Reimund ALBERS, Bremen

Die Papierfaltungsfolge

Nach den schockierenden Ergebnissen der internationalen Untersuchungen TIMSS und PISA ist verstärkt untersucht worden, was SchülerInnen in der Schule lernen (sollen) und wie sie es lernen (sollen). Es besteht der allgemeine Konsens, dass der Mathematik-Unterricht neu gestaltet werden muss. Zu dieser Neugestaltung gibt es einen breit angelegten Maßnahmenkatalog, der die universitäre Mathematik-Didaktik, die Lehrerfortbildung (z.B. Projekt Sinus/ Sinus-Transfer) und die verwaltungstechnische Umorganisation von Unterricht (z.B. Einführung von Zentralabitur in vielen Bundesländern) umfasst. Zum Zusammenwirken dieser verschiedenen Felder schreibt H.-J. Burscheid in [1]: „Aus meiner Sicht erreichen Forschungsergebnisse im Wesentlichen über die jeweils jüngste Generation die Unterrichtspraxis, ...“.:

Ein wesentlicher Kanal für Innovationen ist also, was angehende LehrerInnen während der universitären Ausbildung über Mathematik lernen und wie sie es lernen: zum einen, welche didaktischen Grundlagen die StudentInnen als theoretische Lehrmeinung vermittelt bekommen, zum anderen wie sie selbst Mathematikausbildung erleben, insbesondere in den fachinhaltlichen Lehrveranstaltungen. Th.J. Cooney und H.G.Wiegel zitieren dazu in [2] die allgemeine Erkenntnis: „teachers teach as they were taught, not how they were taught to teach“ oder knapp auf Deutsch: „Taten zählen mehr als Worte“.

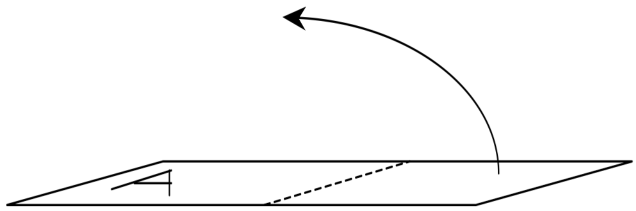
Wenn wir also die neuen LehrerInnen so ausbilden wollen, dass sie später im Unterricht „Mathematik lernen als sinnvollen konstruktiven und entdeckenden Prozess erlebbar machen“, so müssen sie dieses bei ihrem eigenen Lernen von Mathematik an der Universität erleben. (Bender u.a. in [3]). Will man dieses Vorhaben praktisch umsetzen, so hat man neben methodischen Fragen auch die inhaltliche Frage zu klären. Was ist einerseits geeignet, ein exploratives Vorgehen zu fördern, ja geradezu herauszufordern, andererseits aber auch so schulnah, dass die StudentInnen die Verwendbarkeit in der Schule erkennen können?

Für dieses Problem ist die Papierfaltfolge eine ideale Lösung.

Wie wird die Papierfaltfolge erzeugt?

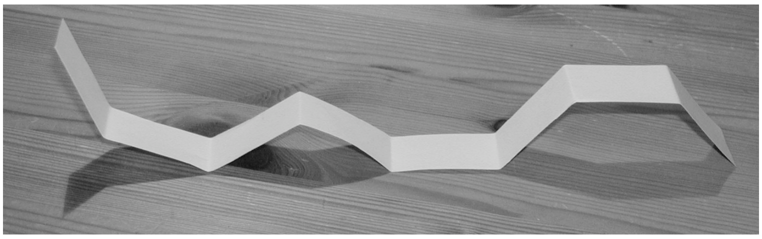
Nehmen Sie einen ca. 30cm langen (lange Seite eines DIN A 4 Blattes) und 2 cm breiten Streifen und markieren Sie ihn an der linken Seite. Falten Sie nun die rechte Hälfte des Streifens <u>über</u> die linke.

Klappen Sie nun den Streifen auseinander. Sie haben damit die erste Stufe einer Abfolge von mehreren kleinen Faltversuchen erreicht.



Nehmen Sie nun einen zweiten Streifen, markieren ihn wieder am linken Ende und falten ihn so wie den ersten – rechts über links. Falten Sie ihn dann ein zweites Mal, wieder rechts über links. Ziehen Sie nun die Enden des Streifens auseinander.

Analog wird nun der dritte Streifen drei Mal gefaltet. Der auseinander gezogene Papierstreifen sollte dann wie abgebildet aussehen.



Auf diese Weise kann man einen 30 cm langen Streifen bis zu fünf Mal falten. Die erste mathematische Frage, die sich geradezu aufdrängt, ist, wie viele Knicke ein Streifen nach ein-, zwei-, drei- u.s.w. maligem Falten hat.

An den gefalteten Streifen kann man deutlich erkennen, dass man zwei Sorten von Knicken unterscheiden kann: Berg- und Talknicke. Diese Begriffe sind sehr nahe liegend, allerdings muss man akzeptieren, dass hier zwischen zwei Tälern nicht unbedingt ein Berg liegen muss.

Schon mit SI-SchülerInnen kann man die Abfolge von Berg- und Talknicken analysieren. Schreiben wir ein „L“ für einen Talknick und „R“ für einen Bergknick, sind die Abfolgen von Berg- und Talknicken für die ersten 5 Streifen schnell, aber vor allem übersichtlich hingeschrieben:

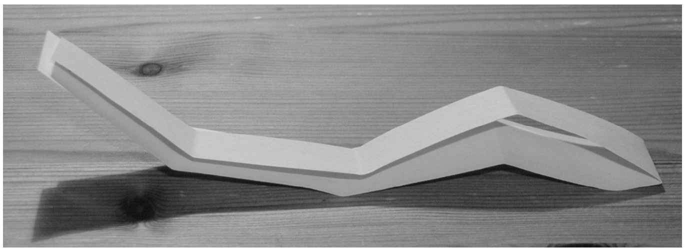
erster Streifen:	`L`
zweiter Streifen:	`LLR`
dritter Streifen:	`LLRLLRR`
vierter Streifen:	`LLRLLRRLLLRRLRR`
fünfter Streifen:	`LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRR`

Diese übersichtliche Schreibweise hat den Vorzug, dass sie die Faltmuster strukturiert und uns so Regelmäßigkeiten erkennen lässt. So sieht man z.B. sofort, dass die LR-Knickfolge für jeden Streifen so beginnt, wie die gesamte Knickfolge des vorhergehenden Streifens.

Hat man Papierfalten so weit eingeführt, so ist die Basis für eine Forschungstätigkeit gelegt. Lernende der unterschiedlichsten Stufen sprudeln über vor Entdeckungen und (auch falschen) Vermutungen. Ab hier ist es praktisch unvermeidbar, dass sich der weitere Lernprozess in forschenden, selbst entdeckenden Bahnen entwickelt. Ich möchte hier knapp die wesentlichen Gesetzmäßigkeiten darstellen, wohl wissend, dass solch eine Vorwegnahme dem Geist dieses Stoffes diametral entgegensteht.

1. Das Reflexionsgesetz

Man kann es erkennen, wenn man einen gefalteten Papierstreifen wieder in der Mitte zusammenfaltet.



Klappt man nun die obere Hälfte wieder nach rechts, so wird aus einem Berg- ein Talknick und umgekehrt. Weiterhin wiederholt sich die Abfolge der Knicke im ersten Teil (unten) in umgekehrter Reihenfolge im zweiten, herüber geklappten Teil. Der letzte Knick im ersten (unteren) Teil wird zum ersten Knick im zweiten Teil.

Man erhält die Knickfolge der folgenden Stufe, indem man
- die letzte Knickfolge abschreibt
- ein L anhängt
- die letzte Knickfolge reflektiert hinschreibt, d.h. die Reihenfolge umdreht und L und R austauscht.

2. Das Inflationsgesetz

Nehmen Sie einen Streifen, markieren Sie das linke Ende und falten ihn z.B. drei Mal. Dann ziehen Sie den Streifen auseinander und markieren alle vorhandenen Knicke mit einem Strich. Nun falten Sie den Streifen wieder so weit zusammen, wie er bereits gefaltet war und führen einen weiteren Faltschritt aus. Die neu entstandenen Knicke sind nicht markiert. Hier tauchen Tal- und Bergknicke regelmäßig abwechselnd auf.

Man erhält die Knickfolge der folgenden Stufe, indem man
- die letzte Knickfolge abschreibt
- vor, in die Lücken und am Ende abwechselnd L und R einfügt

3. Die Toeplitz-Konstruktion

(benannt nach Otto Toeplitz, der 1928 auf ähnliche Weise fastperiodische Funktionen konstruiert hat)
- Man schreibe die periodische Zeichenfolge LxRxLxRxLxRx... auf

- Man ersetze von Stufe zu Stufe alle x durch die Zeichen der Folge LxRxLxRxLxRx...

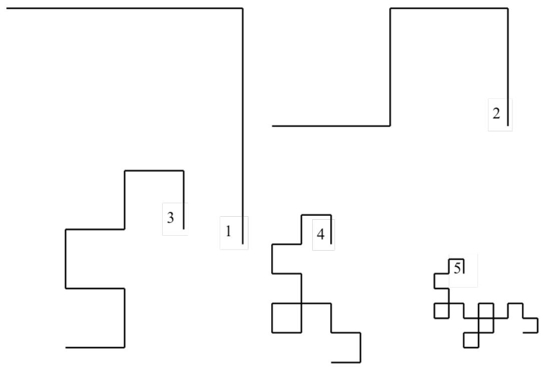
Also: `LxRxLxRxLxRxLxRx...`
`LLRxLRRxLLRxLRRx...`
`LLRLLRRxLLRRLRRx...`

Zu Beginn bis zum ersten x steht jeweils eine Stufe der Papierfaltungsfolge.

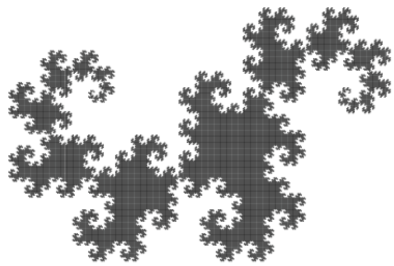
Diese drei Gesetzmäßigkeiten bilden den Kern des Themas „Papierfaltungsfolge". Die formal exakte Formulierung dieser Gesetzmäßigkeiten mit dem Ziel, deren Äquivalenz zu beweisen, ist ein lohnendes und lehrreiches Beispiel für Schulmathematik vom höheren Standpunkt.

4. Die geometrische Interpretation

Biegt man beim Auffalten die Streifenabschnitte so weit auseinander, dass die Papiersegmente Winkel von 90° bilden, so erhält man eine Abfolge von geometrischen Mustern.



Werden die Figuren passend von Stufe zu Stufe vergrößert, so erhält man einen Grenzwert, der ein Fraktal ist, den „Highway-Dragon"



Literatur

[1] H.-J. Burscheid, Zur Entwicklung der Disziplin „Mathematikdidaktik" in den alten Bundesländern, ZDM 2003, Vol. 35 (4)

[2] Th.J. Cooney, H.G. Wiegel, Examing the Mathematics in Mathematics Teacher Education, Second International Handbook of Mathematics Education, 2003

[3] P. Bender, D. Beyer, U. Brück-Binninger, R. Kowallek, S. Schmidt, P. Sorger, H. Wielpütz, E.Ch. Wittmann, Überlegungen zur fachmathematischen Ausbildung der angehenden Grundschullehrerinnen und -lehrer, Journal f. Mathematik-Didaktik Jhrg. 20 (1999), Heft 4

[4] H.-O. Peitgen, R. Albers, Papierfalten, Materialband 3 der Lehrerakademie Bremen, 1997 `http://www.lehrerakademie.uni-bremen.de/materialien/materialcds.html`