Stephan ROSEBROCK, Karlsruhe

Abstraktion beim Mathematiklernen am Beispiel der Algebra

Im Folgenden geht es um Zusammenhänge von Geometrie und Algebra in Schule und Hochschule. In beiden Institutionen lässt sich die Chance nutzen, Algebra und Geometrie gemeinsam zu behandeln. Dabei kann die Algebra als Instrument zur Beschreibung geometrischer Phänomene interpretiert werden und nicht als abstraktes Werkzeug an sich.

1. Gruppentheorie an Hochschulen und Universität

Gruppentheorie lässt sich, sei es in Büchern oder Vorlesungen, sehr knapp und kompakt darstellen. Die axiomatische Definition einer Gruppe ist schnell hingeschrieben. Als Beispiele finden sich die ganzen Zahlen mit der gewöhnlichen Addition und etwa die invertierbaren $n \times n$ Matrizen. Dann lässt sich schon Gruppentheorie betreiben: Die Eindeutigkeit des neutralen Elements und der inversen Elemente, Kürzungsregeln in Gruppen, etc.

Es gibt sogar so etwas, wie einen kanonischen Aufbau: Axiome, Folgerungen, Untergruppen, zyklische Gruppen, Erzeugende, Homomorphismen usw. Die meisten Bücher und Vorlesungen zur Gruppentheorie sind so ähnlich aufgebaut.

Gruppentheorie scheint insgesamt leichter darzustellen, als andere Gebiete der Mathematik. Die Objekte, die Gruppen, sind viel leichter zu definieren, als etwa topologische Räume in der Topologie oder gar die euklidische Geometrie mit ihren etwa 30 Axiomen. Trotzdem klagen Gruppentheorieanfänger immer wieder über massive Probleme beim Lernen von Gruppentheorie. Das sollte nicht verwundern, muss doch im Kopf wesentlich mehr passieren als nur das Lesen der Axiome um Verständnis zu erzielen. Typische Stolpersteine sind:

- Die Standardbeispiele sind ungeeignet. $(\mathbb{Z}, +)$ oder auch $\mathbb{Z}_n$ mit der Addition modulo n sind Spezialfälle, weil diese Gruppen kommutativ sind. Matrizen sind abstrakt, Vorstellungen zu Matrizen sind bei Gruppentheorieanfängern noch nicht genügend gefestigt.

- Durch die axiomatische Vorgehensweise fehlen konkrete Objekte. *Stell' dir vor du hast eine Menge mit einer Verknüpfung, die das* *und das erfüllt....* ist ein höherer Anspruch an den Studierenden, als das Arbeiten mit konkreten Objekten, wie etwa Funktionen, die zu differenzieren sind. Diese sind konkret gegeben und damit weniger abstrakt.

- Studierende haben i.A. nur abelsches Rechnen als Vorerfahrung.
- Algebraanfänger kennen als Verknüpfung nur die Grundrechenarten aus der Schule.

Mathematiklernen heißt im Wesentlichen sinnvolle Vorstellungen aufzubauen. Das geht nur durch Anbinden des Neuen an Bekanntes in der Vorstellung. Gruppenaxiome lassen sich aber mit der oben beschriebenen Vorgehensweise nirgendwo anbinden.

Ein naheliegender Zugang zur Gruppentheorie bietet sich über Symmetrien: D_3 sei die Menge aller längenerhaltender Abbildungen der Ebene auf sich, die ein gegebenes reguläres Dreieck auf sich abbilden. Außer der Identität gibt es die Drehungen d_{120} und d_{240} um 120 und 240 Grad um den Mittelpunkt des Dreiecks und Spiegelungen s_a, s_b und s_c an den Spiegelachsen a, b und c des Dreiecks. Es gilt also:

$$D_3 = \{id, d_{120}, d_{240}, s_a, s_b, s_c\}$$

Mit der Operation der Hintereinanderausführung lässt sich in D_3 rechnen wie in den ganzen Zahlen bzgl. Addition:

D_3	$(\mathbb{Z}, +)$
Die Hintereinanderausführung zweier Abbildungen aus D_3 ist wieder eine Abbildung aus D_3	die Summe zweier ganzer Zahlen ist wieder eine ganze Zahl
id verknüpft mit einem $g \in D_3$ ergibt $g \in D_3$	0 addiert zu einem $n \in \mathbb{Z}$ ergibt $n \in \mathbb{Z}$
zu jeder Abb. aus D_3 gibt es eine, die die Abb. wieder rückgängig macht	zu jeder Zahl aus $\mathbb{Z}$ gibt es eine, so dass sich in Summe 0 ergibt

Man stellt fest, dass $(\mathbb{N}, +)$ diese Bedingungen nicht alle erfüllt. Natürlich kann man statt einem regulären Dreieck jede andere Figur nehmen und erhält jedes Mal eine Gruppe.

Studierenden sind Isometrien bekannt. Der Stoff kann damit an Bekanntes angeknüpft werden. Man beginnt mit Konkretem und geht später erst zur Definition einer Gruppe über. Das vermeidet den fruchtlosen Versuch des abstrakten Vorstellens einer Menge mit Verknüpfung.

2. Geometrie und Algebra in der Schule

Der Bildungsplan Realschule Baden-Württemberg 2004 fordert z.B.:
Die Schülerinnen und Schüler können geometrische Zusammenhänge mit algebraischen Methoden untersuchen

Es bieten sich vielfältige Möglichkeiten zur Untersuchung dieser Zusammenhänge in der Schule. Dabei geht es nicht darum, in der Schule Gruppentheorie zu behandeln, sondern mit algebraischen Methoden geometrische Phänomene zu beschreiben. Zum Beispiel lassen sich so die Symmetrien einer Figur beschreiben. Man kann die Schüler einer siebten oder achten Klasse bitten, alle Spiegelachsen in eine Figur (hier ein Quadrat) zu zeichnen. Diese Spiegelachsen zerlegen eine Figur in lauter kongruente Teile. Ein beliebiges davon bezeichne man mit f und seine Spiegelungen im Rand mit a und b (siehe Abbildung 1).

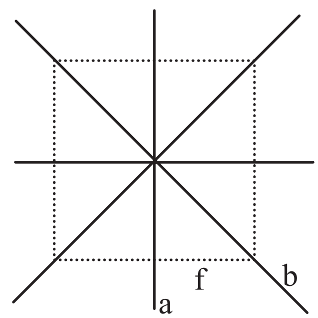

Abbildung 1: Quadrat mit Spiegelachsen

a und b *erzeugen* das Quadrat aus f in folgendem Sinn: Spiegelt man f an a (oder an b), so erhält man $a(f)$ (oder $b(f)$). Spiegelt man $b(f)$ an a, so erhält man $ab(f)$, usw. Insgesamt erhält man Abbildung 2.

Nach Beschriftung der Figur kann man mit der Verknüpfung der Hintereinanderausführung rechnen.

Rechnend sieht man hier:

- ab ist eine Drehung um 90° im Uhrzeigersinn,
- $(ab)^2$ ist also eine Drehung um 180°,
- $(ab)^4$ die Identität,
- $ab(f) \neq ba(f)$ (nicht kommutativ!),
- $abab(f) = baba(f)$.

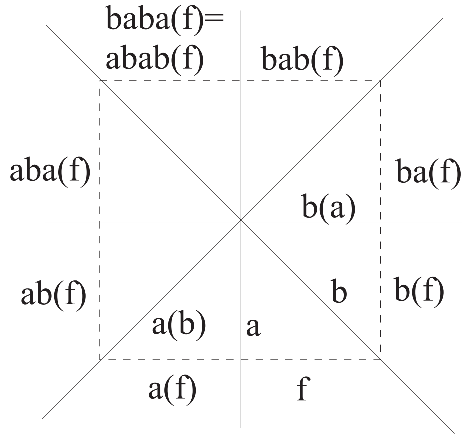

Abbildung 2: beschriftetes Quadrat

Die Schüler erfahren hier, dass sich auch mit Anderem rechnen lässt, als nur mit Zahlen. Verknüpfungen können auch nicht kommutativ sein und das erst macht diese Eigenschaft bei den ganzen Zahlen zu etwas nicht Trivialem. Nebenbei wird das geometrische Vorstellungsvermögen geschult.

Analoges lässt sich mit beliebigen anderen Figuren entwickeln (außer dem Kreis). Es bieten sich beliebige reguläre n-Ecke aber auch Bandornamente oder Zerlegungen der Ebene an.

Es gibt noch wesentlich mehr Übergänge von Geometrie zu Algebra, die lohnend für die Schule sind. Z.B. kann man Fundamentalbereiche erweitert behandeln wie in [1], über das drehen von regulären n-Ecken in Restklassenringen rechnen wie in [4], mit Knoten rechnen oder algebraisch Zerlegungen der Ebene untersuchen.

Literatur

[1] Stephan Rosebrock. *Symmetrien – einmal anders herum*, Beiträge zum Mathematikunterricht, div Verlag Franzbecker (2004), S. 477 – 480.

[2] Stephan Rosebrock. *Aus Spiegelachsen Figuren bauen*, Mathematikinformation 42, (2005); S. 59 – 65.

[3] Stephan Rosebrock. *Geometrische Gruppentheorie – Ein Einstieg mit dem Computer*; vieweg-Verlag (2004); 207 Seiten.

[4] Katrin Baudendistel und Stephan Rosebrock. *Hilfsmittel beim Mathematiklernen*, Preprint (2004).