Werner BLUM, Rudolf vom HOFE, Alexander JORDAN, Michael KLEINE, Reinhard PEKRUN (Kassel/Regensburg/München)

Grundvorstellungen als empirische Kategorie für quantitative Studien

1. Grundvorstellungen

Grundvorstellungen von mathematischen Inhalten (v. Hofe 1995) sind ein didaktisches Konstrukt im Spannungsfeld zwischen Realität, Mathematik und Individuum. Sie erfassen den Kern mathematischer Inhalte und geben Antwort auf die Frage nach der *Bedeutung* der Inhalte. Ein Beispiel ist der Prozentbegriff: Wir unterscheiden

– die von-Hundert-Vorstellung („… von je 100 Einheiten …“ oder „Wären es 100 Einheiten …“)

– die Hundertstel-(Operator-)Vorstellung („p % von“ als „$\frac{p}{100}$ mal“)

– die Bedarfseinheiten- (quasikardinale) Vorstellung („100 % entspricht dem Ganzen …“)

Grundvorstellungen sind insbesondere bei außer- und innermathematischen *Modellierungs- und Übersetzungsprozessen* unentbehrlich. So braucht man z. B. in der PISA-Aufgabe „*Sparen*“ (Abb. 1) u. a. eine Prozent-Vorstellung, zusammen mit einer Additions-Vorstellung.

> *Karina hat 1 000 € in ihrem Ferienjob verdient. Ihre Mutter empfiehlt ihr, das Geld zunächst bei einer Bank für 2 Jahre festzulegen (Zinseszins!).*
> *Dafür hat sie zwei Angebote:*
> *a) „Plus“-Sparen: Im ersten Jahr 3 % Zinsen, im zweiten Jahr dann 5 % Zinsen.*
> *b) „Extra“-Sparen: Im ersten und zweiten Jahr jeweils 4 % Zinsen.*
> *Karina meint: „Beide Angebote sind gleich gut.“ Was meinst du dazu? Begründe deine Antwort!*
>
> Abb. 1

Die folgende Schülerlösung zu „*Sparen*“ (Abb. 2) lässt darauf schließen, dass die quasikardinale Vorstellung aktiviert worden ist:

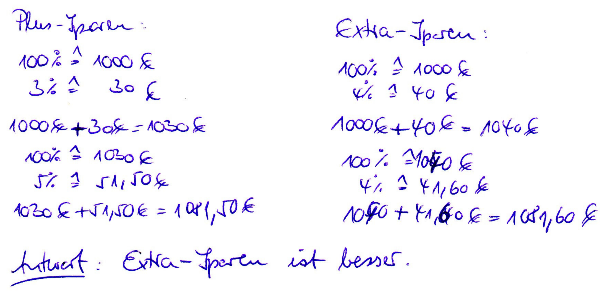

Abb. 2

Die Unterscheidung verschiedener Grundvorstellungen wie vorhin beim Prozentbegriff entspricht einer *normativen* Sichtweise. Analysiert man wie eben, welche Vorstellungen Schüler beim Aufgabenlösen tatsächlich aktivieren, nimmt man eine *deskriptive* Sichtweise ein. Das ist typisch für *qualitative* Studien. Daneben gibt es eine dritte Art der Verwendung von Grundvorstellungen, die in diesem Beitrag im Mittelpunkt steht: Grundvorstellungen als Aufgabenkategorie in *quantitativen* Studien.

2. Grundvorstellungsintensität als Aufgabenkategorie

Wie in Blum et al. (2004) genauer ausgeführt ist, unterscheiden wir drei *Arten* von Grundvorstellungen:

– *elementare* Vorstellungen, die noch nahe an Handlungen liegen, wie z. B. bei der Addition natürlicher Zahlen,
– *erweiterte* Vorstellungen, die bereits von den Handlungen abgelöst sind, wie z. B. beim Funktionsbegriff,
– *komplexe* Vorstellungen, die mehrfache Abstraktionen beinhalten, wie z. B. beim Ableitungsbegriff.

Auf dieser Grundlage haben wir eine Variable *„Grundvorstellungsintensität“* definiert, die messen soll, wie viele und welche Grundvorstellungen zur Lösung einer vorgegebenen Aufgabe aktiviert werden müssen. Wir unterscheiden vier Ausprägungen dieser Variablen (genauer siehe wieder Blum et al. 2004):

– *Niveau 0:* Zur Aufgabenlösung wird *keine* Vorstellung benötigt, die Aufgabe ist rein technischer Natur (im Sinne der Typisierung in Neubrand et al. 2001);
– *Niveau 1:* Es ist *eine elementare* Vorstellung nötig, wie z. B. bei den Grundaufgaben der Prozentrechnung;
– *Niveau 2:* Es ist *eine erweiterte* Vorstellung oder eine *Kombination* zweier verschiedener elementarer Vorstellungen nötig, wie z. B. bei „Sparen“;
– *Niveau 3:* Es ist *mehr* als dies nötig, wie z. B. bei der bekannten Aufgabe „Äpfel c“ aus PISA-2000.

Wir haben dieses Instrument sowohl bei der PISA-Studie als auch beim Projekt PALMA angewandt. PALMA (Leiter: R. Pekrun/ R. v. Hofe/ W. Blum) ist eine Längsschnittstudie, bei der die Entwicklung der mathematischen Leistungen sowie der mathematikbezogenen Motivationen und Emotionen einer repräsentativen Kohorte bayrischer Schüler über sechs Jahre verfolgt werden, von Klasse 5 bis Klasse 10 (genaueres siehe Pekrun et al. 2004 und v. Hofe et al. 2005). Wir haben dieses Instrument in folgenden Schritten entwickelt:

– Aufstellung eines „Atlas“ der für die Sek. I wesentlichen Grundvorstellungen,
– Stoffdidaktische Analyse aller bei PISA und PALMA eingesetzten Aufgaben,
– Qualitative Validierung durch Interviews mit Schülern (N = 160),
– Quantitative Validierung durch zwei querschnittliche Untersuchungen in der ersten Phase von PALMA ($N_1 = 780$, $N_2 = 1613$).

Über PALMA-Ergebnisse werden wir an anderer Stelle berichten. In diesem Beitrag müssen wir uns auf eine geraffte Wiedergabe der in Blum et al. (2004) enthaltenen Ergebnisse zu PISA-2000 beschränken.

3. Grundvorstellungsintensität als Schwierigkeitsindikator bei PISA 2000

Die folgende Tabelle 1 zeigt die Verteilung der 95 nicht-technischen Items aus PISA-2000 auf die beiden Typen des rechnerischen bzw. begrifflichen Arbeitens, weiter unterschieden nach außer- oder innermathematischem Kontext, und auf die drei relevanten Niveaus ihrer Grundvorstellungsintensität.

	außermathematisch				innermathematisch			
GVIntensität	*1*	*2*	*3*	Σ	*1*	*2*	*3*	Σ
rechnerische Items	19	19	2	40	8	1	0	9
begriffliche Items	5	16	5	26	10	9	1	20

Tabelle 1

Wir haben dann für alle vier Zellen Regressionsanalysen mit der Grundvorstellungsintensität als unabhängiger und der Aufgabenschwierigkeit als abhängiger Variablen durchgeführt, wobei die Anzahl der rechnerischen innermathematischen Items zu gering war, so dass nur drei Ergebnisse berichtet werden können, siehe Tabelle 2:

	außermathematisch R^2	α	innermathematisch R^2	α
rechnerische Items	.457	.000	–	–
begriffliche Items	.353	.001	.255	.013

Tabelle 2

Es zeigt sich, dass diese Variable insbesondere bei den außermathematischen Items relevant ist und dort bei den rechnerischen Items immerhin 45.7 % der Varianz aufklärt. Wenn man noch die bei Neubrand et al. (2002) verwendete Variable „curriculare Wissensstufe“ hinzunimmt, steigt diese Varianzaufklärung auf 50.2 %.

Rückblickend kann festgehalten werden, dass die in stoffdidaktischen Analysen hervorgehobene Rolle von Grundvorstellungen offenbar auch eine quantitative empirische Entsprechung hat. Die Ergebnisse von PISA wie von PALMA deuten darauf hin, dass gerade in diesem Bereich besondere Defizite bei deutschen Schülern bestehen. Dies sollte Konsequenzen für Curricula und Unterricht haben.

Literatur

Blum, W. et al. (2004). Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Element bei PISA . In: Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland – Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000 (Hrsg.: M. Neubrand). Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften, S. 145-157

Hofe, R. v. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg: Spektrum

Hofe, R. v. et al. (2005). Zur Entwicklung mathematischer Grundbildung in der Sekundarstufe I – theoretische, empirische und diagnostische Aspekte. In: Diagnostik von Mathematikleistungen (Hrsg.: M. Hasselhorn/ H. Marx/ W.Schneider). Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik, Tests und Trends, Neue Folge Band 4. Göttingen: Hogrefe, S. 263-292

Neubrand, M. et al. (2001). Grundlagen der Ergänzung des internationalen PISA-Mathematik-Tests in der deutschen Zusatzerhebung. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 33 (2001), H. 2, S. 45-59.

Neubrand, M. et al. (2002). Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung. In: Unterrichtswissenschaft 30 (2), S. 100-119.

Pekrun, R. et al. (2004). Emotionen und Leistung im Fach Mathematik: Ziele und erste Befunde aus dem „Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik” (PALMA). In: Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung (Hrsg.: J. Doll/ M. Prenzel). Münster: Waxmann, S. 345-363