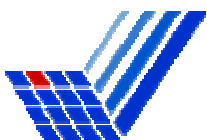


Mitteilungen aus dem Bereich
der Mechanik und Statik

Sabine Ricci

**Nichtlokale Modellierung
des Versagens- und Schädigungsverhaltens
von elastisch-plastischen Materialien**



**Nichtlokale Modellierung
des Versagens- und Schädigungsverhaltens
von elastisch-plastischen Materialien**

Von der Fakultät Bauwesen der
Universität Dortmund
zur Erlangung des Grades Doktor-Ingenieur
genehmigte

DISSERTATION

von
Dipl.-Math. Sabine Ricci
Dortmund 2003

Vorsitzender der Prüfungskommission
Erster Gutachter
Zweiter Gutachter

Prof. Dr. A. Hettler
Prof. Dr. H. Obrecht (Ph. D.)
Prof. Dr. B. Svendsen

Tag der Einreichung:

11. Dezember 2002

Tag der mündlichen Prüfung:

16. April 2003

Herausgeber

Prof. Dr. Hans Obrecht (Ph. D.)
Lehrstuhl für Baumechanik-Statik
Universität Dortmund
44221 Dortmund
Tel.: 0231/755-2536
Fax: 0231/755-2532

Organisation und Verwaltung

Priv.-Doz. Dr.-Ing. Michael Brüning
Lehrstuhl für Baumechanik-Statik
Universität Dortmund
44221 Dortmund
Tel.: 0231/755-4682
Fax: 0231/755-2532

© 2004 Sabine Ricci
Ostkamp 70
59174 Kamen

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzen in fremde Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung der Autorin ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie oder DV-Verarbeitung) zu vervielfältigen.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehrstuhl für Baumechanik-Statik der Universität Dortmund.

Mein Dank gilt Herrn Professor H. Obrecht, der mir die Freiräume und das Arbeitsumfeld bot, die maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Ebenfalls danke ich Herrn Professor B. Svendsen für die Übernahme des Koreferats sowie Herrn Professor A. Hettler, der den Vorsitz der Prüfungskommission übernommen hat.

Ganz besonders möchte ich Herrn Privatdozent M. Brünig danken, der mit ständiger Gesprächsbereitschaft und vielen unverzichtbaren Ratschlägen das Entstehen dieser Arbeit begleitet hat.

Meiner Kollegin und Freundin Simone Berger-Bickendorf, die während unserer gemeinsamen Zeit am Lehrstuhl für mich zu einer wertvollen Ansprechpartnerin – nicht nur für wissenschaftliche Fragen – wurde, danke ich für viele stundenlange Diskussionen.

Besonderer Dank gebührt meiner Familie, insbesondere meinen Eltern, die mich immer unterstützt haben.

Die entscheidende Grundlage für das Gelingen meiner Arbeit sind aber die, die mir den Blick für das Wesentliche öffnen. Dafür danke ich meinem Ehemann Marcello und meiner Tochter Katharina.

Dortmund, im August 2004

Sabine Ricci

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit handelt von der numerischen Untersuchung großer elastisch-plastischer Deformationen und des Lokalisierungsverhaltens anisotrop geschädigter duktiler Materialien, die eine hydrostatische Druckabhängigkeit aufweisen.

Das vorgestellte Modell basiert auf einer verallgemeinerten makroskopischen Theorie im Rahmen einer nichtlinearen Kontinuumsschädigungsmechanik unter Verwendung einer kinematischen Beschreibung des Schädigungsverhaltens.

Um eine realitätsnahe Formulierung zu gewährleisten, wird die Nichtlokalität des Materialverhaltens sowohl in der Fließbedingung als auch in der Schädigungsbedingung berücksichtigt.

Abschätzungen der Spannungs- und Verzerrungsentwicklungen werden aus einer direkten numerischen Integration der plastischen und schädigungsbezogenen Ratenbeziehungen ermittelt. Dieser zweiteilige Integrationsalgorithmus besteht aus einem inelastischen Prediktorschritt, dem ein elastischer Korrektorschritt folgt.

Numerische Simulationen des elastisch-plastischen Deformationsverhaltens geschädigter Körper unterstreichen die Effizienz des vorgestellten Modells und verdeutlichen die Wirkung des Schädigungseinflusses auf das Lokalisierungs- und Deformationsverhalten.

Abstract

This work deals with the numerical simulation of large elastic-plastic deformations as well as the localization behavior of anisotropically damaged ductile materials which are hydrostatically stress-dependent.

The presented model is based on a generalized macroscopic theory in the framework of nonlinear continuum damage mechanics with a kinematic description of the damage behavior.

In order to achieve a physically adequate formulation, the nonlocality of the material behavior is taken into account in the yield condition as well as in the damage condition.

Estimates of the stress and strain histories are computed from a direct numerical integration of the plastic and damage strain rates. The integration algorithm consists of an inelastic predictor followed by an elastic corrector step.

The efficiency of the presented model is underlined by numerical simulations of the elastic-plastic deformation behavior of damaged specimens and the effect of damage processes on the localization and deformation behavior is emphasized.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	i
1 Einleitung	1
2 Kontinuumsmechanische Grundlagen	5
2.1 Kinematik	5
2.2 Spannungen	14
2.3 Thermodynamische Betrachtungen	15
2.3.1 Ungeschädigte Konfigurationen	15
2.3.2 Geschädigte Konfigurationen	17
3 Konstitutive Gleichungen	20
3.1 Ungeschädigte Konfigurationen	20
3.1.1 Elastisches Materialverhalten	20
3.1.2 Plastisches Materialverhalten.....	21
3.2 Geschädigte Konfigurationen	28
3.2.1 Elastisches Materialverhalten	28

3.2.2 Schädigungsverhalten	31
3.2.3 Isotropes Materialverhalten	33
3.2.4 Anisotropes Materialverhalten.....	35
4 Numerische Integration der konstitutiven Gleichungen	37
4.1 Skalare Grundgleichungen	37
4.2 Isotropes Schädigungsverhalten	42
4.3 Anisotropes Schädigungsverhalten.....	54
4.4 Rückführung auf tensorielle Größen	57
5 Numerische Aspekte der Modellbildung.....	59
5.1 Berechnung des Lokalisierungsbeginns	59
5.2 Padé-Approximation.....	63
6 Numerische Untersuchungen	63
6.1 Numerische Implementierung	63
6.2 Allgemeines.....	63
6.3 Nichtlokales elastisch-plastisches Deformations- und Lokalisierungsverhalten.....	63
6.3.1 Untersuchungen zum internen Längenparameter	63
6.3.2 Vergleich verschiedener Diskretisierungen	63

6.3.3 Vergleich verschiedener Fließbedingungen.....	63
6.4 Nichtlokales Schädigungsverhalten.....	63
6.4.1 Einfluss der Schädigung auf das Materialverhalten.....	63
6.4.2 Einfluss ausgewählter Modellparameter auf das Schädigungsverhalten	63
6.4.2.1 Einfluss der Schädigungsdehnung.....	63
6.4.2.2 Anisotropie des Schädigungsverhaltens	63
6.4.2.3 Einfluss des Entfestigungsmoduls.....	63
6.4.2.4 Vergleich verschiedener Diskretisierungen.....	63
7 Zusammenfassung und Ausblick	63
8 Literatur	63

1 Einleitung

Die realitätsnahe Beschreibung des inelastischen Verhaltens duktiler Materialien sowie die Entwicklung von effizienten und robusten numerischen Lösungsverfahren sind in der Mechanik für die Behandlung zahlreicher Randwertprobleme von großer Bedeutung. Hierbei stellt die Versagensanalyse von Materialien und Strukturen die Grundlage für die Einsicht in die Deformations- und Schädigungsprozesse dar.

In der klassischen Kontinuumsmechanik wird die Annahme getroffen, dass sich der physikalische Zustand eines Körpers an einem betrachteten Punkt ausschließlich durch das Materialverhalten an diesem Punkt bzw. in einer beliebig kleinen Umgebung dieses Punktes beschreiben lässt. Diese Voraussetzung ist jedoch nicht mehr erfüllt, wenn man berücksichtigt, dass plastische Deformationen auf atomarer Ebene durch Besonderheiten der Mikrostruktur definiert werden (ERINGEN [44], [45]). Demzufolge wird unter einer mikromechanischen Betrachtungsweise der Zustand eines Körpers an dem gegebenen Punkt maßgeblich von dem Verhalten der Nachbarpunkte in seiner Umgebung beeinflusst. Für eine physikalisch adäquate Formulierung ist also die Berücksichtigung nichtlokaler Effekte notwendig, was z. B. durch die Einführung von nichtlokalen Zustandsvariablen realisiert werden kann. Werden in einem Modell allerdings alle Zustandsvariablen als nichtlokal betrachtet, so vergrößert sich der analytische und numerische Aufwand erheblich (FLECK & HUTCHINSON [46], [47], SHU et al. [101]).

Aus diesem Grund entwickelten u. a. BAŽANT & LIN [7] sowie STRÖMBERG & RISTINMAA [113] modifizierte nichtlokale Modelle, die auf der Voraussetzung beruhen, dass das elastische Materialverhalten keinen nichtlokalen Einflüssen unterliegt, was im Vergleich zu den oben aufgeführten Modellen eine Vereinfachung der Formulierung bewirkt.

Alternativ kann zur Berücksichtigung der Nichtlokalität des Materialverhaltens gefordert werden, dass die Fließbedingung von höheren räumlichen Ableitungen der inelastischen Zustandsvariablen abhängt. Dieses als Gradientenplastizität bezeichnete Modell wurde z. B. von AIFANTIS [2], [3] sowie ZBIB & AIFANTIS [123], [124], [125] untersucht. Zur numerischen Implementierung der Gradientenplastizität wurde von MÜHLHAUS & AIFANTIS [81] ein

Variationsprinzip entwickelt. Mit weiteren Finite-Element-Formulierungen für gradientenabhängige Verfahren beschäftigen sich die Arbeiten von DE BORST & MÜHLHAUS [17], SLUYS et al. [106], DE BORST & PAMIN [18], LI & CESCOTTO [76], [77] sowie BRÜNIG et al. [30], RICCI [95] und RICCI et al. [96].

Ein wichtiger Aspekt in der Schädigungsmechanik ist die angemessene Beschreibung der physikalischen Eigenschaften der mechanischen Variablen, die den Schädigungszustand des Materials beschreiben. In Bereichen großer plastischer Deformationen entwickeln sich bereits bestehende Mikroporen durch Wachstum und Zusammenschluss von Poren zu Mikrorissen, so dass sich die mikroskopische Schädigung zu makroskopischer Schädigung entwickelt, die dann schließlich endgültiges Materialversagen zur Folge haben kann. Durch die beschriebenen Prozesse im Materialgefüge werden mehrere Materialeigenschaften, wie die elastischen Moduln (LEMAITRE & DUFALLY [75]) beeinflusst. Diese Veränderungen der Materialeigenschaften können als Maß für die Schwächung des Materials betrachtet werden und damit zur Formulierung geeigneter Schädigungsparameter verwendet werden. In der Literatur zur Schädigungsmechanik unterscheidet man zwischen isotropen Schädigungsmodellen, wie sie beispielsweise von KACHANOV [60], RABOTNOV [94], LEMAITRE [72], [73], LEMAITRE & DUFALLY [75] und TVERGAARD [115] eingeführt wurden, und anisotropen Schädigungsmodellen (MURAKAMI & OHNO [83], BETTEN [13], [14], KRAJGINOVIC [63], CHOW & WANG [35], [36], CHABOCHE [32], [33], MURAKAMI [82], JU [59], LU & CHOW [78], VOYIADJIS & KATTAN [119], BRUHNS & SCHIESSE [31], BRÜNIG [24], [25], [26]).

Des Weiteren muss die numerische Implementierung des konstitutiven Modells zur Darstellung anisotroper Schädigungsphänomene einerseits hinreichend einfach möglich sein, um eine effiziente numerische Umsetzung zu gewährleisten, andererseits muss das Modell so umfassend sein, dass die wesentlichen Aspekte des mechanischen Verhaltens möglichst realitätsgetreu abgebildet werden können.

Nichtlokale Schädigungsmodelle (BAŽANT et al. [8], PIAUDIER-CABOT & BAŽANT [91], BAŽANT et al. [9], DE VREE et al. [121]) verwenden zur Berücksichtigung der Nichtlokalität ein Verzerrungs- oder Schädigungsmaß, das einem gewichteten Mittelwert entspricht, der durch Integration über ein bestimmtes Volumen gebildet wird. Eine Modifikation der nichtlokalen Verfahren durch explizites Einsetzen eines Verzerrungs- oder Schädigungs-

gradienten mit dem Ergebnis eines Gradientenverfahrens findet man u. a. bei PEERLINGS et al. [90].

Um auch komplexe Randwertprobleme lösen zu können, wurden die Kontinuums-schädigungsmodelle in verschiebungsgesteuerte Finite-Element-Verfahren implementiert, wie z. B. bei SIMO & JU [103], [104], CHOW & WANG [36], JU [58], DE SOUZA NETO et al. [108], DOGHRI [40], DOGHRI & BILLARDON [41], DHAR et al. [38], DE SOUZA NETO & PERIĆ [106] sowie BRÜNIG et al. [30] und RICCI et al. [96]. Eine gemischte Finite-Element-Methode wurde von FLOREZ-LOPEZ et al. [49] entwickelt, wobei das Verschiebungsfeld und die isotrope Schädigungsvariable gleichzeitig approximiert werden.

Zur numerischen Integration der konstitutiven Gleichungen verwendeten SIMO & JU [104], JU [58], DE SOUZA NETO et al. [108], DOGHRI [40] und DE SOUZA NETO & PERIĆ [106] das weit verbreitete Radial-Return-Verfahren. VOYIADJIS & DELIKTAS [118] entwickelten einen dreiteiligen Algorithmus, in dem eine additive Aufspaltung der konstitutiven Gleichungen in elastisches, plastisches und Schädigungsverhalten erfolgt. BRÜNIG [25] stellte in diesem Zusammenhang das Verfahren des inelastischen Prediktors und elastischen Korrektors vor, das auch für große Inkremente eine realistische Abbildung des inelastischen Materialverhaltens liefert und in dieser Arbeit um die Berücksichtigung der Nichtlokalität des Materialverhaltens erweitert wird.

Basierend auf den Grundlagen der Kontinuumschädigungsmechanik sollen im Rahmen der vorliegenden Arbeit nichtlokale konstitutive Gleichungen für anisotrop geschädigte duktile Ingenieurwerkstoffe entwickelt, das entsprechende Finite-Element-Modell formuliert und der Einfluss der verschiedenen Modellparameter auf das Deformations- und Lokalisierungsverhalten duktiler Metalle herausgearbeitet werden. Die kinematische Beschreibung basiert auf Metriktransformationen zwischen geschädigten und fiktiven ungeschädigten Konfigurationen (BRÜNIG [26]), aus denen sich geeignete Schädigungsverzerrungstensoren ableiten lassen. Die additive kinematische Zerlegung der Verzerrungsraten in elastische, plastische und Schädigungsanteile ermöglicht eine modulare Struktur des Modells. Um die unterschiedlichen zugrunde liegenden physikalischen Mechanismen des plastischen Fließens und der duktilen Schädigung berücksichtigen zu können, werden freie Energiefunktionen bezüglich der fiktiven ungeschädigten Konfiguration als auch der aktuellen geschädigten Konfiguration getrennt formuliert. Um die experimentell

beobachteten plastischen Fließeigenschaften duktiler Metalle angemessen umsetzen zu können, wird eine verallgemeinerte nichtlokale I_1 - J_2 -Fließbedingung verwendet, die von den Invarianten des effektiven Spannungstensors abhängt und in der Lage ist, den Einfluss des hydrostatischen Spannungszustands auf das plastische Materialverhalten zu beschreiben. Gleichzeitig werden nichtlokale Effekte durch die Gradientenabhängigkeit der Fließbedingung erfasst. Zur Beschreibung des Beginns und der Entwicklung der Schädigung wird in Bezug auf die geschädigten Konfigurationen eine Schädigungsfläche eingeführt. Auch deren Formulierung wird bezüglich der Berücksichtigung der Nichtlokalität des Materialverhaltens erweitert. Die Schädigungsverzerrungsrate enthält sowohl isotrope als auch anisotrope Anteile. Ein robustes skalares Integrationsverfahren, basierend auf einem inelastischen Prediktor- und einem elastischen Korrektorschritt, liefert numerische Abschätzungen der Spannungen und Verzerrungen. Aufgrund der Nichtlokalität der Formulierung resultiert dieses in einer elliptischen partiellen Differentialgleichung, die mit Hilfe eines Finite-Differenzen-Verfahrens getrennt gelöst wird.

Um die Komponenten der logarithmischen Verzerrungstensoren berechnen zu können, werden Padé-Approximationen entwickelt, die bei geringem Rechenaufwand eine hohe Genauigkeit der Näherung auch bei großen Verzerrungen erreichen.

Zur Lösung des globalen Randwertproblems wird ein Finite-Element-Verfahren verwendet, das auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit basiert. Ein konsistenter Linearisierungsalgorithmus liefert die zugehörigen inkrementellen Variationsgleichungen.

Schließlich wird anhand numerischer Simulationen großer elastisch-plastischer Deformationen geschädigter Materialien der Einfluss verschiedener Modellparameter auf das Materialverhalten untersucht. Dabei wird zunächst das Lokalisierungsverhalten unter Verwendung verschiedener Diskretisierungen und Fließbedingungen bei einem rein elastisch-plastischen Modell behandelt. Des Weiteren wird dann der Einfluss der Schädigung auf das Materialverhalten diskutiert und die Effizienz des vorgestellten Modells mittels mehrerer Parameterstudien unter Beweis gestellt.

2 Kontinuumsmechanische Grundlagen

2.1 Kinematik

Die Beschreibung des Deformationsverhaltens der untersuchten Materialien basiert auf einer makroskopischen und phänomenologischen Betrachtungsweise.

Die hier verwendete Formulierung soll auch anisotrope Schädigung durch Mikrodefekte berücksichtigen, jedoch wird auch der geschädigte Körper als Kontinuum betrachtet. Ein makroskopisches repräsentatives Volumenelement kann daher noch als kontinuumsmechanischer Materialpunkt angesehen werden, obwohl es bereits eine Anzahl von Defekten enthält.

Der Zusammenhang zwischen den hier betrachteten Konfigurationen ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Die Konfiguration des unverformten Ausgangszustands $\overset{\circ}{\mathcal{B}}$ ist auf die Basisvektoren $\overset{\circ}{\mathbf{g}}_i$ bezogen und kann bereits eine Anfangsschädigung enthalten. Die zugehörigen Metrikkoeffizienten ergeben sich aus dem Skalarprodukt der Basisvektoren

$$\overset{\circ}{G}_{ij} = \overset{\circ}{\mathbf{g}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}_j. \quad (2.1)$$

Die aktuelle Konfiguration nach elastisch-plastischer Verformung und Schädigung wird mit \mathcal{B} bezeichnet, wobei sich hier die Metrikkoeffizienten $G_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ analog aus den entsprechenden Basisvektoren \mathbf{g}_i berechnen lassen.

Die kinematischen Grundlagen für die Mechanik großer Deformationen basieren in der vorgestellten Formulierung auf dem Tensor der gemischtvarianten Metriktransformation

$$\mathbf{Q} = Q^i_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \overset{\circ}{G}^{ik} G_{kj} \overset{\circ}{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}^j = \mathbf{B}\mathbf{G}, \quad (2.2)$$

wie er auch von LEHMANN [68], [69] und BRÜNIG [22] verwendet wird.

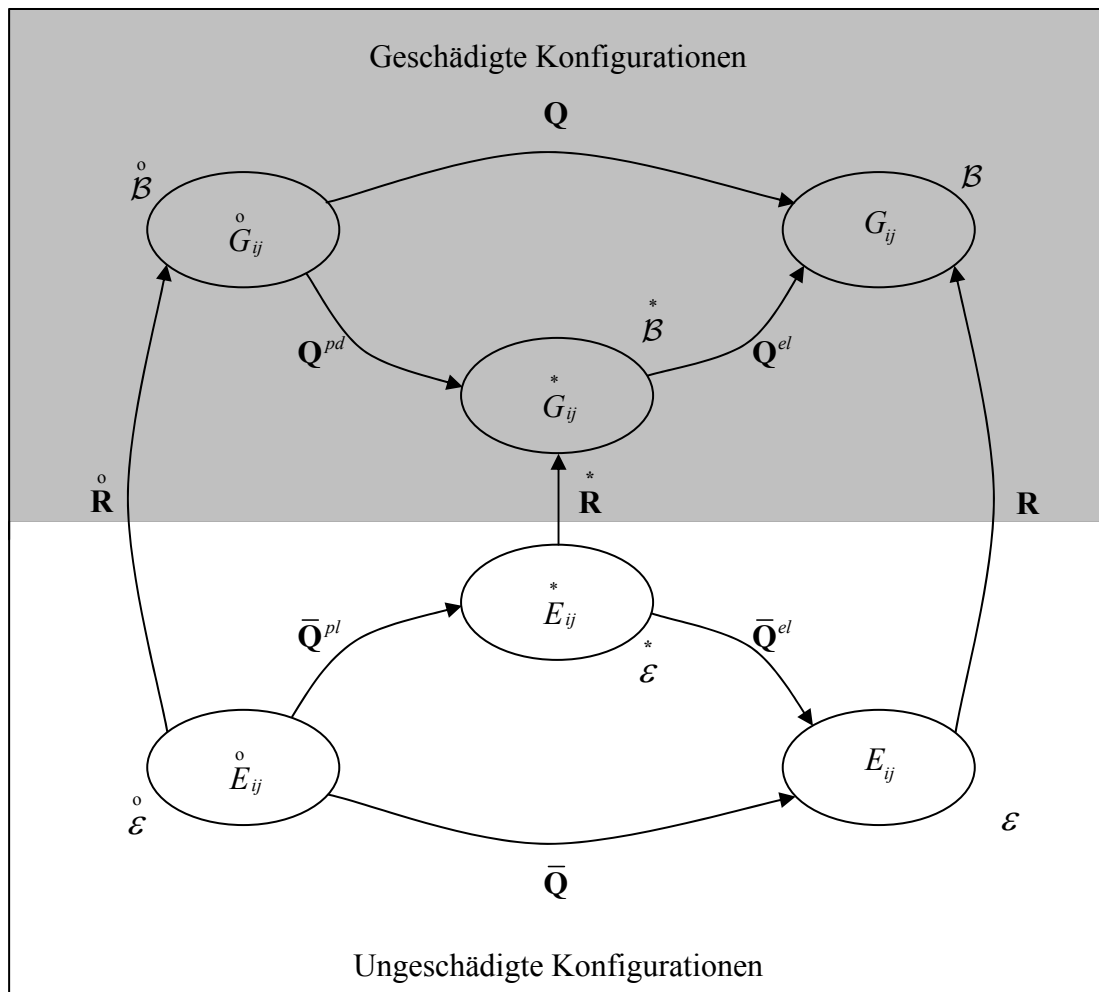


Abbildung 2.1: Darstellung der Konfigurationen

Der in Gleichung (2.2) definierte gemischtvariante Tensor \mathbf{Q} ist hier dargestellt als Tensorprodukt des Metrikensors der aktuellen Konfiguration \mathbf{G} und des Cauchy-Green-Tensors $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$, wobei \mathbf{F} den Deformationsgradienten und \mathbf{V} den Linksstrecktensor bezeichnet.

Es folgt die Definition des gemischtvarianten logarithmischen Verzerrungstensors nach Hencky

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{Q} = \frac{1}{2} (\ln Q)_{,j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = A_{,j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (2.3)$$

der in der hier eingeführten Form eine isotrope Tensorfunktion von \mathbf{Q} darstellt, und den man auf folgende Weise additiv aufspalten kann:

$$\mathbf{A} = \text{dev } \mathbf{A} + \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{A} \mathbf{1}. \quad (2.4)$$

Während der Deviator des Verzerrungstensors $\text{dev } \mathbf{A}$ den isochoren Anteil der Deformationen exakt beschreibt, entspricht der Wert

$$\text{tr } \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \ln \left(\frac{dv}{dv_0} \right) = \ln(J) \quad (2.5)$$

exakt dem volumetrischen Anteil der Deformationen und somit dem Logarithmus der Jakobi-determinante $J = \sqrt{\det \mathbf{Q}}$.

Aus Gleichung (2.2) kann nun gefolgert werden, dass die Oldroyd-Ableitung als objektive Zeitableitung des Metriktransformationstensors

$$\dot{\mathbf{Q}} = \overset{\circ}{G}{}^{ik} \dot{G}_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.6)$$

im Allgemeinen einen unsymmetrischen Tensor darstellt, mit Hilfe dessen der symmetrische Tensor der Verzerrungsrate definiert wird durch

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{-1} \dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} G^{ik} \dot{G}_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \dot{H}^i{}_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (2.7)$$

Die makroskopische Formulierung des geschädigten elastisch-plastischen Materialverhaltens für große Deformationen basiert auf der multiplikativen Zerlegung des Tensors der Metriktransformation \mathbf{Q} in einen elastischen Anteil \mathbf{Q}^{el} und einen inelastischen Anteil \mathbf{Q}^{pd} , der sich wiederum aus geschädigten und plastischen Deformationen zusammensetzt:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{pd} \mathbf{Q}^{el} \quad (2.8)$$

mit

$$\mathbf{Q}^{pd} = \overset{\circ}{G}{}^{ik} G_{kj}^* \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.9)$$

und

$$\mathbf{Q}^{el} = G^{*ik} G_{kj}^* \mathbf{g}_i^* \otimes \mathbf{g}_j^*. \quad (2.10)$$

$G_{ij}^* = \mathbf{g}_i^* \cdot \mathbf{g}_j^*$ bezeichnet hier die Metrikoeffizienten der Basisvektoren \mathbf{g}_i^* bezüglich der fiktiven spannungsfreien Zwischenkonfiguration \mathcal{B}^* (Abbildung 2.1).

Danach wird der elastische Verzerrungstensor

$$\mathbf{A}^{el} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{Q}^{el} \quad (2.11)$$

eingeführt, der durch den elastischen Anteil des Metriktransformationstensors beschrieben wird.

Die multiplikative Zerlegung des Metriktransformationstensors (2.8) liefert gemeinsam mit der Ableitung

$$\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{Q}}^{pd} \mathbf{Q}^{el} + \mathbf{Q}^{pd} \dot{\mathbf{Q}}^{el} \quad (2.12)$$

die additive Aufspaltung des Tensors der Gesamtverzerrungsrate $\dot{\mathbf{H}}$ (2.7) in einen elastischen Anteil $\dot{\mathbf{H}}^{el}$ und einen inelastischen Anteil $\dot{\mathbf{H}}^{pd}$

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{el -1} \mathbf{Q}^{pd -1} \dot{\mathbf{Q}}^{pd} \mathbf{Q}^{el} + \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{el -1} \dot{\mathbf{Q}}^{el} = \dot{\mathbf{H}}^{pd} + \dot{\mathbf{H}}^{el} \quad (2.13)$$

mit dem Tensor der elastischen Verzerrungsrate

$$\dot{\mathbf{H}}^{el} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{el -1} \dot{\mathbf{Q}}^{el} \quad (2.14)$$

und dem Tensor der inelastischen Verzerrungsrate

$$\dot{\mathbf{H}}^{pd} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{-1} \dot{\mathbf{Q}}^{pd} \mathbf{Q}^{el}. \quad (2.15)$$

Um den Schädigungsvorgang zu beschreiben, werden, wie in den Arbeiten von BRÜNIC [27], VOYIADJIS & PARK [120], MURAKAMI [82] und BETTEN [14], auch hier effektive ungeschädigte Konfigurationen eingeführt. Diese zusätzlichen fiktiven Konfigurationen entstehen, indem man die gesamte Schädigung zurücknimmt, die der Körper erfahren hat. Wie in Abbildung 2.1 zu erkennen ist, wird die fiktive Konfiguration, die aus der aktuellen geschädigten Konfiguration \mathcal{B} durch Entfernen der Schädigung entsteht, mit \mathcal{E} bezeichnet, die zugehörigen Basisvektoren mit \mathbf{e}_i und die zugehörigen Metrikkoeffizienten mit E_{ij} .

Da der unverformte Körper im Ausgangszustand $\overset{\circ}{\mathcal{B}}$ bereits eine Vorschädigung enthalten kann, wird auch hierzu eine entsprechende ungeschädigte Ausgangskonfiguration $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$ definiert, die wiederum die Basisvektoren $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$ und die Metrikkoeffizienten $\overset{\circ}{E}_{ij}$ besitzt.

Falls die unverformte Ausgangskonfiguration $\overset{\circ}{\mathcal{B}}$ jedoch als Sonderfall keine anfängliche Schädigung enthält, besteht demzufolge kein Unterschied zwischen den Konfigurationen $\overset{\circ}{\mathcal{B}}$ und $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$, so dass auch die zugehörigen Metrikkoeffizienten $\overset{\circ}{G}_{ij}$ und $\overset{\circ}{E}_{ij}$ übereinstimmen.

Analog wird die zur spannungsfreien Zwischenkonfiguration $\overset{*}{\mathcal{B}}$ gehörige effektive ungeschädigte Zwischenkonfiguration $\overset{*}{\mathcal{E}}$ mit den Metrikkoeffizienten $\overset{*}{E}_{ij}$ und den Basisvektoren $\overset{*}{\mathbf{e}}_i$ definiert.

Bezüglich der ungeschädigten Konfigurationen wird zunächst der effektive Metriktransformationstensor

$$\bar{\mathbf{Q}} = \bar{Q}^i_{\cdot j} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \overset{\circ}{E}^{ik} E_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.16)$$

eingeführt, der analog zu den geschädigten Konfigurationen den effektiven logarithmischen Verzerrungstensor

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \ln \bar{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} (\ln \bar{Q})^i_{\cdot j} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \bar{A}^i_{\cdot j} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.17)$$

sowie den Tensor der effektiven Verzerrungsrate

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \dot{\bar{\mathbf{Q}}} \quad (2.18)$$

liefert. Entsprechend der klassischen elastisch-plastischen Theorie ohne Schädigungsberücksichtigung, wie sie beispielsweise von LEHMANN [70] eingeführt wurde, kann man den effektiven Metriktransformationstensor $\bar{\mathbf{Q}}$ multiplikativ zerlegen in

$$\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{Q}}^{pl} \bar{\mathbf{Q}}^{el}, \quad (2.19)$$

wobei

$$\bar{\mathbf{Q}}^{pl} = E^{ik} E_{kj}^* \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.20)$$

den effektiven plastischen und

$$\bar{\mathbf{Q}}^{el} = E^{ik} E_{kj}^* \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.21)$$

den effektiven elastischen Anteil bezeichnet. Die zugehörigen Tensoren der Verzerrungsraten werden definiert durch

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{Q}}^{el-1} \bar{\mathbf{Q}}^{pl-1} \dot{\bar{\mathbf{Q}}}^{pl} \bar{\mathbf{Q}}^{el} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{Q}}^{el-1} \dot{\bar{\mathbf{Q}}}^{el} = \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{pl} + \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{el} \quad (2.22)$$

mit dem elastischen Anteil der Verzerrungsrate

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}}^{el} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{Q}}^{el-1} \dot{\bar{\mathbf{Q}}}^{el} \quad (2.23)$$

und dem entsprechenden plastischen Anteil

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}}^{pl} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \dot{\bar{\mathbf{Q}}}^{pl} \bar{\mathbf{Q}}^{el}. \quad (2.24)$$

In Schädigungsformulierungen wird bei der Beschreibung der Kinematik häufig die Schädigung selbst nicht berücksichtigt, sondern es gehen in der Regel nur die elastischen und

plastischen Verformungen in die kinematischen Beziehungen ein. In dieser Arbeit soll jedoch auch die Schädigung explizit in die Kinematik eingehen, was hier mit Hilfe von Metriktransformationen umgesetzt wird. Auch LEHMANN [70], [71], BRÜNIG [24], BRUHNS & SCHIESSE [31] sowie VOYIADJIS & PARK [120] verwenden schädigungsbezogene Verzerrungsmaße, die kinematisch begründet sind. Hier werden zur Beschreibung der Kinematik bezüglich der Schädigung nun die zuvor definierten effektiven ungeschädigten Konfigurationen verwendet, wodurch sich die Möglichkeit ergibt, die Schädigung einerseits unabhängig von den elastisch-plastischen Deformationen zu betrachten, andererseits jedoch auch das Zusammenwirken beider Verhaltensweisen zu untersuchen. Dazu werden, bezogen auf die verschiedenen Konfigurationen, die folgenden Schädigungstensoren eingeführt:

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}} = \overset{\circ}{R}{}^i{}_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \overset{\circ}{E}{}^{ik} \overset{\circ}{G}{}_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (2.25)$$

$$\overset{*}{\mathbf{R}} = \overset{*}{R}{}^i{}_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \overset{*}{E}{}^{ik} \overset{*}{G}{}_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.26)$$

und

$$\mathbf{R} = R^i{}_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = E^{ik} G_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (2.27)$$

wie sie auch in Abbildung 2.1 zu finden sind. Dabei bezeichnet $\overset{\circ}{\mathbf{R}}$ den Anfangsschädigungstensor, während die Schädigungstensoren $\overset{*}{\mathbf{R}}$ und \mathbf{R} den jeweiligen aktuellen anisotropen Schädigungszustand kennzeichnen.

Betrachtet man die Darstellung der verschiedenen Konfigurationen in Abbildung 2.1, so erkennt man, dass im Gegensatz zu dem aktuellen Schädigungstensor \mathbf{R} der Tensor $\overset{*}{\mathbf{R}}$ den Schädigungszustand des Materials unabhängig von den aktuellen elastischen Deformationen beschreibt. Er kennzeichnet damit, insbesondere im Falle großer elastischer Deformationen, ausschließlich die irreversiblen Veränderungen des Materialgefüges, die sich im Laufe des Deformationsprozesses von der Ausgangskonfiguration $\overset{\circ}{\mathcal{B}}$ zu der aktuellen anisotrop geschädigten Konfiguration \mathcal{B} entwickeln und auf die Entstehung von Mikrodefekten zurückzuführen sind. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, den aktuellen Schädigungszustand des

Materials durch den auf die elastisch entlastete Zwischenkonfiguration \mathcal{B}^* bezogenen Schädigungstensor \mathbf{R}^* auszudrücken (MURAKAMI [82]).

Mit Hilfe dieses Schädigungstensors \mathbf{R}^* wird dann

$$\mathbf{A}^{da} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{R}^* \quad (2.28)$$

als logarithmischer schädigungsbezogener Verzerrungstensor definiert.

Der Zusammenhang zwischen den beiden aktuellen Schädigungstensen

$$\mathbf{R} = \bar{\mathbf{Q}}^{el-1} \mathbf{R}^* \mathbf{Q}^{el} \quad (2.29)$$

ist ebenso aus Abbildung 2.1 ablesbar, wie die multiplikative Zerlegung des Metriktransformationstensors

$$\mathbf{Q} = \overset{\circ}{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{Q}}^{pl} \mathbf{R}^* \mathbf{Q}^{el} . \quad (2.30)$$

Durch wiederholtes Einsetzen von (2.30) in (2.7) mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} &= \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{-1} \dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{-1} \left(\overset{\circ}{\mathbf{R}}^{-1} \dot{\bar{\mathbf{Q}}}^{pl} \bar{\mathbf{Q}}^{el} \mathbf{R} + \overset{\circ}{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{Q}}^{pl} \dot{\mathbf{R}}^* \mathbf{Q}^{el} + \overset{\circ}{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{Q}}^{pl} \mathbf{R}^* \dot{\mathbf{Q}}^{el} \right) = \\ &= \mathbf{R}^{-1} \left(\frac{1}{2} \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \dot{\bar{\mathbf{Q}}}^{pl} \bar{\mathbf{Q}}^{el} \right) \mathbf{R} + \mathbf{Q}^{el-1} \left(\frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathbf{R}}^{-1} \dot{\mathbf{R}}^* \right) \mathbf{Q}^{el} + \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{el-1} \dot{\mathbf{Q}}^{el} \end{aligned} \quad (2.31)$$

erhält man mit Hilfe von (2.24), der Definition des Tensors der Schädigungsverzerrungsrate

$$\dot{\mathbf{H}}^{da} = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathbf{R}}^{-1} \dot{\mathbf{R}}^* \quad (2.32)$$

sowie Gleichung (2.14) die folgende Darstellung des Tensors der Gesamtverzerrungsrate

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{R}^{-1} \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{pl} \mathbf{R} + \mathbf{Q}^{el-1} \dot{\mathbf{H}}^{da} \mathbf{Q}^{el} + \dot{\mathbf{H}}^{el} . \quad (2.33)$$

Damit ist es gelungen, die Verzerrungsrate additiv in einen elastischen, einen plastischen und einen Schädigungsanteil aufzuspalten, so dass die zugrunde liegenden physikalischen Mechanismen des Materialverhaltens getrennt betrachtet werden können. Dies erlaubt auch eine getrennte Formulierung der entsprechenden konstitutiven Gleichungen.

Unter der Voraussetzung, dass die Beziehung zwischen der geschädigten spannungsfreien Konfiguration \mathcal{B}^* und der aktuellen geschädigten Konfiguration \mathcal{B} dem Zusammenhang zwischen den entsprechenden ungeschädigten effektiven Konfigurationen \mathcal{E}^* und \mathcal{E} entspricht (vgl. [82]), stimmen der elastische Metriktransformationstensor und der effektive elastische Metriktransformationstensor überein:

$$\mathbf{Q}^{el} = \bar{\mathbf{Q}}^{el}. \quad (2.34)$$

Damit sind auch die elastischen Verzerrungstensoren

$$\mathbf{A}^{el} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{Q}^{el} = \frac{1}{2} \ln \bar{\mathbf{Q}}^{el} = \bar{\mathbf{A}}^{el} \quad (2.35)$$

und die elastischen Verzerrungsraten jeweils identisch:

$$\dot{\mathbf{H}}^{el} = \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{el}. \quad (2.36)$$

2.2 Spannungen

Hier werden zunächst die Tensoren definiert, die den Spannungszustand in der geschädigten und in der ungeschädigten Konfiguration angemessen beschreiben können. Die aktuellen Spannungen in der geschädigten Konfiguration \mathcal{B} werden dargestellt durch den Kirchhoff-Spannungstensor

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = T_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = T_{\cdot j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (2.37)$$

wobei die hier verwendeten kontravarianten, kovarianten und gemischtvarianten Komponenten durch die folgende Beziehung mit Hilfe der Metrikoeffizienten ineinander überführt werden können:

$$T^{ik} G_{kj} = G^{ik} T_{kj} = T_{\cdot j}^i. \quad (2.38)$$

Bezogen auf die fiktive ungeschädigte Konfiguration \mathcal{E} definiert man den effektiven Kirchhoff-Spannungstensor

$$\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = S_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = S_{\cdot j}^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j, \quad (2.39)$$

der die Spannungen im Matrixmaterial beschreibt.

Hier gilt bezüglich der Komponentendarstellung analog zur Gleichung (2.38)

$$S^{ik} E_{kj} = E^{ik} S_{kj} = S_{\cdot j}^i. \quad (2.40)$$

Formuliert man den effektiven Spannungstensor (2.39) mit Hilfe der Basisvektoren der aktuellen Konfiguration \mathcal{B} , so erhält man den Tensor

$$\bar{\mathbf{T}} = S_{\cdot j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (2.41)$$

2.3 Thermodynamische Betrachtungen

2.3.1 Ungeschädigte Konfigurationen

Analog zu den bisher eingeführten effektiven Größen, wird auch in der thermodynamischen Betrachtung die spezifische mechanische Arbeit, die auf die fiktiven ungeschädigten Konfigurationen bezogen ist, ebenfalls als effektiv bezeichnet. Die Rate der effektiven spezifischen mechanischen Arbeit wird bezüglich der ungeschädigten Konfiguration durch das Skalarprodukt

$$\rho_0 \dot{\bar{w}} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}} \quad (2.42)$$

dargestellt, wobei ρ_0 die Dichte des Materials in der Ausgangskonfiguration bezeichnet. Der in (2.42) ebenfalls enthaltene effektive Spannungstensor $\bar{\mathbf{T}}$ wurde bereits in (2.41) und der Tensor der effektiven Verzerrungsrate $\dot{\bar{\mathbf{H}}}$ in (2.18) bzw. (2.22) definiert. Die Gleichung (2.42) kann unter Verwendung von Gleichung (2.22) in einen effektiven elastischen und einen effektiven plastischen Anteil aufgespalten werden

$$\rho_0 \dot{\bar{w}} = \rho_0 \dot{\bar{w}}^{el} + \rho_0 \dot{\bar{w}}^{pl} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{el} + \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{pl}. \quad (2.43)$$

Die auf die ungeschädigte Konfiguration \mathcal{E} bezogene spezifische freie Helmholtz-Energie $\bar{\phi}$ wird hier wiederum als effektiv bezeichnet. Sie kann additiv in einen effektiven elastischen Anteil und einen effektiven plastischen Anteil zerlegt werden

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}^{el}(\bar{\mathbf{A}}^{el}) + \bar{\phi}^{pl}(\hat{\gamma}). \quad (2.44)$$

Dabei ist der elastische Anteil eine Funktion der effektiven elastischen Verzerrungen $\bar{\mathbf{A}}^{el}$ (2.35) und die effektive plastische freie Energie $\bar{\phi}^{pl}$ hängt von dem skalaren plastischen Verzerrungsmaß $\hat{\gamma}$ ab, das auch nichtlokale Anteile beinhaltet. Auf die mathematische Umsetzung der Berücksichtigung der Nichtlokalität wird in den Kapiteln 3.1.2 und 4.2 noch detailliert eingegangen.

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik ist hier in Form der Clausius-Duhem-Ungleichung dargestellt durch

$$\dot{\bar{w}} - \dot{\bar{\phi}} \geq 0. \quad (2.45)$$

Durch Einsetzen der Gleichung (2.43) und der Zeitableitung der Gleichung (2.44)

$$\dot{\bar{\phi}} = \frac{\partial \bar{\phi}^{el}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{el}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{A}}}^{el} + \dot{\bar{\phi}}^{pl} \quad (2.46)$$

erhält man die Ungleichung

$$\bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{el} + \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{pl} - \rho_0 \frac{\partial \bar{\phi}^{el}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{el}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{A}}}^{el} - \rho_0 \dot{\bar{\phi}}^{pl} \geq 0, \quad (2.47)$$

die sich bei der Betrachtung des reversiblen Anteils der Deformationen reduziert zu

$$\bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{el} - \rho_0 \frac{\partial \bar{\phi}^{el}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{el}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{A}}}^{el} = 0. \quad (2.48)$$

Gleichung (2.48) kann nun mit Hilfe von (2.23) dargestellt werden in der Form

$$\bar{\mathbf{T}} \cdot \frac{1}{2} \bar{\mathbf{Q}}^{el-1} \dot{\bar{\mathbf{Q}}}^{el} = \rho_0 \frac{\partial \bar{\phi}^{el}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{el}} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}^{el}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}^{el}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{Q}}}^{el}, \quad (2.49)$$

die dann die folgende thermische Zustandsgleichung liefert

$$\bar{\mathbf{T}} = \rho_0 \left(\frac{\partial \bar{\phi}^{el}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{el}} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}^{el}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}^{el}} \bar{\mathbf{Q}}^{el} + \bar{\mathbf{Q}}^{el} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}^{el}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}^{el}} \frac{\partial \bar{\phi}^{el}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{el}} \right). \quad (2.50)$$

Aufgrund der Symmetrie von $\bar{\mathbf{T}}$ vereinfacht sich die Darstellung von (2.50) zu

$$\bar{\mathbf{T}} = 2\rho_0 \frac{\partial \bar{\phi}^{el}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{el}} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}^{el}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}^{el}} \bar{\mathbf{Q}}^{el}. \quad (2.51)$$

Nach LEHMANN [70] erhält man daraus unter Berücksichtigung des logarithmischen elastischen Verzerrungstensors (2.35) und unter der Voraussetzung isotropen elastischen Verhaltens des Matrixmaterials die Beziehung

$$\bar{\mathbf{T}} = \rho_0 \frac{\partial \bar{\phi}^{el}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{el}}, \quad (2.52)$$

d. h. der effektive Spannungstensor wird hier durch die Ableitung des elastischen Anteils der effektiven spezifischen freien Energie nach dem effektiven elastischen Verzerrungstensor ausgedrückt.

Mit Hilfe der Gleichung (2.48) erhält man dann die Identität der Skalarprodukte

$$\bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{el} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{A}}}^{el}. \quad (2.53)$$

Die Betrachtung des irreversiblen Anteils der Deformationen in Ungleichung (2.47) liefert nun die positive plastische Dissipation \bar{D} in Form der Kelvin-Ungleichung

$$\bar{D} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{pl} - \rho_0 \dot{\bar{\phi}}^{pl} \geq 0. \quad (2.54)$$

Daraus folgt, dass $\bar{\mathbf{T}}$ und $\dot{\bar{\mathbf{H}}}^{pl}$ arbeitskonjugierte Größen sind. Demzufolge ist die maßgebende Größe zur Formulierung der Evolutionsgleichung für den plastischen Anteil der Deformationen die effektive plastische Verzerrungsrate $\dot{\bar{\mathbf{H}}}^{pl}$.

2.3.2 Geschädigte Konfigurationen

Bezüglich der geschädigten Konfigurationen kann mit Hilfe von Gleichung (2.33) nun die Rate der spezifischen mechanischen Arbeit

$$\rho_0 \dot{w} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}} \quad (2.55)$$

additiv in einen elastischen, einen plastischen und einen schädigungsbezogenen Anteil zerlegt werden, so dass

$$\rho_0 \dot{w} = \rho_0 \dot{w}^{el} + \rho_0 \dot{w}^{pl} + \rho_0 \dot{w}^{da} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{el} + \mathbf{T} \cdot \left(\mathbf{R}^{-1} \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{pl} \mathbf{R} \right) + \mathbf{T} \cdot \left(\mathbf{Q}^{el} {}^{-1} \dot{\mathbf{H}}^{da} \mathbf{Q}^{el} \right). \quad (2.56)$$

Da experimentelle Untersuchungen von SPITZIG et al. [110] nahe legen, dass Schädigungsvorgänge im Wesentlichen das elastische Materialverhalten beeinflussen, wird hier vorausgesetzt, dass der elastische Anteil der freien Energie von dem Tensor der elastischen Verzerrungen \mathbf{A}^{el} und dem Tensor der schädigungsbezogenen Verzerrungen \mathbf{A}^{da} abhängt. Des Weiteren wird, wie beispielsweise auch bei LEMAITRE [72] sowie LU & CHOW [78], im Rahmen der Modellbildung postuliert, dass plastisches Materialverhalten und Schädigungsverhalten sich nicht gegenseitig beeinflussen. Demzufolge ist hier der plastische Anteil der freien Energie ausschließlich eine Funktion des skalaren plastischen Verzerrungsmaßes $\hat{\gamma}$ und der schädigungsbezogene Anteil der freien Energie wird über eine separate skalare Zustandsvariable $\hat{\mu}$ erfasst, die den Schädigungszustand des Materials kennzeichnet und ebenfalls nichtlokale Anteile enthält. Daraus ergibt sich für die freie Helmholtz-Energie die Zerlegung in die drei Anteile

$$\phi = \phi^{el}(\mathbf{A}^{el}, \mathbf{A}^{da}) + \phi^{pl}(\hat{\gamma}) + \phi^{da}(\hat{\mu}). \quad (2.57)$$

Die Gleichungen (2.56) und (2.57) liefern nun die folgende Schreibweise des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik

$$\begin{aligned} \rho_0 \dot{w} - \rho_0 \dot{\phi} = & \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{el} + (\mathbf{RTR}^{-1}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{pl} + (\mathbf{Q}^{el} \mathbf{T} \mathbf{Q}^{el-1}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{da} + \\ & - \rho_0 \frac{\partial \phi^{el}}{\partial \mathbf{A}^{el}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{el} - \rho_0 \frac{\partial \phi^{el}}{\partial \mathbf{A}^{da}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{da} - \rho_0 \dot{\phi}^{pl}(\hat{\gamma}) - \rho_0 \dot{\phi}^{da}(\hat{\mu}) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Für nicht-dissipative Prozesse folgt dann hieraus

$$\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{el} - \rho_0 \frac{\partial \phi^{el}}{\partial \mathbf{A}^{el}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{el} = 0 \quad (2.59)$$

und mit Gleichung (2.14)

$$\mathbf{T} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{el-1} \dot{\mathbf{Q}}^{el} = \rho_0 \frac{\partial \phi^{el}}{\partial \mathbf{A}^{el}} \frac{\partial \mathbf{A}^{el}}{\partial \mathbf{Q}^{el}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^{el}. \quad (2.60)$$

Damit erhält man dann die thermische Zustandsgleichung

$$\mathbf{T} = \rho_0 \left(\frac{\partial \phi^{el}}{\partial \mathbf{A}^{el}} \frac{\partial \mathbf{A}^{el}}{\partial \mathbf{Q}^{el}} \mathbf{Q}^{el} + \mathbf{Q}^{el} \frac{\partial \mathbf{A}^{el}}{\partial \mathbf{Q}^{el}} \frac{\partial \phi^{el}}{\partial \mathbf{A}^{el}} \right), \quad (2.61)$$

die die reversiblen Deformationen beschreibt.

Bei der Betrachtung des irreversiblen Anteils der Deformationen kann die Clausius-Duhem-Ungleichung aufgrund der bereits oben vorausgesetzten Entkopplung des plastischen und des schädigenden Materialverhaltens nun getrennt dargestellt werden mit

$$(\mathbf{RTR}^{-1}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{pl} - \rho_0 \dot{\phi}^{pl} \geq 0 \quad (2.62)$$

für den plastischen Anteil und

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{da} - \rho_0 \frac{\partial \phi^{el}}{\partial \mathbf{A}^{da}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{da} - \rho_0 \dot{\phi}^{da} \geq 0 \quad (2.63)$$

für die schädigungsbezogenen Deformationen. Demzufolge wird die Evolutionsgleichung für die Deformationen infolge Schädigung mit Hilfe des Tensors der Schädigungsverzerrungsrate $\dot{\mathbf{H}}^{da}$ beschrieben und die Schädigungsbedingung wird als Funktion des zu $\dot{\mathbf{H}}^{da}$ arbeitskonjugierten Spannungstensors

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}^{el} \mathbf{T} \mathbf{Q}^{el -1} \quad (2.64)$$

definiert.

3 Konstitutive Gleichungen

Klassische kontinuumsmechanische Modelle setzen voraus, dass das Verhalten eines Materialpunkts ausschließlich von den entsprechenden Variablen desselben Punktes abhängt. Von einem mikromechanischen Standpunkt betrachtet, ist eine solche Beschränkung des Materialmodells jedoch nur eingeschränkt gültig, da durch zahlreiche experimentelle Untersuchungen gezeigt werden konnte, dass das Verhalten des Materials an einem Punkt maßgeblich durch seine Wechselwirkungen mit den Nachbarnpunkten beeinflusst wird, wie z. B. bei FLECK & HUTCHINSON [46], [47], SHU et al. [101] sowie FLECK et al. [48].

Die Berücksichtigung des Verhaltens der Nachbarnpunkte wird in dieser Arbeit, wie bereits in BRÜNIG et al. [30], RICCI [95] und RICCI et al. [96], durch die Einführung einer nichtlokalen Fließbedingung in Kapitel 3.1 realisiert. Dabei hängt die Fließspannung sowohl von einem skalaren plastischen Verzerrungsmaß als auch von einem nichtlokalen Verzerrungsmaß ab, das die Interaktionen mit den in einer Umgebung liegenden Punkten berücksichtigt, wobei der Einfluss mit wachsendem Abstand abnimmt.

Entsprechend wird auch zur Beschreibung des Schädigungsverhaltens in Kapitel 3.2 ein nicht-lokales Modell verwendet.

3.1 Ungeschädigte Konfigurationen

3.1.1 Elastisches Materialverhalten

Der effektive elastische Anteil des Materialverhaltens ist charakterisiert durch die freie Helmholtz-Energie (2.44), wobei die effektive elastische Potentialfunktion hier diese Gestalt annimmt:

$$\rho_0 \bar{\phi}^{el}(\bar{\mathbf{A}}^{el}) = G \bar{\mathbf{A}}^{el} \cdot \bar{\mathbf{A}}^{el} + \frac{1}{2} \left(K - \frac{2}{3} G \right) (\text{tr} \bar{\mathbf{A}}^{el})^2. \quad (3.1)$$

Die elastischen Stoffkonstanten G und K bezeichnen hier den Schubmodul bzw. den Kompressionsmodul des ungeschädigten Matrixmaterials.

Das hyperelastische Stoffgesetz (2.52) liefert dann den effektiven Spannungstensor $\bar{\mathbf{T}}$ als Ableitung der effektiven elastischen Potentialfunktion (3.1) nach dem Tensor der effektiven elastischen Verzerrungen in Form des verallgemeinerten Hooke-Gesetzes

$$\bar{\mathbf{T}} = 2G \bar{\mathbf{A}}^{el} + \left(K - \frac{2}{3}G \right) \text{tr} \bar{\mathbf{A}}^{el} \mathbf{1}. \quad (3.2)$$

Unter der Annahme, dass das elastische Materialverhalten unabhängig von den plastischen Verzerrungen ist, stellt sich der elastische Stofftensor dar als zweite Ableitung der effektiven elastischen Potentialfunktion (3.1) nach dem effektiven elastischen Verzerrungstensor

$$\mathcal{C} = \rho_0 \frac{\partial^2 \bar{\phi}^{el}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{el} \otimes \partial \bar{\mathbf{A}}^{el}} = 2G \mathcal{I} + \left(K - \frac{2}{3}G \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (3.3)$$

mit

$$\mathcal{I} = \delta_k^i \delta_j^l \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^k. \quad (3.4)$$

3.1.2 Plastisches Materialverhalten

In dieser Arbeit soll, über die klassische Metallplastizität hinausgehend, eine Abhängigkeit des plastischen Materialverhaltens vom hydrostatischen Spannungszustand berücksichtigt werden (vgl. BERGER [12]). Experimentelle Untersuchungen an Aluminium und hochfesten Stählen von SPITZIG et al. [111], [112] sowie SPITZIG & RICHMOND [109] haben gezeigt, dass das plastische Materialverhalten auch bei Metallen eine Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand aufweisen kann. Insbesondere wird in den Arbeiten von BRÜNIG [23] sowie BRÜNIG et al. [28] deutlich, dass die Berücksichtigung hydrostatischer Effekte das Materialverhalten bezüglich des Lokalisierungsbeginns oder der Verformungsfiguren maßgeblich beeinflusst und z. B. die Duktilität vermindern kann.

Im Rahmen einer phänomenologischen $\bar{I}_1 - \bar{J}_2$ -Fließtheorie wird diese Abhängigkeit hier berücksichtigt durch die folgende Darstellung der Fließspannung

$$c = a\bar{I}_1 + \sqrt{\bar{J}_2}, \quad (3.5)$$

wobei $\bar{I}_1 = \text{tr} \bar{\mathbf{T}}$ die erste Invariante und $\bar{J}_2 = \frac{1}{2} \text{dev} \bar{\mathbf{T}} \cdot \text{dev} \bar{\mathbf{T}}$ die zweite Invariante des effektiven Spannungstensors bezeichnet. Der hier auftretende hydrostatische Parameter a ist von der Größe der Verzerrung abhängig und kann deshalb nicht als Materialkonstante bezeichnet werden. SPITZIG & RICHMOND [109] konnten jedoch zeigen, dass das Verhältnis des hydrostatischen Parameters a zur Fließspannung c konstant ist, so dass im Folgenden nicht auf den veränderlichen Wert a , sondern auf den materialspezifischen konstanten Quotienten a/c Bezug genommen wird. Gleichung (3.5) wird demzufolge so umgeformt, dass sie die folgende Gestalt annimmt:

$$c = \frac{\sqrt{\bar{J}_2}}{1 - \frac{a}{c} \bar{I}_1}. \quad (3.6)$$

In der klassischen Kontinuumsmechanik wird das Prinzip der lokalen Wirkung angewandt. Das bedeutet, dass an jedem Materialpunkt nur die Werte der Variablen dieses Materialpunkts berücksichtigt werden und nicht diejenigen der anderen Punkte des Körpers. Dagegen wird hier eine nichtlokale Theorie verwendet, in der das Materialverhalten an jedem Punkt durch das Verhalten der jeweils benachbarten Punkte beeinflusst wird. Dabei wird der Tatsache Rechnung getragen, dass plastische Deformationen durch Besonderheiten der Mikrostruktur geprägt sind, und somit die Berücksichtigung nichtlokaler Effekte für eine physikalisch adäquate Beschreibung des Materialverhaltens notwendig ist. Dieses wird erreicht, indem die folgende nichtlokale $\bar{I}_1 - \bar{J}_2$ -Fließbedingung

$$f^{pl}(\bar{I}_1, \bar{J}_2, c) = \frac{1}{1 - \frac{a}{c} \bar{I}_1} \sqrt{\bar{J}_2} - c(\hat{\gamma}) = 0 \quad (3.7)$$

eingeführt wird, wobei die Fließspannung c hier von dem skalaren plastischen Verzerrungsmaß $\hat{\gamma}$ abhängt, das sowohl lokale als auch nichtlokale Anteile enthält, während

in der klassischen Plastizitätstheorie die Fließspannung c lediglich eine Funktion der rein lokalen Variablen γ darstellt. Als nichtlokaler Effekt wird hier beim plastischen Fließen das Verhalten der in der Mikrostruktur jeweils benachbarten Punkte berücksichtigt, indem die entsprechende Funktion über eine geeignete Umgebung gemittelt wird. Dieses Vorgehen wurde auch schon in BRÜNIG et al. [30], RICCI et al. [96] und RICCI [95] eingesetzt und wird im Folgenden näher erläutert.

Das aus einem lokalen und einem nichtlokalen Anteil bestehende skalare plastische Verzerrungsmaß $\hat{\gamma}$ setzt sich wie folgt zusammen

$$\hat{\gamma} = (1 - m)\gamma + m\hat{\gamma}, \quad (3.8)$$

wobei die Gewichtung der jeweiligen Anteile durch den Parameter m gesteuert wird.

Die rein nichtlokale Funktion, die hier mit $\hat{\gamma}$ bezeichnet wird, erhält man aus der lokalen Funktion γ durch die Relation

$$\hat{\gamma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_r(\mathbf{x})} \int \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \gamma(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \quad (3.9)$$

mit

$$V_r(\mathbf{x}) = \int \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{s}) d\mathbf{s}. \quad (3.10)$$

$V_r(\mathbf{x})$ beschreibt hier ein repräsentatives Volumenelement als Umgebung eines betrachteten Materialpunkts \mathbf{x} . Durch die Gewichtungsfunktion Γ wird auch die interne Länge ℓ eingeführt, die die Größe des repräsentativen Volumenelements und damit den Bereich festlegt, innerhalb dessen nichtlokale Effekte berücksichtigt werden. Die Gewichtungsfunktion Γ besitzt ein Maximum an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{s}$ und ist symmetrisch bezüglich dieses Maximums. Numerische Anwendungen zeigen, dass die Gauß-Glockenfunktion

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \exp\left[-(k\|\mathbf{x}\|/\ell)^2\right] \quad (3.11)$$

die Anforderungen an die Gewichtungsfunktion gut erfüllt (s. ERINGEN [43] sowie STRÖMBERG & RISTINMAA [113]).

In Definition (3.11) bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm im \mathbb{R}^n und der Parameter k wird so bestimmt, dass das repräsentative Volumen für $n = 1$ der Länge ℓ , für $n = 2$ dem Flächeninhalt eines Kreises mit dem Durchmesser ℓ und für $n = 3$ dem Volumen einer Kugel mit dem Durchmesser ℓ entspricht.

$n = 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(k \frac{x}{\ell}\right)^2\right] dx = 2 \cdot \int_0^{\infty} \exp\left[\frac{-k^2}{\ell^2} x^2\right] dx = \frac{\sqrt{\pi}}{k} \cdot \ell \stackrel{!}{=} \ell \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\pi}$$

$n = 2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(k \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\ell}\right)^2\right] dx dy = \frac{\sqrt{\pi}}{k} \cdot \ell \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-k^2}{\ell^2} y^2\right] dy = \frac{\pi \ell^2}{k^2} \stackrel{!}{=} \pi \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow k = 2$$

$n = 3$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(k \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\ell}\right)^2\right] dx dy dz = \frac{\pi \sqrt{\pi}}{k} \cdot \ell^3 \stackrel{!}{=} \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^3 \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow k = \sqrt[3]{6\sqrt{\pi}}$$

$$\Gamma(x) = \exp\left[\frac{-\pi}{\ell^2} \cdot x^2\right]$$

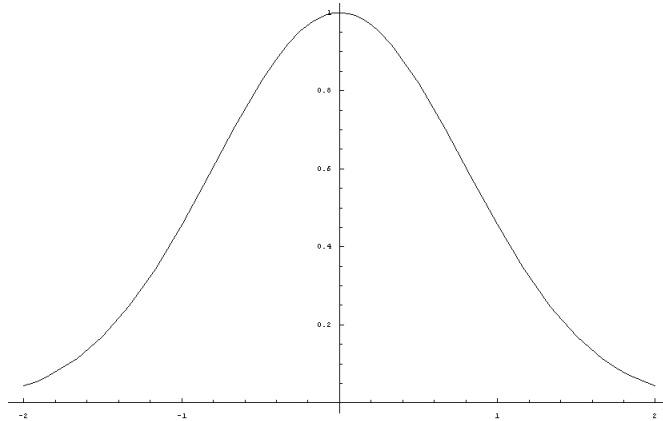


Abbildung 3.1: Grafische Darstellung der Gewichtungsfunktion für $n=1$

$$\Gamma(x) = \exp\left[\frac{-4}{\ell^2} \cdot (x^2 + y^2)\right]$$

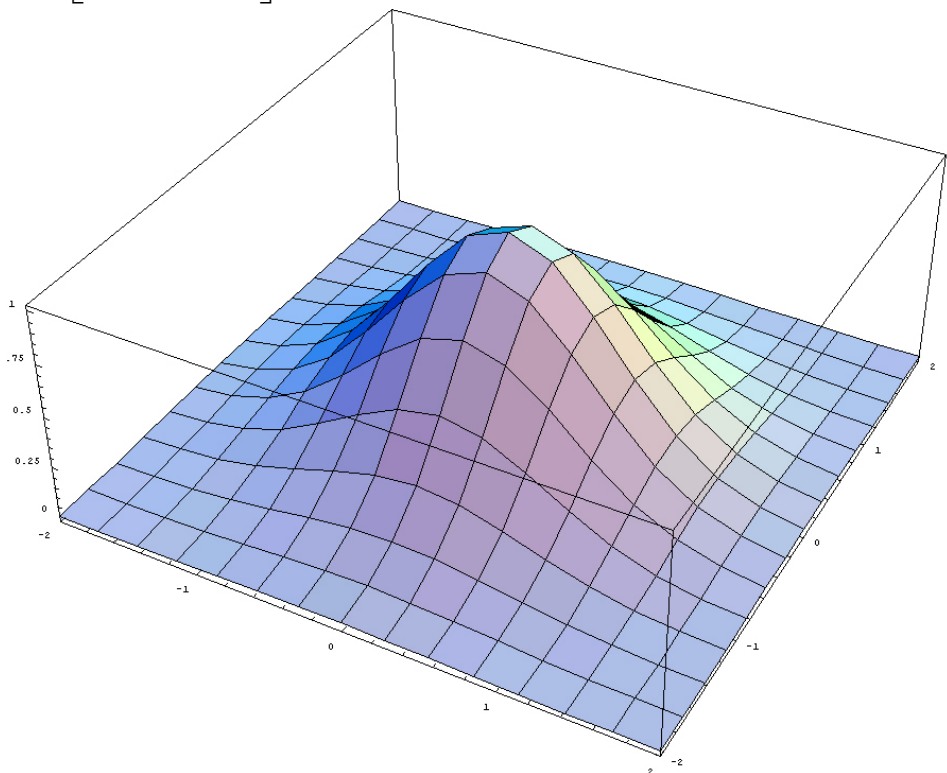


Abbildung 3.2: Grafische Darstellung der Gewichtungsfunktion für $n = 2$

Die Abbildungen 3.1 und 3.2 zeigen die grafische Darstellung der Funktion Γ für die Fälle $n=1$ und $n=2$. Der Längenparameter ℓ wird jeweils in der Größenordnung der Materialinhomogenitäten gewählt, um eine realistische Abbildung des physikalischen Verhaltens zu gewährleisten. Setzt man $\ell = 0$, wird die Gewichtungsfunktion Γ auf die Dirac-Funktion reduziert, so dass man in diesem Fall die lokale $\bar{I}_1 - \bar{J}_2$ -Plastizitätstheorie erhält.

Zur Formulierung des Fließgesetzes wird eine plastische Potentialfunktion zur Berechnung des plastischen Anteils der Deformationen eingeführt. Bei elastisch-plastisch verformten und geschädigten Metallen werden irreversible volumetrische Verzerrungen im Wesentlichen durch die Schädigung des Materials hervorgerufen, während der Anteil der volumetrischen plastischen Verzerrungen im Vergleich dazu vernachlässigbar gering ist (SPITZIG et al. [111]). Deshalb wird zur Berechnung des plastischen Anteils der Verzerrungen die plastische Potentialfunktion

$$g^{pl}(\bar{J}_2) = \sqrt{\bar{J}_2} \quad (3.15)$$

eingeführt, die hier nur von der zweiten Invarianten des effektiven Spannungsdeviators \bar{J}_2 abhängt. Im Gegensatz zu der Fließbedingung (3.7) enthält die plastische Potentialfunktion (3.15) nicht die Invariante \bar{I}_1 , da diese den volumetrischen Anteil der plastischen Verzerrungen beschreiben würde, der - wie bereits erwähnt - vergleichsweise gering ist.

Somit erhält man ein nichtassoziertes Fließgesetz aus der Ableitung der plastischen Potentialfunktion (3.15) nach dem effektiven Spannungstensor

$$\dot{\mathbf{H}}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial g^{pl}}{\partial \bar{\mathbf{T}}} = \dot{\lambda} \frac{1}{2\sqrt{\bar{J}_2}} \text{dev} \bar{\mathbf{T}}, \quad (3.16)$$

wobei der Parameter $\dot{\lambda} \in \mathbb{R}$ nicht negativ ist.

Die Konsistenzbedingung, die die Gültigkeit der Fließbedingung während des weiteren Deformationsprozesses gewährleistet, hat hier die Gestalt

$$\dot{f}^{pl} = \frac{1}{1 - \frac{a}{c} \bar{I}_1} \left(a \mathbf{1} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \text{dev } \bar{\mathbf{T}} \right) \cdot \dot{\bar{\mathbf{T}}} - \dot{c}(\hat{\gamma}) = 0. \quad (3.17)$$

Führt man nun den normierten deviatorischen Spannungsrichtungstensor

$$\bar{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{2J_2}} \text{dev } \bar{\mathbf{T}} \quad (3.18)$$

ein, so erhält man die skalare plastische Vergleichsdehnungsrate

$$\dot{\hat{\gamma}} = \bar{\mathbf{N}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{pl} = \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{2}} \quad (3.19)$$

als Projektion des Tensors $\dot{\bar{\mathbf{H}}}^{pl}$ auf die Richtung des Spannungsdeviators.

Der Tensor $\bar{\mathbf{N}}$ in Definition (3.18) genügt den Gleichungen $\bar{\mathbf{N}} \cdot \bar{\mathbf{N}} = 1$ und $\bar{\mathbf{N}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{N}}} = 0$.

Die Gleichung (3.16) ergibt damit

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{N}} = \dot{\hat{\gamma}} \bar{\mathbf{N}}. \quad (3.20)$$

3.2 Geschädigte Konfigurationen

Um das Verhalten duktiler geschädigter Materialien realistisch darstellen zu können, wurden während der letzten Jahrzehnte verschiedene Modelle der Beschreibung entwickelt.

Zunächst führten u. a. KACHANOV [60], RABOTNOV [94], LEMAITRE [72], [73], LEMAITRE & DUFAILY [75] und TVERGAARD [115] skalarwertige Schädigungsvariablen ein. Dagegen verwendeten KRAJČINOVIC & FONSEKA [64], [65] und KRAJČINOVIC [63] eine Vektordarstellung zur Beschreibung der Schädigung. Da diese Modelle jedoch nicht in der Lage waren, die durch Schädigung ausgelöste Materialanisotropie zu berücksichtigen, wurden Schädigungstensoren zweiter Ordnung eingeführt. Diese Möglichkeit der Materialbeschreibung wurde beispielsweise von KACHANOV [61], MURAKAMI & OHNO [83], BETTEN [13], [14], KRAJČINOVIC [63], CHOW & WANG [35], [36], CHABOCHE [32], [33], MURAKAMI [82], JU [59], LU & CHOW [78], VOYIADJIS & KATTAN [119], BRUHNS & SCHIESSE [31] sowie BRÜNIG [24], [25], [26] angewendet.

3.2.1 Elastisches Materialverhalten

Wie experimentelle Untersuchungen, z. B. durch SPITZIG et al. [110] sowie LEMAITRE & DUFAILY [75], gezeigt haben, führt das Vorhandensein von Mikrodefekten zu einer Verringerung der Lastaufnahmekapazität und zu einer Beeinträchtigung des elastischen Materialverhaltens. Aus diesem Grund soll die elastische freie Energie ϕ^{el} als skalarwertige isotrope Tensorfunktion von \mathbf{A}^{el} und \mathbf{A}^{da} definiert werden. Wie beispielsweise bei LUBARDA & KRAJČINOVIC [79] oder HAYAKAWA et al. [54] gezeigt wird, wäre die Funktion der elastischen freien Energie in ihrer allgemeinsten Form von zehn Invarianten der symmetrischen Tensoren \mathbf{A}^{el} und \mathbf{A}^{da} abhängig. In dieser Arbeit soll angenommen werden, dass das ungeschädigte Material im Ausgangszustand isotropes und linear elastisches Verhalten aufweist und dass die elastische Energie mit zunehmender Schädigung abnimmt. Die elastische Potentialfunktion für das geschädigte Material wird nun als quadratisch in \mathbf{A}^{el} und linear in \mathbf{A}^{da} vorausgesetzt (BRÜNIG [26]) und hat somit die Gestalt

$$\begin{aligned}
\rho_0 \phi^{el}(\mathbf{A}^{el}, \mathbf{A}^{da}) = & G \mathbf{A}^{el} \cdot \mathbf{A}^{el} + \frac{1}{2} \left(K - \frac{2}{3} G \right) (\text{tr} \mathbf{A}^{el})^2 + \\
& + \eta_1 \text{tr} \mathbf{A}^{da} (\text{tr} \mathbf{A}^{el})^2 + \eta_2 \text{tr} \mathbf{A}^{da} \mathbf{A}^{el} \cdot \mathbf{A}^{el} + \\
& + \eta_3 \text{tr} \mathbf{A}^{el} \mathbf{A}^{da} \cdot \mathbf{A}^{el} + \eta_4 \mathbf{A}^{el} \cdot (\mathbf{A}^{el} \mathbf{A}^{da}),
\end{aligned} \tag{3.21}$$

wobei G und K wiederum den Schubmodul bzw. den Kompressionsmodul des ungeschädigten Matrixmaterials bezeichnen, während η_1, \dots, η_4 Materialkonstanten darstellen, die den Einfluss der Schädigung auf das elastische Materialverhalten beschreiben.

Durch die Ableitung der elastischen Potentialfunktion (3.21) erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial \phi^{el}}{\partial \mathbf{A}^{el}} = & 2 \left(G + \eta_2 \text{tr} \mathbf{A}^{da} \right) \mathbf{A}^{el} + \left[\left(K - \frac{2}{3} G + 2\eta_1 \text{tr} \mathbf{A}^{da} \right) \text{tr} \mathbf{A}^{el} + \eta_3 (\mathbf{A}^{da} \cdot \mathbf{A}^{el}) \right] \mathbf{1} + \\
& + \eta_3 \text{tr} \mathbf{A}^{el} \mathbf{A}^{da} + \eta_4 (\mathbf{A}^{el} \mathbf{A}^{da} + \mathbf{A}^{da} \mathbf{A}^{el}),
\end{aligned} \tag{3.22}$$

die jeweils linear von den Verzerrungstensoren \mathbf{A}^{el} und \mathbf{A}^{da} abhängt. Versucht man nun, den Tensor \mathbf{A}^{el} (2.11) in einer Reihendarstellung mit dem Argument \mathbf{Q}^{el} auszudrücken, so liefert die Ableitung $\frac{\partial \mathbf{A}^{el}}{\partial \mathbf{Q}^{el}}$ eine in \mathbf{Q}^{el} nichtlineare Funktion. Damit würde der in Gleichung (2.61) definierte Kirchhoff-Spannungstensor \mathbf{T} des geschädigten Materials nichtlinear von dem elastischen Verzerrungstensor \mathbf{A}^{el} abhängen.

Trifft man jedoch die Annahmen, dass der Spannungstensor \mathbf{T} der geschädigten Konfiguration, der in Gleichung (2.61) definiert wurde, vor Einsetzen der Schädigung mit dem Spannungstensor $\bar{\mathbf{T}}$ der ungeschädigten Konfiguration (2.52) übereinstimmt und dass die Linearität der Funktion $\mathbf{T}(\mathbf{A}^{el})$ bei fortschreitender Schädigung erhalten bleibt, reduziert sich die Gleichung (2.61) zu dem elastischen Stoffgesetz

$$\mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial \phi^{el}}{\partial \mathbf{A}^{el}}. \tag{3.23}$$

Gleichung (2.59) liefert dann zusammen mit (3.23) die Aussage

$$\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{el} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{el}. \tag{3.24}$$

Das Differential des Spannungstensors \mathbf{T} (3.22) hat dann die Gestalt

$$d\mathbf{T} = \mathcal{C}^{el} d\mathbf{A}^{el} + \mathcal{C}^{da} d\mathbf{A}^{da}, \quad (3.25)$$

wobei die entsprechenden partiellen Ableitungen durch

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{el} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{A}^{el}} = & 2\left(G + \eta_2 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da}\right) \mathcal{I} + \left(K - \frac{2}{3}G + 2\eta_1 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da}\right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \\ & + \eta_3 \left(\mathbf{A}^{da} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{A}^{da}\right) + \eta_4 \mathcal{A}^{da} \end{aligned} \quad (3.26)$$

mit \mathcal{I} aus Gleichung (3.4) und

$$\mathcal{A}^{da} = \left[\left(\mathbf{A}^{da}\right)_k^i \delta_j^l + \delta_k^i \left(\mathbf{A}^{da}\right)_j^l \right] \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^k \quad (3.27)$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{da} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{A}^{da}} = & 2\eta_1 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{el} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\eta_2 \mathbf{A}^{el} \otimes \mathbf{1} + \eta_3 \mathbf{1} \otimes \mathbf{A}^{el} + \\ & + \eta_3 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{el} \mathcal{I} + \eta_4 \mathcal{A}^{el} \end{aligned} \quad (3.28)$$

mit

$$\mathcal{A}^{el} = \left[\left(\mathbf{A}^{el}\right)_k^i \delta_j^l + \delta_k^i \left(\mathbf{A}^{el}\right)_j^l \right] \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^k \quad (3.29)$$

gegeben sind.

Hier ist zu beachten, dass die Bedingung $2\eta_2 = \eta_3$ die Symmetrie von \mathcal{C}^{da} in Gleichung (3.28) gewährleistet. In Gleichung (3.26) erkennt man deutlich, dass die elastischen Materialeigenschaften nicht konstant sind und durch zusätzliche, aus der Schädigung resultierende Terme beeinflusst werden. Die zusätzlichen Materialkonstanten η_1 und η_2 beziehen sich dabei auf den isotropen Anteil der Schädigung, während η_3 und η_4 die anisotrope Schädigungsentwicklung kennzeichnen. Da man in Zugversuchen mit duktilen Metallen feststellen konnte, dass eine Zunahme von Mikrodefekten zu einer Abminderung von Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl führt, müssen für die zusätzlichen Parameter

η_1, \dots, η_4 negative Werte eingesetzt werden, um eine physikalisch sinnvolle Beschreibung des Materialverhaltens zu gewährleisten.

3.2.2 Schädigungsverhalten

Um nun die konstitutiven Gleichungen für das Einsetzen und die Entwicklung der Schädigung zu formulieren, verfährt man entsprechend der Plastizitätstheorie, indem man analog zu dem dort verwendeten Prinzip der Fließfläche hier eine Schädigungsfläche einführt.

In vielen in der Literatur beschriebenen Schädigungsmodellen, wie z. B. bei CORDEBOIS [37], wird eine Schädigungsdissipationsfunktion eingeführt, die von einer schädigungsbezogenen Energierate abhängt. Um die mit der Definition des zugehörigen Tensors in Zusammenhang stehenden Probleme zu vermeiden, führten CHOW & WANG [35] die Schädigungsdissipation als Funktion des effektiven Spannungstensors ein.

In dieser Arbeit wird die Schädigungsdissipationsfunktion (2.63) ebenfalls als Funktion des zu dem Tensor der Schädigungsverzerrungsrate $\dot{\mathbf{H}}^{da}$ (2.32) arbeitskonjugierten Spannungstensors $\tilde{\mathbf{T}}$ (2.64) definiert. Damit wird die Schädigungsbedingung

$$f^{da}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\sigma}) = 0 \quad (3.30)$$

formuliert, wobei $\tilde{\sigma}$ die Schädigungsvergleichsspannung bezeichnet, die den Widerstand des Materials gegenüber der Verbreitung von Mikrodefekten beschreibt.

Experimentelle Untersuchungen, die zeigen, dass das Zusammenwirken des Wachsens und Zusammenschließens der Poren einerseits und der dadurch ausgelösten Effekte im Matrixmaterial andererseits schließlich zum Materialversagen führt (z. B. [75]), werden durch die nichtlokale Schädigungsbedingung

$$f^{da}(I_1, J_2, \tilde{\sigma}) = \tilde{\alpha}I_1 + \tilde{\beta}\sqrt{J_2} - \tilde{\sigma}(\hat{\mu}) = 0 \quad (3.31)$$

abgebildet, die in ihrer nicht erweiterten lokalen Form auch von BRÜNIG [26] verwendet wird. Sie ist abhängig von den Spannungsinvarianten

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{T} = \text{tr} \tilde{\mathbf{T}} \quad (3.32)$$

sowie

$$J_2 = \frac{1}{2} \text{dev} \mathbf{T} \cdot \text{dev} \mathbf{T} = \frac{1}{2} \text{dev} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \text{dev} \tilde{\mathbf{T}} \quad (3.33)$$

und berücksichtigt damit sowohl hydrostatische als auch deviatorische Effekte. Die Invarianten I_1 und J_2 werden dabei durch die experimentell zu bestimmenden Materialparameter $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ gewichtet.

Gleichung (3.31) enthält außerdem erneut eine Abhängigkeit der Schädigungsvergleichsspannung $\tilde{\sigma}$ von dem skalaren Schädigungsmaß $\hat{\mu}$, das analog zur Funktion $\hat{\gamma}$ (3.8) in Kapitel 3.1.2 aus einem lokalen und einem nichtlokalen Anteil zusammengesetzt ist.

Ebenso in Analogie zur Plastizitätstheorie (vgl. (3.17)) wird eine Schädigungskonsistenzbedingung

$$\dot{f}^{da} = \left(\tilde{\alpha} \mathbf{1} + \frac{\tilde{\beta}}{2\sqrt{J_2}} \text{dev} \mathbf{T} \right) \cdot \dot{\mathbf{T}} - \dot{\tilde{\sigma}}(\hat{\mu}) = 0 \quad (3.34)$$

formuliert, die die Gültigkeit der Schädigungsbedingung während des weiteren Belastungsprozesses gewährleistet.

Des Weiteren wird zur Berechnung des schädigungsbezogenen Anteils der Verzerrungsraten die Schädigungspotentialfunktion

$$g^{da}(\tilde{\mathbf{T}}) = \alpha I_1 + \beta \sqrt{J_2} \quad (3.35)$$

in Abhängigkeit von dem Spannungstensor $\tilde{\mathbf{T}}$ eingeführt, wobei α und β kinematisch begründete Schädigungsparameter bezeichnen.

Aus der Ableitung dieser Schädigungspotentialfunktion (3.35) nach dem Spannungstensor $\tilde{\mathbf{T}}$ erhält man das Schädigungsgesetz

$$\dot{\mathbf{H}}^{da} = \dot{\hat{\mu}} \frac{\partial \mathbf{g}^{da}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} = \dot{\hat{\mu}} \left(\alpha \mathbf{1} + \frac{\beta}{2\sqrt{J_2}} \text{dev} \tilde{\mathbf{T}} \right). \quad (3.36)$$

Der deviatorische Anteil in (3.36), der den isochoren Anteil der Schädigung beschreibt, berücksichtigt dabei die Abhängigkeit der Schädigungsentwicklung von der Spannungsrichtung, während der volumetrische Anteil das isotrope Wachstum der Mikrodefekte beschreibt.

3.2.3 Isotropes Materialverhalten

Isotrope Schädigungsmodelle wurden u. a. von LEMAITRE [72], [73], TVERGAARD [115] sowie von FLOREZ-LOPEZ et al. [49], [50] eingeführt. Es handelt sich hierbei um Modelle, die trotz ihrer Einfachheit sehr effizient auf ein breites Spektrum spezieller Problemstellungen angewandt werden können.

Allen genannten Modellen gemeinsam ist die Tatsache, dass die jeweiligen Schädigungsparameter direkt aus numerischen Berechnungsergebnissen an Materialproben mit angenommener Porengeometrie und -verteilung unter mikromechanischer Betrachtung gewonnen werden, wie es z. B. auch bei GURSON [53] und ROUSSELIER [98] der Fall ist. Während beispielsweise bei LEMAITRE [72] sowie LEMAITRE & DUFAILLY [75] das Verhältnis der Oberflächen von Mikrodefekten zur Gesamtfläche als Schädigungsparameter verwendet wird, wird in anderen Fällen der Volumenanteil der Mikroporen berechnet (z. B. TVERGAARD [115]). In jedem Fall erweist es sich als schwierig, ein einheitliches Maß für isotrope duktile Schädigung zu finden.

Unter der Voraussetzung, dass die anfängliche Verteilung der Mikroporen als näherungsweise isotrop angesehen werden kann, soll hier als Schädigungsmaß die Veränderung des Porenvolumenverhältnisses

$$\hat{f} = \frac{dv - d\bar{v}}{dv} \quad (3.37)$$

verwendet werden. Eine kritische Porosität f_c gilt dann als erreicht, wenn das Zusammenwachsen der Poren einsetzt, was wiederum zu stark richtungsabhängigen und damit anisotropen Schädigungsprozessen führt. In Gleichung (3.37) bezeichnet dv das Volumen des Matrixmaterials und $d\bar{v}$ das Volumen der Mikrodefekte. Der Parameter \hat{f} wird im Folgenden auch Porositätsfaktor genannt. Der Wert $(1-\hat{f})$ beschreibt dann entsprechend den jeweiligen Betrag der Schädigung. Demzufolge steht $\hat{f} = 0$ für den ungeschädigten Zustand des Materials, $0 < \hat{f} < f_c$ für einen geschädigten Zustand, bis schließlich mit dem kritischen Wert $\hat{f} = f_c$ anisotropes Materialverhalten einsetzt.

Nun kann der volumetrische Anteil des logarithmischen Schädigungsverzerrungstensors mit Hilfe des Porenvolumenverhältnisses \hat{f} dargestellt werden als

$$\text{tr } \mathbf{A}^{*da} = \ln \frac{dv}{d\bar{v}} = \ln(1-\hat{f})^{-1}, \quad (3.38)$$

weil \hat{f} die Volumenänderung durch Schädigung beschreibt.

Damit hat der Schädigungsverzerrungstensor (2.28) die Gestalt

$$\mathbf{A}^{*da} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{R} = \frac{1}{3} \ln(1-\hat{f})^{-1} \mathbf{1} \quad (3.39)$$

mit dem Schädigungstensor

$$\mathbf{R} = (1-\hat{f})^{-\frac{2}{3}} \mathbf{1}. \quad (3.40)$$

Mit Hilfe von Gleichung (2.32) erhält man dann den Tensor der Schädigungsverzerrungsrate

$$\dot{\mathbf{H}}^{da} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{3} \dot{\hat{f}} (1-\hat{f})^{-1} \mathbf{1}. \quad (3.41)$$

Durch Einsetzen des isotropen Schädigungsgesetzes (3.41) in Gleichung (3.36) und anschließenden Koeffizientenvergleich erhält man die Identität

$$\dot{\hat{\mu}} = \dot{\hat{f}} \quad (3.42)$$

und die Aussage

$$\alpha = \frac{1}{3}(1 - \hat{f})^{-1}. \quad (3.43)$$

3.2.4 Anisotropes Materialverhalten

Das im vorigen Kapitel behandelte isotrope Schädigungsverhalten stellt nur so lange ein geeignetes Modell zur Simulation des tatsächlichen Materialverhaltens dar, bis das Porenvolumenverhältnis \hat{f} einen kritischen Wert f_c erreicht. Deshalb soll in diesem Kapitel der Tatsache Rechnung getragen werden, dass nach dem Überschreiten dieser Schranke die weitere Entwicklung mikroskopischer Defekte wesentlich von der Richtung der Verzerrungen und Spannungen abhängt und der Prozess der Schädigung somit durch Anisotropie geprägt ist.

Der aktuelle Schädigungszustand wird durch das anisotrope Schädigungsgesetz in Gleichung (3.36) beschrieben. Der zweite Summand in dieser Gleichung, der den volumetrischen Anteil darstellt, kann nun mit den Ergebnissen des Kapitels 3.2.3 durch das Porenvolumenverhältnis \hat{f} ausgedrückt werden.

Das anisotrope Schädigungsgesetz hat damit die Gestalt

$$\dot{\mathbf{H}}^{da} = \dot{\hat{f}} \left(\frac{\beta}{2\sqrt{J_2}} \operatorname{dev} \tilde{\mathbf{T}} + \frac{1}{3}(1 - \hat{f})^{-1} \mathbf{1} \right), \quad (3.44)$$

wobei β den experimentell zu bestimmenden Anisotropieparameter bezeichnet.

In dieser Darstellung erkennt man die additive Aufspaltung des Tensors der Schädigungsverzerrungsrate in den isochoren Anteil

$$\dot{\mathbf{H}}_{dev}^{da} = \dot{\hat{f}} \frac{\beta}{2\sqrt{J_2}} \text{dev}\tilde{\mathbf{T}}, \quad (3.45)$$

der das anisotrope Schädigungsverhalten beschreibt, und den volumetrischen Anteil

$$\dot{\mathbf{H}}_{vol}^{da} = \dot{\hat{f}} \frac{1}{3} (1 - \hat{f})^{-1} \mathbf{1}, \quad (3.46)$$

der die durch die Schädigung ausgelöste Volumenänderung wiedergibt.

4 Numerische Integration der konstitutiven Gleichungen

4.1 Skalare Grundgleichungen

Bei der numerischen Integration der konstitutiven Gleichungen liefert jeder Iterationsschritt Verzerrungszinkremente, aus denen dann jeweils der aktuelle Spannungszustand an den Integrationspunkten jedes finiten Elements berechnet wird. Zu diesem Zweck setzt man voraus, dass die zu bestimmenden Variablen zum Zeitpunkt $t_n = t$ sowie eine Näherung für den aktuellen Metriktransformationstensor \mathbf{Q} zum Zeitpunkt $t_{n+1} = t + \Delta t$ bekannt sind. Die Gleichungen für $\bar{\mathbf{Q}}^{pl}$, \mathbf{R} , c und $\tilde{\sigma}$ werden dann über das Zeitinkrement Δt integriert.

Der hierfür verwendete Integrationsalgorithmus basiert auf der Idee, die zu bestimmenden Variablen in einem inelastischen Prediktorschritt zunächst abzuschätzen, um sie dann in einem elastischen Korrektorschritt zu berichtigen, und wurde von NEMAT-NASSER [87] eingeführt und von BRÜNIG [22] sowie BRÜNIG et al. [29] weiterentwickelt. Dieser Algorithmus, der sich insbesondere für große Deformationen als sehr geeignet erweist, wird hier auf nicht-lokales Deformations- und Schädigungsverhalten erweitert.

Unter Verwendung der plastischen Konsistenzbedingung (3.17) wird nun zunächst die skalare Grundgleichung für elastisch-plastisches Materialverhalten in der ungeschädigten Konfiguration hergeleitet.

Analog hierzu wird dann die zweite skalare Grundgleichung aus der Schädigungskonsistenzbedingung (3.34) für anisotrop geschädigtes Material entwickelt.

Durch die Ableitung der Gleichung (3.2)

$$\dot{\mathbf{T}} = 2G\dot{\mathbf{A}}^{el} + \left(K - \frac{2}{3}G \right) \text{tr}\dot{\mathbf{A}}^{el} \mathbf{1} \quad (4.1)$$

und anschließendes Einsetzen in die Konsistenzbedingung (3.17)

$$\frac{1}{1 - \frac{a}{c} \bar{I}_1} \left(\frac{1}{2\sqrt{J_2}} \operatorname{dev} \bar{\mathbf{T}} \cdot 2G \dot{\bar{\mathbf{A}}}^{el} + 3aK \operatorname{tr} \dot{\bar{\mathbf{A}}}^{el} \right) = \dot{c} \quad (4.2)$$

und mit Hilfe der Gleichungen (2.53), (3.18) und (2.36) erhält man die skalare Grundgleichung

$$\left(1 - \frac{a}{c} \bar{I}_1 \right) \dot{c} = \sqrt{2} G \bar{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{el} + 3aK \operatorname{tr} \dot{\mathbf{H}}^{el} \quad (4.3)$$

für die ungeschädigte Konfiguration.

Diese wird nun mit Hilfe der Gleichung (2.33) umgeformt in

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a}{c} \bar{I}_1 \right) \dot{c} &= (\sqrt{2} G \bar{\mathbf{N}} + 3aK \mathbf{1}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{el} \\ &= (\sqrt{2} G \bar{\mathbf{N}} + 3aK \mathbf{1}) \cdot \dot{\mathbf{H}} - \mathbf{R} (\sqrt{2} G \bar{\mathbf{N}} + 3aK \mathbf{1}) \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{pl} + \\ &\quad - \mathbf{Q}^{el} (\sqrt{2} G \bar{\mathbf{N}} + 3aK \mathbf{1}) \mathbf{Q}^{el-1} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{da} \end{aligned} \quad (4.4)$$

und dann mit (3.20) und (3.36)

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a}{c} \bar{I}_1 \right) \dot{c} &= (\sqrt{2} G \bar{\mathbf{N}} + 3aK \mathbf{1}) \cdot \dot{\mathbf{H}} - \sqrt{2} G \mathbf{R} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{R}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{N}} \dot{\hat{\gamma}} + \\ &\quad - \mathbf{Q}^{el} (\sqrt{2} G \bar{\mathbf{N}} + 3aK \mathbf{1}) \mathbf{Q}^{el-1} \cdot \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} \tilde{\mathbf{N}} + \alpha \mathbf{1} \right) \dot{\hat{\mu}} \quad , \end{aligned} \quad (4.5)$$

so dass man schließlich die folgende Darstellung der ersten skalaren Grundgleichung

$$\dot{c} = \sqrt{2} G_1 (\dot{\hat{\epsilon}}_1 - k_1 \dot{\hat{\gamma}} - k_2 \dot{\hat{\mu}}) \quad (4.6)$$

erhält mit dem modifizierten Schubmodul

$$G_1 = \frac{G}{1 - \frac{a}{c} \bar{I}_1} \quad (4.7)$$

der Verzerrungsrate

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{2G}} \left(\sqrt{2G} \bar{\mathbf{N}} + 3aK \mathbf{1} \right) \cdot \dot{\mathbf{H}}, \quad (4.8)$$

und den Abkürzungen

$$k_1 = \mathbf{R} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{R}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{N}} \quad (4.9)$$

sowie

$$k_2 = \frac{1}{\sqrt{2G}} \mathbf{Q}^{el} \left(\sqrt{2G} \bar{\mathbf{N}} + 3aK \mathbf{1} \right) \mathbf{Q}^{el-1} \cdot \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} \tilde{\mathbf{N}} + \alpha \mathbf{1} \right). \quad (4.10)$$

Für die zweite skalare Grundgleichung schreibt man zunächst die Schädigungskonsistenzbedingung (3.34) in der Form

$$\dot{\tilde{\sigma}} = \left(\frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \mathbf{N} + \tilde{\alpha} \mathbf{1} \right) \cdot \dot{\mathbf{T}}, \quad (4.11)$$

wobei $\dot{\mathbf{T}}$ aus (3.25) abgeleitet wird.

Die Ausführung des Skalarprodukts in (4.11) liefert mit Hilfe von (3.26) und (3.28)

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\sigma}} = & \tilde{\alpha} \left[2 \left(G + \eta_2 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da} \right) \operatorname{tr} \dot{\mathbf{A}}^{el} + 3 \left(K - \frac{2}{3} G + 2\eta_1 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da} \right) \operatorname{tr} \dot{\mathbf{A}}^{el} + \eta_3 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da} \operatorname{tr} \dot{\mathbf{A}}^{el} + \right. \\ & + 3\eta_3 \mathbf{A}^{da} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{el} + 2\eta_4 \mathbf{A}^{da} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{el} + 6\eta_1 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{el} \operatorname{tr} \dot{\mathbf{A}}^{da} + 2\eta_2 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{el} \operatorname{tr} \dot{\mathbf{A}}^{da} + \\ & \left. + 3\eta_3 \mathbf{A}^{el} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{da} + \eta_3 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{el} \operatorname{tr} \dot{\mathbf{A}}^{da} + 2\eta_4 \mathbf{A}^{el} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{da} \right] + \\ & + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \left[2 \left(G + \eta_2 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da} \right) \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{el} + \eta_3 \left(\mathbf{N} \cdot \mathbf{A}^{da} \right) \operatorname{tr} \dot{\mathbf{A}}^{el} + \eta_4 \left(\mathbf{N} \mathbf{A}^{da} + \mathbf{A}^{da} \mathbf{N} \right) \cdot \dot{\mathbf{A}}^{el} + \right. \\ & \left. + 2\eta_2 \left(\mathbf{N} \cdot \mathbf{A}^{el} \right) \operatorname{tr} \dot{\mathbf{A}}^{da} + \eta_3 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{el} \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{da} + \eta_4 \left(\mathbf{N} \mathbf{A}^{el} + \mathbf{A}^{el} \mathbf{N} \right) \cdot \dot{\mathbf{A}}^{da} \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Durch Umformen erhält man

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\sigma}} = & \left[\tilde{\alpha} (2G + 2\eta_2 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da} + 3K - 2G + 6\eta_1 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da} + \eta_3 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da}) + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \eta_3 \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}^{da} \right] \operatorname{tr} \dot{\mathbf{A}}^{el} + \\
& + \tilde{\alpha} (3\eta_3 + 2\eta_4) \mathbf{A}^{da} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{el} + \left[\tilde{\alpha} (6\eta_1 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{el} + 2\eta_2 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{el} + \eta_3 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{el}) + \tilde{\beta} \sqrt{2} \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}^{el} \right] \operatorname{tr} \dot{\mathbf{A}}^{da} + \\
& + \tilde{\alpha} (3\eta_3 + 2\eta_4) \mathbf{A}^{el} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{da} + \sqrt{2} \tilde{\beta} (G + \eta_2 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da}) \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{el} + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \eta_4 (\mathbf{N} \mathbf{A}^{da} + \mathbf{A}^{da} \mathbf{N}) \cdot \dot{\mathbf{A}}^{el} + \\
& + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \eta_3 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{el} \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{da} + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \eta_4 (\mathbf{N} \mathbf{A}^{el} + \mathbf{A}^{el} \mathbf{N}) \cdot \dot{\mathbf{A}}^{da}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

und mit Hilfe der Gleichung (3.24)

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\sigma}} = & \left\{ \sqrt{2} \tilde{\beta} (G + \eta_2 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da}) \mathbf{N} + \left[\tilde{\alpha} (6\eta_1 + 2\eta_2 + \eta_3) \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da} + 3K \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \eta_3 \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{da} \right] \mathbf{1} + \right. \\
& \left. + \tilde{\alpha} (3\eta_3 + 2\eta_4) \mathbf{A}^{da} + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \eta_4 (\mathbf{N} \mathbf{A}^{da} + \mathbf{A}^{da} \mathbf{N}) \right\} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{el} + \\
& + \left\{ \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \eta_3 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{el} \mathbf{N} + \left[\tilde{\alpha} (6\eta_1 + 2\eta_2 + \eta_3) \operatorname{tr} \mathbf{A}^{el} + \sqrt{2} \tilde{\beta} \eta_2 \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}^{el} \right] \mathbf{1} + \right. \\
& \left. + \tilde{\alpha} (3\eta_3 + 2\eta_4) \mathbf{A}^{el} + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \eta_4 (\mathbf{N} \mathbf{A}^{el} + \mathbf{A}^{el} \mathbf{N}) \right\} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{da}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_1 = & \sqrt{2} \tilde{\beta} (G + \eta_2 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da}) \mathbf{N} + \left[\tilde{\alpha} (6\eta_1 + 2\eta_2 + \eta_3) \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da} + 3K \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \eta_3 \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}^{da} \right] \mathbf{1} + \\
& + \tilde{\alpha} (3\eta_3 + 2\eta_4) \mathbf{A}^{da} + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \eta_4 (\mathbf{N} \mathbf{A}^{da} + \mathbf{A}^{da} \mathbf{N})
\end{aligned} \tag{4.15}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_2 = & \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \eta_3 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{el} \mathbf{N} + \left[\tilde{\alpha} (6\eta_1 + 2\eta_2 + \eta_3) \operatorname{tr} \mathbf{A}^{el} + \sqrt{2} \tilde{\beta} \eta_2 \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}^{el} \right] \mathbf{1} + \\
& + \tilde{\alpha} (3\eta_3 + 2\eta_4) \mathbf{A}^{el} + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \eta_4 (\mathbf{N} \mathbf{A}^{el} + \mathbf{A}^{el} \mathbf{N})
\end{aligned} \tag{4.16}$$

liefert die Verwendung von Gleichung (2.33) die Beziehung

$$\dot{\tilde{\sigma}} = \mathbf{C}_1 \cdot \dot{\mathbf{H}} - \mathbf{R} \mathbf{C}_1 \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{pl} - (\mathbf{Q}^{el} \mathbf{C}_1 \mathbf{Q}^{el-1} - \mathbf{C}_2) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{da}. \tag{4.17}$$

Analog zur ersten skalaren Grundgleichung führt das Einsetzen der Gleichungen (3.20) und (3.36) zu der folgenden Darstellung der zweiten skalaren Grundgleichung

$$\dot{\sigma} = \sqrt{2}G_2 (\dot{\varepsilon}_2 - k_3 \dot{\gamma} - k_4 \dot{\mu}) \quad (4.18)$$

mit dem erweiterten Schubmodul

$$G_2 = G + \eta_2 \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da}, \quad (4.19)$$

der Verzerrungsrate

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}G_2} \mathbf{C}_1 \cdot \dot{\mathbf{H}}, \quad (4.20)$$

und den beiden Abkürzungen

$$k_3 = \frac{1}{\sqrt{2}G_2} \mathbf{R} \mathbf{C}_1 \mathbf{R}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{N}} \quad (4.21)$$

und

$$k_4 = \frac{1}{\sqrt{2}G_2} (\mathbf{Q}^{el} \mathbf{C}_1 \mathbf{Q}^{el-1} - \mathbf{C}_2) \cdot \left(\frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \tilde{\mathbf{N}} + \alpha \mathbf{1} \right). \quad (4.22)$$

Die skalaren Grundgleichungen (4.6) und (4.18) beschreiben vollständig das elastisch-plastisch-geschädigte Materialverhalten in Ratenform. Aufgrund ihrer Abhängigkeit von den Gesamtverzerrungsraten $\dot{\varepsilon}_1$ und $\dot{\varepsilon}_2$, der Rate des plastischen Verzerrungsmaßes $\dot{\gamma}$, der Rate des Schädigungsmaßes $\dot{\mu}$ sowie den modifizierten, durch Schädigung beeinflussten Materialparametern G_1 und G_2 , berücksichtigen diese beiden Gleichungen alle auftretenden Einflüsse und bilden damit den Ausgangspunkt, um den gesamten Spannungs- und Verformungsprozess in der numerischen Integration zu erfassen.

4.2 Isotropes Schädigungsverhalten

Im Falle isotropen Schädigungsverhaltens gilt für die Gleichung (2.33)

$$\dot{\mathbf{H}}^{el} = \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^{pl} - \dot{\mathbf{H}}^{da}, \quad (4.23)$$

so dass sich die erste skalare Grundgleichung (4.3) umformen lässt zu

$$\left(1 - \frac{a}{c} \bar{I}_1\right) \dot{c} = \sqrt{2}G \bar{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{H}} - \sqrt{2}G \bar{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{pl} + 3aK \mathbf{1} \cdot \dot{\mathbf{H}} - 3aK \mathbf{1} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{da}. \quad (4.24)$$

Mit (4.7), (3.19) und (3.41) erhält man dann die reduzierte erste skalare Grundgleichung für isotropes Schädigungsverhalten

$$\dot{c} = \sqrt{2}G_1 \left(\dot{\varepsilon}_{iso} - \dot{\gamma} + k_1 \dot{\varepsilon}_{vol} - k_2 \dot{\hat{f}} \right), \quad (4.25)$$

wobei die isochore Gesamtverzerrungsrate

$$\dot{\varepsilon}_{iso} = \bar{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{H}}, \quad (4.26)$$

die volumetrische Gesamtverzerrungsrate

$$\dot{\varepsilon}_{vol} = \text{tr} \dot{\mathbf{H}} \quad (4.27)$$

sowie die Abkürzungen

$$k_1 = \frac{3aK}{\sqrt{2}G} \quad (4.28)$$

und

$$k_2 = \frac{3aK}{\sqrt{2}G(1-\hat{f})} \quad (4.29)$$

eingeführt werden.

Die zweite skalare Grundgleichung reduziert sich für isotropes Schädigungsverhalten aufgrund der veränderten Schädigungsbedingung

$$f^{da} = \tilde{\alpha} I_1 - \sigma(\hat{\mu}) = 0, \quad (4.30)$$

die dann die Schädigungskonsistenzbedingung

$$\dot{\sigma} = \tilde{\alpha} \operatorname{tr} \dot{\mathbf{T}} \quad (4.31)$$

liefert. Mit Hilfe der aus (3.22) und (3.23) folgenden Gleichung

$$\operatorname{tr} \mathbf{T} = \left[3K + \left(6\eta_1 + 2\eta_2 + 2\eta_3 + \frac{2}{3}\eta_4 \right) \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da} \right] \operatorname{tr} \mathbf{A}^{el} \quad (4.32)$$

lässt sich die Gleichung (4.31) umformen zu

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} = & \tilde{\alpha} \left[3K + \left(6\eta_1 + 2\eta_2 + 2\eta_3 + \frac{2}{3}\eta_4 \right) \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da} \right] \operatorname{tr} \dot{\mathbf{A}}^{el} + \\ & + \tilde{\alpha} \left(6\eta_1 + 2\eta_2 + 2\eta_3 + \frac{2}{3}\eta_4 \right) \operatorname{tr} \mathbf{A}^{el} \operatorname{tr} \dot{\mathbf{A}}^{da}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Da wegen (3.20), (3.41) und (4.23)

$$\operatorname{tr} \dot{\mathbf{H}}^{el} = \operatorname{tr} \dot{\mathbf{H}} - \operatorname{tr} \dot{\mathbf{H}}^{da} = \operatorname{tr} \dot{\mathbf{H}} - (1 - \hat{f})^{-1} \dot{\hat{f}} \quad (4.34)$$

gilt, folgt für die zweite skalare Grundgleichung bei isotropem Schädigungsverhalten die Darstellung

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} = & \tilde{\alpha} \left\{ \left[3K + \left(6\eta_1 + 2\eta_2 + 2\eta_3 + \frac{2}{3}\eta_4 \right) \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da} \right] \left[\operatorname{tr} \dot{\mathbf{H}} - (1 - \hat{f})^{-1} \dot{\hat{f}} \right] + \right. \\ & \left. + \left(6\eta_1 + 2\eta_2 + 2\eta_3 + \frac{2}{3}\eta_4 \right) \operatorname{tr} \mathbf{A}^{el} (1 - \hat{f})^{-1} \dot{\hat{f}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

die sich mit Hilfe der Gleichungen (4.26), (4.27) und der Abkürzungen

$$K_2 = \tilde{\alpha} \left[K + \left(2\eta_1 + \frac{2}{3}\eta_2 + \frac{2}{3}\eta_3 + \frac{2}{9}\eta_4 \right) \operatorname{tr} \mathbf{A}^{da} \right] \quad (4.36)$$

sowie

$$k_3 = \frac{K_2 - \frac{\text{tr} \mathbf{A}^{el}}{\text{tr} \mathbf{A}^{da}} (K_2 - K)}{K_2 (1 - \hat{f})} \quad (4.37)$$

in der folgenden Form darstellen lässt:

$$\dot{\sigma} = 3K_2 \left(\dot{\varepsilon}_{vol} - k_3 \dot{\hat{f}} \right). \quad (4.38)$$

Betrachtet man nun die Veränderung der Variablen innerhalb eines beliebigen Zeitintervalls $t \leq \theta \leq t + \Delta t$, so liefert die numerische Integration der skalaren Grundgleichungen (4.25) und (4.38) die inkrementellen Darstellungen

$$\Delta c = c(t + \Delta t) - c(t) = \sqrt{2} G_1 \left(\Delta \varepsilon_{iso} - \Delta \hat{\gamma} + k_1 \Delta \varepsilon_{vol} - k_2 \Delta \hat{f} \right) \quad (4.39)$$

sowie

$$\Delta \sigma = \sigma(t + \Delta t) - \sigma(t) = 3K_2 \left(\Delta \varepsilon_{vol} - k_3 \Delta \hat{f} \right). \quad (4.40)$$

Da die Gleichung (4.40) ausschließlich volumetrische Anteile enthält, führt man einen Schädigungsprediktorschritt durch, in dem man zunächst annimmt, dass das gesamte Inkrement der volumetrischen Verformung dem Inkrement des Porenvolumenverhältnisses entspricht:

$$\Delta f_{pr} = \frac{1}{k_3} \Delta \varepsilon_{vol}. \quad (4.41)$$

Die zugehörige Vergleichsspannung am Inkrementende erhält man dann aus der nichtlokalen Beziehung

$$\sigma_{pr}(t + \Delta t) = \sigma(\hat{f}(t) + \Delta f_{pr}), \quad (4.42)$$

wobei \hat{f} die aus einem lokalen und einem nichtlokalen Anteil zusammengesetzte Funktion des Porenvolumenverhältnisses bezeichnet, die entsprechend der Definition (3.8) bestimmt wird.

Da der Schädigungsprediktorschritt (4.41) eine Überschätzung der Werte für $\Delta\sigma$ und $\Delta\hat{f}$ impliziert, müssen die zugehörigen Fehler durch einen elastischen Korrektorschritt zurückgenommen werden, der durch die Beziehungen

$$\Delta_{er}\hat{f} = \Delta f_{pr} - \Delta\hat{f} = \frac{\Delta\sigma}{3K_2k_3} \quad (4.43)$$

und

$$\Delta_{er}\sigma = \sigma_{pr} - \sigma(t + \Delta t) \quad (4.44)$$

ausgedrückt wird.

Zur Berücksichtigung der Nichtlokalität des Schädigungsverhaltens trifft man die Annahme, dass sich der Fehler des Inkrements der Vergleichsspannung zusammensetzt aus einem lokalen und einem nichtlokalen Anteil des inkrementellen Fehlers des Schädigungsverzerrungsmaßes

$$\Delta_{er}\sigma = (1-m) \frac{\partial\sigma}{\partial f} \Delta_{er}f + m \frac{\partial\sigma}{\partial \hat{f}} \Delta_{er}\hat{f}, \quad (4.45)$$

wobei $\frac{\partial\sigma}{\partial f}$ die partielle Ableitung am Inkrementende bezeichnet und der Gewichtungsfaktor m den Anteil der nichtlokalen Effekte festlegt, d. h. $m=0$ liefert die aus der lokalen Theorie bekannte Beziehung, während $m=1$ eine vollständig nichtlokale Theorie liefert. Entwickelt man nun die nichtlokale Funktion $\Delta_{er}\hat{f}$ um den Punkt x mit Hilfe der Gleichung (3.9) in eine Taylor-Reihe, so erhält man für den eindimensionalen Fall:

$$\begin{aligned}
\Delta_{er}\hat{f}(x) &= \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi) d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi) \left[\Delta_{er}f + \frac{\partial \Delta_{er}f}{\partial x} \cdot \xi + \frac{\partial^2 \Delta_{er}f}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{2} \xi^2 + \dots \right] d\xi = \\
&= \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{\ell^2} \xi^2\right) d\xi} \cdot \left\{ \Delta_{er}f \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{\ell^2} \xi^2\right) d\xi + \frac{\partial \Delta_{er}f}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{\ell^2} \xi^2\right) \xi d\xi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta_{er}f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{\ell^2} \xi^2\right) \xi^2 d\xi + \dots \right\}.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Dann folgt wegen der Symmetrie der Gauß-Glockenfunktion und der Gleichung (3.12)

$$\begin{aligned}
\Delta_{er}\hat{f}(x) &= \frac{1}{2 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{\ell^2} \xi^2\right) d\xi} \cdot \left\{ \Delta_{er}f \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{\ell^2} \xi^2\right) d\xi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 \Delta_{er}f}{\partial x^2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{\ell^2} \xi^2\right) \xi^2 d\xi + \dots \right\} \tag{4.47} \\
&= \Delta_{er}f + \frac{1}{\ell} \frac{\partial^2 \Delta_{er}f}{\partial x^2} \frac{\ell^3}{4\pi} + \dots
\end{aligned}$$

Bricht man die Taylor-Reihenentwicklung nach dem zweiten Glied ab, hat die Näherung für den inkrementellen Fehler der nichtlokalen Funktion die Gestalt

$$\Delta_{er}\hat{f} \cong \Delta_{er}f + d \nabla^2 (\Delta_{er}f), \tag{4.48}$$

wobei d von der Dimension des betrachteten Raumes abhängt. Für den eindimensionalen Fall erhält man

$$d = \frac{\ell^2}{4\pi}. \tag{4.49}$$

Führt man die obige Rechnung für den zweidimensionalen Fall durch, erhält man für den Faktor d

$$d = \frac{\ell^2}{16}, \tag{4.50}$$

und für den dreidimensionalen Fall

$$d = \frac{\ell^2}{4\sqrt[3]{36\pi}} \quad (4.51)$$

unter entsprechender Verwendung der Ergebnisse (3.13) und (3.14).

Setzt man die Näherung für $\Delta_{er}\hat{f}$ in die Gleichung (4.45) ein, so erhält man den inkrementellen Fehler der Vergleichsspannung in der Form

$$\begin{aligned} \Delta_{er}\sigma &= (1-m) \frac{\partial\sigma}{\partial f} \Delta_{er}f + m \frac{\partial\sigma}{\partial f} (\Delta_{er}f + d\nabla^2(\Delta_{er}f)) \\ &= \frac{\partial\sigma}{\partial f} \Delta_{er}f + md \frac{\partial\sigma}{\partial f} \nabla^2(\Delta_{er}f). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (4.40), (4.43), (4.44) und (4.52) gelangt man somit zu der elliptischen partiellen Differentialgleichung

$$md \frac{\partial\sigma}{\partial f} \nabla^2(\Delta_{er}f) + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial f} + 3K_2k_3 \right) \Delta_{er}f = \sigma_{pr}(t + \Delta t) - \sigma(t). \quad (4.53)$$

An dieser Stelle ist zu beachten, dass für den Fall der lokalen Theorie, der eintritt, wenn $m = 0$ gesetzt wird, es sich bei Gleichung (4.53) nicht um eine partielle Differentialgleichung handelt, sondern um eine einfache algebraische Gleichung, die sofort analytisch gelöst werden kann.

Bei den üblicherweise verwendeten Radial-Return-Verfahren ist die Lösung der dort auftretenden elliptischen partiellen Differentialgleichungen dagegen häufig mit Problemen behaftet, weil im Laufe der numerischen Berechnung stellenweise ein Verlust der Elliptizität der Differentialgleichungen eintreten kann, der dann zum Abbruch der Berechnung oder zu Ergebnissen führt, die nicht mehr physikalisch sinnvoll sind. Um diesem Phänomen entgegenzuwirken, wurden in der Vergangenheit verschiedene sogenannte Regularisierungsverfahren entwickelt. Alle diese Methoden führen einen nichtlokalen Aspekt in die Theorie ein. Für verschiedene Gruppen von Materialien kann die Berücksichtigung nichtlokaler Effekte anhand von Experimenten oder mikromechanischen Betrachtungen physikalisch begründet werden (AIFANTIS [1], BAŽANT [6], FLECK & HUTCHINSON [46]).

Bezieht sich die Nichtlokalität auf die Zeit, so erhält man diejenigen Verfahren, die die Ratenabhängigkeit vieler Ingenieurwerkstoffe ausnutzen. Räumlich nichtlokale Modelle werden durch das Einführen zusätzlicher Freiheitsgrade oder auch in Form eines Gradientenverfahrens umgesetzt, wie es auch in dieser Arbeit entwickelt wird. Einen Überblick über verschiedene Regularisierungsverfahren findet man bei PIJAUDIER-CABOT & BAŽANT [92], SIMO [102], DE BORST et al. [20] und PIJAUDIER-CABOT et al. [93]. Modelle, die den nichtlokalen Effekt bezüglich der Zeit anwenden, werden meist als viskoplastische oder ratenabhängige Regularisierungsmethoden bezeichnet (NEEDLEMAN [85], SIMO [102], SLUYS [105]). Diese Verfahren nutzen einen ratenabhängigen Materialparameter, um die Kompatibilität des numerischen Modells während der Lokalisierung zu gewährleisten. Ein ratenabhängiges Materialmodell zur Simulation von Schädigungsprozessen wurde von GEERS et al. [51] entwickelt. Regularisierungsverfahren, die auf der Berücksichtigung eines räumlichen nichtlokalen Effekts basieren, beinhalten eine interne Länge, die die Größenordnung der mikromechanischen Bindungen zwischen den Materialpartikeln charakterisiert. Die Regularisierung durch die Einführung zusätzlicher Freiheitsgrade (ERINGEN [42], DE BORST [15], [16]) basiert auf der Theorie des Cosserat-Kontinuums. Nichtlokale Theorien, insbesondere Gradientenmodelle, werden durch die Einführung von Gradienten von Zustandsvariablen oder Termen höherer Ordnung in der numerischen Umsetzung realisiert. Verschiedene Beispiele hierzu findet man bei TRIANTAFYLIDIS & AIFANTIS [114], LASRY & BELYTSCHKO [66], SCHREYER & CHEN [100] sowie PAMIN [89] und DE BORST et al. [19].

Die sogenannten Regularisierungsverfahren wurden demnach durch die Probleme motiviert, die durch den Verlust der Elliptizität der zugrunde liegenden partiellen Differentialgleichungen bei den üblicherweise verwendeten Radial-Return-Verfahren auftreten. Die Tatsache, dass Gleichung (4.53) im lokalen Fall keine partielle Differentialgleichung, sondern eine algebraische Gleichung darstellt, ist also ein großer Vorteil der hier vorgestellten Theorie, da das Problem des Elliptizitätsverlusts nicht auftreten kann. Die Nichtlokalität, die, wie auch in dieser Arbeit, häufig auf die Gradiententheorie führt, wird hier demnach nicht aus numerischen, sondern aus physikalischen Gründen eingeführt, da nur unter Berücksichtigung nichtlokaler Effekte das Materialverhalten angemessen abgebildet werden kann.

Im folgenden wird gezeigt, dass die partielle Differentialgleichung (4.53), die hier ja erst durch die Nichtlokalität entsteht, nicht ihre Elliptizität verlieren kann. Die Differentialgleichung (4.53) ist genau dann elliptisch, wenn gilt

$$\left(md \frac{\partial \sigma}{\partial \widehat{f}} \right)^2 > 0. \quad (4.54)$$

Dass diese Voraussetzung stets erfüllt ist, lässt sich auch mit Hilfe des zugehörigen Kegelschnitts

$$md \frac{\partial \sigma}{\partial \widehat{f}} (x^2 + y^2) = \frac{\partial \sigma}{\partial \widehat{f}} + 3K_2 k_3 \quad (4.55)$$

darstellen. Wie in Abbildung 4.1 deutlich wird, handelt es sich hierbei um einen Kreis mit dem Radius

$$r = \sqrt{\frac{\frac{\partial \sigma}{\partial \widehat{f}} + 3K_2 k_3}{md \frac{\partial \sigma}{\partial \widehat{f}}}} \quad (4.56)$$

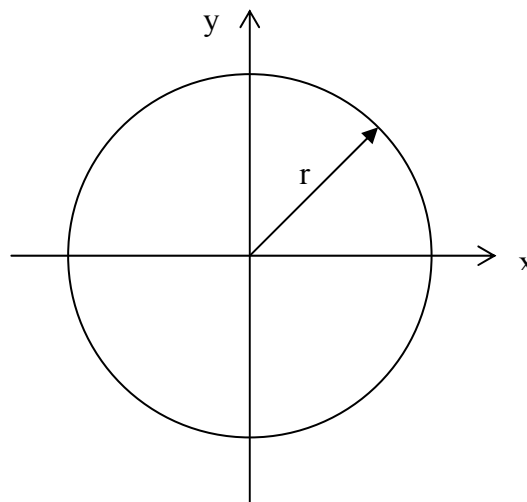


Abbildung 4.1: Kegelschnitt zur partiellen Differentialgleichung

Im Laufe des Deformations- und Schädigungsprozesses kann sich lediglich der Radius des Kreises ändern, die grafische Darstellung des Kegelschnitts wird jedoch immer einem Kreis entsprechen und damit elliptisch bleiben und kann zu keinem Zeitpunkt eine hyperbolische Form annehmen.

Unter dieser Voraussetzung kann zur Lösung der partiellen Differentialgleichung (4.53) ein Finite-Differenzen-Verfahren eingesetzt werden.

Das in Abbildung 4.2 skizzierte Netz entspricht nicht dem Finite-Element-Netz. Die abgebildeten Knoten stellen die Integrationspunkte der finiten Elemente dar, d. h. es ist keine zusätzliche Diskretisierung notwendig, sondern es wird auf das bereits zugrunde liegende Netz von finiten Elementen zurückgegriffen. Des weiteren ist das Gitter in Abbildung 4.2 nur zur Vereinfachung äquidistant dargestellt, d. h. gleiche Abstände zwischen den einzelnen Integrationspunkten sind für das Approximationsverfahren nicht notwendig. Demnach sind auch die folgenden Gleichungen in einer auf nicht-äquidistante Gitter verallgemeinerten Form dargestellt, die in der hier umgesetzten numerischen Implementierung auch notwendig ist, da bei den verwendeten Elementen der Abstand zwischen den einzelnen Integrationspunkten ebenfalls nicht konstant ist. Außerdem besteht dadurch die Möglichkeit, interessante Teilbereiche der untersuchten Struktur höher aufzulösen.

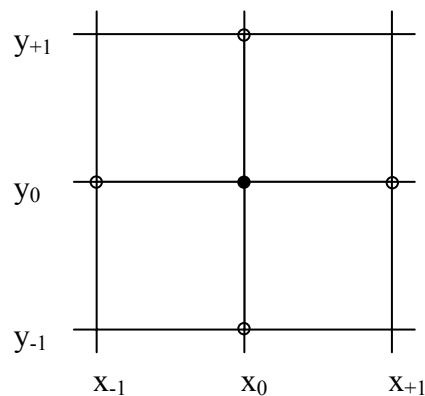


Abbildung 4.2: Netz von Integrationspunkten

Beispielhaft soll hier die Approximation des Gradienten zweiten Grades einer Funktion an dem mittleren Integrationspunkt (x_0, y_0) dargestellt werden. Dazu werden die Funktionswerte dieses Punktes und der vier benachbarten Punkte mit Faktoren gewichtet, die sich aus den Abständen der beteiligten Integrationspunkte zueinander berechnen lassen:

$$\begin{aligned} \nabla^2 (f(x_0, y_0)) = & \frac{f(x_{-1}, y_0)[x_{+1} - x_0] - f(x_0, y_0)[x_{+1} - x_{-1}] + f(x_{+1}, y_0)[x_0 - x_{-1}]}{[x_{+1} - x_0]^2 [x_0 - x_{-1}]} + \\ & + \frac{f(x_0, y_{-1})[y_{+1} - y_0] - f(x_0, y_0)[y_{+1} - y_{-1}] + f(x_0, y_{+1})[y_0 - y_{-1}]}{[y_{+1} - y_0]^2 [y_0 - y_{-1}]} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Die Verwendung eines solchen Diskretisierungsverfahrens ermöglicht auch die einfache Behandlung des Randes. In dem Beispiel in Abbildung 4.3 soll der Gradient zweiten Grades an einem Integrationspunkt am oberen Rand approximiert werden.

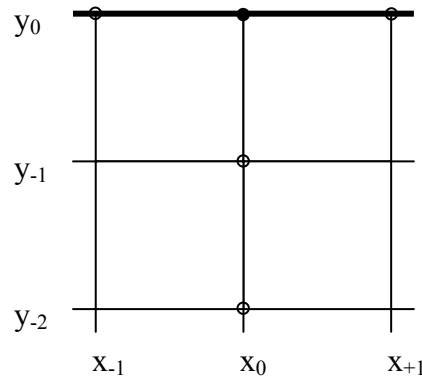


Abbildung 4.3: Behandlung des Randes

Die Approximation erfolgt nach dem gleichen Muster wie oben, wobei der hier nicht existente Punkt (x_0, y_{+1}) durch den weiter im Inneren liegenden Punkt (x_0, y_{-2}) mit entsprechend angepassten Gewichtungsfaktoren ersetzt wird.

Bei komplex berandeten Gebieten besteht zudem die Möglichkeit, krummlinige Koordinaten zu verwenden. Dazu ist eine Transformation der Grundgleichungen in diese Koordinatensysteme erforderlich.

Das Diskretisierungsverfahren liefert schließlich als Lösung den inkrementellen Fehler $\Delta_{er}f$. Somit kann nun das aktuelle Porenvolumenverhältnis am Inkrementende

$$\hat{f}(t + \Delta t) = \hat{f}(t) + \Delta \hat{f} \quad (4.58)$$

berechnet werden, wobei

$$\Delta \hat{f} = \Delta f_{pr} - [\Delta_{er}f + md\nabla^2(\Delta_{er}f)] \quad (4.59)$$

und

$$\sigma(t + \Delta t) = \sigma(t) + 3K_2k_3[\Delta_{er}f + md\nabla^2(\Delta_{er}f)]. \quad (4.60)$$

Nun führt man einen plastischen Prediktorschritt durch, in dem man annimmt, dass das gesamte Inkrement der isochoren Verzerrung plastisch ist

$$\Delta \gamma_{pr} = \Delta \varepsilon_{iso} - \Delta \hat{\gamma} + k_1 \Delta \varepsilon_{vol} - k_2 \Delta \hat{f} = \Delta \varepsilon, \quad (4.61)$$

wobei Gleichung (4.39) verwendet wurde.

Ähnlich wie im vorausgegangenen Schädigungsprediktorschritt erhält man die zugehörige Vergleichsspannung am Inkrementende aus dem nichtlokalen Ansatz

$$c_{pr}(t + \Delta t) = c(\hat{\gamma}(t) + \Delta \gamma_{pr}), \quad (4.62)$$

wobei $\hat{\gamma}$ wiederum die aus einem lokalen Anteil γ und einem rein nichtlokalen Anteil $\hat{\gamma}$ zusammengesetzte Funktion bezeichnet.

Da auch hier durch den Prediktorschritt eine Überschätzung stattfindet, muss diese durch einen elastischen Korrektorschritt berichtigt werden. Dazu berechnet man die inkrementellen Fehler

$$\Delta_{er}\hat{\gamma} = \Delta\varepsilon - \Delta\hat{\gamma} = \frac{\Delta_{er}c}{\sqrt{2}G_1} \quad (4.63)$$

sowie

$$\Delta_{er}c = c_{pr} - c(t + \Delta t). \quad (4.64)$$

Die Berücksichtigung nichtlokaler Effekte führt dann auch hier zu einer Abhängigkeit des inkrementellen Fehlers der Vergleichsspannung von dem zweiten Gradienten des inkrementellen Fehlers des skalaren plastischen Verzerrungsmaßes, so dass sich $\Delta_{er}c$ darstellen lässt als

$$\Delta_{er}c = \frac{\partial c}{\partial \hat{\gamma}} \Delta_{er}\gamma + md \frac{\partial c}{\partial \hat{\gamma}} \nabla^2 (\Delta_{er}\gamma). \quad (4.65)$$

Somit erhält man durch Einsetzen der Gleichungen (4.39), (4.63), (4.64) und (4.65) die elliptische partielle Differentialgleichung

$$md \frac{\partial c}{\partial \hat{\gamma}} \nabla^2 (\Delta_{er}\gamma) + \left(\frac{\partial c}{\partial \hat{\gamma}} + \sqrt{2}G_1 \right) \Delta_{er}\gamma = c_{pr}(t + \Delta t) - c(t), \quad (4.66)$$

die ebenfalls aus den oben genannten Gründen zu keinem Zeitpunkt des Belastungsprozesses ihre Elliptizität verlieren kann und analog zum vorangegangenen Korrektorschritt mittels eines Finite-Differenzen-Verfahrens gelöst wird.

Damit erhält man schließlich das aktuelle plastische Verzerrungsmaß aus der Beziehung

$$\hat{\gamma}(t + \Delta t) = \hat{\gamma}(t) + \Delta\hat{\gamma} \quad (4.67)$$

mit

$$\Delta\hat{\gamma} = \Delta\gamma_{pr} - \left[\Delta_{er}\gamma + md \nabla^2 (\Delta_{er}\gamma) \right] \quad (4.68)$$

sowie die Vergleichsspannung des Matrixmaterials

$$c(t + \Delta t) = c(t) + \sqrt{2}G_1 \left[\Delta_{er}\gamma + md \nabla^2 (\Delta_{er}\gamma) \right]. \quad (4.69)$$

4.3 Anisotropes Schädigungsverhalten

Nachdem im vorigen Kapitel das isotrope Schädigungsverhalten vor dem Erreichen der kritischen Porosität f_c behandelt wurde, sollen nun für den Fall $\hat{f} > f_c$ anisotrope Schädigungseffekte beschrieben werden. Zu diesem Zweck werden die allgemeinen Gleichungen (4.6) und (4.18) über das Zeitintervall $t \leq \theta \leq t + \Delta t$ numerisch integriert, so dass man die inkrementellen Darstellungen der ersten skalaren Grundgleichung

$$\Delta c = c(t + \Delta t) - c(t) = \sqrt{2}G_1 (\Delta \varepsilon_1 - k_1 \Delta \hat{\gamma} - k_2 \Delta \hat{\mu}) \quad (4.70)$$

und der zweiten skalaren Grundgleichung

$$\Delta \sigma = \sigma(t + \Delta t) - \sigma(t) = \sqrt{2}G_2 (\Delta \varepsilon_2 - k_3 \Delta \hat{\gamma} - k_4 \Delta \hat{\mu}) \quad (4.71)$$

erhält.

Nimmt man nun in einem inelastischen Prediktorschritt an, dass das gesamte Inkrement keine elastischen Anteile enthält, so liefern die Gleichungen (4.70) und (4.71)

$$k_1 \Delta \gamma_{pr} + k_2 \Delta \mu_{pr} = \Delta \varepsilon_1 \quad (4.72)$$

und

$$k_3 \Delta \gamma_{pr} + k_4 \Delta \mu_{pr} = \Delta \varepsilon_2. \quad (4.73)$$

Die entsprechenden Prediktorspannungen am Inkrementende lassen sich unter Berücksichtigung nichtlokaler Effekte aus den Stoffgesetzen mit Hilfe der Beziehungen

$$c_{pr}(t + \Delta t) = c(\hat{\gamma}(t) + \Delta \gamma_{pr}) \quad (4.74)$$

und

$$\sigma_{pr}(t + \Delta t) = \sigma(\hat{\mu}(t) + \Delta \mu_{pr}) \quad (4.75)$$

ermitteln, wobei $\hat{\gamma}$ und $\hat{\mu}$ aus den zugehörigen lokalen und nichtlokalen Anteilen zusammengesetzt sind.

Aufgrund der Überschätzung durch den inelastischen Prediktorschritt wird ein elastischer Korrektorschritt für beide Gleichungen durchgeführt, die dann die folgende Gestalt annehmen:

$$\Delta_{er}c = c_{pr} - c(t + \Delta t) = \frac{\partial c}{\partial \hat{\gamma}} \Delta_{er}\gamma + md \frac{\partial c}{\partial \hat{\gamma}} \nabla^2 (\Delta_{er}\gamma) \quad (4.76)$$

und

$$\Delta_{er}\sigma = \sigma_{pr} - \sigma(t + \Delta t) = \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{\mu}} \Delta_{er}\mu + md \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{\mu}} \nabla^2 (\Delta_{er}\mu). \quad (4.77)$$

Unter Verwendung der Gleichungen (4.70), (4.71), (4.76) und (4.77) entstehen zwei elliptische partielle Differentialgleichungen für die inkrementellen Fehler $\Delta_{er}\gamma$ und $\Delta_{er}\mu$:

$$md \frac{\partial c}{\partial \hat{\gamma}} \nabla^2 (\Delta_{er}\gamma) + \left[\sqrt{2} G_1 k_1 + \frac{\partial c}{\partial \hat{\gamma}} \right] \Delta_{er}\gamma + \sqrt{2} G_1 k_2 \Delta_{er}\mu = c_{pr} - c(t) \quad (4.78)$$

und

$$md \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{\mu}} \nabla^2 (\Delta_{er}\mu) + \left[\sqrt{2} G_2 k_4 + \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{\mu}} \right] \Delta_{er}\mu + \sqrt{2} G_2 k_3 \Delta_{er}\gamma = \sigma_{pr} - \sigma(t). \quad (4.79)$$

Auch diese werden analog zum vorangegangenen Kapitel mit Hilfe eines Finite-Differenzen-Verfahrens gelöst.

Die aktuellen inelastischen Verzerrungsmaße können dann aus den Gleichungen

$$\hat{\gamma}(t + \Delta t) = \hat{\gamma}(t) + \Delta \hat{\gamma} \quad (4.80)$$

und

$$\hat{\mu}(t + \Delta t) = \hat{\mu}(t) + \Delta \hat{\mu} \quad (4.81)$$

mit

$$\Delta \hat{\gamma} = \Delta \gamma_{pr} - \left[\Delta_{er} \gamma + md \nabla^2 (\Delta_{er} \gamma) \right] \quad (4.82)$$

sowie

$$\Delta \hat{\mu} = \Delta \mu_{pr} - \left[\Delta_{er} \mu + md \nabla^2 (\Delta_{er} \mu) \right] \quad (4.83)$$

berechnet werden.

Die zugehörigen Vergleichsspannungen am Inkrementende liefern schließlich die Gleichungen

$$c(t + \Delta t) = c(t) + \sqrt{2} G_1 (k_1 \Delta_{er} \gamma + k_2 \Delta_{er} \mu) \quad (4.84)$$

und

$$\sigma(t + \Delta t) = \sigma(t) + \sqrt{2} G_2 (k_3 \Delta_{er} \gamma + k_4 \Delta_{er} \mu). \quad (4.85)$$

4.4 Rückführung auf tensorielle Größen

Die Rückführung der skalaren Werte auf tensorielle Größen geschieht durch Einsetzen der zuvor gezeigten Grundgleichungen. Zunächst kann man aus dem Inkrement des skalaren plastischen Verzerrungsmaßes mit (3.20) den inkrementellen plastischen Verzerrungstensor

$$\Delta \bar{\mathbf{H}}^{pl} = \Delta \hat{\gamma} \bar{\mathbf{N}} \quad (4.86)$$

berechnen.

Der inkrementelle Schädigungsverzerrungstensor lässt sich mit Hilfe von Gleichung (3.44) darstellen als

$$\Delta \mathbf{H}^{da} = \Delta \hat{f} \left[\frac{\beta}{\sqrt{2}} \tilde{\mathbf{N}} + \frac{1}{3} (1 - \hat{f})^{-1} \mathbf{1} \right]. \quad (4.87)$$

Integriert man nun Gleichung (2.32) über das Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$, so erhält man die Beziehung

$$\int \dot{\mathbf{R}} d\theta = \mathbf{R}^*(t + \Delta t) - \mathbf{R}^*(t) = \left[\mathbf{R}^*(t + \Delta t) + \mathbf{R}^*(t) \right] \Delta \mathbf{H}^{da}, \quad (4.88)$$

die dann den aktuellen Schädigungstensor

$$\mathbf{R}^*(t + \Delta t) = \mathbf{R}^*(t) (\mathbf{1} + \Delta \mathbf{H}^{da}) (\mathbf{1} - \Delta \mathbf{H}^{da})^{-1} \quad (4.89)$$

liefert.

Den inkrementellen elastischen Verzerrungstensor

$$\Delta \mathbf{H}^{el} = \Delta \mathbf{H} - \mathbf{R}^{-1} \Delta \bar{\mathbf{H}}^{pl} \mathbf{R} - \mathbf{Q}^{el-1} \Delta \mathbf{H}^{da} \mathbf{Q}^{el} \quad (4.90)$$

erhält man aus der numerischen Integration der Gleichung (2.33).

Analog zu der obigen Vorgehensweise wird Gleichung (2.14) integriert

$$\int \dot{\mathbf{Q}}^{el} d\theta = [\mathbf{Q}^{el}(t + \Delta t) + \mathbf{Q}^{el}(t)] \Delta \mathbf{H}^{el} = \mathbf{Q}^{el}(t + \Delta t) - \mathbf{Q}^{el}(t), \quad (4.91)$$

um den elastischen Metriktransformationstensor darstellen zu können als

$$\mathbf{Q}^{el}(t + \Delta t) = \mathbf{Q}^{el}(t) (\mathbf{1} + \Delta \mathbf{H}^{el}) (\mathbf{1} - \Delta \mathbf{H}^{el})^{-1}. \quad (4.92)$$

Der aktuelle Schädigungstensor \mathbf{R} kann dann mit Hilfe der Gleichungen (2.29) und (2.34) berechnet werden.

Die vorangegangenen Gleichungen werden im Allgemeinen iterativ gelöst, jedoch entspricht im Falle kleiner elastischer Verzerrungen der Tensor \mathbf{Q}^{el} näherungsweise dem Einstensor, so dass in diesem Fall die aktuellen Tensoren \mathbf{Q}^{el} und \mathbf{R} direkt berechnet werden können.

Schließlich kann mit Hilfe der Gleichung (2.30) der plastische Metriktransformationstensor $\bar{\mathbf{Q}}^{pl}$ ermittelt werden.

5 Numerische Aspekte der Modellbildung

5.1 Berechnung des Lokalisierungsbeginns

Wird ein Material ausreichend großen Spannungen oder Dehnungen ausgesetzt, so kann eine Lokalisierung der Verzerrungen eintreten. Innerhalb der Lokalisierungszone schreitet dann die Zunahme der Verzerrungen weiter fort, während die übrige Struktur zunehmend entlastet wird. Diese Lokalisierung führt zu weiterer Schädigungsentwicklung, die wiederum das Fortschreiten des Lokalisierungsprozesses beschleunigt. Die Interaktion zwischen Schädigung und Lokalisierung kann schließlich die Ausbildung eines makroskopischen Risses bewirken. Das Fortschreiten des Schädigungsprozesses und die Bildung von Rissen resultieren in einer Verringerung der Duktilität. Weitere Rissausbreitung führt schließlich zum Versagen der Struktur.

Sowohl in der Plastizitätstheorie als auch in Schädigungsformulierungen wurden durch Stabilitäts- und Verzweigungsuntersuchungen die Prozesse beschrieben, die eine Lokalisierung des Materialverhaltens hervorrufen (HILL [56], RUDNICKI & RICE [99], RICE [97], BENALLAL et al. [11]). Das globale und lokale Verhalten wird maßgeblich durch die Vorgänge in der Lokalisierungszone bestimmt. Deshalb konzentrieren sich zahlreiche experimentelle und numerische Untersuchungen auf dieses Gebiet.

In Experimenten konnte beobachtet werden, dass duktile Materialien eine Lokalisierung der Deformationen in schmalen Bereichen mit großen Verzerrungen aufweisen, nachdem die inelastischen Deformationen einen kritischen Wert erreicht haben. Wenn eine solche Lokalisierung innerhalb schmaler Bereiche eingetreten ist, können dort sehr große Verzerrungszuwächse auftreten, während sich die über den Körper verteilte Gesamtverzerrung nur unwesentlich gegenüber derjenigen bei Lokalisierungsbeginn verändert.

Innerhalb eines solchen Scherbands kann es dann zur Bildung von makroskopischen Rissen kommen, so dass das Einsetzen der Lokalisierung häufig als Auslöser für das Materialversagen angesehen wird.

Das spontane Entstehen von Lokalisierungszonen aus einem gleichförmigen Deformationszustand kann mathematisch betrachtet als Eigenwertproblem formuliert werden, dessen nichttriviale Lösung den Beginn der Lokalisierung bestimmt, wobei sich der anfängliche Scherwinkel aus den Eigenvektoren des zugehörigen akustischen Tensors berechnen lässt.

Grundlegende Untersuchungen zu der Frage, wodurch Lokalisierung ausgelöst wird, wurden u. a. von HILL [56], RICE [97], NEEDLEMAN & TVERGAARD [86] sowie ORTIZ et al. [88] durchgeführt.

Dabei wird Lokalisierung als das Auftreten einer Ebene definiert, über die der Gradient der Verzerrungsgeschwindigkeit unstetig ist. Die Orientierung dieser Unstetigkeitsebene ist über ihren Normalenvektor \mathbf{n} gegeben.

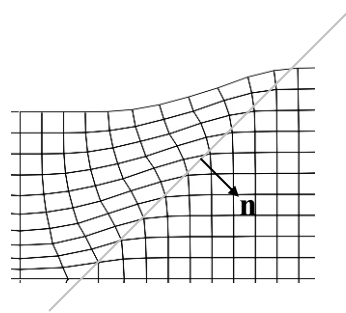


Abbildung 5.1: Normalenvektor \mathbf{n}

Die Unstetigkeit besteht in einem Sprung in der Verzerrungsrate und wird beschrieben durch

$$\dot{\mathbf{H}}^{innen} - \dot{\mathbf{H}}^{außen} = \dot{\mathbf{q}}\mathbf{n}, \quad (5.1)$$

wobei $\dot{\mathbf{q}}$ die Amplitude des Sprungs bezeichnet und $\dot{\mathbf{H}}^{innen}$ bzw. $\dot{\mathbf{H}}^{außen}$ die Verzerrungsraten innerhalb und außerhalb der Lokalisierungszone beschreiben.

Die Gleichgewichtsbedingung lautet dann

$$\mathbf{n}(\dot{\mathbf{T}}^{innen} - \dot{\mathbf{T}}^{außen}) = \mathbf{0}, \quad (5.2)$$

wobei die Raten des Spannungstensors $\dot{\mathbf{T}}^{innen}$ bzw. $\dot{\mathbf{T}}^{au\beta en}$ die Spannungsverteilung innerhalb bzw. au\beta erhalb der Lokalisierungszone beschreiben.

Stellt man nun das Stoffgesetz in der Form

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{C}^{epd} \dot{\mathbf{H}} \quad (5.3)$$

mit Hilfe des elastisch-plastisch-geschädigten Tangentenmoduls \mathcal{C}^{epd} dar, so erhält man durch Einsetzen der Gleichungen (5.1) und (5.2) die Beziehung

$$\left(\mathbf{n}^T \mathcal{C}^{epd} \mathbf{n} \right) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (5.4)$$

Das Eintreten der Lokalisierung ist also äquivalent zu der Existenz einer nichttrivialen Lösung von (5.4), die wiederum an die Bedingung

$$\det\left(\mathbf{n}^T \mathcal{C}^{epd} \mathbf{n}\right) = 0 \quad (5.5)$$

geknüpft ist. Das Produkt $\mathbf{n}^T \mathcal{C}^{epd} \mathbf{n}$ wird häufig als akustischer Tensor bezeichnet. In Komponentenschreibweise hat die Gleichung (5.5) die Gestalt

$$\det \begin{pmatrix} n_1 \mathcal{C}_{1111}^{epd} n_1 + n_1 \mathcal{C}_{1112}^{epd} n_2 + & n_1 \mathcal{C}_{1121}^{epd} n_1 + n_1 \mathcal{C}_{1122}^{epd} n_2 + \\ + n_2 \mathcal{C}_{2111}^{epd} n_1 + n_2 \mathcal{C}_{2112}^{epd} n_2 & + n_2 \mathcal{C}_{2121}^{epd} n_1 + n_2 \mathcal{C}_{2122}^{epd} n_2 \\ n_1 \mathcal{C}_{1211}^{epd} n_1 + n_1 \mathcal{C}_{1212}^{epd} n_2 + & n_1 \mathcal{C}_{1221}^{epd} n_1 + n_1 \mathcal{C}_{1222}^{epd} n_2 + \\ + n_2 \mathcal{C}_{2211}^{epd} n_1 + n_2 \mathcal{C}_{2212}^{epd} n_2 & + n_2 \mathcal{C}_{2221}^{epd} n_1 + n_2 \mathcal{C}_{2222}^{epd} n_2 \end{pmatrix} = \quad (5.6)$$

$$= a_0 n_1^4 + a_1 n_1^3 n_2 + a_2 n_1^2 n_2^2 + a_3 n_1 n_2^3 + a_4 n_2^4 = 0$$

mit den Abkürzungen

$$a_0 = \mathcal{C}_{1111}^{epd} \mathcal{C}_{1221}^{epd} - \mathcal{C}_{1211}^{epd} \mathcal{C}_{1121}^{epd}, \quad (5.7)$$

$$a_1 = \mathcal{C}_{1111}^{epd} \mathcal{C}_{1222}^{epd} + \mathcal{C}_{1111}^{epd} \mathcal{C}_{2221}^{epd} + \mathcal{C}_{1112}^{epd} \mathcal{C}_{1221}^{epd} + \mathcal{C}_{2111}^{epd} \mathcal{C}_{1221}^{epd} + \\ - \mathcal{C}_{1211}^{epd} \mathcal{C}_{1122}^{epd} - \mathcal{C}_{1211}^{epd} \mathcal{C}_{2121}^{epd} - \mathcal{C}_{1212}^{epd} \mathcal{C}_{1121}^{epd} - \mathcal{C}_{2211}^{epd} \mathcal{C}_{1121}^{epd}, \quad (5.8)$$

$$a_2 = \mathcal{C}_{1111}^{epd} \mathcal{C}_{2222}^{epd} + \mathcal{C}_{1112}^{epd} \mathcal{C}_{1222}^{epd} + \mathcal{C}_{1112}^{epd} \mathcal{C}_{2221}^{epd} + \mathcal{C}_{2111}^{epd} \mathcal{C}_{2221}^{epd} + \mathcal{C}_{2111}^{epd} \mathcal{C}_{1222}^{epd} + \mathcal{C}_{2112}^{epd} \mathcal{C}_{1221}^{epd} + \\ - \mathcal{C}_{1211}^{epd} \mathcal{C}_{2122}^{epd} - \mathcal{C}_{1212}^{epd} \mathcal{C}_{1122}^{epd} - \mathcal{C}_{1212}^{epd} \mathcal{C}_{2121}^{epd} - \mathcal{C}_{2211}^{epd} \mathcal{C}_{1122}^{epd} - \mathcal{C}_{2211}^{epd} \mathcal{C}_{2121}^{epd} - \mathcal{C}_{2212}^{epd} \mathcal{C}_{1121}^{epd}, \quad (5.9)$$

$$a_3 = \mathcal{C}_{1112}^{epd} \mathcal{C}_{2222}^{epd} + \mathcal{C}_{2111}^{epd} \mathcal{C}_{2222}^{epd} + \mathcal{C}_{2112}^{epd} \mathcal{C}_{1222}^{epd} + \mathcal{C}_{2112}^{epd} \mathcal{C}_{2221}^{epd} + \\ - \mathcal{C}_{1212}^{epd} \mathcal{C}_{2122}^{epd} - \mathcal{C}_{2211}^{epd} \mathcal{C}_{2122}^{epd} - \mathcal{C}_{2212}^{epd} \mathcal{C}_{1122}^{epd} - \mathcal{C}_{2212}^{epd} \mathcal{C}_{2121}^{epd} \quad (5.10)$$

und

$$a_4 = \mathcal{C}_{2112}^{epd} \mathcal{C}_{2222}^{epd} - \mathcal{C}_{2212}^{epd} \mathcal{C}_{2122}^{epd}. \quad (5.11)$$

Diese Gleichung wird durch die Substitution

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad x = \tan \theta \quad (5.12)$$

in das Nullstellenproblem eines Polynoms

$$h(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (5.13)$$

überführt. Sobald demnach mindestens ein Minimum der Funktion h einen nichtpositiven Funktionswert hat, ist dies gleichbedeutend mit dem Eintreten des Lokalisierungsbeginns. Die Gleichung für die lokalen Extremstellen der Funktion h lautet dann

$$x^3 + rx^2 + sx + t = 0 \quad (5.14)$$

mit

$$r = \frac{3a_3}{4a_4}, \quad s = \frac{a_2}{2a_4}, \quad t = \frac{a_1}{4a_4} \quad (5.15)$$

und durch die Substitution

$$x = y - \frac{r}{3} \quad (5.16)$$

erhält man deren reduzierte Form

$$y^3 + py + q = 0 \quad (5.17)$$

mit

$$p = s - \frac{1}{3}r^2 \quad (5.18)$$

sowie

$$q = \frac{2}{27}r^3 - \frac{1}{3}rs + t. \quad (5.19)$$

Die Lösung von Gleichung (5.17) errechnet man mit Hilfe der Cardano-Formel:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}}. \quad (5.20)$$

Nach Rücksubstitution erhält man die Extremstellen der Funktion (5.13) und untersucht deren Funktionswerte. Solange alle Minima positive Funktionswerte besitzen, ist keine Lokalisierung eingetreten. Sobald mindestens eine der Extremstellen x_E die Ungleichung

$$h(x_E) \leq 0 \quad (5.21)$$

erfüllt, markiert dies den Beginn der Lokalisierung. Die anfängliche Orientierung der Lokalisierungszone lässt sich dann mit Hilfe der Beziehung (5.12) berechnen.

5.2 Padé-Approximation

Zur Berechnung der Komponenten des gemischtvarianten logarithmischen Verzerrungstensors $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{Q}$ in Gleichung (2.3) (vgl. (2.11) und (2.17)) gibt es verschiedene Möglichkeiten. Häufig werden Spektralzerlegungen des Metriktransformationstensors \mathbf{Q} durchgeführt, die dann die Eigenwerte und die entsprechenden Eigenvektoren liefern. Ein Beispiel für diese Vorgehensweise findet man unter vielen anderen auch bei MIEHE [80]. Alternativ können zur Approximation der logarithmischen Tensorkomponenten auch Reihenentwicklungen verwendet werden, die jedoch bei großen Verzerrungen nur dann eine zufriedenstellende Näherung liefern, wenn Terme hoher Ordnung berücksichtigt werden, was wiederum zu einem ungerechtfertigt hohen Rechenaufwand führt.

Um die beschriebenen Nachteile zu vermeiden, werden hier zur Berechnung der Komponenten der logarithmischen Verzerrungstensen (2.3), (2.11) und (2.17) Padé-Approximationen entwickelt (vgl. DIECI & PAPINI [39], CHENG et al. [34], HIGHAM [55]).

Dazu wird zunächst die Abkürzung

$$\mathbf{P} = (\mathbf{Q} - \mathbf{1})(\mathbf{Q} + \mathbf{1})^{-1} \quad (5.22)$$

eingeführt.

Die Taylor-Reihenentwicklung der Logarithmusfunktion wird nun durch eine gebrochenrationale Ansatzfunktion der Ordnung n approximiert, so dass man als Bestimmungsgleichung für die n -te Näherung des Verzerrungstensors erhält

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(n)} &= \frac{1}{2} (p_0 \mathbf{1} + p_1 \mathbf{P} + p_2 \mathbf{P}^2 + \dots + p_n \mathbf{P}^n) (\mathbf{1} + q_1 \mathbf{P} + q_2 \mathbf{P}^2 + \dots + q_n \mathbf{P}^n)^{-1} = \\ &= \mathbf{P} + \frac{1}{3} \mathbf{P}^3 + \frac{1}{5} \mathbf{P}^5 + \dots \end{aligned} \quad (5.23)$$

Ausführen der Multiplikationen liefert

$$\begin{aligned}
 p_0 \mathbf{1} + p_1 \mathbf{P} + p_2 \mathbf{P}^2 + \dots + p_n \mathbf{P}^n = & 2\mathbf{P} + 2q_1 \mathbf{P}^2 + \left(\frac{2}{3} + 2q_2\right) \mathbf{P}^3 + \left(\frac{2}{3}q_1 + 2q_3\right) \mathbf{P}^4 + \\
 & + \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3}q_2 + 2q_4\right) \mathbf{P}^5 + \left(\frac{2}{5}q_1 + \frac{2}{3}q_3 + 2q_5\right) \mathbf{P}^6 + \dots
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Koeffizientenvergleich in Gleichung (5.24) führt dann auf das Gleichungssystem

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{r} \tag{5.25}$$

mit

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{c|cccc} & & & & \mathbf{0}_{2 \times n} \\ \hline \text{diag}(\mathbf{1})_{(n+1) \times (n+1)} & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ & -\frac{2}{3} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & -\frac{2}{5} & \ddots & \ddots & \ddots & -2 \\ & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & \vdots & & & \ddots & -\frac{2}{3} \\ & \vdots & & & & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{0}_{n \times (n+1)} & \frac{-2}{2n-1} & 0 & \dots & \frac{-2}{n+1} & 0 \end{array} \right) \in \mathbb{Q}^{2n+1} \times \mathbb{Q}^{2n+1}, \quad n \in (2\mathbb{N}), \tag{5.26}$$

$$\mathbf{x} = (p_0, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)^T \tag{5.27}$$

und

$$\mathbf{r} = \left(0, 2, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{5}, 0, \dots, 0, \frac{2}{2n-1}, 0 \right)^T. \tag{5.28}$$

Da die Matrix \mathbf{M} schwach besetzt ist und über eine Blockstruktur verfügt, lassen sich Aussagen über die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (5.25) treffen:

$$\begin{aligned} p_{2i} &= 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}_0, & p_{2i-1} &\neq 0 \quad \text{i. Allg.} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \\ q_{2i-1} &= 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, & q_{2i} &\neq 0 \quad \text{i. Allg.} \quad \forall i \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

so dass man die n -te Näherung des logarithmischen Verzerrungstensors für ungerades n darstellen kann als

$$\mathbf{A}_{(n)} = \frac{1}{2} \left(2\mathbf{P} + p_3\mathbf{P}^3 + p_5\mathbf{P}^5 + \dots + p_n\mathbf{P}^n \right) \left(\mathbf{1} + q_2\mathbf{P}^2 + \dots + q_{n-1}\mathbf{P}^{n-1} \right)^{-1} \quad (5.30)$$

und für gerades n

$$\mathbf{A}_{(n)} = \frac{1}{2} \left(2\mathbf{P} + p_3\mathbf{P}^3 + p_5\mathbf{P}^5 + \dots + p_{n-1}\mathbf{P}^{n-1} \right) \left(\mathbf{1} + q_2\mathbf{P}^2 + \dots + q_n\mathbf{P}^n \right)^{-1}. \quad (5.31)$$

Die speziellen Auswertungen für die Fälle $1 \leq n \leq 5$ ergeben dann die erste Padé-Approximation

$$\mathbf{A}_{(1)} = \mathbf{P}, \quad (5.32)$$

die zweite Padé-Approximation

$$\mathbf{A}_{(2)} = \mathbf{P} \left(\mathbf{1} - \frac{1}{3}\mathbf{P}^2 \right)^{-1}, \quad (5.33)$$

die dritte Padé-Approximation

$$\mathbf{A}_{(3)} = \left(\mathbf{P} - \frac{4}{15}\mathbf{P}^3 \right) \left(\mathbf{1} - \frac{3}{5}\mathbf{P}^2 \right)^{-1}, \quad (5.34)$$

die vierte Padé-Approximation

$$\mathbf{A}_{(4)} = \left(\mathbf{P} - \frac{11}{21}\mathbf{P}^3 \right) \left(\mathbf{1} - \frac{6}{7}\mathbf{P}^2 + \frac{3}{35}\mathbf{P}^4 \right)^{-1} \quad (5.35)$$

und die fünfte Padé-Approximation

$$\mathbf{A}_{(5)} = \left(\mathbf{P} - \frac{7}{9} \mathbf{P}^3 + \frac{64}{945} \mathbf{P}^5 \right) \left(\mathbf{1} - \frac{10}{9} \mathbf{P}^2 + \frac{5}{21} \mathbf{P}^4 \right)^{-1}. \quad (5.36)$$

Die grafische Darstellung der einzelnen Approximationen im Vergleich mit der zu approximierenden Funktion $\ln(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ in Abbildung 5.2 zeigt die hohe Qualität der Annäherung schon bei niedriger Ordnung n .

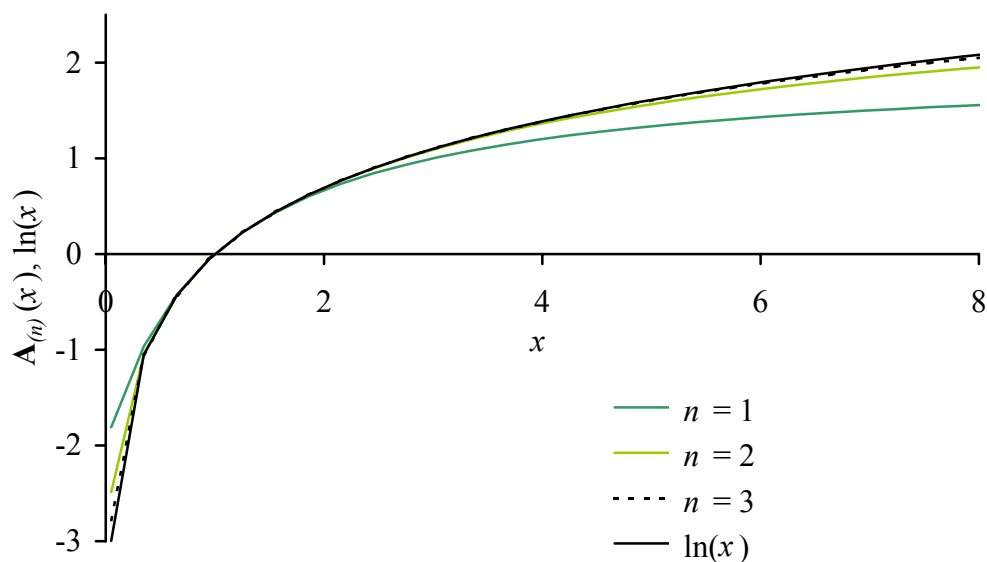


Abbildung 5.2: Vergleich der Padé-Approximationen niedriger Ordnung mit der exakten Funktion $\ln x$

Um besser einschätzen zu können, in welchen Anwendungsfällen die verschiedenen Approximationsordnungen noch ausreichend sind, betrachtet man die grafische Darstellung des Fehlers der einzelnen Padé-Approximationen im eindimensionalen Fall (Abbildung 5.3). Da alle Approximationen an der Stelle $x = 1$ den exakten Wert $\ln(1) = 0$ liefern, haben hier alle Graphen einen gemeinsamen Berührungspunkt. Legt man nun eine beliebige Fehler-

toleranz fest, so erhält man für jede Approximationsordnung ein Intervall, innerhalb dessen die Eigenwerte des Metriktransformationstensors \mathbf{Q} liegen müssen, damit die entsprechende Padé-Approximation eine hinreichend genaue Näherung bietet. Abbildung 5.4 zeigt die mit zunehmender Approximationsordnung wachsenden Intervalle für eine Fehlertoleranz von 10^{-4} .

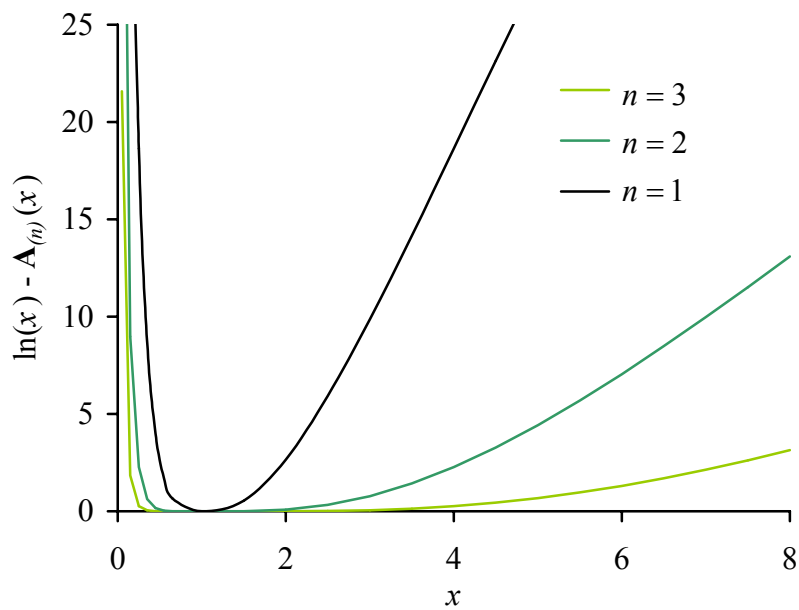


Abbildung 5.3: Fehler für die Ordnungen 1 bis 3 der Padé-Approximationen der natürlichen Logarithmusfunktion

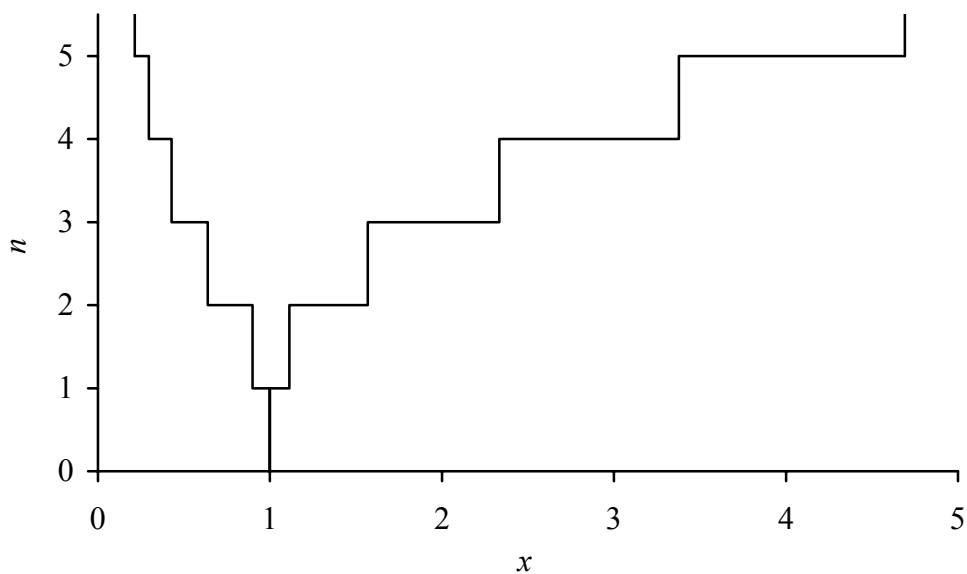


Abbildung 5.4: Anwendungsintervalle für verschiedene Ordnungen der Padé-Approximationen der natürlichen Logarithmusfunktion für die Fehler-toleranz 10^{-4}

Wertet man nun die Grenzen der jeweiligen Intervalle mit Hilfe der Beziehung (2.3) aus, so erhält man einen Überblick, in welcher Größenordnung die Verzerrungen liegen können, damit bei der jeweiligen Approximationsordnung die gewählte Fehlertoleranz nicht überschritten wird. Wie in Abbildung 5.5 ersichtlich, genügt demnach für Verzerrungen in der Größenordnung bis 5% schon die Padé-Approximation erster Ordnung, bis ca. 22% die zweiter Ordnung und die Padé-Approximation fünfter Ordnung liefert selbst für Verzerrungen bis ca. 77% hinreichend genaue Ergebnisse.

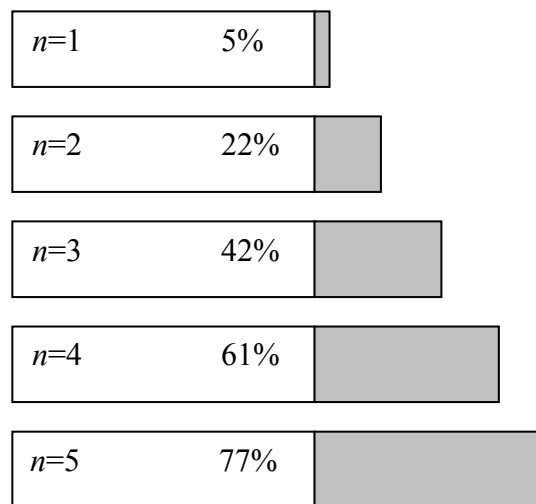


Abbildung 5.5: Größenordnung der Verzerrungen für die Fehlertoleranz 10^{-4} bei verschiedenen Ordnungen der Padé-Approximation

6 Numerische Untersuchungen

6.1 Numerische Implementierung

Um das auf den Grundgleichungen der vorangegangenen Kapitel basierende Randwertproblem zu lösen, wird hier ein numerisches Verfahren verwendet. Da das Lösungsverfahren auf ein möglichst breites Spektrum von Randwertproblemen anwendbar sein soll, bietet sich hier eine Variationsmethode an, die ein beliebig berandetes Gebiet, auf dem das Randwertproblem formuliert ist, zulässt.

Unter der Voraussetzung, dass das im Allgemeinen krummlinig berandete Gebiet die Bedingungen des Gauß-Integralsatzes erfüllt, definiert man ein Energieprodukt, wobei die hierdurch induzierte Energienorm dann den Sobolev-Raum liefert. Minimiert man nun das sogenannte Energiefunktional auf einem endlichdimensionalen Unterraum dieses Sobolev-Raums, so wird die Stelle, an der das Minimum angenommen wird, als Rayleigh-Ritz-Approximation an die exakte Lösung bezeichnet.

Der oben erwähnte endlichdimensionale Unterraum soll aus stückweisen zweidimensionalen Polynomen endlichen Grades bestehen, die stetig oder mit einer gewissen Glattheit aneinandergesetzt werden, und die schließlich die sogenannten finiten Elemente darstellen. Eine ausführliche Herleitung der Methode der finiten Elemente mit verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten findet man beispielsweise in BATHE [1] und ZIENKIEWICZ [122].

Die in dieser Arbeit hergeleiteten Gleichungen wurden numerisch in ein am Lehrstuhl für Baumechanik-Statik der Universität Dortmund entwickeltes Finite-Element-Programm implementiert. Dabei wurde ein Fünfknotenelement verwendet, das auf der Variation des Energiepotentials basiert und auf das von NAGTEGAAL et al. [84] eingeführte Crossed-Triangle-Element zurückgeht.

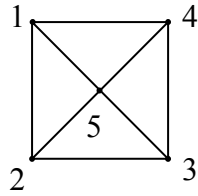


Abbildung 6.1: Crossed-Triangle-Element

Zunächst wendet man das Variationsprinzip auf die Gleichgewichtsbedingung an, indem mit einer Testfunktion multipliziert und anschließend über das Volumen integriert wird. Aus der so entstandenen schwachen Formulierung des Gleichgewichts erhält man durch Einsetzen des Gauß-Integralsatzes die folgende Darstellung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen

$$\delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{B_0} \delta\mathbf{H} \cdot \mathbf{T} \, dv_0 - \int_{\partial B_0} \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \, da_0 = 0. \quad (6.1)$$

Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung (6.1) ist ein Volumenintegral, das die Variation der aktuellen gespeicherten Energiedichte darstellt, während der zweite Term die Verteilung der Spannungen $\bar{\mathbf{t}}_0$ auf der Oberfläche ∂B_0 beschreibt.

Zur konsistenten Linearisierung des Prinzips der virtuellen Arbeit wird eine Taylor-Reihenentwicklung verwendet, die nach dem linearen Glied abgebrochen wird.

$$\mathcal{L}[\delta\Pi]_{\bar{\mathbf{u}}} = \delta\Pi(\bar{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{u}) + \mathbf{D} \delta\Pi|_{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \Delta\mathbf{u} + \dots \quad (6.2)$$

Um die so entstandene linearisierte Gleichung lösen zu können, wird der gesamte betrachtete Körper diskretisiert, indem er in endlich viele Integrationsbereiche, die bereits oben erwähnten finiten Elemente, aufgeteilt wird.

Für die unbekanntenen Verschiebungen an den Knotenpunkten jedes Elements werden geeignete Ansatzfunktionen gewählt und nach Ausführung der entsprechenden Integrationen erhält man für die einzelnen Elemente die Elementsteifigkeitsmatrizen und die zugehörigen Lastvektoren.

Aus diesen wird nun die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T sowie der Gesamtlastvektor $\Delta\mathbf{P}$ zusammengesetzt, so dass man schließlich das folgende System von linearisierten algebraischen Gleichungen

$$\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{V} = \Delta\mathbf{P} \quad (6.3)$$

erhält, mit Hilfe dessen die unbekanntten inkrementellen Knotenverschiebungen $\Delta\mathbf{V}$ berechnet werden können.

6.2 Allgemeines

Zur numerischen Untersuchung betrachtet man einen Zugversuch mit einer eingespannten Rechteckprobe aus Stahl mit den Abmessungen $l_0/h = 4$. Alle Berechnungen werden unter der Voraussetzung eines ebenen Verzerrungszustands durchgeführt. Das System sowie die bei der Berechnung verwendeten Diskretisierungen der doppelsymmetrischen Struktur mit 400 (40×10), 1600 (80×20) und 3600 (120×30) Elementen sind in Abbildung 6.2 dargestellt.

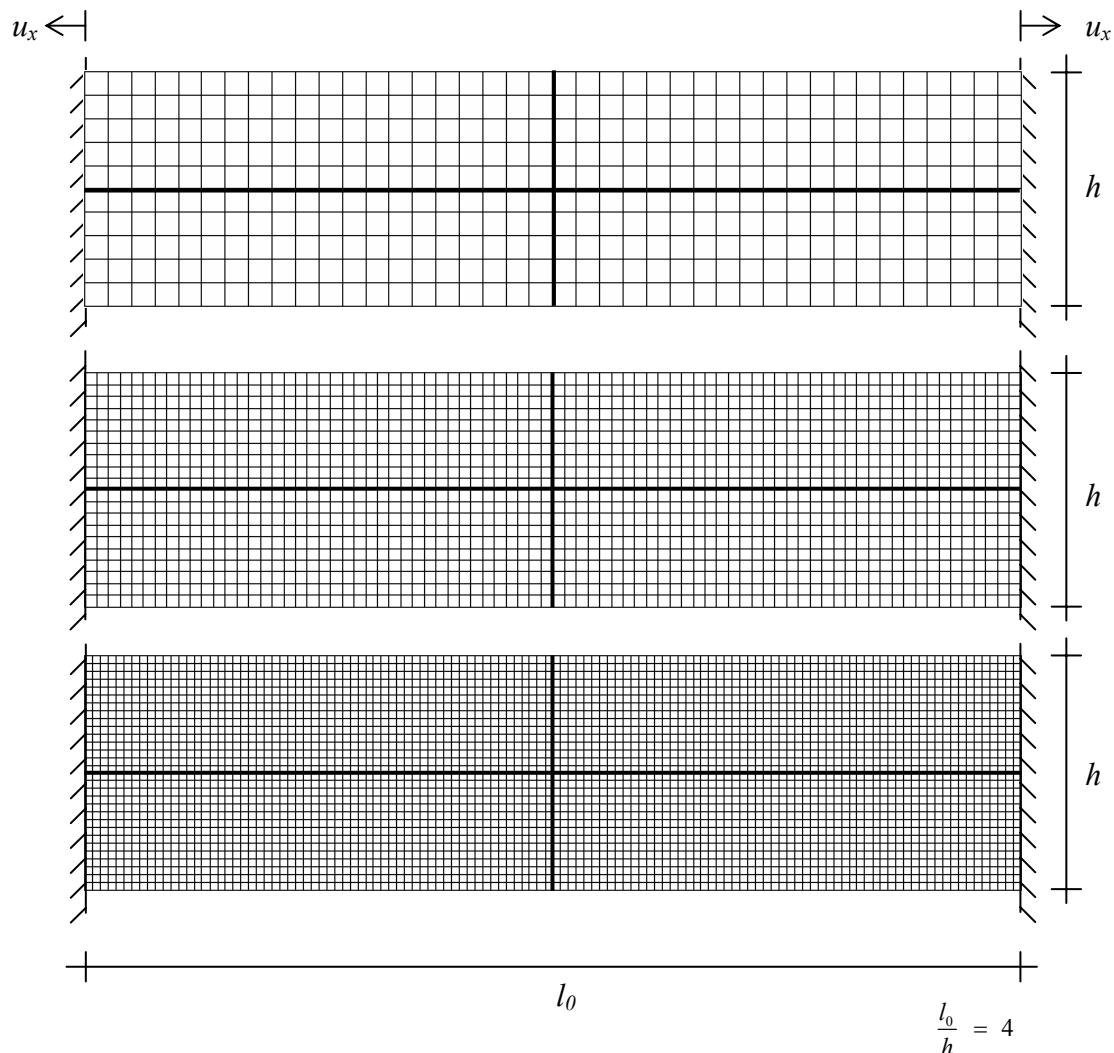


Abbildung 6.2: System mit verschiedenen Diskretisierungen

Bei dem hier betrachteten Material handelt es sich um einen gealterten martensitaushärtenden Stahl, der für höhere technische Anforderungen im Fahrzeugbau, in der Luft- und Raumfahrttechnik, im Werkzeugbau sowie in der Sportindustrie Verwendung findet. Es handelt sich hierbei um einen hochfesten Stahl, der von SPITZIG et al. [110], [111], [112] eingehend experimentell untersucht wurde. Sein elastisches Materialverhalten wird durch einen Elastizitätsmodul $E = 200000 \text{ MPa}$ beschrieben, der Schubmodul beträgt $G = 76923,1 \text{ MPa}$, die Querkontraktionszahl $\nu = 0,3$.

Die plastischen Materialeigenschaften werden durch das folgende Gesetz abgebildet, das eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Diagrammen (Abbildung 6.3) liefert:

$$c = (c_s - c_0) \tanh\left(\frac{{}^0 H \gamma}{c_s - c_0}\right) + c_0. \quad (6.4)$$

Dabei bezeichnet $c_0 = 870 \text{ MPa}$ die anfängliche Fließspannung, $c_s = 1120 \text{ MPa}$ eine asymptotische Sättigungsspannung und ${}^0 H = 96000 \text{ MPa}$ gibt den anfänglichen Verfestigungsparameter an.

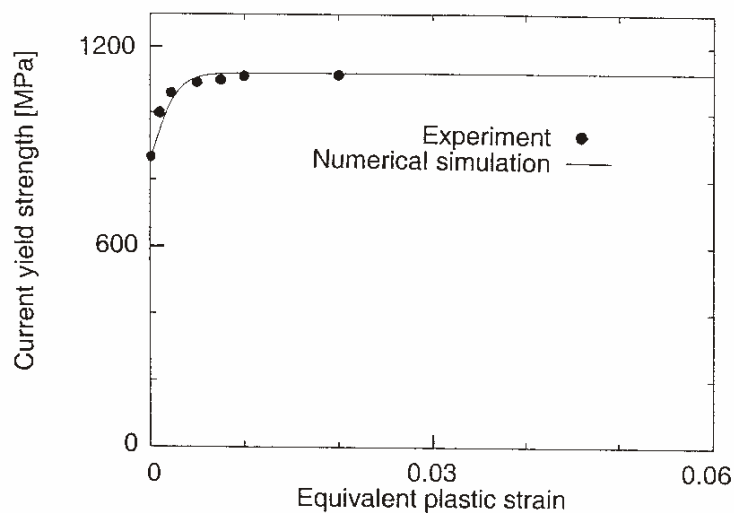


Abbildung 6.3: Sättigungsgesetz (SPITZIG et al. [112])

6.3 Nichtlokales elastisch-plastisches Deformations- und Lokalisierungsverhalten

6.3.1 Untersuchungen zum internen Längenparameter

Wie bereits in Kapitel 4.2 erläutert wurde, werden nichtlokale Materialmodelle häufig als Regularisierungsverfahren eingeführt, d. h. aus Gründen der numerischen Stabilität und nicht, wie es hier der Fall ist, um eine physikalisch adäquate Formulierung zu gewährleisten. Diese Regularisierungsverfahren haben das Ziel, den bei Radial-Return-Verfahren häufig auftretenden Verlust der Elliptizität der zugrunde liegenden partiellen Differentialgleichungen zu verhindern, da dieser zu einer Netzabhängigkeit der Ergebnisse führt, die in einer numerischen Simulation realen Materialverhaltens nicht erwünscht ist.

Obwohl die Nichtlokalität hier nicht zur Vermeidung der Netzabhängigkeit eingeführt wurde, sollen numerische Berechnungen dennoch das Materialverhalten möglichst realitätsgetreu abbilden, d. h. die numerische Berechnung sollte von der Diskretisierung unabhängige, physikalisch sinnvolle Ergebnisse liefern. Deshalb soll nun untersucht werden, wie das Verhältnis der internen Länge ℓ zu der Länge eines einzelnen Elements das Ergebnis der Berechnung beeinflusst, und ob ein bezüglich der Netzunabhängigkeit der Ergebnisse optimales Längenverhältnis bestimmt werden kann.

Dazu variiert man das Verhältnis der internen Länge ℓ zu der jeweiligen Kantenlänge g der einzelnen quadratischen Elemente. Diese beträgt für die in Abbildung 6.2 dargestellten Systeme mit der Gesamtlänge l_0 und der Höhe h bei dem oberen Netz $g = l_0/40 = h/10$, bei dem mittleren Netz $g = l_0/80 = h/20$ und bei dem unteren Netz $g = l_0/120 = h/30$. Bei dieser Untersuchung wird eine reine \bar{J}_2 -Fließbedingung ohne Schädigungseinfluss vorausgesetzt, d. h. es gilt $a/c = 0$ in Gleichung (3.7).

Die in Abbildung 6.4 dargestellten Last-Verschiebungs-Diagramme für verschiedene Verhältnisse von interner Länge zu Elementlänge bei einer Rechnung mit 400 Elementen, d. h. $g = l_0/40 = h/10$, unterscheiden sich durch eine Zunahme des Belastungsmaximums bei

wachsendem ℓ/g . Als Referenzergebnis ist hier der Fall $\ell = 0$ (lokale Berechnung) mit abgebildet. Der Sonderfall $\ell = 0$ führt zu einem Wegfall der Gradiententerme in den entsprechenden Gleichungen.

Das Belastungsmaximum bei einem Wert von $\ell/g = 0,5$ ist um 0,95% größer als das bei lokaler Rechnung, bei dem Verhältnis $\ell/g = 0,8$ um 2,4%, und bei $\ell/g = 1,1$ um 5,6%. Führt man nun die Berechnungen mit denselben Werten für die Längenverhältnisse ℓ/g für die anderen beiden in Abbildung 6.2 dargestellten Diskretisierungen mit 1600 und 3600 Elementen durch, so ergibt sich qualitativ das gleiche Ergebnis mit ansteigendem Belastungsmaximum bei zunehmendem Verhältnis ℓ/g . Aber auch die quantitative Auswertung liefert Zuwächse in der maximalen Belastung, die in der Größenordnung den oben genannten Prozentzahlen für das Netz mit 400 Elementen entsprechen.

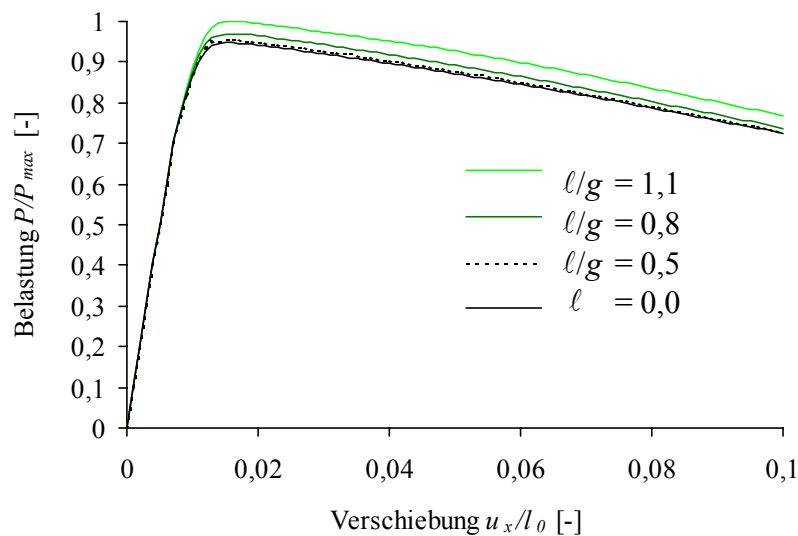


Abbildung 6.4: Last-Verschiebungs-Diagramme für verschiedene Verhältnisse von interner Länge zu Elementlänge bei 400 Elementen

Stellt man nun diese Abhängigkeit der maximalen Belastung von dem Verhältnis ℓ/g bei verschiedenen Diskretisierungen mit 400, 1600 und 3600 Elementen grafisch dar, so verdeutlicht die Tatsache, dass die drei Graphen in Abbildung 6.5 nur geringe Abweichungen

aufweisen, die Robustheit des Verfahrens gegenüber einer Veränderung der internen Länge ℓ . Bei einem Wert von $\ell/g \cong 0,5$ schneiden sich die Graphen, d. h. in diesem Bereich liefern alle untersuchten Diskretisierungen dieselbe maximale Belastung. Da die Maximalbelastung das maßgebliche Kriterium war, das in Abbildung 6.4 den Einfluss des Verhältnisses ℓ/g auf die numerischen Ergebnisse zum Ausdruck brachte, kann man diesen Wert als optimales Verhältnis bezüglich der Netzunabhängigkeit der Ergebnisse bezeichnen. Diese Aussage kann als Hilfestellung zur Wahl der Größenordnung der Elemente verwendet werden. So wurde auch in allen folgenden Berechnungen die Längenabmessung der einzelnen Elemente so gewählt, dass sie ungefähr dem Doppelten der internen Länge ℓ entspricht, die hier unverändert bleibt.

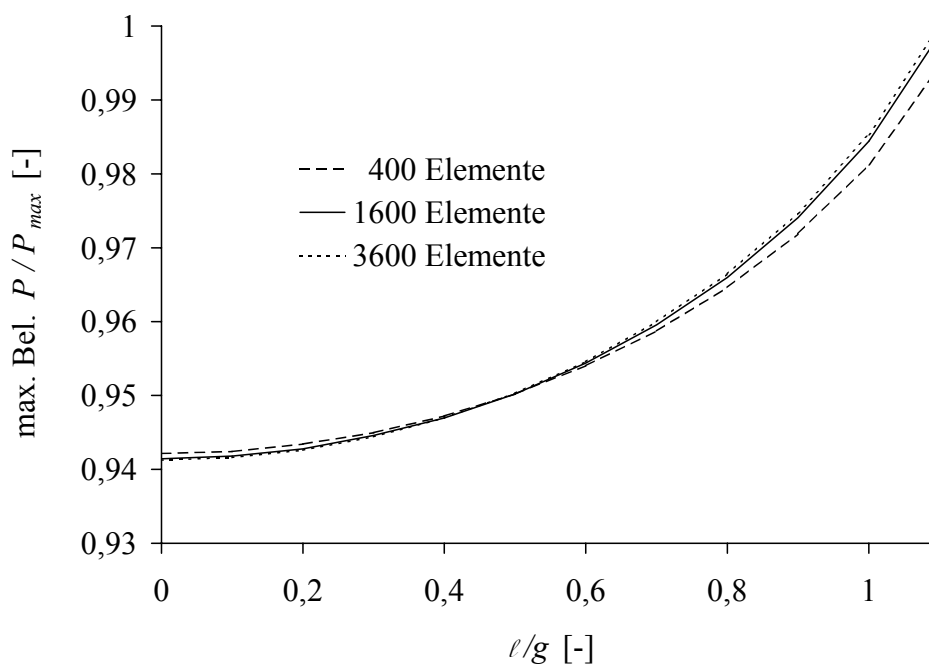


Abbildung 6.5: Abhängigkeit der maximalen Belastung von dem Verhältnis von interner Länge zu Elementlänge für 400, 1600 und 3600 Elemente

Unter Berücksichtigung dieses Resultats wird basierend auf mikroskopischen Untersuchungen für die zur Berücksichtigung der Nichtlokalität notwendige interne Länge, die durch die Gauß-Glockenfunktion (3.11) in die Theorie eingeführt wird, hier der Wert $\ell = 0,028$

verwendet (s. BRÜNIG et al. [30]), der in der Größenordnung mit Quantifizierungen übereinstimmt, die häufig für ähnliche Materialien gewählt werden (s. LEMAITRE [74]).

6.3.2 Vergleich verschiedener Diskretisierungen

Unter Berücksichtigung dieses Resultats sollen nun die Ergebnisse numerischer Berechnungen bei Verwendung verschiedener Diskretisierungen (Abbildung 6.2) verglichen werden.

Abbildung 6.6 zeigt die Last-Verschiebungs-Kurven für verschiedene Diskretisierungen mit 400, 1600 und 3600 Elementen. Die Abhängigkeit des untersuchten Materials vom hydrostatischen Spannungszustand (SPITZIG et al. [111]) wird hier zunächst vernachlässigt, d. h. es gilt $a/c = 0$ in Gleichung (3.7), so dass eine von-Mises-Fließbedingung resultiert. Trotz der sehr unterschiedlichen Elementzahlen treten keine großen Abweichungen in den Last-Verschiebungs-Kurven auf. So beträgt der Endwert bei 400 Elementen $P/P_{\max} = 0,934$, bei 1600 Elementen $P/P_{\max} = 0,928$ und bei 3600 Elementen $P/P_{\max} = 0,926$, was Abweichungen von 0,6% (1600 Elemente) bzw. 0,9% (3600 Elemente) gegenüber dem 400-Elemente-Netz entspricht. Auch in Bezug auf den Beginn der Lokalisierung, hier durch einen Kreis gekennzeichnet, erkennt man keine Abhängigkeit von der Diskretisierung. Bei allen untersuchten Diskretisierungen tritt die Lokalisierung bei einer relativen Verschiebung von $u_x/l_0 = 1,77\%$ ein.

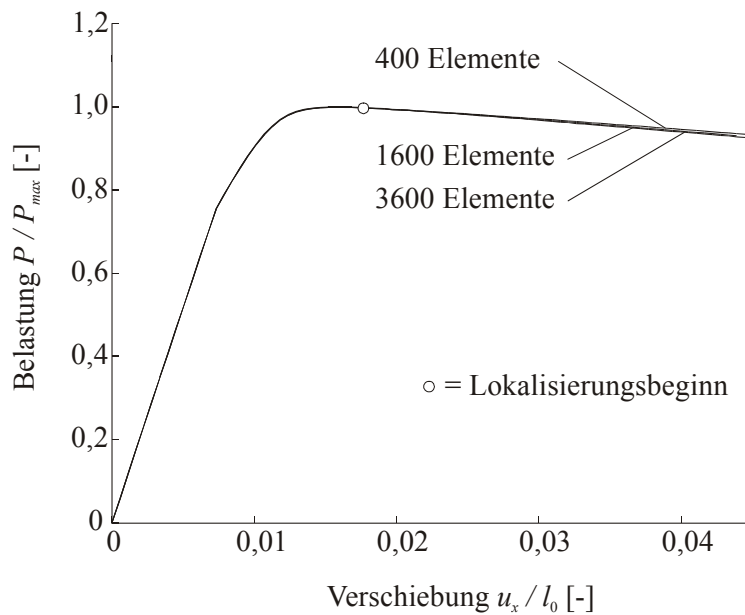


Abbildung 6.6: Last-Verschiebungs-Kurven für verschiedene Diskretisierungen

In Abbildung 6.7 sind die entsprechenden Verformungsfiguren für 400, 1600 und 3600 Elemente dargestellt. Bei allen Netzen bildet sich ein deutliches Scherband mit einer überlagerten leichten Einschnürung. Die Lokalisierungszone ist jeweils grau unterlegt. Offensichtlich ist die Breite des Scherbands bei allen drei Netzen gleich. Die Unterschiede in den Verformungsfiguren sind sehr gering, so dass sogar bei der Diskretisierung mit nur 400 Elementen die numerische Berechnung dieselbe Breite der Lokalisierungszone liefert. Das verwendete Verfahren verhält sich also sehr robust gegenüber einer Verfeinerung der Diskretisierung.

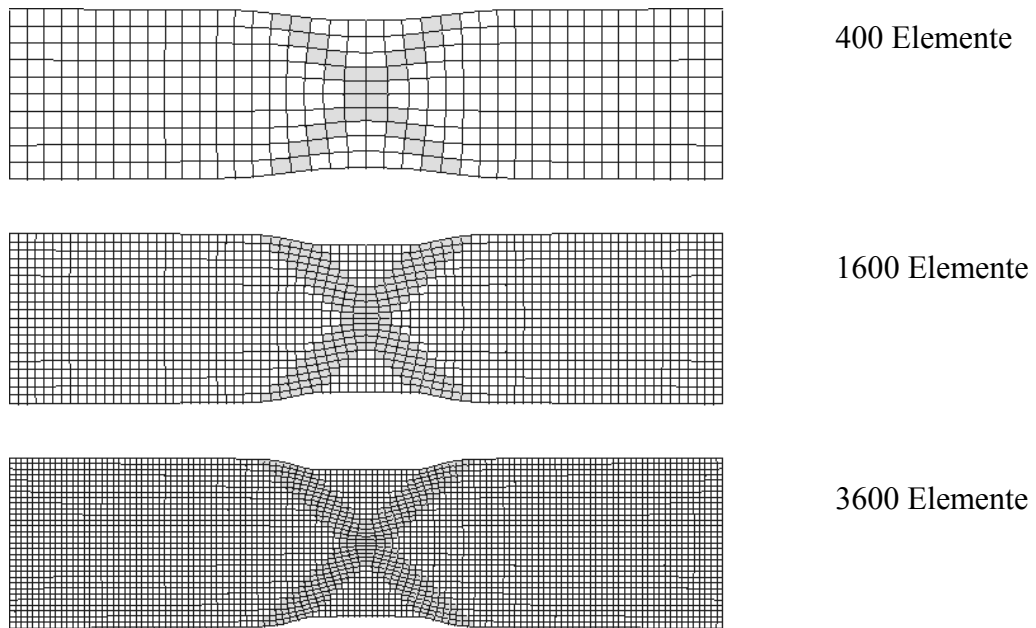


Abbildung 6.7: Verformungsfiguren für verschiedene Diskretisierungen bei $u_x/l_0=4,5\%$

6.3.3 Vergleich verschiedener Fließbedingungen

Die in Gleichung (3.7) eingeführte Fließbedingung $f^{pl}(\bar{I}_1, \bar{J}_2, c) = \frac{1}{1 - \frac{a}{c}\bar{I}_1} \sqrt{\bar{J}_2} - c(\gamma, \hat{\gamma}) = 0$

berücksichtigt den Einfluss des hydrostatischen Spannungszustands auf das Materialverhalten. Da experimentelle Untersuchungen (SPITZIG et al. [111], [112], SPITZIG & RICHMOND [109]) gezeigt haben, dass Stähle eine Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand aufweisen, soll hier untersucht werden, wie sich eine Veränderung des Parameters a/c in der Fließbedingung (3.7) auf die Vorhersagen des Deformationsverhaltens auswirkt. Die numerischen Berechnungen dieses Kapitels beziehen sich auf das in Abbildung 6.2 dargestellte mittlere System mit 1600 Elementen und werden, wie in Kapitel 6.2.1, ohne Berücksichtigung des Schädigungseinflusses durchgeführt.

In Abbildung 6.8 sind die Last-Verschiebungs-Diagramme für verschiedene Fließbedingungen dargestellt. Da der Parameter a/c den Einfluss des hydrostatischen Spannungszustands beschreibt, entspricht der Wert $a/c = 0$ der von-Mises-Fließbedingung. Der zunehmende \bar{I}_1 -Einfluss äußert sich hier in einem früheren Lokalisierungsbeginn und einer niedrigeren maximalen Belastung. Bei einer reinen \bar{J}_2 -Fließbedingung ($a/c = 0$) tritt die Lokalisierung bei einer relativen Verschiebung von $u_x/l_0 = 1,77\%$ ein, bei einem Wert von $a/c = 10 \text{ TPa}^{-1}$ bei $u_x/l_0 = 1,53\%$ und bei einem hohen \bar{I}_1 -Einfluss von $a/c = 20 \text{ TPa}^{-1}$ liegt der Lokalisierungsbeginn bereits bei $u_x/l_0 = 1,33\%$. Das Belastungsmaximum liegt im Vergleich zu der Berechnung mit einer von-Mises-Fließbedingung bei $a/c = 10 \text{ TPa}^{-1}$ um 2,4% niedriger, für $a/c = 20 \text{ TPa}^{-1}$ um 5,9%. Wie anhand von Gleichung (3.5) $c = a\bar{I}_1 + \sqrt{\bar{J}_2}$ deutlich wird, sind die beschriebenen Unterschiede darauf zurückzuführen, dass die Fließspannung c unter vorhandenem \bar{I}_1 -Einfluss, d. h. $a \neq 0$, bei gleichem Spannungszustand um so früher erreicht wird, je größer der Parameter a ist, und damit das Fließen bei Berücksichtigung der Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand früher eintritt als bei Verwendung einer \bar{J}_2 -Fließbedingung, bei der der elastische Bereich am größten ist.

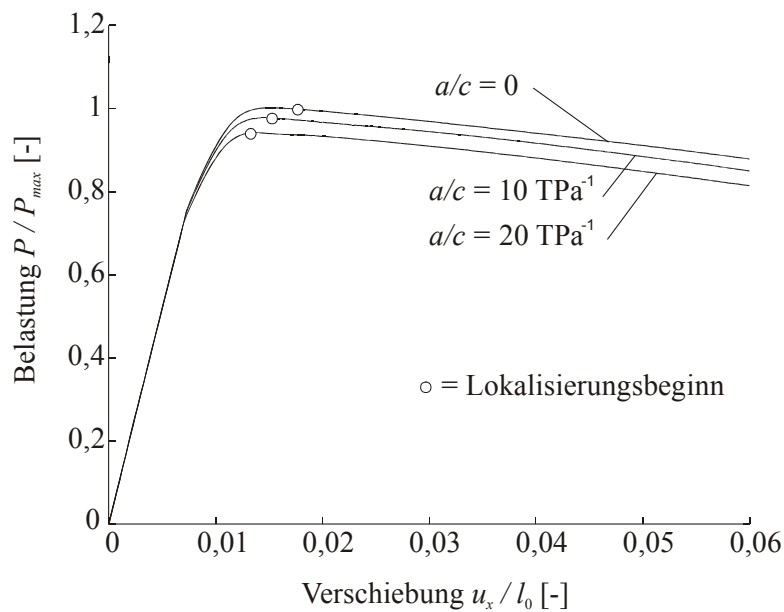


Abbildung 6.8: Last-Verschiebungs-Diagramme für verschiedene Fließbedingungen

Abbildung 6.9 zeigt die entsprechenden Verformungsfiguren für die verschiedenen Fließbedingungen. Die obere Verformungsfigur zeigt das Ergebnis der Berechnung mit einer von-Mises-Fließbedingung, wobei ein relativ breites Scherband von einer Einschnürung in der Mitte der Probe überlagert wird. Der Scherbandwinkel beträgt 43° zur Belastungsrichtung. Der wachsende Einfluss des hydrostatischen Spannungszustands, der bei der mittleren Verformungsfigur mit $a/c = 10 \text{ TPa}^{-1}$ und bei der unteren Verformungsfigur mit $a/c = 20 \text{ TPa}^{-1}$ berücksichtigt wurde, führt zwar ebenfalls zu Scherbändern in Probenmitte mit einer überlagerten Einschnürung und auch der Winkel des Scherbands zur Horizontalen bleibt mit 43° unverändert, jedoch erkennt man hier, dass die Scherbänder schmäler und deutlicher abgegrenzt sind, was im Wesentlichen an den äußeren Rändern der Scherbänder zu erkennen ist und auf die Abminderung der Duktilität aufgrund des höheren \bar{I}_1 -Einflusses zurückzuführen ist.

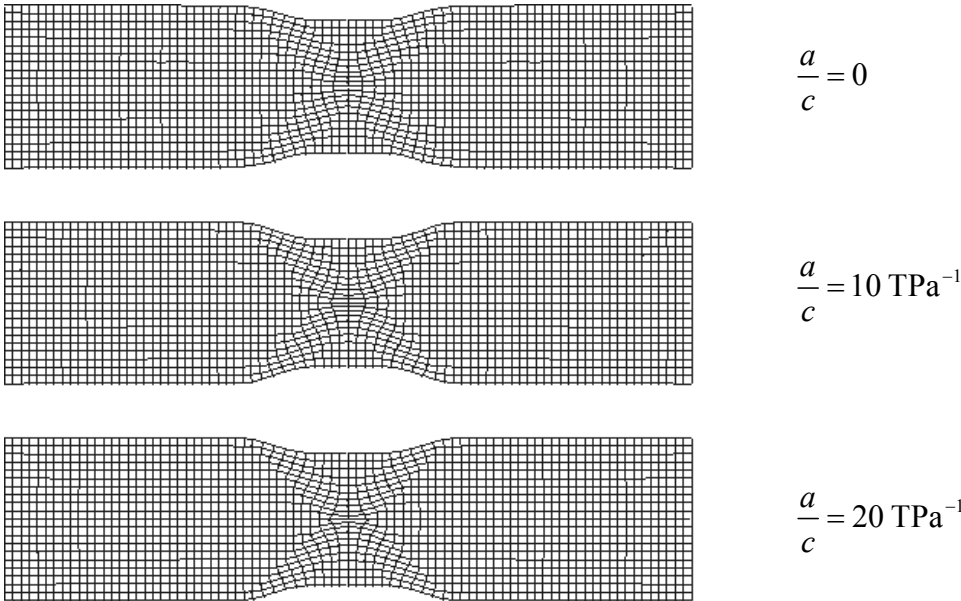


Abbildung 6.9: Verformungsfiguren für verschiedene Fließbedingungen bei $u_x/l_0=6\%$

6.4 Nichtlokales Schädigungsverhalten

6.4.1 Einfluss der Schädigung auf das Materialverhalten

In experimentellen Untersuchungen haben SPITZIG et al. [110] gezeigt, dass die elastischen Moduln der von ihnen untersuchten Werkstoffe maßgeblich von der jeweiligen Anfangsporosität des Materials beeinflusst wurden. Basierend auf diesen Ergebnissen können die in Gleichung (3.21) eingeführten Parameter η_1, \dots, η_4 so bestimmt werden, dass sie eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten aus SPITZIG et al. [110] liefern. Eine solche Parameteridentifikation wurde z. B. von BRÜNIG [26] für ein eisenhaltiges Material durchgeführt.

In Anlehnung an HAYAKAWA et al. [54] werden hier für die Parameter η_1, \dots, η_4 aus Gleichung (3.21), die den Einfluss fortschreitender Schädigung auf die elastischen Eigenschaften des Matrixmaterials beschreiben, bei den Berechnungen unter Berücksichtigung des Schädigungseinflusses in diesem Kapitel die folgenden Werte angenommen:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -35000 \text{ MPa}; & \eta_2 &= -20000 \text{ MPa}; \\ \eta_3 &= -40000 \text{ MPa}; & \eta_4 &= -50000 \text{ MPa}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Aufgrund der nur begrenzt zur Verfügung stehenden experimentellen Daten ist es schwierig, die entsprechenden Materialparameter zu bestimmen. Die elastischen Materialeigenschaften des von HAYAKAWA et al. [54] untersuchten Werkstoffs ähneln denen der hier betrachteten Stähle, so dass die Parameter η_1, \dots, η_4 bis auf eine geringfügige Modifizierung übernommen werden können. Diese Modifizierung besteht darin, die Parameter η_2 und η_3 so anzupassen, dass die Bedingung $\eta_3 = 2\eta_2$ erfüllt ist, um die Symmetrie des schädigungsbezogenen Stoffmoduls \mathcal{C}^{da} in Gleichung (3.28) zu gewährleisten (s. Kapitel 3.2.1).

Der Einfluss der Parameter η_1, \dots, η_4 auf die elastischen Materialparameter soll anhand der folgenden Diagramme verdeutlicht werden. Abbildung 6.10 zeigt die Abminderung des

Elastizitätsmoduls E_d mit zunehmendem Porenvolumenverhältnis f . So beträgt der Elastizitätsmodul E_d bei einer Porosität von $f = 0,2$ durch den Einfluss der Schädigungsparameter nur noch 90% seines Anfangswerts E . Der gleiche Effekt konnte auch von BRÜNIG [26] beobachtet werden.

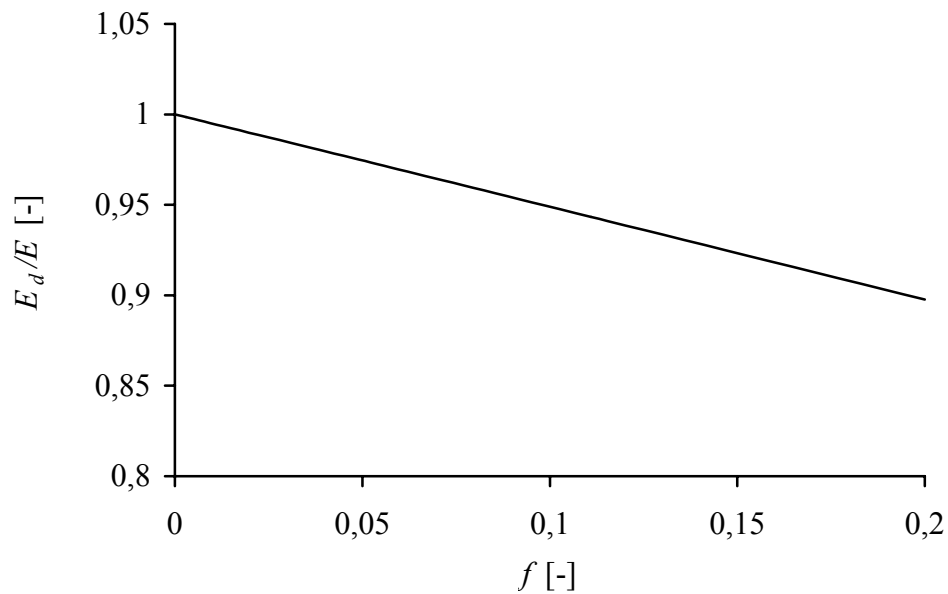


Abbildung 6.10: Wirkung der Porosität auf den Elastizitätsmodul

Einen vergleichbaren Einfluss haben die Parameter η_1, \dots, η_4 auf den Schubmodul G und die Querkontraktionszahl ν (s. BRÜNIG [26]).

In Abbildung 6.11 wird deutlich, dass der Schubmodul G_d im Vergleich zu seinem Anfangswert G bei einer Porosität von $f = 0,2$ um 10% abgefallen ist, während die Querkontraktionszahl ν_d , deren Abminderung bei konventionellen Schädigungsmodellen in der Regel vernachlässigt wird, bei einer Porosität von $f = 0,2$ um 4% in Bezug auf ihren Ausgangswert ν abgenommen hat, wie in Abbildung 6.12 ersichtlich ist.

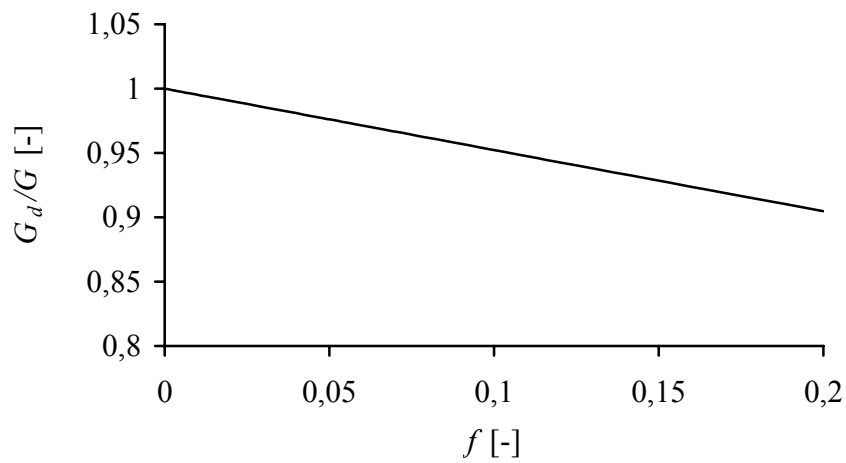


Abbildung 6.11: Wirkung der Porosität auf den Schubmodul

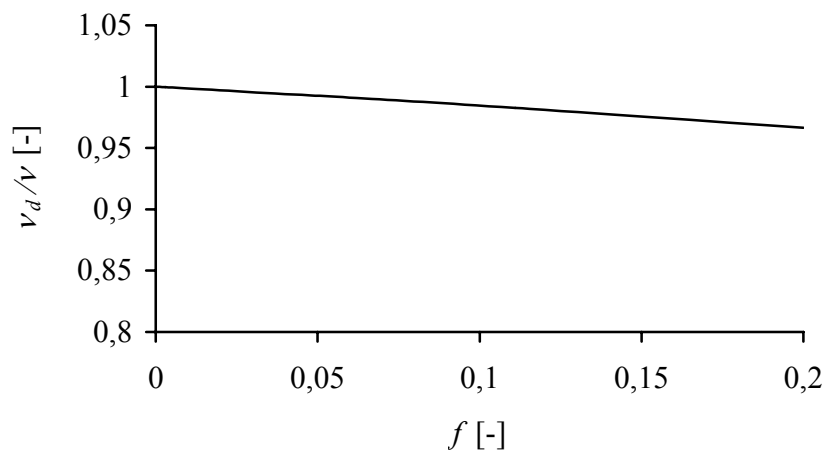


Abbildung 6.12: Wirkung der Porosität auf die Querkontraktionszahl

Experimentelle Untersuchungen durch BROWN & EMBURY [21] sowie GOODS & BROWN [52] haben gezeigt, dass das Zusammenwachsen von benachbarten Poren in etwa zu dem Zeitpunkt eintritt, wenn ihre Länge die Größenordnung ihres Abstands erreicht. Basierend auf

diesen experimentellen Untersuchungen haben TVERGAARD & NEEDLEMAN [117] gezeigt, dass Last-Verschiebungs-Diagramme in Schädigungsprozessen nach Überschreiten eines Belastungsmaximums eine geringe negative Steigung aufweisen, bis mit dem Erreichen einer kritischen Porosität $f = f_c$ die Last-Verschiebungs-Kurve steil abfällt, was in einem fast vollständigen Verlust der Lastaufnahmekapazität resultiert.

In Anlehnung an diese numerischen Ergebnisse [117] wird das beschriebene Verhalten hier durch zwei verschiedene negative Steigungen $H^{da} = \frac{d\sigma}{df}$ abgebildet (BRÜNIG [26]). Im Falle isotropen Schädigungsverhaltens ($f < f_c$) beträgt die Steigung $H_1^{da} = -50 \text{ MPa}$, sobald anisotrope Schädigung maßgebend wird ($f \geq f_c$), gilt $H_2^{da} = -1000 \text{ MPa}$. Basierend auf den Ergebnissen von KOPLIK & NEEDLEMAN [62], BECKER et al. [10] sowie LEBLOND & PERRIN [67], wird für das kritische Porenvolumenverhältnis in Abhängigkeit von der Anfangsporosität der Wert $f_c = 0,1$ ermittelt. Der Wert der plastischen Verzerrung γ , der den Beginn der Berücksichtigung von Schädigungseffekten des ursprünglich ungeschädigten Materials kennzeichnet, wird als Schädigungsdehnung bezeichnet und beträgt hier $\gamma_{da} = 0,1$ (vgl. LEMAITRE [72]). Die in der Schädigungsbedingung (3.31) und im Schädigungsgesetz (3.36) auftretenden Parameter $\tilde{\beta}$ und β , die den anisotropen Anteil des Materialverhaltens kennzeichnen, werden zunächst mit $\beta = \tilde{\beta} = 0,5$ angenommen. Die Wirkung einer Variation der hier aufgeführten Parameter auf die numerische Simulation des Materialverhaltens wird in Kapitel 6.3.2 untersucht. Die schädigungsabhängigen Berechnungen des gesamten Kapitels 6.3 beziehen sich auf das in Abbildung 6.2 dargestellte mittlere System mit 1600 Elementen, nur am Ende des Kapitels 6.3.2 erfolgt noch ein Vergleich verschiedener Diskretisierungen zur Untersuchung der Netzunabhängigkeit unter Schädigungsberücksichtigung.

Vergleicht man das vorausgesagte Materialverhalten bei rein elastisch-plastischer Berechnung (s. Kapitel 6.2) mit demjenigen bei Berücksichtigung der Schädigung, so erkennt man eine starke Abweichung der Ergebnisse.

Die zugehörigen Last-Verschiebungs-Kurven in Abbildung 6.13 zeigen bis zu einer relativen Verschiebung von $u_x/l_0 = 3\%$ keine großen Abweichungen, danach behält die zur rein elastisch-plastischen Rechnung gehörige Last-Verschiebungs-Kurve ihre Steigung weit-

gehend bei, während die andere ein starkes Gefälle aufweist, so dass die zur maximalen aufgetragenen Verschiebung korrespondierende Belastung bei Schädigungsberücksichtigung nur 40,63% der entsprechenden Belastung bei elastisch-plastischer Rechnung ohne Schädigungsberücksichtigung beträgt. Der Lokalisierungsbeginn tritt bei der rein elastisch-plastischen Berechnung bei einer relativen Verschiebung von $u_x/l_0 = 1,77\%$ ein und verschiebt sich bei Schädigungsberücksichtigung auf $u_x/l_0 = 2,2\%$. Der durch den hier verwendeten Wert $\gamma_{da} = 0,1$ gesteuerte Schädigungsbeginn liegt in Abbildung 6.13 bei der schädigungsabhängigen Last-Verschiebungs-Kurve bei $u_x/l_0 = 2,6\%$ und tritt damit bereits kurz nach dem Lokalisierungsbeginn ein. Unter Berücksichtigung der oben beschriebenen Erkenntnisse aus den Last-Verschiebungs-Diagrammen von TVERGAARD & NEEDLEMAN [117] wird nun deutlich, dass die Lastaufnahmekapazität des Materials deutlich überschätzt wird, wenn der Einfluss der Schädigung vernachlässigt wird. Auch im Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen von LEMAITRE & DUFAILY [75] ergibt sich eine gute qualitative Übereinstimmung mit den hier unter Schädigungsberücksichtigung numerisch ermittelten Last-Verschiebungs-Kurven.

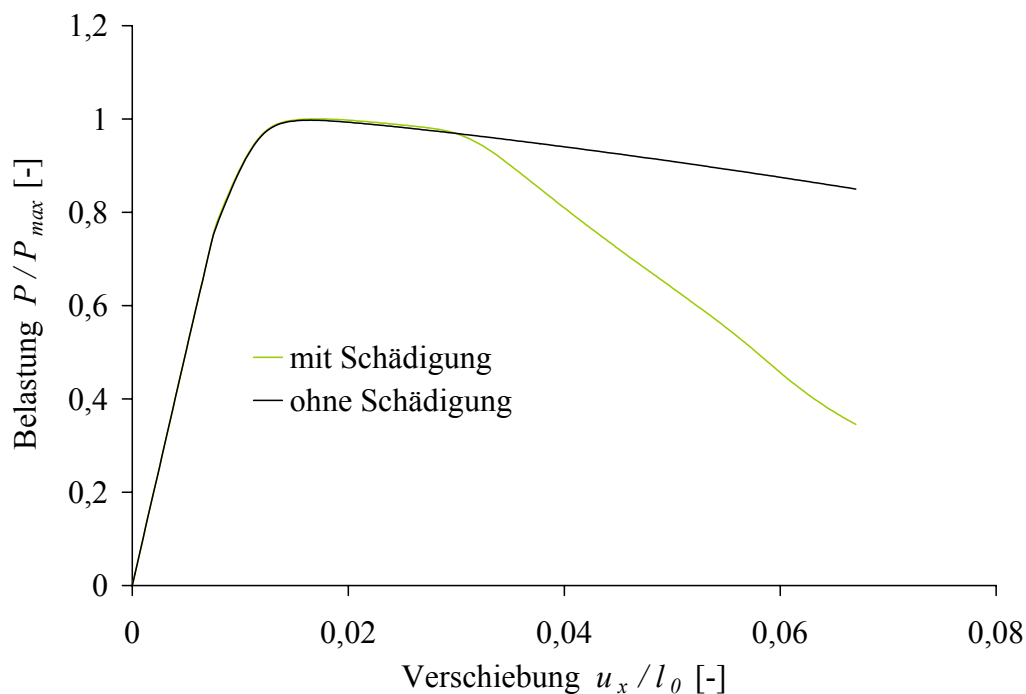
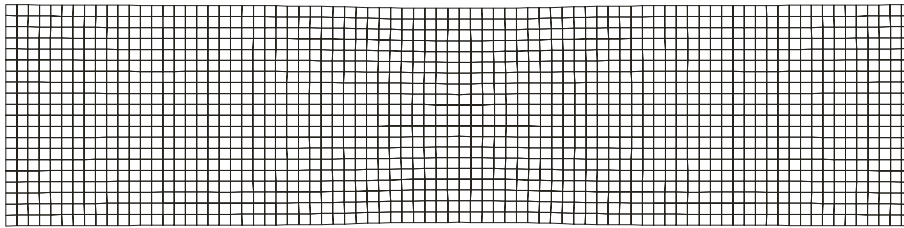


Abbildung 6.13: Last-Verschiebungs-Diagramme ohne und mit Schädigungsberücksichtigung

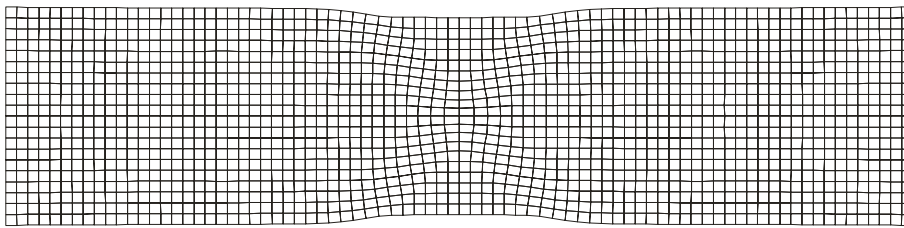
Des Weiteren bestehen auch wesentliche Unterschiede im Verformungsbild, wenn man die Simulationen des rein elastisch-plastischen Modells mit den schädigungsabhängigen Berechnungen vergleicht. In Abbildung 6.14 (a) sind die Verformungsfiguren bei rein elastisch-plastischer Rechnung abgebildet, in Abbildung 6.14 (b) die entsprechenden Verformungsfiguren bei Schädigungsberücksichtigung. Analog dazu sind die Darstellungen der plastischen Zonen in den Abbildungen 6.15 (a) und (b) angeordnet. Die jeweils oberste der vier Figuren stellt den Zustand bei einer relativen Verschiebung von $u_x/l_0 = 2,2\%$ dar, was hier dem Lokalisierungsbeginn entspricht. Die darunter abgebildeten Darstellungen beziehen sich jeweils auf Zustände in Abständen von $u_x/l_0 = 1,5\%$, so dass die unterste abgebildete Verformungsfigur einer relativen Verschiebung von $u_x/l_0 = 6,7\%$ entspricht. Bei rein elastisch-plastischer Berechnung entwickelt sich ein relativ breites Scherband mit einer überlagerten Einschnürung, das sich kontinuierlich entwickelt. Dieses Phänomen wird bei Betrachtung der plastischen Zonen in den Abbildungen 6.15 (a) und (b) bestätigt, da auch hier eine kontinuierliche Entwicklung erkennbar ist, jedoch ist hier die immer stärker werdende Einschnürung sehr deutlich zu erkennen.

Auch bei Schädigungsberücksichtigung entsteht zunächst ein Scherband, das sich jedoch im Vergleich mit den Verformungsfiguren aus rein elastisch-plastischer Berechnung in Abbildung 6.14 (a) anders entwickelt, indem von der Mitte der Probe ausgehend eine Aufweitung der Elemente stattfindet, die sich in senkrechter Richtung fortsetzt, so dass sich schließlich der Lokalisierungsbereich auf einen schmalen Streifen reduziert, der lediglich eine Breite von zwei Elementen umfasst.

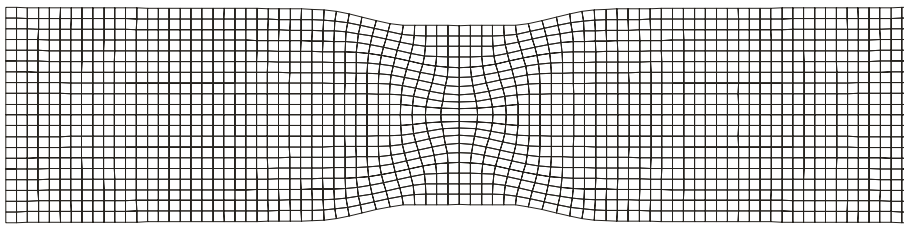
Auch dieser Mechanismus ist anhand der Darstellung der plastischen Zonen in den Abbildung 6.15 (a) und (b) nachvollziehbar. Die zu Beginn entsprechend der Form des Scherbands kreuzförmig angeordneten plastischen Zonen werden während des weiteren Schädigungsprozesses von einer schmalen senkrecht verlaufenden plastischen Zone, die sich aus der Mitte beginnend zu den Rändern ausbreitet, verdrängt. Hier entsteht am Ende eine Kontur mit einer auf einen sehr schmalen Bereich beschränkten Einschnürung, während im rein elastisch-plastischen Fall die Einschnürung auf einen sehr viel breiteren Bereich verteilt ist.



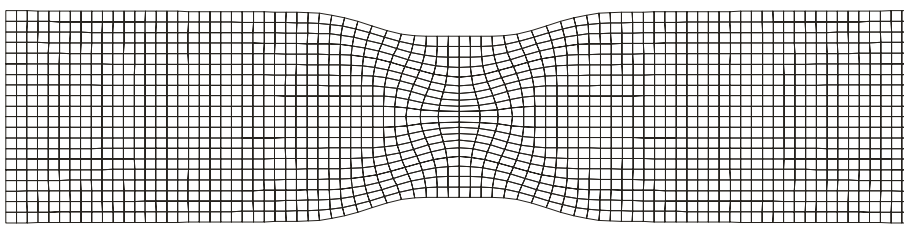
$$\frac{u_x}{l_0} = 2,2\%$$



$$\frac{u_x}{l_0} = 3,7\%$$



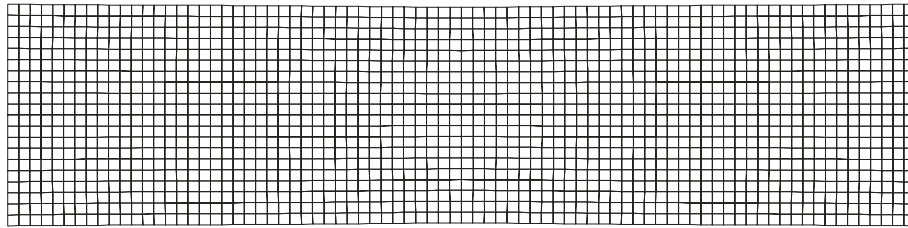
$$\frac{u_x}{l_0} = 5,2\%$$



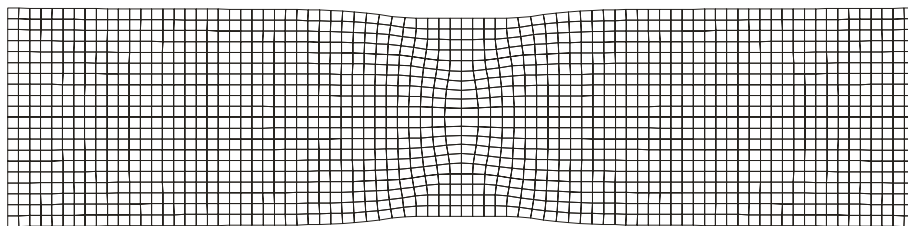
$$\frac{u_x}{l_0} = 6,7\%$$

Abbildung 6.14: Vergleich der Verformungsfiguren

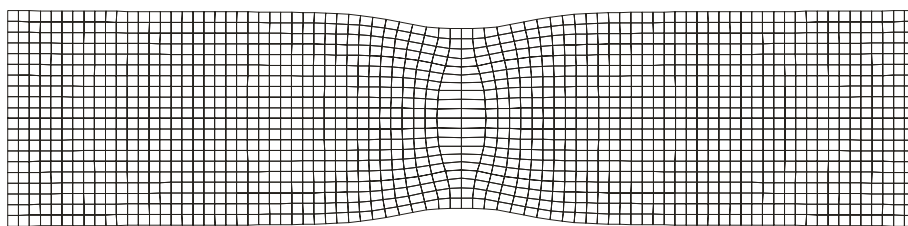
(a) ohne Schädigungsberücksichtigung



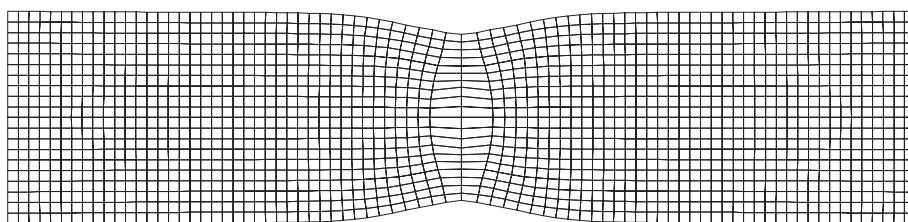
$$\frac{u_x}{l_0} = 2,2\%$$



$$\frac{u_x}{l_0} = 3,7\%$$



$$\frac{u_x}{l_0} = 5,2\%$$



$$\frac{u_x}{l_0} = 6,7\%$$

Abbildung 6.14: Vergleich der Verformungsfiguren

(b) mit Schädigungsberücksichtigung

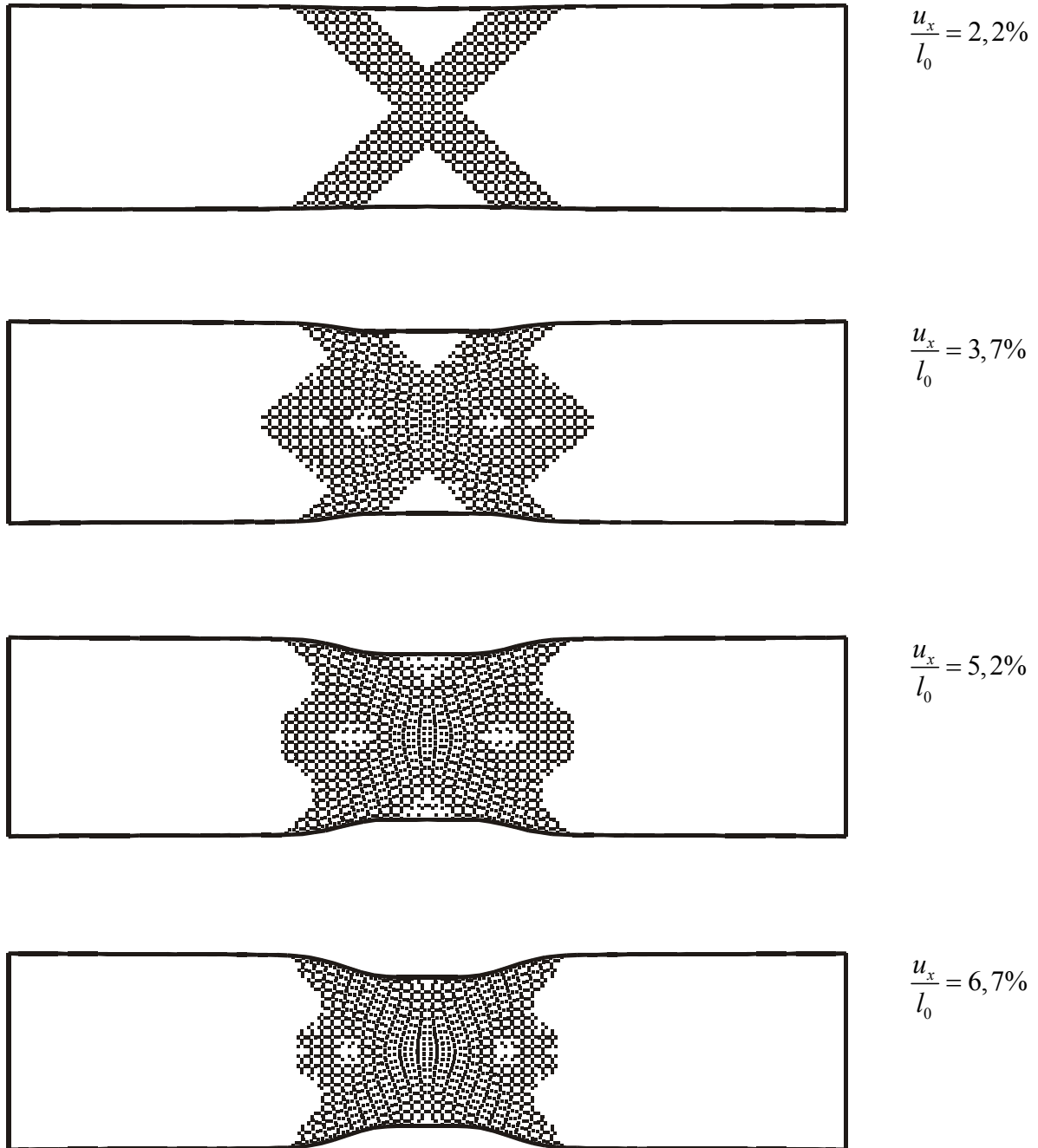


Abbildung 6.15: Vergleich der plastischen Zonen

(a) ohne Schädigungsberücksichtigung

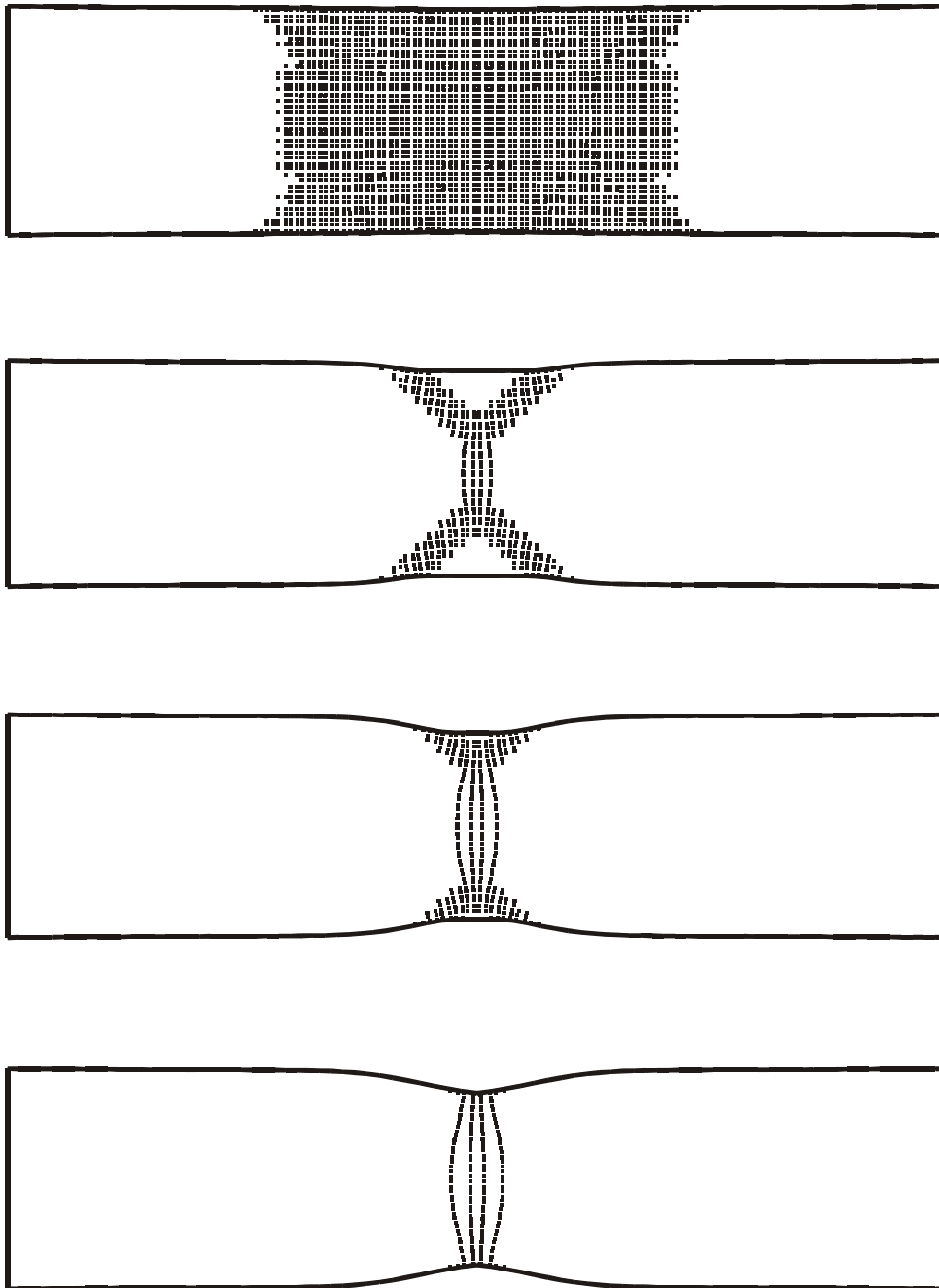


Abbildung 6.15: Vergleich der plastischen Zonen

(b) mit Schädigungsberücksichtigung

Die hier festgestellte Aufweitung der mittleren Elemente bei Schädigungsberücksichtigung lässt sich durch die Volumenzunahme infolge des starken Anwachsens des Porenvolumenanteils erklären. Dies lässt sich auch folgendermaßen anhand der numerischen Ergebnisse nachvollziehen. Dazu betrachtet man eines der vier Elemente der Diskretisierung, die an beide Symmetrieachsen der doppelsymmetrischen Struktur grenzen (Abbildung 6.16) und vergleicht die Deformationen dieses Elements sowie die jeweilige Veränderung der Position des in Abbildung 6.16 markierten Punktes in Vertikalrichtung bei einer rein elastisch-plastischen Rechnung mit einer Rechnung unter Schädigungsberücksichtigung.

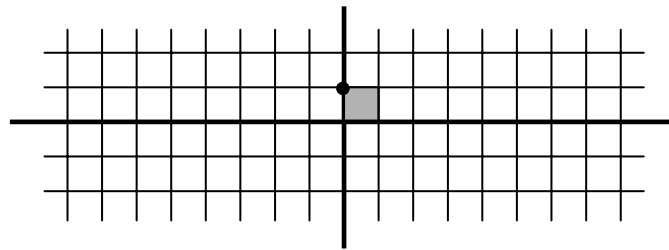


Abbildung 6.16: ursprüngliche Lage des in Abbildung 6.17 untersuchten Punktes und Elements

In Abbildung 6.17 erkennt man nun, dass bei einer elastisch-plastischen Berechnung ohne Schädigungsberücksichtigung die Veränderung der Position des betrachteten Punktes durch die sich entwickelnde starke Einschnürung der Probe, die bereits in Abbildung 6.14 ersichtlich war, eine streng monoton fallende Kurve liefert, während bei Schädigungsberücksichtigung der zunehmende Porositätsfaktor f dieses Verhalten auffängt und die starke Volumenzunahme in diesem Bereich dazu führt, dass die Position des Punktes am Ende nahezu dem Ausgangszustand entspricht.

Der Vergleich der Deformationen des betrachteten Elements zu drei unterschiedlichen Zeitpunkten des simulierten Zugversuchs verdeutlicht ebenfalls die Volumenzunahme bei fortschreitender Schädigung. Während zu Beginn kein Unterschied in Form und Fläche des vergrößert herausgezeichneten Elements feststellbar ist, erkennt man an der Stelle, wo beide Kurven beginnen, voneinander abzuweichen, dass die Deformationen des Elements bereits

nicht mehr übereinstimmen, obwohl die Position des betrachteten Punktes noch in beiden Fällen dieselbe ist. Bei dem Vergleich des Elements am Ende ist der Unterschied in Form und Fläche schließlich offensichtlich. Der untere, zur rein elastisch-plastischen Berechnung korrespondierende Pfad zeigt ein isochores Verhalten, da die Verbreiterung des Elements in horizontaler Richtung mit einer Verringerung der Höhe einhergeht, so dass der Flächeninhalt unverändert bleibt. Dagegen ist der Flächeninhalt des Elements bei Schädigungsberücksichtigung größer geworden, da bei nahezu unveränderter Höhe die Breite des Elements stark zugenommen hat.

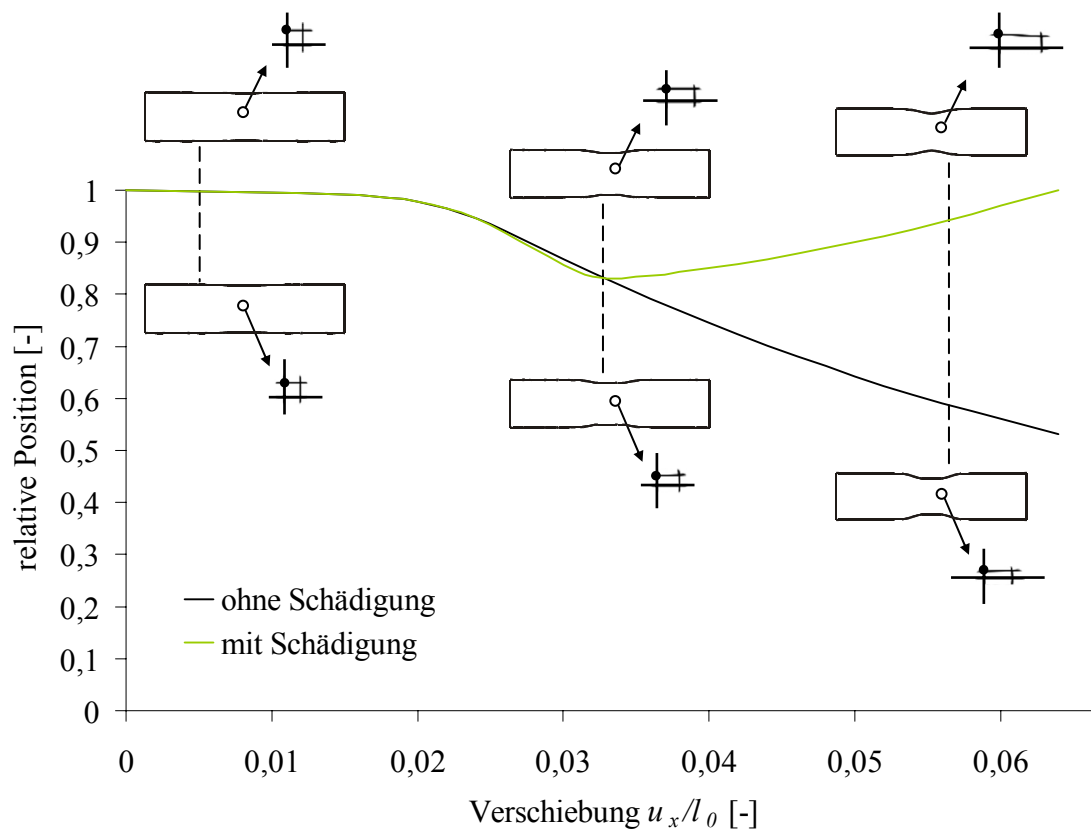


Abbildung 6.17: relative Position eines Punktes in der Symmetrieachse

6.4.2 Einfluss ausgewählter Modellparameter auf das Schädigungsverhalten

6.4.2.1 Einfluss der Schädigungsdehnung

In Kapitel 6.4.1 wurde untersucht, wie sich die Berücksichtigung des Schädigungseinflusses auf das Materialverhalten auswirkt. Die Berechnungen wurden mit einem angenommenen Wert von $\gamma_{da} = 0,1$ für die Schädigungsdehnung durchgeführt, d. h. sobald die plastische Verzerrung γ den Wert 0,1 erreicht, werden Schädigungseffekte des ursprünglich ungeschädigten Materials berücksichtigt. Dabei wurde festgestellt, dass diese Berechnungen eine gute Übereinstimmung mit experimentell ermittelten Last-Verschiebungs-Diagrammen liefert, und dass in diesem Fall der Lokalisierungsbeginn und der Schädigungsbeginn nahe zusammenliegen. Durch Einsetzen unterschiedlicher Werte für den Parameter γ_{da} soll hier nun untersucht werden, ob die im vorangegangenen Kapitel beobachteten Effekte, die dort auf die Berücksichtigung der Schädigung zurückgeführt wurden, von dem Zusammenwirken von Lokalisierungsbeginn und Schädigungsbeginn beeinflusst werden.

Abbildung 6.18 verdeutlicht den Einfluss der Schädigungsdehnung auf den Schädigungsbeginn und das daraus resultierende spätere Abfallen der Last-Verschiebungs-Kurven. Die zugehörigen Symbole kennzeichnen den jeweiligen Schädigungsbeginn, während der jeweilige Lokalisierungsbeginn, durch ein schwarzes Quadrat gekennzeichnet, bei allen durchgeführten Berechnungen mit dem Lokalisierungsbeginn bei der Kurve für $\gamma_{da} = 0,1$ zusammenfällt. Die entsprechenden Werte sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst.

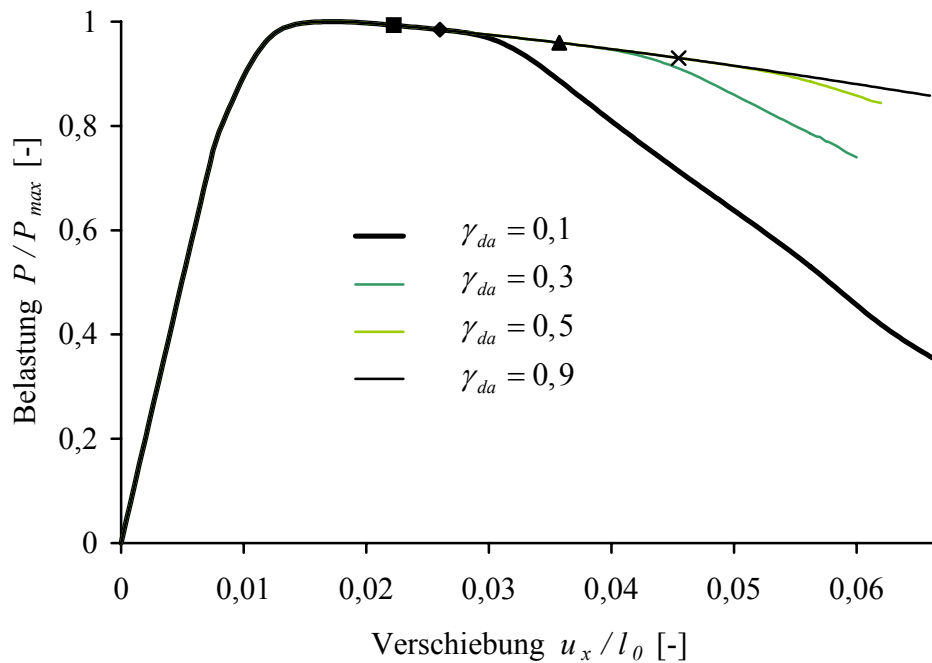


Abbildung 6.18: Last-Verschiebungs-Diagramme für verschiedene Schädigungsdehnungen

γ_{da}	u_x/l_0 bei Lokalisierungsbeginn	u_x/l_0 bei Schädigungsbeginn
0,1	■ \triangleq 2,2%	◆ \triangleq 2,6%
0,3	■ \triangleq 2,2%	▲ \triangleq 3,55%
0,5	■ \triangleq 2,2%	✕ \triangleq 4,55%
0,9	■ \triangleq 2,2%	-

Tabelle 6.1: Lokalisierungs- und Schädigungsbeginn bei verschiedenen γ_{da}

Abbildung 6.19 (a) – (d) stellt die Entwicklung der plastischen Zonen dar, die sich bei der Berechnung mit den jeweiligen oben genannten Schädigungsdehnungen ergeben. Im vorangegangenen Kapitel wurde deutlich, dass die Berücksichtigung der Schädigung bei den Verformungsfiguren dazu führt, dass sich der Lokalisierungsbereich auf einen sich von innen nach außen entwickelnden schmalen Streifen reduziert. Da auch in Abbildung 6.19 (a) das Ergebnis einer Berechnung mit einer Schädigungsdehnung von $\gamma_{da} = 0,1$ dargestellt wird, wobei Lokalisierungs- und Schädigungsbeginn nahe zusammenliegen, zeigt sich auch hier dieselbe Entwicklung der plastischen Zonen wie in Abbildung 6.15 (b), die auf ein sprödes Materialverhalten hindeutet und in ähnlicher Weise auch von TVERGAARD & NEEDLEMAN [117] beobachtet wurde. Variiert man die Schädigungsdehnung, die den Beginn der Schädigung beeinflusst, auf $\gamma_{da} = 0,3$ (Abbildung 6.19 (b)), so wird folgerichtig der oben beschriebene Mechanismus erst im Bereich größerer Dehnungen erkennbar, so dass die in Abbildung 6.15 (a) dargestellte, für eine rein elastisch-plastische Rechnung typische Verteilung der plastischen Bereiche länger erhalten bleibt. Dementsprechend tritt bei einer Schädigungsdehnung von $\gamma_{da} = 0,5$ eine Veränderung der auf ein Scherband hindeutenden kreuzförmigen Verteilung der plastizierten Punkte in Abbildung 6.19 (c) noch später ein, obwohl in dem letzten dargestellten Zustand die Aufweitung der Elemente in der Mitte bereits deutlich zu erkennen ist. In Abbildung 6.19 (d) ist schließlich bei einer Schädigungsdehnung von $\gamma_{da} = 0,9$ der Schädigungseinfluss nicht mehr zu erkennen und das Ergebnis entspricht im Wesentlichen demjenigen bei elastisch-plastischer Rechnung ohne Schädigungsberücksichtigung. Es hat sich also gezeigt, dass die in Kapitel 6.2 beobachteten Effekte tatsächlich aus der Berücksichtigung der Schädigung selbst resultieren und auch dann entstehen, wenn Lokalisierungs- und Schädigungsbeginn nicht nahe zusammenliegen. Wächst der Abstand zwischen Lokalisierungsbeginn und Schädigungsbeginn, setzen auch die beschriebenen Auswirkungen auf das Materialverhalten entsprechend später ein, d. h. das Materialverhalten bleibt länger duktil.

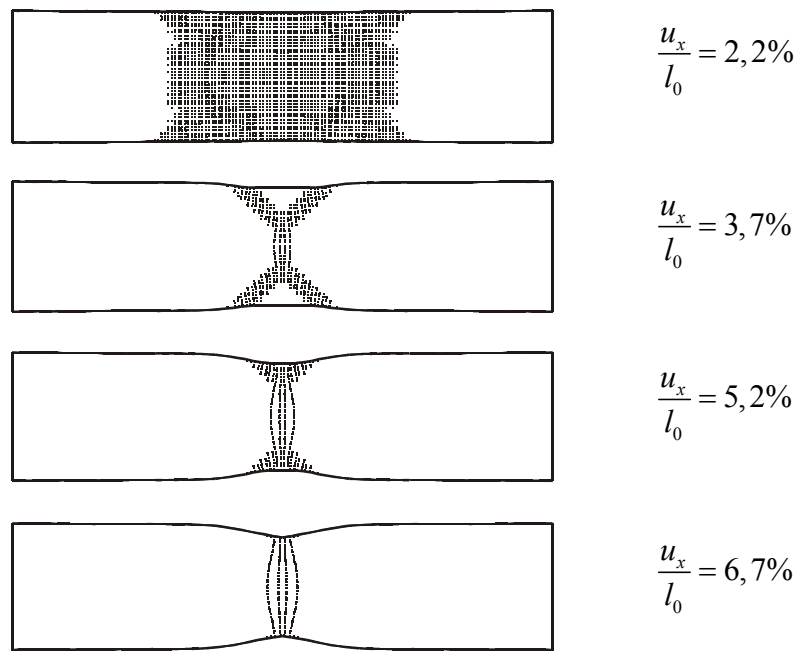


Abbildung 6.19 (a): Entwicklung der pl. Zonen bei einer Schädigungsdehnung von $\gamma_{da} = 0,1$

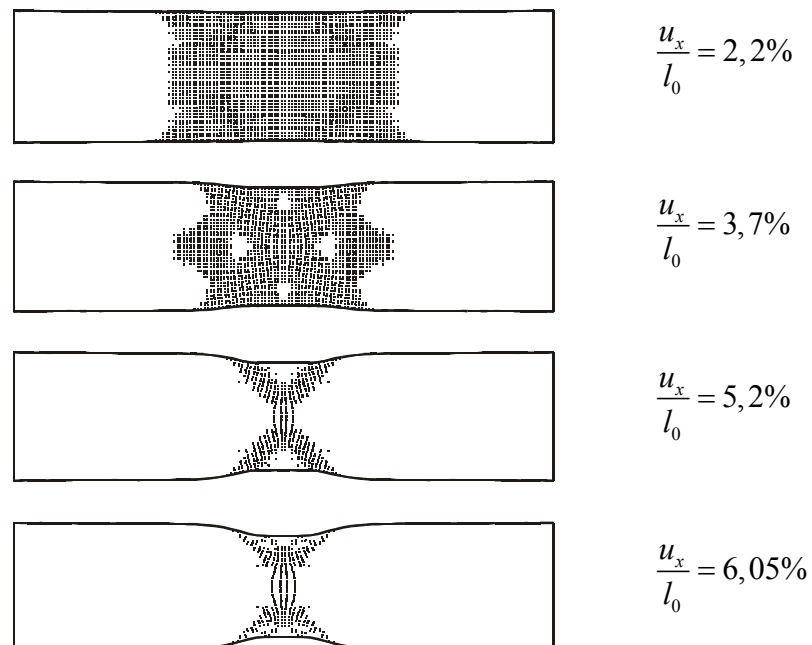


Abbildung 6.19 (b): Entwicklung der pl. Zonen bei einer Schädigungsdehnung von $\gamma_{da} = 0,3$

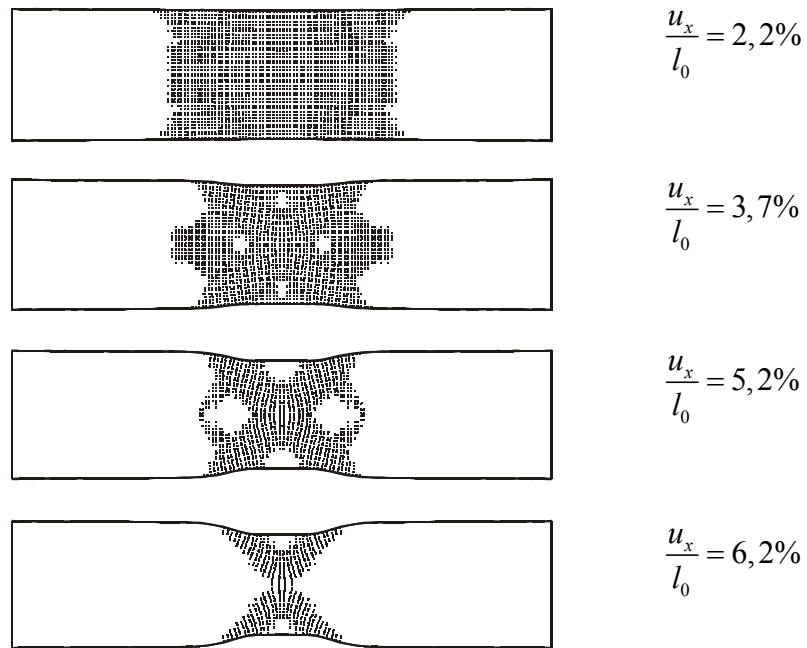


Abbildung 6.19 (c): Entwicklung der pl. Zonen bei einer Schädigungsdehnung von $\gamma_{da} = 0,5$

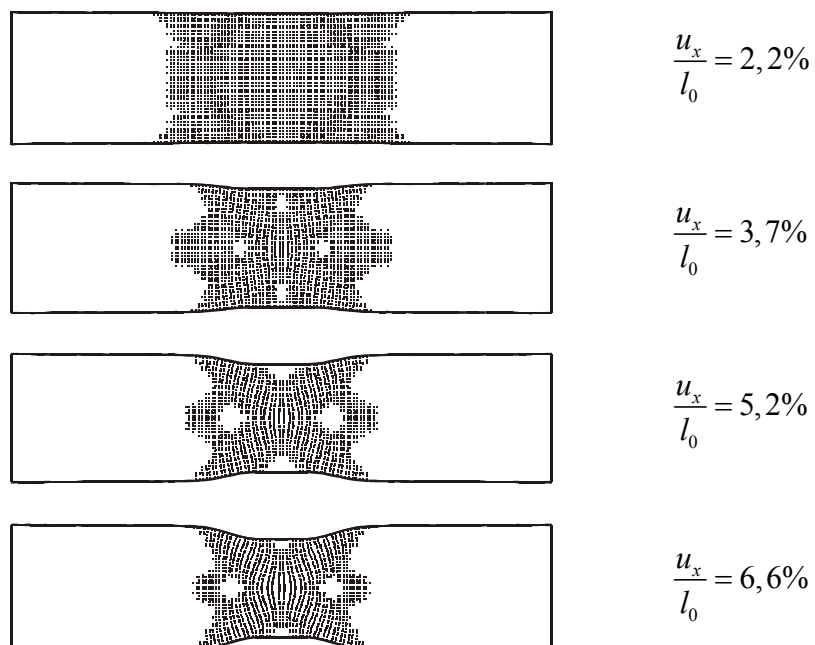


Abbildung 6.19 (d): Entwicklung der pl. Zonen bei einer Schädigungsdehnung von $\gamma_{da} = 0,9$

6.4.2.2 Anisotropie des Schädigungsverhaltens

Neben der Modellierung von Schädigungsbeginn und Schädigungsverlauf spielen die Annahmen über die Berücksichtigung von Materialanisotropien im Verlauf des Schädigungsprozesses eine wichtige Rolle.

Wie in Kapitel 3.2.4 erläutert wurde, beruht das hier verwendete konstitutive Modell auf der Annahme, dass bis zum Erreichen einer kritischen Porosität f_c das Materialverhalten als isotrop betrachtet wird und für $f \geq f_c$ die weitere Entwicklung mikroskopischer Defekte stark richtungsabhängig ist, was wiederum zu anisotropen Schädigungsprozessen führt.

In Abbildung 6.20 werden die Komponenten des Schädigungstensors unter zunehmender Dehnung für den isotropen und für den anisotropen Fall dargestellt. Bis das kritische Porenvolumenverhältnis f_c erreicht wird, stimmen die Ergebnisse für den isotropen und den anisotropen Fall überein, da in diesem Bereich in jedem Fall isotropes Materialverhalten vorausgesetzt wird. Im Bereich $f \geq f_c$ erkennt man drei verschiedene Verläufe. Die beiden äußeren Graphen beschreiben die Komponenten des Schädigungstensors in Belastungsrichtung \mathbf{A}_{11}^{da} bzw. senkrecht zur Belastungsrichtung \mathbf{A}_{33}^{da} unter Berücksichtigung der Anisotropie, während bei dem mittleren Graphen aufgrund der Isotropie die Komponenten des Schädigungstensors in beiden Richtungen weiterhin übereinstimmen. Bei anisotroper Rechnung weicht die Schädigung senkrecht zur Belastungsrichtung bei einer relativen Verschiebung von $u_x/l_0 = 6,6\%$ um 47% von derjenigen in Belastungsrichtung nach unten ab, was deutlich die hier zugrunde gelegte Anisotropie des Materialverhaltens zeigt.

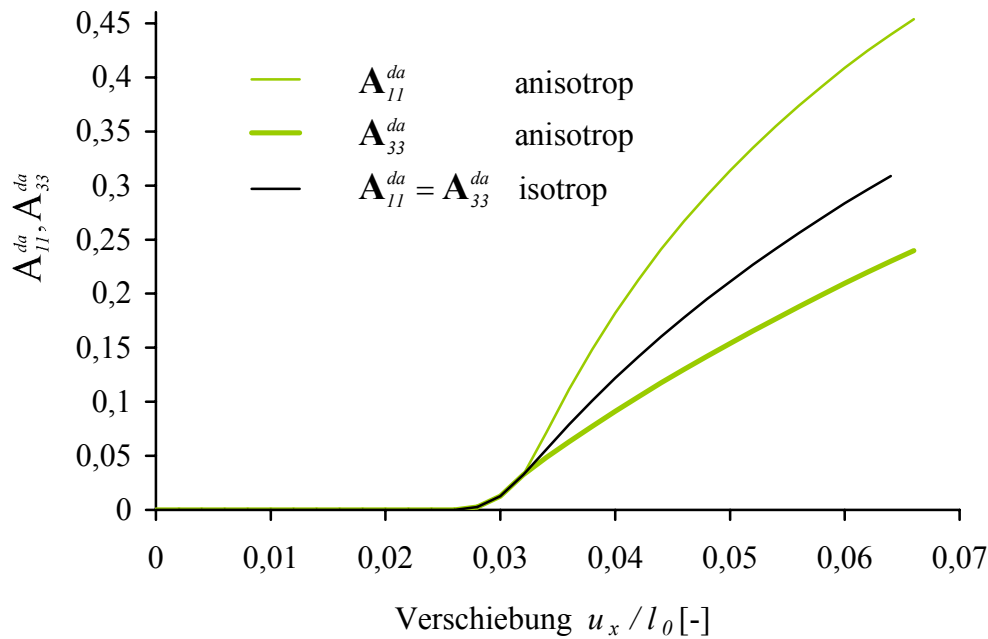


Abbildung 6.20: Einfluss der Anisotropie auf die Komponenten des Schädigungstensors

Der anisotrope Anteil des Materialverhaltens wird im Wesentlichen von den konstitutiven Parametern $\tilde{\beta}$ und β beeinflusst, die in der Schädigungsbedingung (3.31) sowie im Schädigungsgesetz (3.36) eingeführt wurden. In den bisherigen schädigungsabhängigen Berechnungen dieses Kapitels wurde mit den Werten $\beta = \tilde{\beta} = 0,5$ ein assoziiertes Schädigungsgesetz zugrunde gelegt. Nun soll untersucht werden, wie eine Veränderung dieser Werte das vorausgesagte Materialverhalten beeinflusst, wobei zunächst das assoziierte Schädigungsgesetz beibehalten wird, danach folgen numerische Untersuchungen eines nicht-assozierten Schädigungsgesetzes.

Die numerischen Berechnungen haben gezeigt, dass sich mit wachsendem $\beta = \tilde{\beta}$ nur geringfügige Abweichungen in den Last-Verschiebungs-Kurven sowie in den Verformungsfiguren ergeben. Deshalb wird auf die entsprechenden Darstellungen verzichtet.

Betrachtet man die Entwicklung der Porosität f mit wachsender plastischer Verzerrung γ , so liefern zunächst bis zum Erreichen der kritischen Schädigung f_c alle eingesetzten Werte für $0,5 \leq \beta = \tilde{\beta} \leq 1,3$ denselben Porositätsverlauf (Abbildung 6.21). Im Bereich $f > f_c$ bewirkt jedoch zunehmendes $\beta = \tilde{\beta}$ eine extreme Zunahme des Porositätsanstiegs mit wachsender plastischer Verzerrung. Bei einem Wert von $\beta = \tilde{\beta} = 1,3$ steigt die Porosität an der Stelle $f = f_c = 0,1$ sogar so steil an, dass die grafische Darstellung eine vertikale Tangente liefert, d. h. das Wachstum der Poren nimmt an dieser Stelle außerordentlich stark zu. Hierdurch wird deutlich, dass das entwickelte Modell in der Lage ist, die von TVERGAARD et al. [116], HUANG et al. [57] sowie ASHBY et al. [4] vorgestellten Untersuchungen, die ebenfalls eine extreme Porenentwicklung zeigten, phänomenologisch abzubilden.

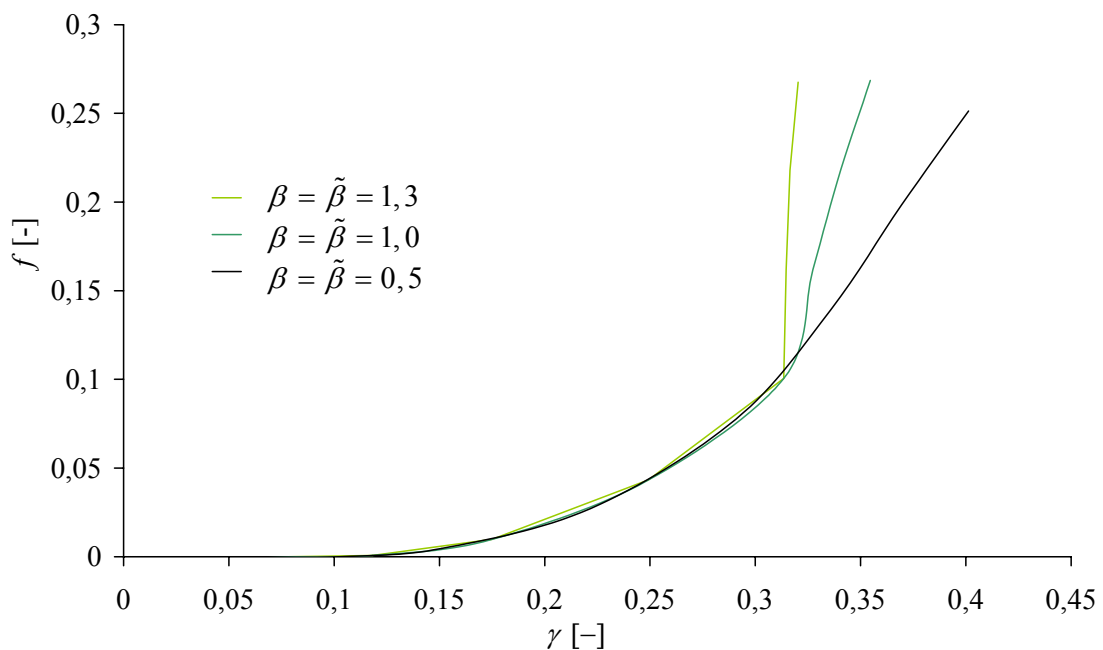


Abbildung 6.21: Einfluss der Parameter β und $\tilde{\beta}$ auf die Entwicklung der Porosität

In Abbildung 6.22 wird der Einfluss der Parameter $\beta = \tilde{\beta}$ auf die Komponenten des Schädigungstensors dargestellt. Bis zum Erreichen der kritischen Porosität f_c stimmen

wieder alle Komponenten überein. Im Bereich $f > f_c$ wächst der Winkel zwischen den Graphen der Schädigung in Zugrichtung und der Schädigung senkrecht zur Zugrichtung mit zunehmendem $\beta = \tilde{\beta}$, d. h. der Endwert von \mathbf{A}_{11}^{da} steigt und derjenige von \mathbf{A}_{33}^{da} fällt, so dass die Endschädigung senkrecht zur Belastungsrichtung relativ zur zugehörigen Endschädigung in Zugrichtung noch sehr viel kleiner wird, wie auch in Tabelle 6.2 verdeutlicht wird. Hier erkennt man auch, dass bei einem Wert von $\beta = \tilde{\beta} = 1,3$ die Schädigung senkrecht zur Belastungsrichtung bei einer relativen Verschiebung von $u_x/l_0 = 6,5\%$ lediglich 15% der Schädigung in Belastungsrichtung beträgt. Dieses entspricht einer extremen Anisotropie des Materialverhaltens und verdeutlicht die Tatsache, dass die Berücksichtigung anisotroper Effekte für eine realistische Abbildung des Materialverhaltens notwendig ist. Dabei sollte anhand von Experimenten überprüft werden, ob eine so ausgeprägte Anisotropie, wie sie hier in der numerischen Berechnung vorausgesagt wird, für bestimmte Materialien einem realistischen Verhalten entspricht.

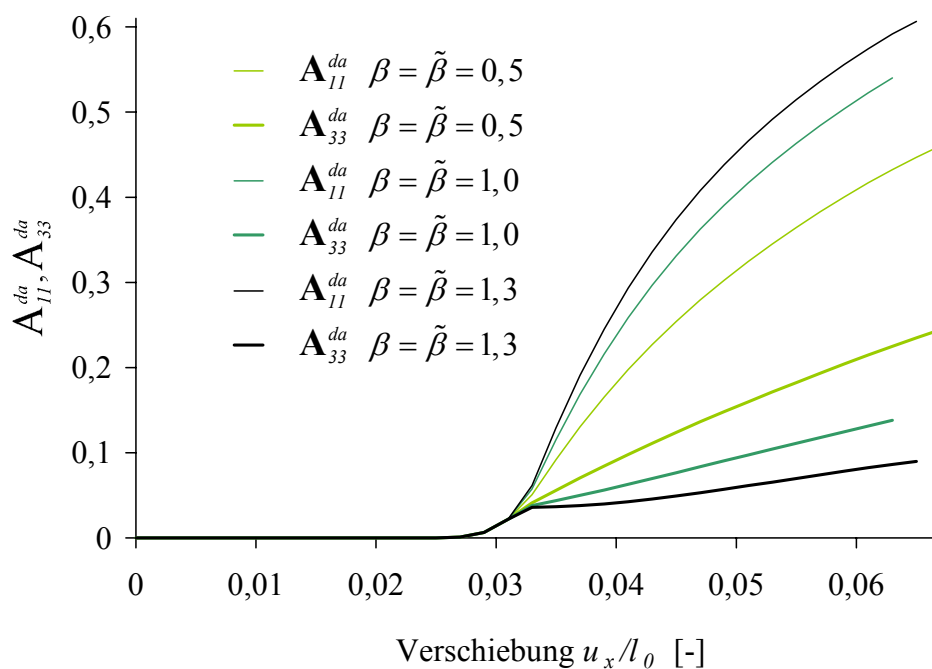


Abbildung 6.22: Einfluss der Parameter β und $\tilde{\beta}$ auf die Komponenten des Schädigungstensors

$\beta = \tilde{\beta}$	$\mathbf{A}_{33}^{da} / \mathbf{A}_{11}^{da}$
0,5	53%
1,0	26%
1,3	15%

Tabelle 6.2: Änderung des Verhältnisses der Komponenten des Schädigungstensors am Ende der Belastung mit zunehmenden Anisotropieparametern bei assoziiertem Schädigungsgesetz

Des Weiteren sollen nun nichtassozierte Schädigungsgesetze betrachtet werden, wobei zunächst der in der Schädigungsbedingung (3.31) auftretende Parameter $\tilde{\beta} = 0,5$ festgehalten wird, während der Parameter β im Schädigungsgesetz (3.36) variiert wird.

Dabei erhält man auch hier nur sehr geringe Abweichungen in den Last-Verschiebungskurven sowie in den Verformungsfiguren, die aus diesem Grund nicht dargestellt sind.

Auch das Ergebnis für die Entwicklung der Porosität f bei wachsender plastischer Verzerrung ist dem bei einem assoziierten Schädigungsgesetz sehr ähnlich. Auch hier erhält man im Bereich $f > f_c$ einen extrem steilen Anstieg bei zunehmendem β , d. h. die Tatsache, dass diese Untersuchung mit einem nichtassozierten Schädigungsgesetz durchgeführt wurde, hat keinen Einfluss auf diesen Effekt.

Die Untersuchung der Komponenten des Schädigungstensors in Abbildung 6.23 liefert ebenfalls qualitativ das gleiche Ergebnis wie das assoziierte Schädigungsgesetz mit einer nur geringfügigen Abweichung der Verhältnisse der Komponenten des Schädigungstensors in Zugrichtung zu denen senkrecht zur Zugrichtung. Dieses wird deutlich, wenn man die entsprechenden Werte in den Tabellen 6.2 und 6.3 vergleicht.

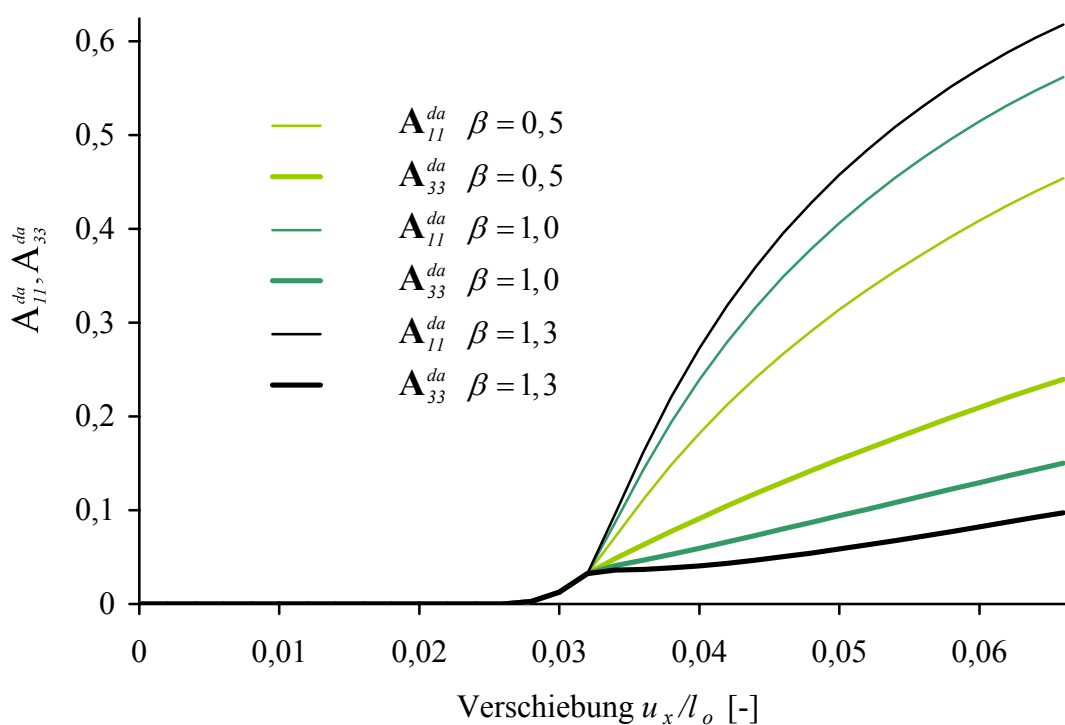


Abbildung 6.23: Komponenten des Schädigungstensors bei nichtassoziertem Schädigungsgesetz und $\tilde{\beta} = 0,5$

β	$\mathbf{A}_{33}^{da} / \mathbf{A}_{11}^{da}$
0,5	53%
1,0	27%
1,3	16%

Tabelle 6.3: Verhältnis der Komponenten des Schädigungstensors bei nichtassoziertem Schädigungsgesetz und $\tilde{\beta} = 0,5$

Verändert man dagegen den Wert des Parameters $\tilde{\beta}$ in der Schädigungsbedingung (3.31) bei konstantem $\beta = 0,5$ im Schädigungsgesetz (3.36), so ergeben die Berechnungen, dass in

keinem der ausgewerteten Diagramme nennenswerte Abweichungen zu erkennen sind, so dass man insgesamt feststellen kann, dass der Parameter β die anisotrope Schädigungsentwicklung entscheidend beeinflusst, während der Parameter $\tilde{\beta}$ einen relativ geringen Einfluss auf die numerische Berechnung der Schädigungskomponenten hat.

6.4.2.3 Einfluss des Entfestigungsmoduls

Als nächstes soll untersucht werden, wie der in Kapitel 6.3.1 eingeführte Entfestigungsmodul H_2^{da} die Veränderung der Materialeigenschaften beeinflusst. Dieser Parameter beschreibt die negative Steigung der Last-Verschiebungs-Kurve im Bereich $f > f_c$, wobei der bisher angenommene Wert $H_2^{da} = -1000$ MPa bereits eine gute Übereinstimmung mit experimentell ermittelten Diagrammen (TVERGAARD & NEEDLEMAN [117], LEMAITRE & DUFAILY [75]) lieferte. Da jedoch nur wenige experimentelle Daten zu einer sehr begrenzten Anzahl an Materialien zur Verfügung stehen, soll hier untersucht werden, wie sich eine Variation des Parameters H_2^{da} auf die numerischen Ergebnisse auswirkt.

In Abbildung 6.24 erkennt man erwartungsgemäß, dass ein betragsmäßig größerer Entfestigungsmodul $H_2^{da} = -4000$ MPa zu einem steileren Abfallen der Last-Verschiebungs-Kurve, aber gleichzeitig auch zu einer geringeren aufbringbaren Verschiebung führt, d. h. zu einem früheren Abbruch der Berechnung, der hier bereits bei einer relativen Verschiebung von $u_x/l_0 = 5,8\%$ eintritt, die damit um 13% niedriger ist als die relative Verschiebung von $u_x/l_0 = 6,7\%$, die das Belastungsende bei dem Bezugswert $H_2^{da} = -1000$ MPa darstellt. Wählt man sogar mit $H_2^{da} = -8000$ MPa einen betragsmäßig noch größeren Wert, so tritt das Ende der Berechnung schon bei einer relativen Verschiebung von $u_x/l_0 = 4,8\%$ ein. Dieser Wert ist um 28% kleiner als die maximale relative Verschiebung bei $H_2^{da} = -1000$ MPa. Das vorausgesagte Materialverhalten wäre damit wesentlich weniger duktil, so dass unter Berücksichtigung der bisher zur Verfügung stehenden experimentellen Untersuchungen, der in den vorangegangenen Berechnungen verwendete Entfestigungsmodul $H_2^{da} = -1000$ MPa

am geeignetsten erscheint, um eine realistische Abbildung des tatsächlichen Materialverhaltens zu gewährleisten.

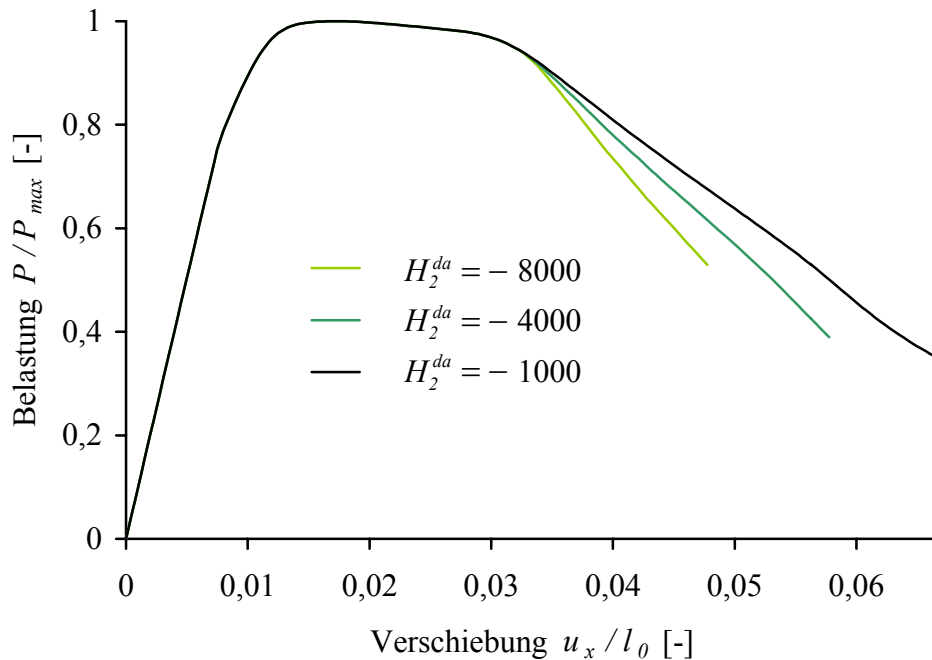


Abbildung 6.24: Einfluss des Entfestigungsmoduls auf das Last-Verschiebungs-Diagramm

6.4.2.4 Vergleich verschiedener Diskretisierungen

Anhand von Auswertungen verschiedener numerischer Berechnungen mit unterschiedlich feinen Diskretisierungen soll die Robustheit des verwendeten Verfahrens auch in Zusammenhang mit der hier verwendeten schädigungsabhängigen Formulierung unter Beweis gestellt werden. Zu diesem Zweck wurden außer den bereits in der schädigungsunabhängigen Formulierung verwendeten Diskretisierungen mit 1600 und 3600 Elementen (Abbildung 6.2) zusätzlich Netze mit 1936 (88×22), 2304 (96×24), 2704 (104×26) und 3136 (112×28) Elementen verwendet. Dabei wurde die Form der einzelnen Elemente sowie die Struktur des Systems unverändert belassen, d. h. es handelt sich nach wie vor um quadratische Elemente, die wie in Abbildung 6.2 derart angeordnet sind, dass die Längenabmessung dem Vierfachen der Höhe der rechteckigen doppelsymmetrischen Struktur entspricht.

In Abbildung 6.25 sind die Verformungsfiguren und die grafische Darstellung der plastischen Zonen (Abbildung 6.26) für numerische Berechnungen unter Berücksichtigung des Schädigungseinflusses mit 1600, 1936, 2304, 2704, 3136 und 3600 Elementen abgebildet. Auch hier erkennt man wiederum, dass das Materialverhalten im Wesentlichen unabhängig von der Diskretisierung ist, da sich sowohl die Verformungsfiguren als auch die Anordnung der plastischen Zonen kaum unterscheiden. Damit ist auch für Berechnungen unter Schädigungsberücksichtigung festzuhalten, dass das hier verwendete Verfahren physikalisch sinnvolle Ergebnisse liefert. Es soll jedoch auch hier nochmals darauf hingewiesen werden, dass eine zu grobe Diskretisierung nicht ausreicht, um alle auftretenden Aspekte des Verformungsverhaltens erfassen und realistisch wiedergeben zu können.

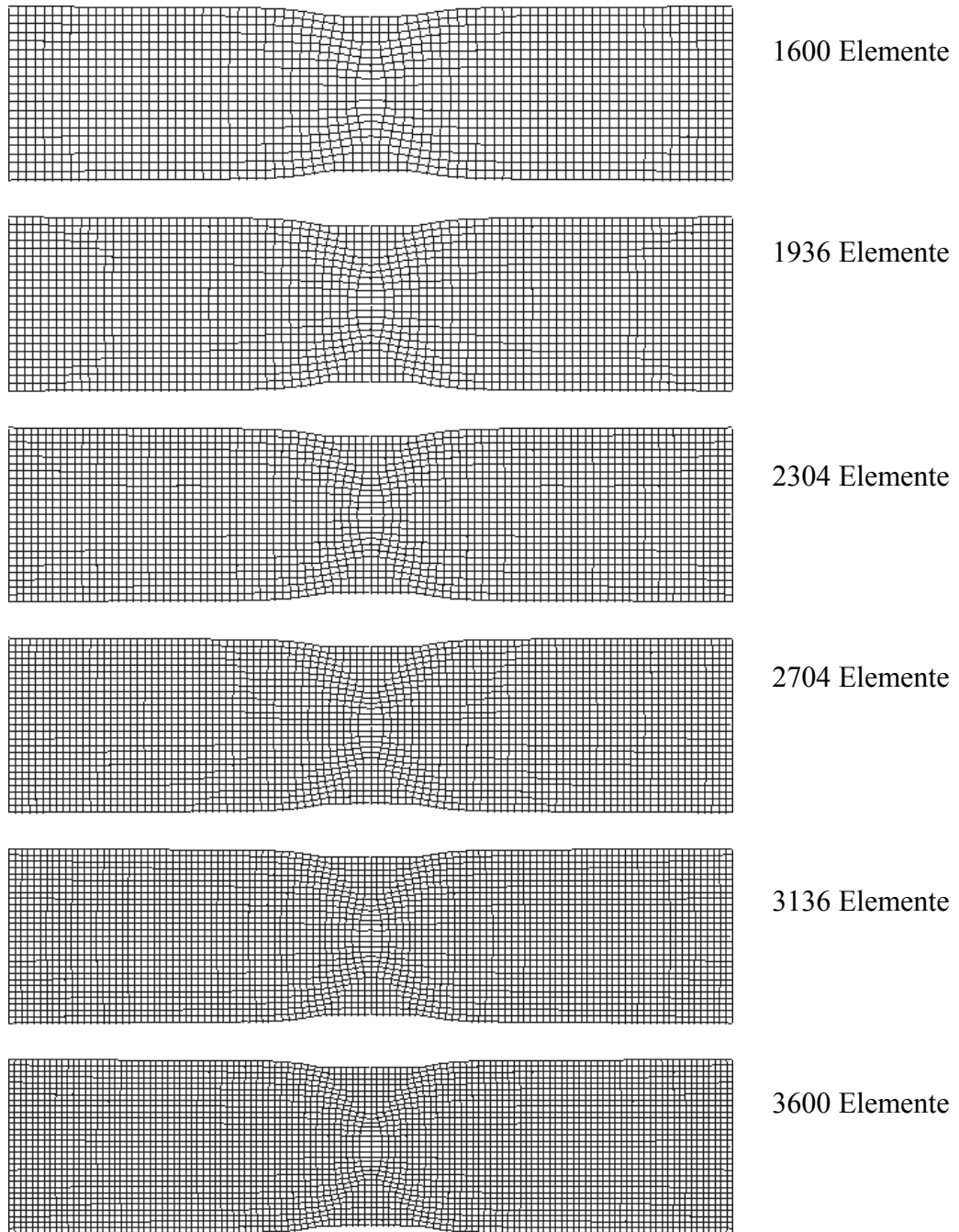


Abbildung 6.25: Verformungsfiguren für verschiedene Diskretisierungen unter Schädigungsberücksichtigung bei einer relativen Verschiebung von $u_x/l_0=6,7\%$

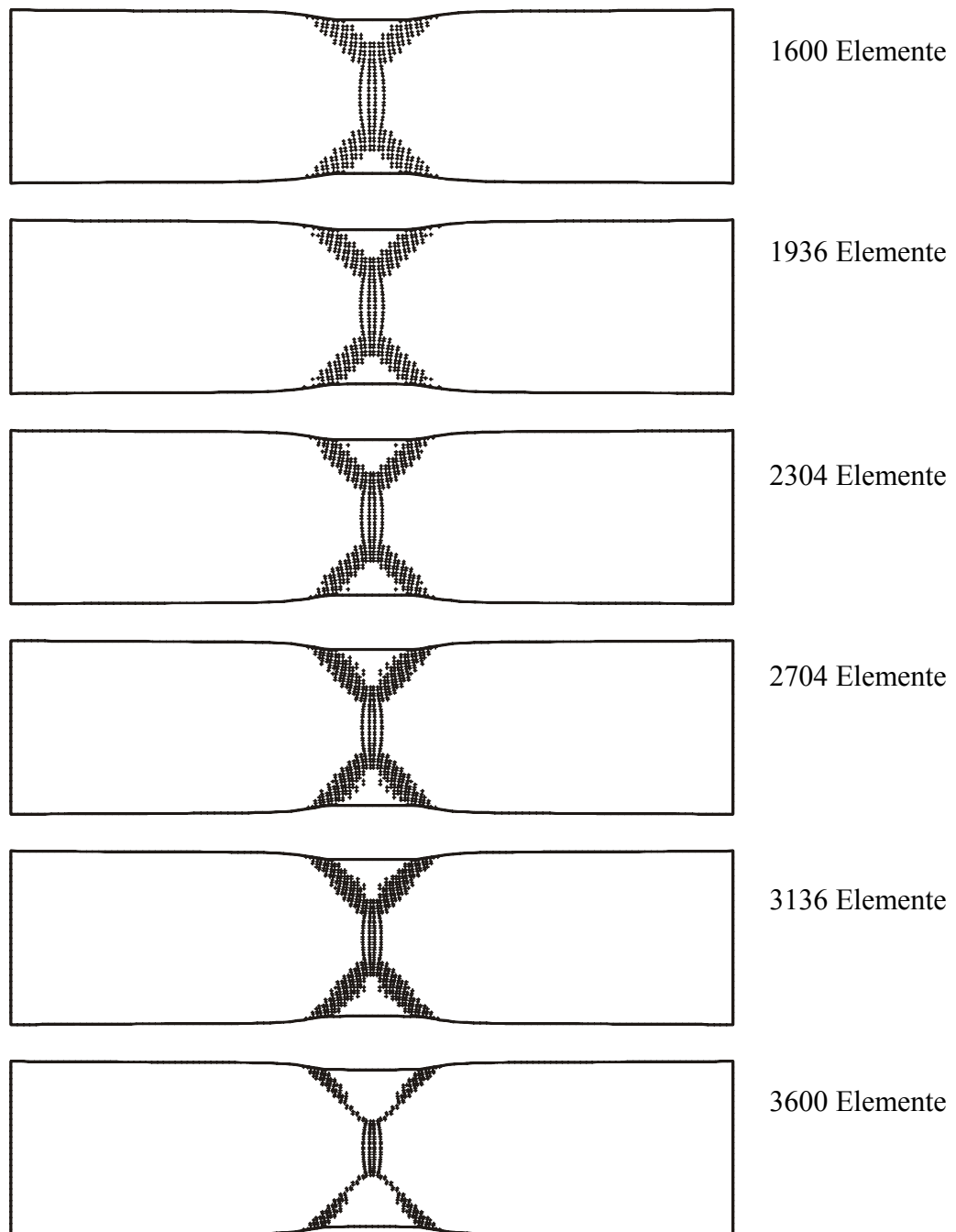


Abbildung 6.26: Verteilung der plastischen Zonen für verschiedene Diskretisierungen unter Schädigungsberücksichtigung bei einer relativen Verschiebung von $u_x/l_0=6,7\%$

7 Zusammenfassung und Ausblick

Eine phänomenologische anisotrope Schädigungstheorie für duktile Metalle und ihre numerische Implementierung wurden untersucht. Das vorgestellte Modell basiert auf einem nichtlinearen Kontinuumsschädigungsmechanischen Ansatz unter Verwendung einer kinematischen Beschreibung des Schädigungsverhaltens. Durch die Zerlegung der Verzerrungsraten in elastische, plastische und schädigungsbezogene Anteile wird eine modulare Struktur erreicht. Die elastischen konstitutiven Gleichungen basieren auf freien Energiefunktionen der fiktiven ungeschädigten Konfigurationen einerseits und der aktuellen geschädigten Konfigurationen andererseits. Eine makroskopische I_1 - J_2 -Fließbedingung beschreibt die plastischen Fließeigenschaften duktiler Metalle, die eine Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand aufweisen, und beschreibt durch die Abhängigkeit von dem zweiten Gradienten des skalaren plastischen Verzerrungsmaßes auch die Nichtlokalität des Materialverhaltens. Das ebenfalls nichtlokal formulierte Schädigungskriterium berücksichtigt sowohl isotrope als auch anisotrope Schädigungseffekte.

Zur numerischen Integration der konstitutiven Gleichungen wird ein Integrationsalgorithmus verwendet, der aus einem inelastischen Prediktorschritt und einem elastischen Korrektorschritt besteht und hier durch die Berücksichtigung der Nichtlokalität des Materialverhaltens in einer elliptischen partiellen Differentialgleichung resultiert. Diese wird mit Hilfe eines Finite-Differenzen-Verfahrens separat gelöst.

Basierend auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit wurde ein verschiebungsgesteuertes nichtlineares Finite-Element-Verfahren verwendet.

Zur Berechnung der Komponenten der logarithmischen Verzerrungstensoren werden Padé-Approximationen zur Entwicklung der entsprechenden Näherungsformeln verwendet. Dabei kann durch Wahl einer höheren Ordnung der Näherung eine beliebige Genauigkeit erreicht werden, so dass auch für den Fall großer Verzerrungen physikalisch sinnvolle Ergebnisse erzielt werden können.

Die numerische Simulation des nichtlokalen Materialverhaltens zeigt, dass es sich bei dem vorgestellten Modell um ein robustes Verfahren handelt, das das Deformations- und

Lokalisierungsverhalten sowie den Einfluss des hydrostatischen Spannungszustands zuverlässig abbildet. Die in der klassischen lokalen Kontinuumsmechanik häufig auftretende Netzabhängigkeit der Ergebnisse kann hier nicht festgestellt werden, da bei dem zugrunde liegenden mathematischen Modell der Verlust der Elliptizität der partiellen Differentialgleichungen, der die unerwünschte Netzabhängigkeit auslöst, nicht auftreten kann.

Die numerische Simulation des nichtlokalen Schädigungsverhaltens verdeutlicht den starken Einfluss der Schädigung auf alle Aspekte des Materialverhaltens. Anhand von Untersuchungen über den Einfluss verschiedener Modellparameter auf das Deformations- und Lokalisierungsverhalten konnte außerdem die Bedeutung der Berücksichtigung der durch Schädigung induzierten Anisotropie des Materialverhaltens hervorgehoben werden.

Die Berücksichtigung nichtlokaler Effekte auf das elastisch-plastische geschädigte Materialverhalten stellt sicher, dass das vorgestellte Modell physikalisch sinnvolle Ergebnisse liefert.

Aus den dargestellten Last-Verschiebungs-Diagrammen bei numerischen Simulationen des Schädigungsverhaltens wird deutlich, dass die Lastaufnahmekapazität gegen Ende des Zugversuchs sehr stark abnimmt. Diese Aussage legt zusammen mit den zugehörigen Verformungsfiguren die Vermutung nahe, dass die Ausbildung eines makroskopischen Risses unmittelbar bevorsteht. Da dieses Phänomen mit dem vorgestellten Modell noch nicht umgesetzt werden kann, wäre es wünschenswert, diesen Aspekt weiter zu untersuchen, um dann auch Aussagen über die Rissentstehung und die weitere Rissausbreitung treffen zu können.

8 Literatur

- [1] E. C. AIFANTIS, „On the microstructural origin of certain inelastic models“, *Journal of Engineering Materials and Technology* **106**, 326-330 (1984).
- [2] E. C. AIFANTIS, „The physics of plastic deformation“, *International Journal of Plasticity* **3**, 211-247 (1988).
- [3] E. C. AIFANTIS, „On the role of gradients in the localization of deformation and fracture“, *International Journal of Engineering Science* **30**, 1279-1299 (1992).
- [4] M. F. ASHBY, F. J. BLUNT, M. BANNISTER, „Flow characteristics of highly constrained metal wires“, *Acta Metallurgica* **37**, 1847-1857 (1989).
- [5] K. J. BATHE, „Finite-Elemente-Methoden“, Springer-Verlag, New York (1990).
- [6] Z. P. BAŽANT, „Why continuum damage mechanics is nonlocal: micromechanics arguments“, *Journal of Engineering Mechanics* **117**, 1070-1087 (1991).
- [7] Z. P. BAŽANT, F. B. LIN, „Non-local yield limit degradation“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **26**, 1805-1823 (1988).
- [8] Z. P. BAŽANT, T. BELYTSCHKO, T.-P. CHANG, „Continuum theory for strain-softening“, *Journal of Engineering Mechanics* **110** (12), 1666-1692 (1984).
- [9] Z. P. BAŽANT, F.-B. LIN, G. PIJAUDIER-CABOT, „Yield limit degradation: nonlocal continuum model with local strain“, in E. Oñate, R. Owen, E. Hinton (Hrsg.), *Computational Plasticity*, Barcelona. Academic Press (1987).
- [10] R. BECKER, A. NEEDLEMAN, O. RICHMOND, V. TVERGAARD, „Void growth and failure in notched bars“, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **36**, 317-351 (1988).
- [11] A. BENALLAL, R. BILLARDON, G. GEYMONAT, „Some mathematical aspects of the damage softening rate problem“, in J. Mazars, Z. P. Bažant (Hrsg.), *Cracking and*

-
- Damage, Strain Localization and Size Effect. Proc. France-US Workshop, Elsevier, London, 247-258 (1989).
- [12] S. BERGER, „Numerische Modellierung des druck- und ratenabhängigen elastisch-plastischen Verhaltens von metallischen Werkstoffen“, Dissertation (2004).
- [13] J. BETTEN, „Net-stress analysis in creep mechanics“, *Ingenieur-Archiv* **52**, 405-419 (1982).
- [14] J. BETTEN, „Damage tensors in continuum mechanics“, *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée* **2**, 13-32 (1983).
- [15] R. DE BORST, „Simulation of strain localisation: A reappraisal of the Cosserat continuum“, *Engineering Computations* **8**, 317-332 (1991).
- [16] R. DE BORST, „A generalisation for J_2 -flow theory for polar continua“, *Computational Methods for Applied Mechanics in Engineering* **103**, 347-362 (1993).
- [17] R. DE BORST, H. B. MÜHLHAUS, „Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **35**, 521-539 (1992).
- [18] R. DE BORST, J. PAMIN, „Some novel developments in finite element procedures for gradient-dependent plasticity“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **39**, 2477-2505 (1996).
- [19] R. DE BORST, J. PAMIN, R. H. J. PEERLINGS, L. J. SLUYS, „On gradient-enhanced damage and plasticity models for failure in quasi-brittle and frictional materials“, *Computational Mechanics* **17**, 130-141 (1995).
- [20] R. DE BORST, L. J. SLUYS, H. B. MÜHLHAUS, J. PAMIN, „Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation“, *Engineering Computations*, **10**, 99-121 (1993).

-
- [21] L. M. BROWN, J. D. EMBURY, „The initiation and growth of voids at second phase particles“, in Proceedings of the 3rd International Conference on Strength of Metals and Alloys, Inst. of Metals, London, 164-169 (1973).
- [22] M. BRÜNIG, „Large strain elastic-plastic theory and nonlinear finite element analysis based on metric transformation tensors“, *Computational Mechanics* **24**, 187-196 (1999).
- [23] M. BRÜNIG, „Numerical simulation of the large elastic-plastic deformation behaviour of hydrostatic stress sensitive solids“, *International Journal of Plasticity* **15**, 1237-1264 (1999).
- [24] M. BRÜNIG, „A framework for large strain elastic-plastic damage mechanics based on metric transformations“, *International Journal of Engineering Science* **39**, 1033-1056 (2001).
- [25] M. BRÜNIG, „Numerical analysis and elastic-plastic deformation behavior of anisotropically damaged solids“, *International Journal of Plasticity* **18**, 1237-1270 (2002).
- [26] M. BRÜNIG, „An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermodynamics“, *International Journal of Plasticity* **19**, 1679-1713 (2003).
- [27] M. BRÜNIG, „Numerical analysis of anisotropic ductile continuum damage“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **192**, 2949-2976 (2003).
- [28] M. BRÜNIG, S. BERGER, H. OBRECHT, „Numerical simulation of the localization behavior of hydrostatic-stress-sensitive metals“, *International Journal of Mechanical Sciences* **42**, 2147-2166 (2000).
- [29] M. BRÜNIG, H. OBRECHT, L. SPEIER, „Finite deformation elastic-plastic analysis based on a plastic predictor method“, in: D. R. J. Owen, E. Oñate (Hrsg.), *Computational Plasticity 4 – Fundamentals and Applications*, Swansea, Pineridge Press, 141-152 (1995).
- [30] M. BRÜNIG, S. RICCI, H. OBRECHT, „Nonlocal large deformation and localization behavior of metals“, *Computers and Structures* **79**, 2063-2074 (2001).

-
- [31] O. T. BRUHNS, P. SCHIESSE, „A continuum model of elastic-plastic materials with anisotropic damage by oriented microvoids“, *European Journal of Mechanics A / Solids* **15**, 367-396 (1996).
- [32] J. L. CHABOCHE, „Continuum damage mechanics: Part I – General concepts“, *Journal of Applied Mechanics* **55**, 59-64 (1988).
- [33] J. L. CHABOCHE, „Continuum damage mechanics: Part II – Damage growth, crack initiation, and crack growth“, *Journal of Applied Mechanics* **55**, 65-72 (1988).
- [34] S. H. CHENG, N. J. HIGHAM, C. S. KENNEY, A. J. LAUB, „Approximating the logarithm of a matrix to specified accuracy“, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **22**, 1112-1125 (2001).
- [35] C. L. CHOW, J. WANG, „An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture“, *Engineering Fracture Mechanics* **27**, 547-558 (1987).
- [36] C. L. CHOW, J. WANG, „A finite element analysis of continuum damage mechanics for ductile fracture“, *International Journal of Fracture* **38**, 83-102 (1988).
- [37] J. P. CORDEBOIS, „Critères d’instabilité plastique et endommagement ductile en grandes deformations“, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, France (1983).
- [38] S. DHAR, R. SETHURAMAN, P. M. DIXIT, „A continuum damage mechanics model for void growth and micro crack initiation“, *Engineering Fracture Mechanics* **53**, 917-928 (1986).
- [39] L. DIECI, A. PAPINI, „Conditioning and Padé approximation of the logarithm of a matrix“, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **21**, 913-930 (2000).
- [40] I. DOGHRI, „Numerical implementation and analysis of a class of metal plasticity models coupled with ductile damage“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **38**, 3403-3431 (1995).
- [41] I. DOGHRI, R. BILLARDON, „Investigation of localization due to damage in elasto-plastic materials“, *Mechanics of Materials* **19**, 129-149 (1995).

-
- [42] A. C. ERINGEN, „Mechanics of micromorphic materials“, in H. Görtler, P. Sorger (Hrsg.), *Applied Mechanics*, 131-138, Springer Verlag (1966).
- [43] A. C. ERINGEN, „Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves“, *International Journal of Engineering Science* **10**, 425-435 (1972).
- [44] A. C. ERINGEN, „On nonlocal plasticity“, *International Journal of Engineering Science* **19**, 1461-1474 (1981).
- [45] A. C. ERINGEN, „Theories of nonlocal plasticity“, *International Journal of Engineering Science* **21**, 741-751 (1983).
- [46] N. A. FLECK, J. W. HUTCHINSON, „A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity“, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **41**, 1825-1857 (1993).
- [47] N. A. FLECK, J. W. HUTCHINSON, „Strain gradient plasticity“, *Advances in Applied Mechanics* **33**, 295-361 (1997).
- [48] N. A. FLECK, G. M. MULLER, M. F. ASHBY, J. W. HUTCHINSON, „Strain gradient plasticity: theory and experiment“, *Acta Metallurgica et Materialia* **42**(2), 475-487 (1994).
- [49] J. FLOREZ-LOPEZ, A. BENALLAL, G. GEYMONAT, R. BILLARDON, „A two-field finite element formulation for elasticity coupled to damage“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **114**, 193-212 (1994).
- [50] J. FLOREZ-LOPEZ, „Frame analysis and continuum damage mechanics“, *European Journal of Mechanics A / Solids* **17**, 269-283 (1998).
- [51] M. G. D. GEERS, W. A. M. BREKELMANS, R. DE BORST, „Viscous regularization of strain localization for damaging materials: Viscous and rate-dependent constitutive models“, in G. Kusters, M. Hendriks (Hrsg.), *DIANA Computational Mechanics '94*, 127-138, Kluwer Academic Publishers (1994).
- [52] S. H. GOODS, L. M. BROWN, „Overview No. 1: The nucleation of cavities by plastic deformation“, *Acta Metallurgica* **27**, 1-15 (1979).

-
- [53] A. L. GURSON, „Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – yield criteria and flow rules for porous ductile media“, *Journal of Engineering Materials and Technology* **99**, 2-15 (1977).
- [54] K. HAYAKAWA, S. MURAKAMI, Y. LIU, „An irreversible thermodynamics theory for elastic-plastic-damage materials“, *European Journal of Mechanics A / Solids* **17**, 13-32 (1998).
- [55] N. J. HIGHAM, „Evaluating Padé approximants of the matrix logarithm“, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **22**, 1126-1135 (2001).
- [56] R. HILL, „Acceleration waves in solids“, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **10**, 1-16 (1962).
- [57] Y. HUANG, J. W. HUTCHINSON, V. TVERGAARD, „Cavitation instabilities in elastic-plastic solids“, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **39**, 223-241 (1991).
- [58] J. W. JU, „On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects“, *International Journal of Solids and Structures* **25**, 803-833 (1989).
- [59] J. W. JU, „Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics“, *Journal of Engineering Mechanics* **116**, 2764-2770 (1990).
- [60] L. M. KACHANOV, „On rupture time under condition of creep“, *Izvestia Akademi Nauk USSR, Otd. Techn. Nauk, Moskwa* **8**, 26-31 (1958).
- [61] M. KACHANOV, „Continuum model of medium with cracks“, *Journal of the Engineering Mechanics Division* **106**, 1039-1051 (1980).
- [62] J. KOPLIK, A. NEEDLEMAN, „Void growth and coalescence in porous plastic solids“, *International Journal of Solids and Structures* **24**, 835-853 (1988).
- [63] D. KRAJČINOVIC, „Constitutive equations for damaging materials“, *Journal of Applied Mechanics* **50**, 355-360 (1983).

-
- [64] D. KRAJČINOVIC, G. U. FONSEKA, „The continuous damage theory of brittle materials“, Part 1: General theory. *Journal of Applied Mechanics* **48**, 809-815 (1981).
- [65] D. KRAJČINOVIC, G. U. FONSEKA, „The continuous damage theory of brittle materials. Part 2: Uniaxial and plane response modes“, *Journal of Applied Mechanics* **48**, 816-824 (1981).
- [66] D. LASRY, T. BELYTSCHKO, „Localization limiters in transient problems“, *International Journal of Solids and Structures* **24**, 581-597 (1988).
- [67] J.-B. LEBLOND, G. PERRIN, „A self-consistent approach to coalescence of cavities in inhomogeneously voided ductile solids“, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **47**, 1823-1841 (1999).
- [68] TH. LEHMANN, „Some remarks on the decomposition of deformations and mechanical work“, *International Journal of Engineering Science* **20**, 281-288 (1982).
- [69] TH. LEHMANN, „Some theoretical considerations and experimental results concerning elastic-plastic stress-strain relations“, *Archive of Applied Mechanics* **52**, 391-403 (1982).
- [70] TH. LEHMANN, „Some thermodynamical considerations on inelastic deformations including damage processes“, *Acta Mechanica* **79**, 1-24 (1989).
- [71] TH. LEHMANN, „Thermodynamical foundations of large inelastic deformations of solid bodies including damage“, *International Journal of Plasticity* **7**, 79-98 (1991).
- [72] J. LEMAITRE, „A continuous damage mechanics model for ductile fracture“, *Journal of Engineering Materials and Technology* **107**, 83-89 (1985).
- [73] J. LEMAITRE, „Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **51**, 31-49 (1985).
- [74] J. LEMAITRE, „Local approach of fracture“, *Engineering Fracture Mechanics* **25**, 523-537 (1986).
- [75] J. LEMAITRE, J. DUFAILY, „Damage measurements“, *Engineering Fracture Mechanics* **28**, 643-661 (1987).

-
- [76] X. LI, S. CESCOTTO, „Finite element method for gradient plasticity at large strains“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **39**, 619-633 (1996).
- [77] X. LI, S. CESCOTTO, „A mixed element method in gradient plasticity for pressure dependent materials and modelling of strain localization“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **144**, 287-305 (1997).
- [78] T. J. LU, C. L. CHOW, „On constitutive equations of inelastic solids with anisotropic damage“, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* **14**, 187-218 (1990).
- [79] V. A. LUBARDA, D. KRAJČINOVIC, „Some fundamental issues in rate theory of damage-elastoplasticity“, *International Journal of Plasticity* **11**, 763-797 (1995).
- [80] C. MIEHE, „A theory of large strain isotropic thermoplasticity based on metric transformation tensors“, *Archive of Applied Mechanics* **66**, 45-64 (1995).
- [81] H. B. MÜHLHAUS, E. C. AIFANTIS, „A variational principle for gradient plasticity“, *International Journal of Solids and Structures* **28**, 845-857 (1991).
- [82] S. MURAKAMI, „Mechanical modeling of material damage“, *Journal of Applied Mechanics* **55**, 280-286 (1988).
- [83] S. MURAKAMI, N. OHNO, „A continuum theory of creep and creep damage“, in: A. R. S. Ponter, D. R. Hayhurst (Hrsg.), *Creep in Structures*, Springer Verlag, Berlin, 422-443 (1981).
- [84] J. C. NAGTEGAAL, D. M. PARKS, J. R. RICE, „On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **4**, 153-177 (1974).
- [85] A. NEEDLEMAN, „Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **67**, 69-85 (1988).
- [86] A. NEEDLEMAN, V. TVERGAARD, „Analyses of plastic flow localization in metals“, *Applied Mechanics Reviews* **45** (3), 3-18 (1992).

-
- [87] S. NEMAT-NASSER, „Rate-independent finite-deformation elastoplasticity: A new explicit constitutive algorithm“, *Mechanics of Materials* **11**, 235-249 (1991).
- [88] M. ORTIZ, Y. LEROY, A. NEEDLEMAN, „A finite element method for localized failure analysis“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **61**, 189-214 (1987).
- [89] J. PAMIN, „Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena“, Ph. D. thesis, Delft University of Technology, Delft. (1994).
- [90] R. H. J. PEERLINGS, R. DE BORST, W. A. M. BREKELMANS, J. H. P. DE VREE, „Gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **39**, 3391-3403 (1996).
- [91] G. PIJAUDIER-CABOT, Z. P. BAŽANT, „Nonlocal damage theory“, *Journal of Engineering Mechanics*, **113**, 1512-1533 (1987).
- [92] G. PIJAUDIER-CABOT, Z. P. BAŽANT, „Comparison of various models for strain-softening“, *Engineering computations* **5**, 141-150 (1988).
- [93] G. PIJAUDIER-CABOT, J. F. DUBÉ, C. L. BORDERIE, L. BODÉ, „Damage models for concrete in transient dynamics“, in Z. P. Bažant, Z. Bittnar, M. Jirásek, J. Mazars (Hrsg.), *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures – Experiment, modelling and computer analysis*, Proceedings of the US-Europe Workshop, 201-215, London. E. & F. N. Spon (1994).
- [94] I. N. RABOTNOV, „On the equations of state for creep“, in: *Progress in Appl. Mech. – The Prager anniversary volume*, MacMillan, New York, 307-315 (1963).
- [95] S. RICCI, „Numerische Simulation des Tragverhaltens von Metallen mit Hilfe gradientenabhängiger Materialmodelle“, *Forschungskolloquium Baustatik-Baupraxis 2000*, Mitteilung 1, 54-55 (2000).
- [96] S. RICCI, M. BRÜNIG, H. OBRECHT, „Simulation des lokalisierten Deformationsverhaltens von Metallen mit Hilfe gradientenabhängiger Materialmodelle“, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **81**, 357-358 (2001).

-
- [97] J. R. RICE, „The localization of plastic deformation“, in: W. T. Koiter et al. (Hrsg.): Proc. 14th Int. Congr. Theoret. Appl. Mech., North-Holland, 207-220 (1976).
- [98] G. ROUSSELIER, „Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture“, *Nuclear Engineering and Design* **105**, 97-111 (1987).
- [99] J. W. RUDNICKI, J. R. RICE, „Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials“, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **23**, 371-394 (1975).
- [100] H. L. SCHREYER, Z. CHEN, „One-dimensional softening with localization“, *Journal of Applied Mechanics* **53**, 791-797 (1986).
- [101] J. Y. SHU, W. E. KING, N. A. FLECK, „Finite elements for materials with strain gradient effects“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **44**, 373-391 (1999).
- [102] J. C. SIMO, „Strain softening and dissipation: a unification of approaches“, in J. Mazars, Z. P. Bažant (Hrsg.), *Cracking and Damage, Strain Localization and Size Effect, Proceedings of the France-US Workshop*, 440-461, London, Elsevier Applied Sciences (1989).
- [103] J. C. SIMO, J. W. JU, „Strain- and stress-based continuum damage models – I. Formulation“, *International Journal of Solids and Structures* **23**, 821-840 (1987).
- [104] J. C. SIMO, J. W. JU, „Strain- and stress-based continuum damage models – II. Computational aspects“, *International Journal of Solids and Structures* **23**, 841-869 (1987).
- [105] L. J. SLUYS, „Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids“, Ph. D. thesis, Delft University of Technology, The Netherlands (1992).
- [106] L. J. SLUYS, R. DE BORST, H. B. MÜHLHAUS, „Wave propagation, localization and dispersion in a gradient dependent medium“, *International Journal of Solids and Structures* **30**, 1153-1171 (1993).

-
- [107] E. A. DE SOUZA NETO, D. PERIĆ, „A computational framework for a class of fully coupled models for elastoplastic damage at finite strains with reference to the linearization aspects“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **130**, 179-193 (1996).
- [108] E. A. DE SOUZA NETO, D. PERIĆ, D. R. J. OWEN, „A model for elastoplastic damage at finite strains: Algorithmic issues and applications“, *Engineering Computations* **11**, 257-281 (1994).
- [109] W. A. SPITZIG, O. RICHMOND, „The effect of pressure on the flow stress of metals“, *Acta Metallurgica* **32**, 457-463 (1984).
- [110] W. A. SPITZIG, R. E. SMELSER, O. RICHMOND, „The evolution of damage and fracture in iron compacts with various initial porosities“, *Acta Metallurgica* **36**, 1201-1211 (1988).
- [111] W. A. SPITZIG, R. J. SOBER, O. RICHMOND, „Pressure dependence of yielding and associated volume expansion in tempered martensite“, *Acta Metallurgica* **23**, 885-893 (1975).
- [112] W. A. SPITZIG, R. J. SOBER, O. RICHMOND, „The effect of hydrostatic pressure on the deformation behaviour of maraging and HY-80 steels and its implications for plasticity theory“, *Metallurgical Transactions* **7A**, 1703-1710 (1976).
- [113] L. STRÖMBERG, M. RISTINMAA, „FE-formulation of a nonlocal plasticity theory“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **136**, 127-144 (1996).
- [114] N. TRIANTAFYLLIDIS, E. C. AIFANTIS, „A gradient approach to localization of deformation. I. hyperelastic materials“, *Journal of Elasticity*, **16**, 225-237 (1986).
- [115] V. TVERGAARD, „Material failure by void growth to coalescence“, *Advances in Applied Mechanics* **27**, 83-151 (1990).
- [116] V. TVERGAARD, Y. HUANG, J. W. HUTCHINSON, „Cavitation instabilities in a power hardening elastic-plastic solid“, *European Journal of Mechanics A / Solids* **11**, 215-231 (1992).

-
- [117] V. TVERGAARD, A. NEEDLEMAN, „Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar“, *Acta Metallurgica* **32**, 157-169 (1984).
- [118] G. Z. VOYIADJIS, B. DELIKTAS, „A coupled anisotropic damage model for the inelastic response of composite materials“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **183**, 159-199 (2000).
- [119] G. Z. VOYIADJIS, P. I. KATTAN, „A plasticity-damage theory for large deformation of solids – I. Theoretical formulation“, *International Journal of Engineering Science* **30**, 1089-1108 (1992).
- [120] G. Z. VOYIADJIS, T. PARK, „The kinematics of damage for finite-strain elasto-plastic solids“, *International Journal of Engineering Science* **37**, 803-830 (1999).
- [121] J. H. P. DE VREE, W. A. M. BREKELMANS, M. A. J. VAN GILS, „Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics“, *Computers and Structures* **55**, 581-588 (1995).
- [122] O. C. ZIENKIEWICZ, „Methode der finiten Elemente“, Carl-Hanser-Verlag, Leipzig (1983).
- [123] H. M. ZBIB, E. C. AIFANTIS, „On the localization and postlocalization behavior of plastic deformation. I. On the initiation of shear bands“, *Res Mechanica* **23**, 261-277 (1988).
- [124] H. M. ZBIB, E. C. AIFANTIS, „On the localization and postlocalization behavior of plastic deformation. II. On the evolution and thickness of shear bands“, *Res Mechanica* **23**, 279-292 (1988).
- [125] H. M. ZBIB, E. C. AIFANTIS, „On the localization and postlocalization behavior of plastic deformation. III. On the structure and velocity of the Portevin-Le Chatelier bands“, *Res Mechanica* **23**, 293-305 (1988).

Lebenslauf

Name: Sabine Ricci, geb. Schubert

Geburtsdatum: 23. Januar 1972

Geburtsort: Dortmund

Staatsangehörigkeit: deutsch

Familienstand: verheiratet seit 23. August 1995, eine Tochter

Wohnort: Ostkamp 70
59174 Kamen

Schulbildung:

Aug. 1978 bis Juli 1982 Hohwart-Grundschule in Dortmund

Aug. 1982 bis Juli 1991: Käthe-Kollwitz-Gymnasium in Dortmund

Abschluss: Abitur

Studium:

Okt. 1991 bis Sept. 1996: Studium der Mathematik (Diplom) an der Universität Dortmund; Nebenfach: Baumechanik-Statik

Abschluss: Diplom-Mathematikerin

Okt. 1993 bis Dez. 1995: studentische Hilfskraft am Lehrstuhl für Baumechanik-Statik an der Universität Dortmund

Berufstätigkeit:

seit Nov. 1996: wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehrstuhl für Baumechanik-Statik an der Universität Dortmund

