &+ \sum_{k \geq 7} ((4k-10)p_{2k} + (4k-8)p_{2k+1}) - 32 \\ &\leq 2p_4 \\ &\leq p_8 + p_9 + 2p_{10} + 2p_{11} + 4p_{12} + 3p_{13} + \sum_{k \geq 7} (k-2)(p_{2k} + p_{2k+1}) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & 2p_6 + 4p_7 + 5p_8 + 7p_9 + 8p_{10} + 10p_{11} + 10p_{12} + 13p_{13} \\ &+ \sum_{k \geq 7} ((3k-8)p_{2k} + (3k-6)p_{2k+1}) \leq 32 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Multipliziert man nun die Formel aus Lemma 5.11 mit  $\frac{5}{2}$ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 5p_4 &\leq \frac{5}{2}p_8 + \frac{5}{2}p_9 + 5p_{10} + 5p_{11} + 10p_{12} + \frac{15}{2}p_{13} \\ &+ \sum_{k \geq 7} \left(\frac{5}{2}k - 5\right)(p_{2k} + p_{2k+1}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Subtrahiert man diese Summe von der oberen, so erhält man:

$$\begin{aligned} & 2p_6 + 4p_7 + \frac{5}{2}p_8 + \frac{9}{2}p_9 + 3p_{10} + 5p_{11} + \frac{11}{2}p_{13} \\ &+ \sum_{k \geq 7} \left(\left(\frac{k}{2} - 3\right)p_{2k} + \left(\frac{k}{2} - 1\right)p_{2k+1}\right) \end{aligned}$$

Jedes  $p_k$  hat einen positiven Vorfaktor! Also muss jedes  $p_k$  in (5.4) einen größeren Vorfaktor haben als in (5.5). (Ausnahme ist  $k = 12$ ; dort sind die Vorfaktoren gleich.) Weil auch die  $p_k$  nichtnegativ sein müssen, kann man die Summen gegeneinander abschätzen.

Das ergibt zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
5p_4 &\leq \frac{5}{2}p_8 + \frac{5}{2}p_9 + 5p_{10} + 5p_{11} + 10p_{12} + \frac{15}{2}p_{13} \\
&+ \sum_{k \geq 7} \left(\frac{5}{2}k - 5\right)(p_{2k} + p_{2k+1}) \\
&\leq 2p_6 + 4p_7 + 5p_8 + 7p_9 + 8p_{10} + 10p_{11} + 10p_{12} + 13p_{13} \quad (5.6) \\
&+ \sum_{k \geq 7} ((3k - 8)p_{2k} + (3k - 6)p_{2k+1}) \leq 32 \\
&\Rightarrow p_4 \leq \frac{32}{5}
\end{aligned}$$

Es gilt  $p_4 \in \mathbb{N}$ , und deswegen auch:

**Lemma 5.12** *Sei  $G$  ein minimaler nichthamiltonscher Graph in  $\mathcal{F}$ . Ist  $G$  zyklisch 4\*-zusammenhängend, so enthält  $G$  maximal sechs Vierecke.*

Allerdings kann man mit (5.6) noch etwas mehr beweisen. Angenommen,  $G$  enthielte ein Siebeneck. Dann wäre  $p_7 \geq 1$ , womit gelten würde:

$$\begin{aligned}
5p_4 &\leq \frac{5}{2}p_8 + \frac{5}{2}p_9 + 5p_{10} + 5p_{11} + 10p_{12} + \frac{15}{2}p_{13} \\
&+ \sum_{k \geq 7} \left(\frac{5}{2}k - 5\right)(p_{2k} + p_{2k+1}) \\
&\leq 2p_6 + 4(p_7 - 1) + 5p_8 + 7p_9 + 8p_{10} + 10p_{11} + 10p_{12} + 13p_{13} \quad (5.7) \\
&+ \sum_{k \geq 7} ((3k - 8)p_{2k} + (3k - 10)p_{2k+1}) \leq 32 - 4 = 28 \\
&\Rightarrow p_4 \leq 5
\end{aligned}$$

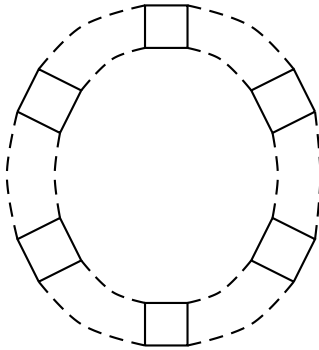
Wenn  $p_8 \geq 1$  ist, hat man:

$$\begin{aligned}
 5p_4 &\leq \frac{5}{2}p_8 + \frac{5}{2}p_9 + 5p_{10} + 5p_{11} + 10p_{12} + \frac{15}{2}p_{13} \\
 &+ \sum_{k \geq 7} \left(\frac{5}{2}k - 5\right)(p_{2k} + p_{2k+1}) \\
 &\leq 2p_6 + 4p_7 + \left(5 - \frac{5}{2}\right)p_8 + 7p_9 + 8p_{10} + 10p_{11} + 10p_{12} + 13p_{13} \quad (5.8) \\
 &+ \sum_{k \geq 7} ((3k - 8)p_{2k} + (3k - 10)p_{2k+1}) \leq 32 - \frac{5}{2} \\
 &\Rightarrow p_4 \leq 5
 \end{aligned}$$

Analog folgert man, dass auch für  $p_6 \geq 2, p_9 \geq 1, p_{10} \geq 1$  und  $p_{11} \geq 1$  folgt, dass  $p_4 \leq 5$  gelten muss.

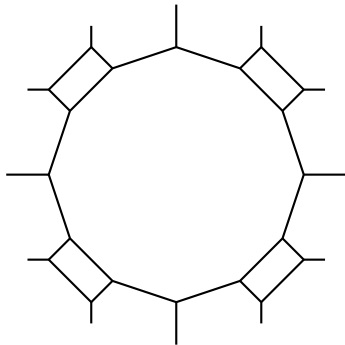
Im Folgenden wird angenommen,  $p_4 = 6$ . Dann ist  $p_k = 0$  für  $7 \leq k \leq 11$ . Wegen (5.4) muss auch  $\sum_{k \geq 12} p_k \leq 3$  gelten. Selbst  $\sum_{k \geq 12} p_k = 3$  ist nur möglich, wenn alle drei Polygone Zwölfecke sind!

Andererseits gilt nach Proposition 12, dass zu jedem Viereck mindestens zwei Polygone von Grad  $\geq 8$  benachbart sind. Gäbe es nur zwei solche Polygone, dann müssten alle sechs Vierecke zu jedem von ihnen benachbart sein. Dies führt unweigerlich zu einem wesentlichen 4-Schnitt.



**Abb. 5.98** Sechs Vierecke zwischen zwei Polygonen hoher Länge

Also muss es drei Polygone der Länge  $\geq 8$  geben; zwangsläufig drei Zwölfecke. Jedes von ihnen darf zu maximal vier Vierecken benachbart sein, und jedes Viereck muss zu mindestens zweien Zwölfecken benachbart sein. Das geht nur, wenn alle drei Zwölfecke zu *genau* vier Vierecken benachbart sind. Damit keine Reduktion wie auf S. 130ff möglich ist, müssen die Vierecke wie in Abb. 5.99 angeordnet sein.



**Abb. 5.99** Zwölfeck mit vier benachbarten Vierecken.

Sei  $Z_1$  eines dieser Zwölfecke. Nun ist aber jedes dieser Vierecke auch zu einem anderen Zwölfeck benachbart. Da es nur zwei weitere Zwölfecke gibt, muss eines von ihnen mindestens zwei Vierecke als gemeinsame Nachbarn mit  $Z_1$  haben. Anhand der Zeichnung lässt sich leicht erkennen, dass dies nicht ohne einen wesentlichen 4-Schnitt möglich ist. Darum kann man Lemma 5.12 verbessern zu:

**Lemma 5.13** *Sei  $G$  ein minimaler nichthamiltonscher Graph in  $\mathcal{F}$ . Ist  $G$  zyklisch 4\*-zusammenhängend, so enthält  $G$  maximal fünf Vierecke.*

### Schritt VIII: Der Widerspruch für jede Konstellation

Dies genügt, um mit Hilfe von Formel 5.1 die sieben möglichen Konstellationen aus Abb. 5.55 genauer zu überprüfen. (Zur Erinnerung: Eine dieser sieben Konstellationen muss in  $G$  auftauchen!) Ziel ist, jede von ihnen zu einem Widerspruch zu führen.

**Erste Konstellation:** Ein Viereck zwischen zwei Fünfecken (Abb. 5.100). Aufgrund der O2- und Oe-Reduktionen müssen die markierten Polygone mindestens die angegebene Länge haben.

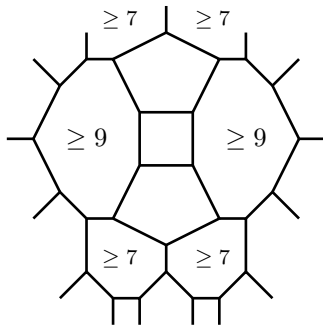


Abb. 5.100

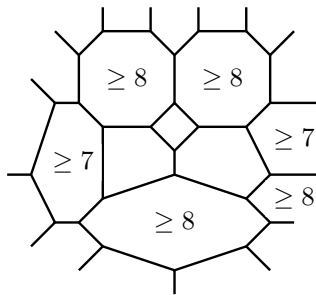
Man beachte, dass keins der Polygone am äußeren Rand mit einem anderen Polygon identisch sein kann, weil dies sonst einen wesentlichen 4-Schnitt ergäbe.

Auf dem äußeren Rand gibt es eine Sequenz von 13 nicht markierten Polygonen. Nach Lemma 5.8 müssen wenigstens drei davon mindestens Länge 7 haben. Nun wird Formel 5.1 angewendet:

$$2p_4 + p_5 = 12 + p_7 + 2p_8 + 3p_9 + \dots$$

Bekannt ist:  $p_4 \leq 5, p_7 \geq 4, p_9 \geq 2$ . Wegen der drei Polygone am äußeren Rand ist die Zahl auf der rechten Seite mindestens 25. Damit auf der linken Seite auch 25 herauskommen kann, muss  $G$  mindestens 20 Vier- und Fünfecke enthalten. Zusammen mit den neun Polygonen, die in die rechte Seite eingegangen sind, ergäbe das 29 Polygone. Widerspruch!

**Zweite Konstellation:** Ein Viereck, ein Fünfeck und ein Sechseck sind paarweise benachbart (Abb. 5.101).

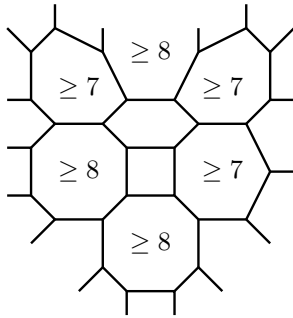


**Abb. 5.101**

Wieder ist  $2p_4 + p_5 = 12 + p_7 + 2p_8 + 3p_9 + \dots$  anzuwenden. Weil auf dem äußeren Rand 13 paarweise verschiedene Polygone aufeinanderfolgen, müssen mindestens drei von ihnen mindestens Länge 7 haben. Damit ergibt sich auf der rechten Seite mindestens 25. Neun Polygone wurden bereits gezählt, das Sechseck taucht in der Formel nicht auf. Damit auf der linken Seite die Summe 25 herauskommen kann, benötigt man mindestens 20 Vier- und Fünfecke. Widerspruch!



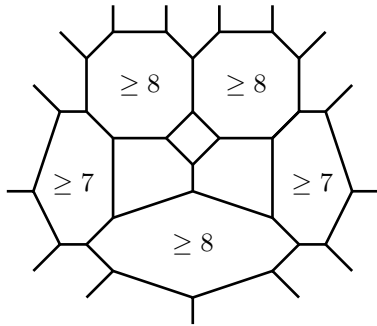
**Dritte Konstellation:** Ein Viereck neben einem Sechseck (Abb. 5.102).



**Abb. 5.102**

Diesmal gibt es 16 aufeinanderfolgende Randpolygone, also haben mindestens vier davon Länge  $\geq 7$ . In Formel 5.1 bedeutet das mindestens 25 auf der rechten Seite, und elf Polygone können keine Vier- oder Fünfecke sein.

**Vierte Konstellation:** Ein Viereck und zwei Fünfecke paarweise benachbart (Abb. 5.103).



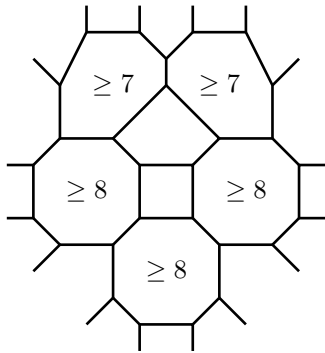
**Abb. 5.103**

Mit 15 Randpolygone hat man mindestens 4 Polygone der Länge  $\geq 7$ . In Formel 5.1 ergibt das die Zahl 24 auf der rechten Seite bei 9 gezählten Polygone, was noch keinen Widerspruch bedeutet.

Angenommen, es gäbe *genau* vier Polygone von Grad mindestens 7 am Rand. Dann findet man dazwischen vier Sequenzen von je drei Polygone der Länge 4 bis 6. Durch Lemma 5.9 weiß man allerdings, dass von drei aufeinanderfolgenden Polygone, von denen keins die Länge 7 oder mehr hat, wenigstens eines ein Viereck sein muss. Ist eines dieser Vierecke unter den oberen sieben Randpolygone, dann hat eins der beiden oberen mit „ $\geq 8$ “ markierten Polygone mindestens Länge 10. (In diesem Fall würde die Sequenz am Rand aus mindestens 17 Polygone bestehen, was fünf Polygone der Länge mindestens 7 nach sich zieht.) Wenn unter den oberen sieben Randpolygone kein Viereck auftaucht, müssen mindestens drei von ihnen Länge mindestens 7 haben, was eine Sequenz der Länge 8 unter den übrigen bedeuten würde. In beiden Fällen ist also die Anzahl der Polygone der Länge 7 oder mehr am Rand der Abbildung mindestens fünf. Damit ergibt sich in Formel 5.1 rechts eine 25, und mindestens zehn Polygone haben Länge 7 oder mehr.



**Sechste Konstellation:** Ein Viereck neben einem Fünfeck (Abb. 5.105).



**Abb. 5.105**

Mit der neuen Abschätzung aus Lemma 5.14 muss es mindestens fünf Polygone der Länge mindestens 7 am Rand der Abbildung geben. Nach Formel 5.1 bedeutet das  $2p_4 + p_5 \leq 25$ , und zehn Polygone können keine Vier- oder Fünfecke sein.

**Siebte Konstellation:** Ein Viereck, dessen Nachbarn keine Fünf- oder Sechsecke sind. Hier ist zu unterscheiden, wie viele Nachbarn Siebenecke sind.

**Konstellation 7a:** Kein Nachbarpolygon ist ein Siebeneck.

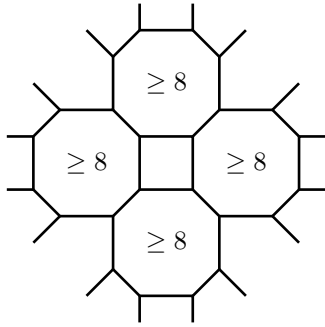


Abb. 5.106

Da mindestens 16 Randpolygone vorliegen, haben wenigstens 6 Polygone Länge 7 oder mehr. Es folgt die Abschätzung  $2p_4 + p_5 \leq 26$  und zehn Polygone, die keine Vier- oder Fünfecke sein können.

**Konstellation 7b:** Genau ein Nachbar ist ein Siebeneck (Abb. 5.107). Dessen Nachbarn müssen ebenfalls mindestens Siebenecke sein, weil sonst eine *Oe*-Reduzierung möglich ist.

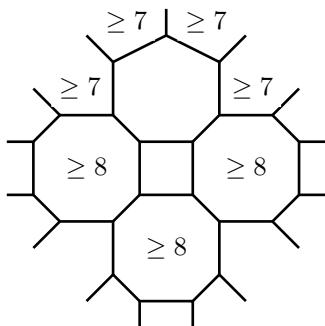
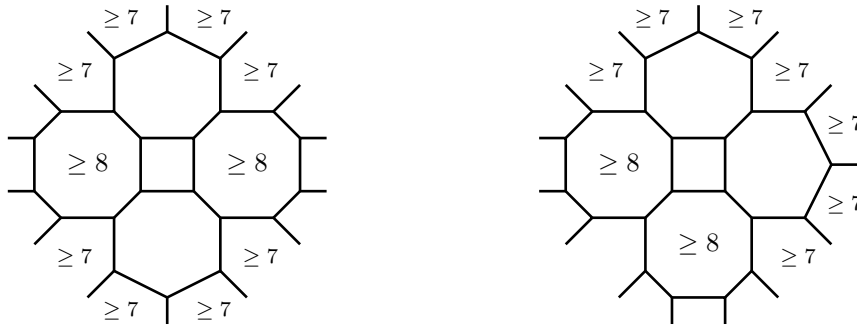


Abb. 5.107

Das bedeutet noch elf Randpolygone unbekannter Länge. Von diesen müssen wenigstens drei mindestens Länge 7 haben. Daraus folgt  $2p_4 + p_5 \leq 27$ , und elf Polygone sind keine Vier- oder Fünfecke.

**Konstellation 7c:** Zwei Nachbarn sind Siebenecke



**Abb. 5.108** linke Seite: Die Siebenecke liegen einander gegenüber  
rechte Seite: Die Siebenecke liegen nebeneinander

Liegen die Siebenecke einander gegenüber, so hat man zwölf Polygone, die keine Vier- oder Fünfecke sein können, und  $2p_4 + p_5 \leq 26$ . Liegen sie nebeneinander, findet man elf Polygone, die mindestens Länge 7 haben, und  $2p_4 + p_5 \leq 25$ . Beides führt zum Widerspruch.

Damit sind alle Möglichkeiten ausgeschlossen, welche Polygone zu einem Viereck in  $G$  benachbart sein können. Weil  $G$  nach Voraussetzung ein Viereck enthalten muss, kann es keinen zyklisch 4\*-zusammenhängenden nichttrassablen Graphen mit weniger als 54 Punkten geben. Damit ist Proposition 11 bewiesen.

Aus den Propositionen 8, 9, 10 und 11 folgt insgesamt, dass ein nichttrassabler Graph  $G \in \mathcal{F}$  mindestens 54 Punkte enthalten muss. Dies ist die Aussage von Proposition 7 und das Endergebnis der vorliegenden Arbeit.

# Literaturverzeichnis

- [1] R. E. L. ALDRED, S. BAU, D. A. HOLTON, B. D. MCKAY,  
„Nonhamiltonian 3-connected cubic planar graphs“, SIAM J. Discrete  
Math. 13, Vol.1 (2000), S. 25-32
- [2] D. W. BARNETTE, „Every simple 3-polytope with 34 vertices is  
Hamiltonian“, Discrete Math. 62 (1986), S. 1-20
- [3] D. W. BARNETTE & G. WEGNER, „Hamiltonian circuits in simple  
3-polytopes with up to 26 vertices“, Israel J. Math. 19 (1974),  
S. 212-216
- [4] J. W. BUTLER, „Hamiltonian Circuits on Simple 3-Polytopes“, J.  
Combin. Theory B, 15 (1973), S. 69-73
- [5] B. GRÜNBAUM, „Convex polytopes“, John Wiley & sons, Ltd. (1967)
- [6] S. L. GUOY, „Anwendungen des Tutte-Dreiecks“, Diplomarbeit  
(2008), TU Dortmund
- [7] T. HOFFMANN, „Hamiltonsche Wege in planaren Graphen“,  
Diplomarbeit (1999), FB Mathematik, Universität Dortmund
- [8] D. A. HOLTON, B. D. MCKAY, „The Smallest Non-Hamiltonian  
3-Connected Cubic Planar Graphs Have 38 Vertices“, J. Combin.  
Theory B, 45 (1988), S. 305-319  
Erratum in J. Comb. Theory B, 47 (1989), S. 248
- [9] J. LEDERBERG, „Hamilton circuits of convex trivalent polyhedra (up  
to 18 vertices)“, Amer. Math. Monthly 74 (1967), S. 522-527

- [10] B. D. MCKAY, persönliche Korrespondenz
- [11] H. OKAMURA, „Hamiltonian circuits on simple 3-polytopes with up to 30 vertices“, J. Math. Soc. Japan Vol. 34, No. 2 (1982), S. 365-369
- [12] H. OKAMURA, „Every simple 3-polytope of order 32 or less is hamiltonian“, J. Graph Theory 6 (1982), S. 185-196
- [13] R. C. READ & R. J. WILSON, „An Atlas of Graphs“, Oxford Science Publication (1999)
- [14] C. STRAUCH, „Ein planarer, 3-zusammenhängender, 3-regulärer Graph ohne aufspannenden Y-Baum“, Analele Univ. Craiova, Seria Mat.-Inf., Vol. XXIX (2002), S. 23-25
- [15] T. ZAMFIRESCU, „Three Small Cubic Graphs with Interesting Hamiltonian Properties“, Journal of Graph Theory, Vol. 4 (1980), S. 287-292
- [16] T. ZAMFIRESCU, Vorlesung Graphentheorie, TU Dortmund