Claudia BÖTTINGER, Essen

Arithmetische Darstellungen – Punktmusterdarstellungen

Die Fähigkeit zum flexiblen Wechsel zwischen Repräsentationsebenen zur Darstellung mathematischen Wissens ist für das Mathematiklernen von zentraler Bedeutung. Insbesondere ist der Wechsel zwischen bildlich-geometrischen Darstellungen und den klassischen mathematischen Symbolen (wie Ziffern oder Operationszeichen) in den Mathematikbüchern der Grundschule fester Bestandteil. Die dort verwendeten Arbeits- und Anschauungsmittel dienen dazu, Zahlbeziehungen und mathematische Begriffe zu repräsentieren.

In der Folge von Piaget nimmt man an, dass das Denken der Kinder in den Eingangsklassen stark an die Anschauung gebunden ist. Gerade in den unteren Klassen sollen Arbeitsmittel dazu beitragen, mathematische Anschauungsbilder aufzubauen (Lorenz, 1998). Diese Auffassung von Arbeits- und Anschauungsmitteln führt auch dazu, dass sie im Zusammenhang mit Kindern, die Probleme beim Erlernen der arithmetischen Grundlagen haben, sehr intensiv zum Einsatz kommen.

Zu beachten ist jedoch, dass die Funktion von bildlich-geometrischen Darstellungen nicht zu einem rein methodischen Hilfsmittel reduziert wird, um das Lernen (scheinbar) zu erleichtern (Jahnke, 1984). Es ist vielmehr erforderlich, dass jeder Lernende die mathematischen Strukturen, die in einem Material angelegt sind, selbst konstruiert. Dies liegt auch in der Natur der Mathematik, die nicht rein empirisch fassbar ist; sie beschreibt Relationen zwischen Objekten, nicht die Objekte selbst (Steinbring, 2005).

Die Konstruktion mathematischer Strukturen ist keine „Einbahnstraße“ in dem Sinne, dass aus bildlichen Darstellungen mathematische Beziehungen herauszulesen und diese mit Hilfe der Sprache der Mathematik zu beschreiben wären. Ebenso ist es erforderlich, zu einer mathematischen Beziehung – die etwa mit Hilfe standardisierter Zeichen gegeben ist – einen angemessenen Referenzkontext zu konstruieren. Dieser kann dann neu bzw. umgedeutet werden, d. h. es können neue Relationen erkannt werden und somit neue mathematische Einsichten gewonnen werden. Verschiedene Darstellungen ermöglichen immer auch unterschiedliche Interpretationen und Einsichten in ein Problem. Die verschiedenen Repräsentationsarten werden auf diese Weise nicht als Hierarchie verstanden in dem Sinne erst „handelnd“ – dann „bildlich“ – schließlich „symbolisch“. Entscheidend ist der flexible Wechsel von einer Darstellungsform in die andere, und zwar in jede Richtung. Diese Auffassung über die Bedeutung des Wechsels zwischen Repräsentationsebenen ist unabhängig vom Alter der Mathematiktreibenden. Sie vermag auch zu erklären, warum die Fähigkeit zum Wechsel von Repräsentationsebenen als Begabungsmerkmal angesehen wird (Kießwetter 1988, Käpnick 1998). Er ist mit einem vertieften, facettenreichen Verstehen von Mathematik verbunden.

Für das Verständnis von Mathematik ist es darüber hinaus wichtig, dass das Wechseln von Repräsentationsebenen als sinnvoll erachtet wird. Es muss einsichtig werden, dass in einer anderen Darstellung neue Zusammenhänge deutlich werden, die vorher nicht sichtbar waren. Kinder sind Lernende und müssen in der Regel diese Einsicht erst gewinnen. Das bedeutet ganz praktisch, dass das Wechseln von Darstellungsformen durch übergeordnete Problemstellungen gesteuert werden sollte und nicht als Selbstzweck behandelt wird.

Die Darstellung von mathematischen Beziehungen auf unterschiedliche Weise ist eine anspruchsvolle Aufgabe, die nicht von allen Kindern in gleichem Maße geleistet werden kann. Zu erwarten ist, dass Kinder hier ein Spektrum – abhängig von der Problemstellung – zeigen, ähnlich wie man es von der Strukturierungsfähigkeit kennt (Söbbeke 2005). Dies kann mithilfe von Interviews untersucht werden. Es soll erforscht werden, wodurch der Wechsel der Darstellungen bei Kindern geleitet wird, welche verschiedenen Abstufungen sich beim Wechsel von einer bildlich/geometrischen Darstellung in eine symbolische Darstellung (und umgekehrt) zeigen und welche Unterschiede sich bei Kindern verschiedener Leistungsstärke herausarbeiten lassen.

Das Interviewvorhaben

Die beiden Repräsentationsebenen, die im Interview thematisiert werden sind Punktmuster als bildlich-geometrische Darstellungen und arithmetische Darstellungen (durch die klassischen mathematischen Zeichen wie Ziffern und Operationszeichen) als symbolische Darstellungen. An dieser Stelle soll es in besonderer Weise um die Richtung von der arithmetischen zur geometrischen Darstellung gehen, weil es sich im Rahmen von Probeinterviews herausgestellt hat, dass diese besonders lohnenswert ist. Außerdem wurde die umgekehrte Richtung bereits bei Böttinger (2005) ausreichend thematisiert. Als übergeordnetes Problem fiel die Wahl auf die anschaulichen Beweise (Wittmann, Müller 1997).

Da nicht davon auszugehen ist, dass alle Kinder mit dieser Art von Aufgaben vertraut sind, stellen die folgenden Aufgaben den Einstieg dar:

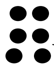
3+1 =	4+2 =	5+3 =
2+2 =	3+3 =	4+4 =

Der Auftrag für die Kinder besteht darin, die Aufgaben auszurechnen, fortzusetzen und zu erklären, warum übereinander stehende Aufgaben dasselbe Ergebnis haben. Kinder, die auf der Zahlenebene argumentieren, werden aufgefordert, den Beweis auch auf andere Weise mithilfe von Punktmustern durchzuführen. Als Anregung können Punktmuster vorgegeben werden. Im Rahmen von Probeinterviews hat sich herausgestellt, dass nur bei dieser vermeintlich einfachen Aufgabe alle Kinder eine Beweispflicht akzeptiert haben und eine angemessene Beweisidee auf der Zahlenebene angeben konnten. Der Wechsel zum Punktmuster erfolgte in praktisch allen Fällen durch Anregung der Interviewerin – war also nicht durch das Problem „Beweis“ gesteuert. Die vorgeschlagenen Punktmuster für die Aufgabe 3+1 ließen sich gut verallgemeinern und waren tragfähig für die darauf aufbauenden Aufgaben.

In der folgenden Aufgabeserie geht es – bei gleicher Aufgabenstellung – um den Zusammenhang zwischen Additions- und Multiplikationsaufgaben. Sie soll es den Kindern ermöglichen, selbstständig aus den Darstellungen für Additionsaufgaben Darstellungen für Multiplikationsaufgaben herzuleiten:

3+2+1=	4+3+2=	5+4+3=
2 · 3=	3 · 3=	4 · 3=

Bei dieser Aufgabe sind sowohl auf der arithmetischen als auch auf der Punktmusterebene einige Besonderheiten zu beachten:

- Wie wird die Aufgabe 2·3 verstanden? Einige Kinder lesen sie als Abkürzung von 2+2+2, einige als Abkürzung von 3+3. Dieses Problem bleibt bei einer Vertauschung in der Reihenfolge der Faktoren bestehen. Auf der arithmetischen Seite ist zum Beweis der Gleichheit ggf. die Anwendung des Kommutativgesetzes erforderlich. Denkbar sind auch unterschiedliche Beweisverfahren bei den verschiedenen Sichtweisen.
- Auf der Punktmusterseite sind ebenfalls Umdeutungen erforderlich, wie folgende Beispiele zeigen: Das Muster  kann sowohl für 3+3 als auch für 2+2+2 stehen. Außerdem kann diese Darstellung für die Aufgabe 3·2 selbstverständlich umgedeutet werden als Muster für die Aufgabe 2·3.

Wenn es darum geht, die Gleichheit der Ergebnisse zu erklären, müssen die Kinder diese verschiedenen Vorstellungen in Einklang bringen. In einem weiteren Schritt muss dann das „Umlegen“ oder „Umdeuten“ von Punkten so erfolgen, dass es symbolischen Charakter bekommt (Steinbring). Es geht nicht nur darum, lokal bei einzelnen Aufgabenpaaren die Gleichheit zu zeigen, sondern darum, diese Gleichheit bei allen Aufgaben zu zeigen – auch bei denen, die nicht mehr aufgeschrieben sind. Die Probeinterviews weisen darauf hin, dass sich gerade bei dieser Aufgabe das Spektrum von eher empirischer bis eher symbolischer Handlung gut herausarbeiten lässt.

Die dritte Aufgabe stellt eine neue Anforderung dar. Es geht um den Zusammenhang zwischen Multiplikationsaufgaben.

$$3 \cdot 3 = \quad 4 \cdot 4 = \quad 5 \cdot 5 =$$
$$4 \cdot 2 = \quad 5 \cdot 3 = \quad 6 \cdot 4 =$$

Probleme der Deutung und Darstellung von Multiplikationsaufgaben treten hier in den Hintergrund. In den bisherigen Probeinterviews hat sich gezeigt, dass durch die vorher gehende Aufgabe die Kinder in der Lage waren, sich die Darstellung von Multiplikationsaufgaben herzuleiten. (Anm. Ohne diese Aufgabe war das nicht immer möglich.) Als Symmetriebruch geht es jetzt um die Frage, warum sich die Ergebnisse immer um 1 unterscheiden. Es reicht jetzt nicht mehr zu erklären, wie die unteren Aufgaben aus den oberen entstehen, ein häufig anzutreffendes Argument. Neben der Frage der Darstellung und Umdeutung von Punktmustern geht es hier viel mehr als vorher zusätzlich um die allgemeinere Frage, die für Kinder keineswegs selbstverständlich sind: Was muss überhaupt bewiesen werden? Warum muss man überhaupt begründen, dass verschiedene Aufgaben zu unterschiedlichen Ergebnissen führen, das ist doch der „Normalfall". Man kommt auf diese Art zu übergeordneten Fragen nach dem Verständnis von Kindern zur Beweispflicht, die mit untersucht werden sollen.

Literatur

Böttinger, C. (2005): Komponenten beim Wechsel der Repräsentationsebenen, Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim, Franzbecker, 119-122

Jahnke, H. N. (1984): Anschauung und Begründung in der Schulmathematik, Beiträge zum Mathematikunterricht 1984, Bad Salzdetfurth, Franzbecker, 32-41

Käpnick, F. (1998), Mathematisch begabte Kinder, Greifswalder Studien zur Erziehungswissenschaft, Bd. 5, Peter Lang Europäischer Verlag der Wissenschaften, Frankfurt (Main)

Kießwetter, K. (1988), Das Hamburger Modell und sein mathematikdidaktisches Umfeld, in: Das Hamburger Modell zur Identifizierung und Förderung von mathematisch besonders befähigten Schülern, Hrsg. K. Kießwetter, Berichte aus der Forschung, Heft 2, Universität Hamburg, FB Erziehungswissenschaft 1988, S. 6-34

Lorenz, J. H. (1998): Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. 2. unveränd. Aufl. Göttingen, Hogrefe

Söbbeke, E. (2005), Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern, Franzbecker, Hildesheim

Steinbring, H. (2005), The Constrution of New Mathematikal Knowledge in Classroom Interaction, Mathematics Education Library, Springer, Berlin, New York

Wittmann, E. Ch., Müller, N. (1997), Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1, Stuttgart, Klett Schulbuchverlag