

Gabriella Ambrus, Budapest

Analyse eines geometrischen Problems für die Klassen 7-11

Zu einer Aufgabe mehrere Lösungen bereiten bzw. die Verallgemeinerung der Aufgabe kommt oft vor. In folgendem wird eine nicht übliche Analyse eines Problems aufgezeigt. Es werden betrachtet:

- Die Beziehung zwischen der mathematischen Inhalt und mehreren möglichen Texte (Formulierung) der Aufgabe.
- Lösungswegen von verschiedenen Gebieten der Mathematik, betrachtend auch die verschiedenen Vorkenntnisse der (ungarischen) SchülerInnen in verschiedenen Jahrgängen.
- Vorkenntnissen die zu den verschiedenen Lösungswegen nötig sind und daher während der Lösung auch geübt sind.

Es wird hier nicht eingegangen wie die Lösungswege durch Veranschaulichung (Modell, DGS, ...) geholfen werden können, sowie werden Erweiterungsmöglichkeiten nicht betrachtet.

Für die Analyse wurde ein Problem gewählt das beim Wettbewerb Tamás Varga in Ungarn in 1992 für SchülerInnen der 7. Klasse gestellt wurde (Text 1).

Verschiedene Formulierungen einer Aufgabenstellung

Ohne Änderung des mathematischen Inhaltes des Problems gibt es verschiedene Formulierungen des Textes. Einige mögliche Variante:

Text 1 Der Mittelpunkt eines Quadrats mit der Seitenlänge 2cm sei ein Eckpunkt eines anderen Quadrats mit der gleichen Seitenlänge.

Wie groß ist der gemeinsame Teil beider Quadrate?

Text 2 In den Mittelpunkt eines Quadrats mit der Seitenlänge a stecken wir einen Eckpunkt eines anderen Quadrates mit der Seitenlänge b . Das zweite Quadrat dreht sich um diesen Punkt. Wie groß ist die überschneidende Fläche?

Text 3a Es gibt zwei gleichgroße Quadrate aus Glas, ein gelbes und ein blaues. Das blaue Quadrat liegt mit einem Eckpunkt auf dem Mittelpunkt des gelben befestigt.

Wie groß ist die grüne Fläche?

Text 3b Es gibt zwei gleichgroße quadratförmige Filter. Ein Filter ist mit einem Eckpunkt im Mittelpunkt des anderen befestigt.

Die Filterwirkung ist besser, wenn zwei Filterschichten einander überdecken. In welcher Lage der Quadrate ist die Filterwirkung am größten?

Text 4 Im Mittelpunkt eines Quadrates dreht sich der Eckpunkt eines kongruenten anderen Quadrates.

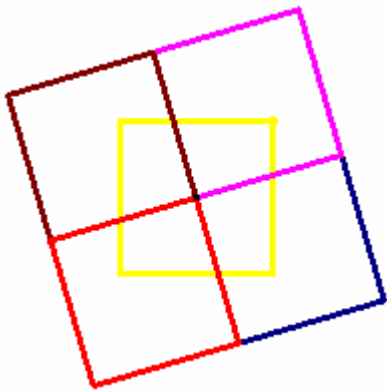
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass, nachdem das zweite Quadrat herumgewirbelt (und angehalten) wurde, die sich überlappenden Flächenteile der beiden Quadrate ein Viertel des ersten Quadrats ausmacht?

In *Text 2* ist das Problem in einer schwereren Formulierung gestellt; wegen der verschiedenen Seitenlängen muss mit Parametern gearbeitet werden, was für die SchülerInnen nicht leicht ist. *Text 1* kann als ein Spezialfall betrachtet werden. Bei den anwendungsnäheren Formulierungen wie *Text 3* werden nicht nur mathematische Fachkenntnisse sondern auch Sachkenntnisse gefordert. *Text 4* gibt ein konkretes Beispiel, wie verschiedene mathematische Bereiche, hier Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung in einer Aufgabe auftreten können.

Gleiche oder ähnliche mathematische Inhalte in verschiedenen Formulierungen können das Bild über Mathematik bei den Schülern positiv beeinflussen. Texte für das Problem können von den SchülerInnen auch selbst formuliert werden, und kann dies auch motivierend wirken.

Die folgende Lösungen sind zum *Text 1* angefertigt. Aus Platzgründen können hier nur vier gezeigt werden.

Lösung1



Wegen der vierfachen Drehsymmetrie des (ersten) Quadrates ist der gemeinsame Teil ein Viertel des Quadrates, das heißt 1 cm^2 .

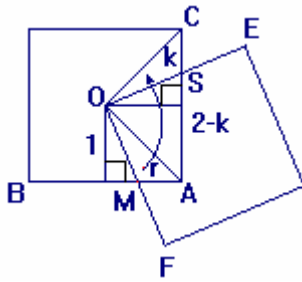
Vorkenntnisse: vierfache Drehsymmetrie des Quadrates, Erfahrungen mit Zerlegungen.

Stufe: 12 - 13 Jahre (7. Jahrgang)

In den Lösungen 2, 3, wird der Flächeninhalt des gemeinsamen Teils berechnet. Bei den rechnerischen Lösungen ist es auch möglich, durch geometrische Interpretationen von Termen die synthetische Lösung aufzuzeigen, wie dies in Lösung 2 geschieht.

Lösung 2

S ist der Schnittpunkt der Seite AC des ersten Quadrates und der Seite OE des gedrehten Quadrates, M ist der Schnittpunkt der Seite AB und der Seite OF des gedrehten Quadrates, $k=r$ wegen der Drehsymmetrie des Quadrates (oder: da die Dreiecke OCS und OAM kongruent sind, gilt „SWW“).



Die Fläche F des gemeinsamen Teils ist die Summe der Flächeninhalte von zwei Dreiecken (AOS und AOM):

$$F = \frac{(2-k) \cdot 1}{2} + \frac{k \cdot 1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{k \cdot 1}{2} + \frac{k \cdot 1}{2} = 1$$

Die durch äquivalentes Umformen erhaltenen Terme können als Flächeninhalt von Dreiecken aufgefasst werden: $\frac{2 \cdot 1}{2} = \text{FOAC}$, $\frac{k \cdot 1}{2} = \text{FOAM}$ und $\frac{k \cdot 1}{2} = \text{FOCS}$.

Das Vorzeichen der Terme wird als Ergänzen bzw. Wegnehmen interpretiert. Aus diesem Ergebnis ergibt sich eine Lösungsidee mit Zerlegung (in eine spezielle Lage).

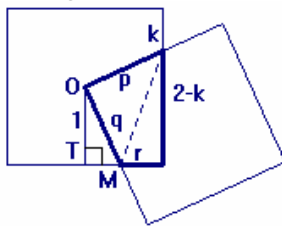
Vorkenntnisse:

Kongruenz von Dreiecken, Erfahrungen mit Zerlegungen, Fläche von Dreiecken (Drehsymmetrie des Quadrates). Aufschreiben und Umformen von algebraischen Termen.

Stufe: 12 - 13 Jahre (7. Jahrgang)

Lösung 3

Der gemeinsame Teil ist in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt.



$$k = r \text{ und } p = q$$

wegen der Drehsymmetrie des ersten Quadrates um 90 Grad.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck OMT folgt nach dem Satz des Pythagoras: $p = \sqrt{1^2 + (1-k)^2}$

Die Fläche des gemeinsamen Teils:

$$F = \frac{(2-k) \cdot k}{2} + \frac{p \cdot q}{2} = \frac{(2-k) \cdot k}{2} + \frac{(\sqrt{1^2 + (1-k)^2})^2}{2} = \frac{2k - k^2 + 2 \cdot 1 - 2k + k^2}{2} = 1$$

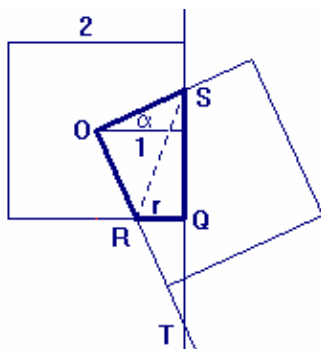
Vorkenntnisse:

Kongruenz von Dreiecken, Erfahrungen mit Zerlegungen, Fläche von Dreiecken (Drehsymmetrie des Quadrates), Pythagoras, algebraisches Umformen.

Stufe: 14 - 15 Jahre (8., 9. Jahrgang)

Lösung 4

Diese Lösung mit Winkelfunktionen sieht auf den ersten Blick komplizierter aus als die vorigen Lösungen, braucht aber nur elementare Kenntnisse von Winkelfunktionen und trigonometrischen Umformungen. Dabei wird der gemeinsame Teil als Differenz von zwei Flächen berechnet.



$$OS = 1/\cos \alpha$$

$$OT = 1/\sin \alpha$$

$$QT = \text{ctg} \alpha - 1$$

Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks OST:

$$F_1 = \frac{OS \cdot OT}{2} = \frac{1}{2 \cos \alpha \sin \alpha}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks RTQ:

$$F_2 = \frac{QT \cdot RQ}{2} = \frac{\text{ctg} \alpha - 1}{2 \text{ctg} \alpha} (\text{ctg} \alpha - 1) = \frac{1}{2} (1 - \text{tg} \alpha) (\text{ctg} \alpha - 1) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{1}{2} \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}{\cos \alpha \sin \alpha}$$

$$F = F_1 - F_2 = \frac{1 - (1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha)}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = 1$$

$$RQ : 1 = QT : \text{ctg} \alpha$$

Vorkenntnisse:

Winkelfunktionen sin, cos, tg und Flächeninhalt von rechtwinkligen Dreiecken, trigonometrische Umformungen, algebraisches Umformen.

Stufe: 16 - 17 Jahre (10., 11. Jahrgang)

Warum den selben Problem in verschiedenen Schulstufen zu bearbeiten?

- Es kann gezeigt werden wie die vorhandenen Mitteln immer reicher werden – Erweiterung der Kenntnisse, dynamisches Bild über Mathematik(lernen).
- Vernetzung der Kenntnisse vielseitig.
- Verbinden von verschiedenen Gebieten der Mathematik verschiedenerweise auch beim Lösen eines Problems.
- In welcher Klasse, welche Lösung bearbeitet wird kann davon abhängen was das Ziel der Lehrer ist (was zu üben)- nicht nur die Aufgabe sondern auch das gewählte Lösungsweg bestimmt was geübt wird.
- Frühere Lösungswege verhelfen zu Weiteren z.B. Idee der Drehsymmetrie oder die Idee der Zerlegung. Damit weniger Leistungsstarke auch „zur Wort kommen können“.
- Förderung der Kreativität durch „ein Problem aus mehreren Gesichtspunkten zu betrachten“ d.h. Mit Hilfe von verschiedenen Vorkenntnissen oder eher algebraisch oder geometrisch oder in ganzem (Lösung mit Drehsymmetrie) oder in Details (Lösungen mit Zerlegung).
- Bei den verschiedenen Lösungswegen können viele Problemlösestrategien vorkommen.

Literatur:

Ambrus, G.: Üben in der Planung des Mathematikunterrichts, Dissertation, Salzburg, 2003