Rose VOGEL, Frankfurt/Ludwigsburg

# Muster – eine Leitidee mathematischen Denkens und Lernens

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK) von 2004 für das Fach Mathematik (Klasse 4) geben Anlass über das Thema „Muster“ im Zusammenhang mit mathematischem Denken und Lernen, neu oder wieder nachzudenken. Das Identifizieren und Beschreiben von Mustern ist elementar für die Mathematik, die Devlin (2002, S. 10) als „Wissenschaft von den Mustern“ beschreibt. Ein aktives Mathematiktreiben ist ohne den Umgang mit Mustern nicht zu denken.

## Umgang mit Mustern

*Muster erkennen, nachzeichnen, vergleichen, fortsetzen und beschreiben* sind Tätigkeiten, die den Umgang mit Mustern charakterisieren (vgl. Radatz u.a. 1998, S. 151). So wird in den KMK-Bildungsstandards für das Fach Mathematik (Klasse 4) für den Inhaltsbereich „Muster und Strukturen“ neben anderen Kompetenzen folgende genannt: „Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z.B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen“ (KMK 2004, S. 13).

Was bedeuten diese Tätigkeitsbeschreibungen?
(vgl. Steinweg 2000)

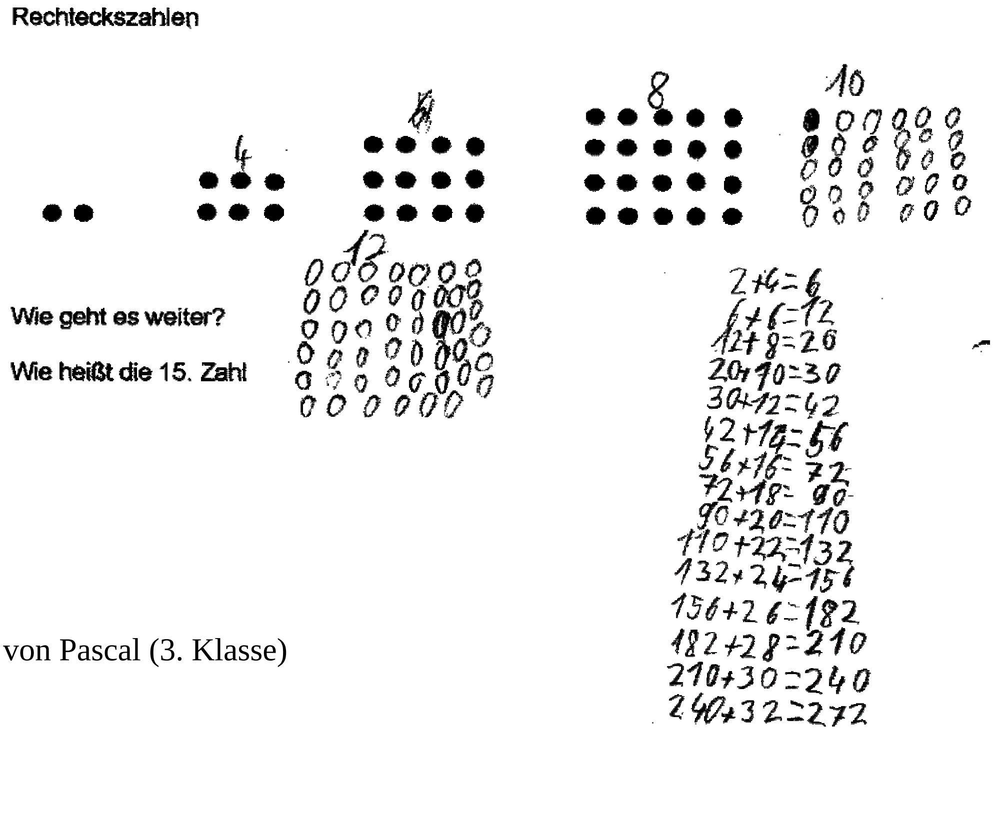
*Muster erkennen* ist zunächst ein intuitiver Prozess und bezieht sich auf die gegebene Anordnung im Ganzen. Es werden Regelmäßigkeiten erkannt, die oftmals aber nicht genau beschrieben werden können. Letztendlich geht es darum zufällige Anordnungen von denen zu unterscheiden, die eine Struktur aufweisen, d.h. wo ein Muster beschrieben werden kann. Damit ist die Anordnung zu jedem Zeitpunkt rekonstruier- und kommunizierbar, was bei einer zufälligen Anordnung nicht möglich ist.

Die Aufforderung *Muster fortzusetzen* geht über das „gewahr werden“ (vgl. Devlin 2002, S. 24) hinaus. Grundlegend für die Tätigkeit des *Musterfortsetzens* ist das Identifizieren von Mustereinheiten und Regeln, die angeben wie die Mustereinheit wiederholt oder variiert wird. *Muster fortsetzen* ist eher eine handlungsorientierte Form der Beschreibung und damit wenig formal. Nicht selten wird das Fortsetzen von Mustern durch Vermutungen bestimmt, die durch einen ersten Eindruck geprägt und wenig an Details orientiert sind. So bleibt z.B. bei Zahlenfolgen meist unberücksichtigt, dass zwar die vorgegebene Folge erste Hinweise auf mögliche Fortsetzungsregeln gibt, dass aber vielleicht der angegebene Ausschnitt aus der Zahlenfolge zu kurz ist und der weitere Verlauf der Folge ganz andere

Regeln nahe legen würde. Außerdem prägen Versuch und Irrtum sowie systematisches Probieren die Tätigkeit des Musterfortsetzens.

*Muster nachzeichnen und vergleichen* verlangt eine sehr genaue, aber sequentielle Analyse. Damit kann unter Umständen der Blick für das gesamte Arrangement verloren gehen und das Entdecken von allgemeinen Regeln verhindert werden. Hinzukommt, dass das Erkennen und Fortsetzen von Mustern durch den Kontext bestimmt wird. Je nach Wahl der Analyseeinheit variieren der Kontext und damit möglicherweise das identifizierte Muster. Kommen weitere Informationen hinzu, indem z.B. die gewählte Sequenz erweitert wird, muss das Muster oftmals „in einem neuen Licht" betrachtet werden. Insgesamt stellen das Nachzeichnen und Vergleichen von Mustern eine wichtige Voraussetzung dar, dass Regelmäßigkeiten und Strukturen überhaupt erkannt werden und damit Muster fortgesetzt werden können.

*Muster beschreiben* bedeutet mit Hilfe geeigneter Beschreibungsmittel die Regeln, die die Struktur des Musters bestimmen, darzustellen. Auf der Grundlage solcher Beschreibungen lassen sich Muster rekonstruieren. Das Beschreiben von Mustern ermöglicht der Betrachterin, dem Betrachter eine gewisse Distanz zwischen dem Objekt und sich aufzubauen. Die Übernahme des Standpunkts eines objektiven Betrachters (vgl. Steinweg 2000, S. 8) stellt eine Bedingung dar, das Identifizieren von Mustern für ein aktives Mathematiktreiben nutzbar zu machen. Die verschiedenen Beschreibungsmittel sind einerseits von der Aufgabenstellung abhängig und zeigen andererseits unterschiedlichen Abstraktionsgrad, was an der Vorgehensweise von Pascal deutlich wird.




Lösung von Pascal (3. Klasse)

Die Folge der Rechtseckszahlen wird über Punktmuster vorgegeben (vgl. Lorenz 1997, S. 58 f.). In der Lösung von Pascal wird deutlich, dass er zunächst durch das Fortsetzen des Punktmusters die Grundregeln des Musteraufbaus für sich klärt. Pascal arbeitet sowohl auf der zeichnerischen wie auf der arithmetischen Ebene. Er dokumentiert die Veränderungen zwischen den Mustereinheiten, indem er angibt wie viele Punkte jeweils hinzukommen. Damit generiert Pascal die Zahlenfolge der Veränderungen (Differenzenfolge). Die Aufgabe „Wie heißt die 15. Rechteckszahl“? legt eine Veränderung der Vorgehensweise nahe, da die gewählte Strategie: Zeichnen des Punktmusters für die nächsten Rechteckszahl und zählendes Ermitteln der hinzukommenden Punkte zu aufwendig wäre. Pascal wählt für die Bearbeitung der Aufgabe deshalb ein rein arithmetisches Beschreibungsmittel. Die zusammengestellten Additionsaufgaben beschreiben den Zeichenvorgang des Punktmusters. Zunächst sind es zwei Punkte. Für die nächste Rechteckszahl müssen vier Punkte hinzugezeichnet werden und die Summe aller Punkte gibt dann die nächste Rechteckszahl an, die den Ausgangspunkt bildet für die Ermittlung der nächsten Rechteckszahl usw.

**Weiterführende Betrachtungen**

In den bisherigen Ausführungen stand der Umgang mit geometrischen und arithmetischen Mustern im Vordergrund. Muster erkennen und beschreiben beschränkt sich aber nicht nur auf den Umgang mit explizit dargestellten Musteranordnungen. Auch der Umgang mit Problem- bzw. Sachaufgaben ist gekennzeichnet durch das Identifizieren und Beschreiben von Mustern. Das Finden eines geeigneten mathematischen Modells im Rahmen des Modellierungsprozesses setzt voraus dass die Realsituation „verstanden, präzisiert, strukturiert“ (vgl. PISA-Konsortium Deutschland 2004, S. 48/49) wird, d.h. Regelmäßigkeiten und damit Muster entdeckt werden (vgl. Beispiel unten).

Aufgabe: An einer Party nehmen 20 Personen teil. Jeder begrüßt jeden. Wie oft kommt es zum Händeschütteln.

> „Ich begann zunächst mit einer geringeren Anzahl Gäste, 5.
> Vier dieser Gäste stellte ich in eine Reihe, und ließ den fünften allen anderen die Hand schütteln. Vier Handschläge also. Dann stellte ich ihn beiseite und ließ Nummer Vier den verbleibenden drei die Hand schütteln, also dreimal. Zum Ende zählte ich 4 + 3 + 2 + 1 = 10 Handschläge. Dies wiederholte ich mit mehreren unterschiedlichen Anzahlen von Gästen, und immer ließ sich diese Struktur erkennen. Letztendlich rechnete ich mit 20 Gästen, also 19 + 18 + 17 + ... + 2 + 1 = 190 Handschläge.“ (Anke, Studentin)

Die Studentin erkennt ein Muster in der Aufgabenstellung und versucht durch die Beschreibung einer Mustereinheit ein mathematisches Modell zu finden.

Neben der mathematischen Durchdringung von Anwendungssituationen zählt die Identifikation und Beschreibung von Mustern auch in anderen Bereichen des mathematischen Denkens und Lernens zu den elementaren Tätigkeiten. So wirkt es z.B. für den mathematischen Lernprozess unterstützend, wenn in der Vielfalt der möglichen halbschriftlichen Rechenstrategien Muster erkannt werden, die es erleichtern für bestimmte Aufgabenstellungen die effektivste Strategie zu finden. Auf diese Weise kann metakognitives Wissen aufgebaut werden, was die Entwicklung mathematischer Kompetenzen unterstützt. Auch die Diagnosekompetenz der Lehrperson kann durch das Wissen um Muster fundiert werden.

## Muster eine Leitidee

„Muster" wird in den vielen Katalogen zu den fundamentalen Ideen bzw. Leitideen explizit nicht aufgeführt (vgl. Heymann 1996, S. 169), obgleich der Umgang mit Mustern im Zentrum fast aller mathematischen Aktivitäten steht (vgl. Vogel & Wessolowski 2005). Der Grund mag vielleicht darin liegen, dass der Umgang mit Muster nicht nur inhaltlich zu sehen ist, sondern dass der Blick auf „Muster" Möglichkeiten eröffnet, die Arbeitsweisen der Mathematik aktiv zu erschließen und transparent zu machen.

### Hinweis

Die Bearbeitung von Pascal entstand in einem Schulpraktikum von Studierenden der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg in einer 3. Klasse. Das Beispiel der Studentin Anke entstand in einem Seminar an der Universität Frankfurt.

### Literatur


Devlin, K. (2002). Muster der Mathematik. Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur. 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Heymann, H.W. (1996). Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim: Beltz.

KMK (Kultusministerkonferenz) (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarstufenbereich (Jahrgangsstufe 4). Beschluss vom 15.10.2004. www.kmk.org/stellungnahmen.htm. (Stand: 25.03.2005).

Lorenz, J.H. (1997). Kinder entdecken die Mathematik. Braunschweig: Westermann.

PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.) (2004). PISA 2003. Münster: Waxmann.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (1998). Handbuch für den Mathematikunterricht. 2. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

Steinweg, A.S. (2000). Mit Zahlen spielen. Die Grundschulzeitschrift, H 133, 14. Jg., S. 6-10.

Vogel, R. & Wessolowski, S. (2005). Muster und Strukturen. Eine Leitidee für den Mathematikunterricht. In J. Engel, R. Vogel & S. Wessolowski (Hrsg.), Strukturieren – Modellieren – Kommunizieren. Leitbilder mathematischer und informatischer Aktiviäten (S. 57-67). Hildesheim: Franzbecker [zur Zeit in Druck].