

Richard CABASSUT, richard.cabassut@alsace.iufm.fr, Strasbourg

## **Beweisen in Schulbüchern in Frankreich und Baden-Württemberg**

*Durch eine komparative Studie der Beweise von Kurstheoremen in Schulbüchern von Baden- Württemberg wir versuchen zu untersuchen, wie diese Beweise verwirklicht werden, und wie sie gerechtfertigt sind. Wir werden versuchen, die Ähnlichkeiten und die Unterschiede zwischen den zwei Ländern zu erklären, insbesondere, indem sie die diesen Beweisen zugeordneten Funktionen festlegen werden.*

### **Methodologie:**

Wir beschränken uns auf die Gymnasien des Baden-Württemberg und das Collège und danach das allgemeine Lycée in Frankreich. Diese zwei Stufen bereiten auf den Übergang auf die Universität vor, und der Beweis erscheint dort in den Programmen ungefähr im selben Alter als Lehrgegenstand: in Klasse 8 in Baden-Württemberg und in Klassen 7 und 8 in Frankreich (Cinquième et Quatrième). Wir untersuchen den Beweis der wichtigsten Kurstheoreme in den Schulbüchern der Sammlung Lambacher Schweizer, welches die verbreitetste Sammlung in Baden-Württemberg ist. Diese Wahl entspricht verschiedenen Kriterien: Zeitpunkt des ersten Beweises, Unterschied des Zeitpunkts im Vergleich zu Frankreich, mathematischer Bereich. Für jeden Beweis suchen wir einen vergleichbaren Beweis in einem französischen Handbuch. Wir wenden darin die Methodologie von [ Clarke 2004 ] an, die darin besteht, zuerst ähnliche Gegenstände zusammenzutragen, um ihre Unterschiede zu beobachten. Wenn wir keine vergleichbaren Beweise finden, versuchen wir, die beobachteten Unterschiede zu erklären.

### **Theoretischer Rahmen der Studie des Beweises von Kurstheoremen**

Wir analysieren den Beweis von Theoremen, indem wir folgendes verdeutlichen:

- die benutzten Arten von Argumenten, Notwendigkeitsargumente (wo die Schlussfolgerung notwendigerweise wahr ist) oder Vertretbarkeitsargumente (wo die Schlussfolgerung nur plausibel ist)

[ Toulmin 1996 ].

- die Techniken und die Technologie des Beweises. Die Technik gibt an, wie ein Ergebnis für gültig erklärt wird. Welche Darstellungsregister werden benutzt? Zum Beispiel welche Rückgriffe auf eine Tabelle, eine algebraische Berechnung, ein in alltäglicher Sprache verfasster Text, eine Darstellung, eine graphische Darstellung? Die Technologie rechtfertigt die benutzte Technik, zum Beispiel in der Mathematik wird die Technologie von den Definitionen, Eigenschaften oder Theoremen bestimmt [ Chevallard 1992 ].

- die Funktionen des Beweises: Verifikation der Plausibilität oder der Notwendigkeit der Schlussfolgerung, Erklärung, Systematisierung, Entdeckung, Kommunikation [ Knipping 2003, 26 ].

## **1 Die mathematische Technologie ist nicht mobilisierbar**

### **1.1 ähnliche Beweise**

Ein erstes Beispiel betrifft den ähnlichen Beweis des Theorems über die Summe der Winkel eines Dreiecks im selben Alter, in Klasse 7 oder in der

Cinquième. In den zwei Büchern beginnt der Beweis in einer ersten Etappe mit pragmatischen Argumenten, die Aktionen verwirklichen (Manipulation eines mecano, Zerlegen und Wiederaussetzen von Winkelsektoren). In einer zweiten Etappe benutzt man den Winkelmesser, um die Winkel einiger Dreiecke zu messen und zu prüfen, dass die Summe dieser Winkel konstant scheint. Man vermutet, dass die Summe der Winkel einen flachen Winkel ergibt. Hier wird die Funktion der Prüfung der Plausibilität des Ergebnisses durch den Rückgriff auf pragmatische Argumente erfüllt.

Ein zweiter Beweis benutzt Notwendigkeitsargumente, die die mathematische Technologie der entsprechenden, wechselständigen-intern oder zusätzlichen Winkel benutzen.

Er folgert die Notwendigkeit der Schlussfolgerung. Jedoch wird der Rückgriff auf ein visuelles Argument benutzt, um zu prüfen, dass Winkel zusätzlich sind, denn die Technologie der ..... Winkel, die diesen Rückgriff vermeiden könnte, ist auf diesem Niveau nicht verfügbar. Eine nicht mathematische Technologie, ein visuelles Argument (ich sehe also ist es wahr), ersetzt eine nicht verfügbare mathematische Technologie. Die Programme der zwei Länder erlauben diese Kombination von Plausibilitätsargumenten und von Notwendigkeitsargumenten.

## 1.2 unterschiedliche Beweise

In Frankreich, um die Formeln über den Kreis und die Volumen fester Körper für gültig zu erklären benutzt man von Klasse 6 bis 9

Plausibilitätsargumente:

- pragmatische Argumente: Rückgriff auf die Aktion, um Oberflächen oder feste Körper zu zerlegen und wieder zusammen zu setzen, Wasservolumen, die Hohlkörper ausfüllen, zu vergleichen, Größemessungen.
- induktive Argumente um ein Grenzergebnis zu erhalten, oder um von Einzelfällen ausgehend zu verallgemeinern,
- Autoritätsargument (aus dem Buch), um ohne Rechtfertigung gelten zu lassen.

Diese nicht mathematischen Technologien (außer der Technologie der Berechnungen), erlauben die verifikative funktion der Plausibilität der Formeln zu erfüllen.

In Baden-Württemberg kombinieren die Beweise mathematische Technologien (ähnliche Darstellungen, Formeln der Flächen von Oberflächen oder Volumen von festen Körpern, Grundsatz von Cavalieri) und nicht mathematische Technologien (visuelle oder induktive Argumente, um ein Grenzergebnis zu erhalten), die helfen, mehrere Funktionen zu erfüllen:

- Verifikation der Formel (vertretbar oder wahr)
- Erklärung ( indem man das Grenzergebnis illustriert)
- Entdeckung mit einer Propädeutik-Funktion im Grenzunterricht: "Den Schülerinnen und Schülern werden die Probleme EIB der Bestimmung von Umfang und Inhalt Kreises sowie Rauminhalts bestimmter Körper verständlich. Sie bekommen Einblick, wie eine propädeutische Grenzwertbetrachtung die Berechnung ermöglicht "[ Ministerium

4/1994 481 ],

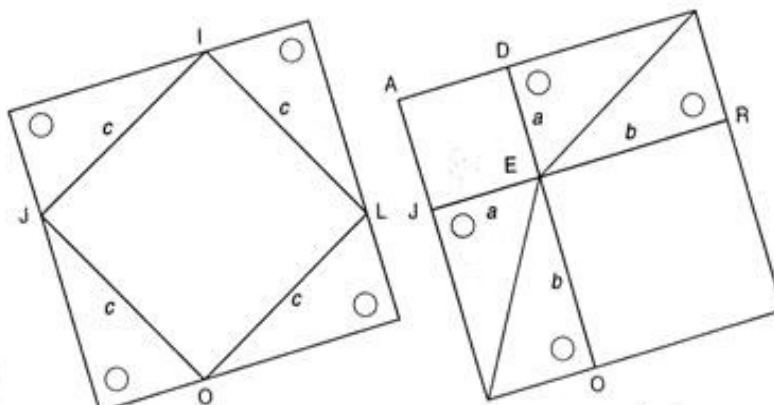
- Systematisierung: indem man eine elementare Bewertung jeder Formel vorschlägt insbesondere, indem man die vorher angefertigten Formeln benutzt.

Man kann die Unterschiede zwischen Frankreich und Baden-Württemberg durch institutionelle Unterschiede erklären. In Frankreich gehen alle Schüler in das Collège (Klasse 6 bis 9), die danach auf verschiedene Schultypen orientiert werden (Lehre, berufliche, technische oder allgemeine Gymnasien). Diese Formeln werden also früh behandelt, mit dem Ziel, von den Schülern benutzt werden zu können, die nicht auf ein allgemeines oder technisches Gymnasium gehen werden (und insbesondere keinen Unterricht der Grenzen haben werden): ein formeller Beweis auf diesem Niveau ist nicht möglich, und eine Propädeutik an den Grenzen ist unnötig. Im Gegenteil dazu, fasst das Gymnasium in Baden-Württemberg Schüler zusammen, die einen Unterricht der Grenzen erhalten müssten: man kann also den Beweis später einführen (Klasse 10) mit einer Propädeutik am Unterricht der Grenzen mit einem formelleren Beweis als dem pragmatischen Beweis in Frankreich.

## 2 Die mathematische Technologie ist mobilisierbar

### 2.1 Die mathematische Technologie wird nicht mobilisiert

In den zwei französischen und deutschen Beweisen des Theorems von Pythagoras behauptet man, dass das JOLI-Viereck ein Viereck sei, ohne es zu beweisen, obwohl die Technologie der Winkel und der Vierecke es erlauben würden. Unsere Interpretation ist, dass das Theorem von Pythagoras als ein Theorem der Gleichheit von Flächen vorgestellt wird, sich also der Beweis auf die Technik der Flächenzerschneidung und Neuzusammensetzung konzentriert, und es wird nicht die Technik der Winkel in Anspruch genommen, um eine Ablenkung von der Hauptidee des Beweises zu vermeiden, die auf einer Technik der Flächen basiert.



### 2.2 Die mathematische Technologie wird mobilisiert

Man kann Beweise finden, die dieselben Techniken benutzen: zum Beispiel in den Beweisen der Lösungen einer quadratischen Gleichung benutzt man eine Setztechnik in kanonischer Form eines Binoms des

zweiten Grads, das durch die Technologien der algebraischen Berechnung gerechtfertigt ist. Man beobachtet jedoch andere Verträge auf dem Niveau der Redaktion mit mehr Rückgriffen auf die natürliche Sprache in Frankreich.

Dagegen für die Demonstration der Lösungen einer Ungleichung des zweiten Grads, die auf den Technologien der algebraischen Berechnung basiert, ist die in Lambacher-Schweizer benutzte Technik jene des Rückgriffs auf die graphische Darstellung einer Funktion des zweiten Grads. Diese weniger formelle Technik valorisiert die Funktionen der Erklärung und der Verifikation der Plausibilität. Dagegen wird im französischen Schulbuch die Technik der Zeichentabelle benutzt: diese Technik valorisiert die Kommunikationsfunktion mit einer formelleren Abhandlung, die die Funktion der Prüfung der Notwendigkeit valorisiert (systematische Studie aller Fälle in der Tabelle). Man beobachtet eine andere Benutzung derselben Techniken im entsprechenden Land, aber nicht im anderen Land: gäbe es dort einen kulturellen Faktor in der Benutzung einer Technik?

### **Schlussfolgerung:**

Wir haben gesehen, dass die Bewertungen der Kurstheoreme Vertretbarkeitsargumente und Notwendigkeitsargumente kombinierten. Die Bewertung der Kurstheoreme ist die doppelte Umsetzung der mathematischen Beweise (indem die Notwendigkeitsargumente benutzt werden, die auf mathematischen Technologien basieren) und Beweise des täglichen Lebens oder der experimentellen Wissenschaften (die Plausibilitätsargumente benutzen (pragmatische, induktive, visuelle) und auf nicht mathematischen Technologien basiert sind).

Die Wahl der Techniken und der Technologien hängt von unterschiedlichen Faktoren ab: die institutionellen Bedingungen und die kulturellen Verträge die in diesen Institutionen benutzt werden, den mobilisierbaren mathematischen Technologien, den Funktionen, die den Beweisen zugewiesen wurden... Der Vergleich erlaubt, diese Wahl in Frage zu stellen: wurde sie bewusst getroffen? warum beweisen?

### **Literatur :**

CABASSUT Richard (2005) Argumentation and proof in examples taken from French and German textbooks, *Cerme 4*

CLARKE David (2004) Issues of Voice and Variations : The Problematics of International Comparative Research in Mathematics Education, paper submitted to discussion group 11: *International comparaisons in mathematics education (ICME 10)*, Copenhagen, Denmark

CHEVALLARD Yves (1992) Fundamentals concepts of didactics : perspectives given by an anthropological approach, *Recherches en Didactiques des mathématiques* 17 (3), 17-54

KNIPPING Christine (2003) *Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich*, Verlag Franzbecker

STRÄBER Rudolf (1992) Didaktische Transposition – eine "Fallstudie" anhand der geometrie-Unterrichts, in *Journal Math. Didakt.* n°13, pp.231-252

TOULMIN Stephen .E. (1996) *Der Gebrauch von Argumenten*, Beltz Athenäum, 1996