Pascal STÖLTING, Bielefeld

Funktionales Denken von Schülerinnen und Schülern in Deutschland und Frankreich - ausgewählte Interviews aus dem Projekt PALMA

1. Übersicht

Im Rahmen des DFG-Projektes PALMA (Hofe et al., 2005), das die Entwicklung mathematischer Kompetenz von Schülerinnen und Schülern der Klassen 5 bis 10 erfasst, werden jedes Jahr 36 Interviews durchgeführt. In den Klassenstufen 8 lag der inhaltliche Schwerpunkt der Interviews auf der Ausbildung funktionalen Denkens. Zusätzlich zu den in Bayern durchführten 36 Interviews wurde 2006 eine Parallelstudie mit Schülerinnen und Schülern zweier Schulen aus dem Großraum Paris durchgeführt, wobei die Aufgaben aus den PALMA Interviews der 8. Klasse verwendet wurden. Durch die in den Interviews gestellten Aufgaben konnten typische Fehler und Fehlvorstellungen dokumentiert werden.

Im Vortrag wurden die Theorien vorgestellt, die bei der Konzeption und bei der Analyse der Interviews verwendet worden sind. Anschließend wurden zwei Interviewausschnitte präsentiert, in denen typische Fehler dokumentiert werden.

2. Funktionales Denken

Es gibt eine Fülle von Veröffentlichungen, die sich mit funktionalem Denken oder ähnlichen Konzepten beschäftigen. Um mit diesem Begriff arbeiten zu können muss dieser zuerst klar definiert werden. Hier wird in Anlehnung an Vollrath (1989) funktionales Denken mit folgender Definition genutzt:

Unter funktionalem Denken versteht man eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit funktionalen Abhängigkeiten ist.

Dies umfasst folgende Fähigkeiten:

- Funktionale Abhängigkeiten zwischen Größen können in allen üblichen Darstellungsformen festgestellt, angegeben und erzeugt werden. (Dies beinhaltet Übersetzungen.)
- Hypothesen über die Art der funktionalen Abhängigkeit, insbesondere den Einfluss von Änderungen, können gebildet und überprüft werden.

Zentrale Punkte dieser Definition sind also die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten funktionaler Abhängigkeiten und Übersetzungen zwischen ihnen. Sie deckt sich in weiten Teilen mit der Definition der Subskala *Veränderung und Beziehung* von PISA (OECD, 2004)

3. Theorien

Bei der theoretischen Fundierung der Definition von funktionalem Denken wurde auf folgende Theorien aufgebaut:

- Duval: Theorie von Repräsentationssystemen und der Übersetzungen zwischen ihnen. (Duval, 1993)
- Vergnaud: Theorie der konzeptuellen Felder. Ein konzeptuelles Feld ist eine Menge von Situationen zusammen mit einigen mathematischen Konzepten, die zu einem bestimmten Bereich gehören.
  Beispiel: Das konzeptuelle Feld funktionalen Denkens, das aus einfachen funktionalen Situationen und den dazugehörigen einfachen mathematischen Konzepten besteht. (Vergnaud, 1990)

Diese Theorien haben die Erstellung und Auswahl der Interviewaufgaben geleitet. Für die Auswertung der Interviews wurden mit folgenden theoretischen Konzepten gearbeitet:

- vom Hofe: Grundvorstellungen (GV) sind mentale Modelle, die mathematische Modelle, die Realität und die mentalen Konzepte der Schüler verbinden. Sie sind besonders bei Übersetzungsvorgängen von zentraler Bedeutung. (vom Hofe, 1995)
  GV zu Aspekten funktionalen Denkens: Zuordnungs-GV, Kovariations-GV, Objekt-GV. GV zu den Darstellungen funktionaler Abhängigkeiten: Funktionale Abhängigkeiten als Graph, Tabelle,…
- Vinner: Concept definition und concept image (Vinner, 1983)

4. Interviews

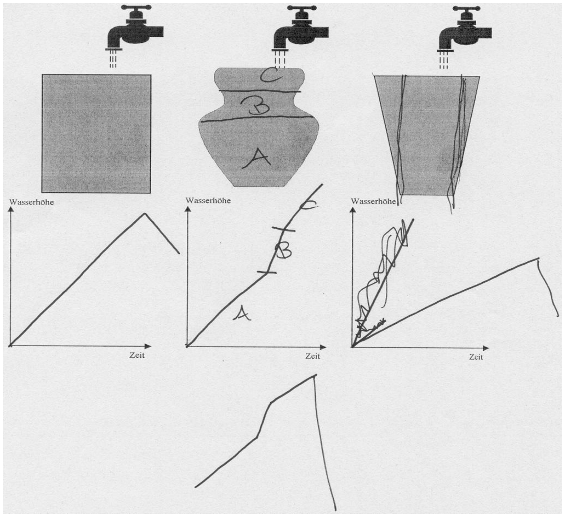
2005 wurden 36 Interviews zu Aufgaben zu funktionalem Denken aus dem schriftlichen PALMA-Test in drei bayerischen Realschulen durchgeführt. 2006 konnte diese Serie im Rahmen eines vom DAAD geförderten Auslandsaufenthaltes mit 12 Schülern aus zwei Schulen bei Paris wiederholt werden. Es handelt sich um halbstandardisierte Einzelinterviews, bei denen der Ton mitgeschnitten wurde.

Unter Anderem wurde den französischen und deutschen Schülern folgende Aufgabe zur Bearbeitung vorgelegt:

Auf den Bildern sind verschieden geformte Gefäße zu sehen, die alle gleich hoch sind. In allen drei Fällen läuft gleichmäßig Wasser in die Gefäße. Zeichne jeweils ein, wie die Wasserhöhe in Abhängigkeit von der Zeit steigt.

Dazu wurden den Schülern Bilder der Gefäße vorgelegt und leere, beschriftete Koordinatensysteme.

Es folgt die Lösung einer deutschen Schülerin. Es fällt auf, dass alle Graphen ein abfallendes Endstück aufweisen. Wie es zu diesem kommt, zeigt ein Interviewausschnitt zum ersten Gefäß.



S Also, da steigt es, es wird immer höher.

I Kannst du erklären, warum das eine Gerade ist?

S Weil das Gefäß, das bleibt ja, das ist ja so ein Viereck und das bleibt ja gleich groß und das hat immer den gleichen Durchmesser und bei dem ja, da ist es halt eine andere Form, da steigt es ja auch anders, das kommt ganz darauf an, auf die Form darauf an.

I Kann man denn sagen, wenn das Gefäß irgendwann voll ist, wie der Graph dann weiter läuft?

S Ja, das läuft über. Dann ist Schluss.

I Ja, wie könnte es dann…

S Ja dann läuft es wieder nach unten.

I Kannst du das mal einzeichnen?

S Ja so halt dann, ja nach unten.

I Und warum läuft es wieder nach unten?

S Weil es ja da an der Seite raus läuft und dann dahin.

Trotz der nicht korrekt gezeichneten Graphen zeigt die Schülerin ein gutes Verständnis für den funktionalen Zusammenhang. Insbesondere erkennt sie, dass die Steigung der Kurve vom Durchmesser des Gefäßes abhängt. Die unübliche Frage nach dem Verlauf beim Erreichen des Gefäßrandes lässt sie eine bekannte Fehlinterpretation von Graphen durchführen. Sie deutet den Graphen nicht nur ikonisch, wie dies von Janvier (1983) beobachtet wurde, sondern erstellt aktiv einen Graphen als direktes Abbild der Realität.

Im zweiten Beispiel kann eine Fehlvorstellung erfasst werden, die nach der Analyse der Lehrpläne erwartet wurde. Folgende Lösung des oben genannten Problems hat eine französische Schülerin gefunden: Sie zeichnet einen korrekten Graphen für das erste Gefäß und erklärt, dass aufgrund der senkrechten Wände eine Gerade die richtige Lösung ist. Anschließend sucht sie die Lösung für das dritte Gefäß:

I Also ist es, ist es eine etwas steilere Gerade als beim ersten.

S Ein bisschen steiler, weil, wie soll ich sagen, es ist immer noch proportional.

I Mhm

S Aber,…,es ist kein Rechteck, also wird es, es wird nicht geben… Ah, nein. Wie soll ich sagen, … Ich weiß es nicht.

I Was stört dich?

S Was mich stört ist, ist dass, ähm, da es eher, nicht konisch, aber unten schmaler ist

I Mhm

S Es ist, wie soll ich sagen, nein ich weiß es nicht

I Du versuchst raus zu finden, welchen Einfluss es hat, dass es unten schmaler ist, oder? Wie man es mit der Kurve zeigen kann.

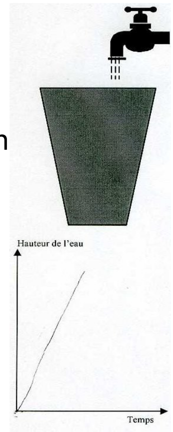
S Genau, …

I Du denkst also, dass man es in der Kurve sehen sollte? Dass es unten schmaler ist als oben?

S Nein, nein!

I Nein?

S …, eigentlich weiß ich es nicht, ich weiß es nicht.



Hier und bei der Bearbeitung des mittleren Gefäßes, die aus Platzgründen nicht abgedruckt werden kann, versucht die Schülerin eine Gerade zu rechtfertigen, obwohl ihr durch die Form des Gefäßes Zweifel an der Richtigkeit ihrer Lösung kommen. Diese Fehlvorstellung wurde nach der Analyse der französischen Lehrpläne erwartet, da bis zum Zeitpunkt Interviews nur proportionale funktionale Zusammenhänge ausführlich bearbeitet wurden. Andere funktionale Zusammenhänge sind der Schülerin nur aus Beispielen bekannt.

Literatur

[1] Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Anales de Didactique et de Sciences Cognitives 5 (1993)*, 37-65.

[2] Hofe, R. vom et al. (2005). On the role of „Grundvorstellungen“ fort he development of mathematical literacy – First results of the longitudinal Study PALMA. *Mediterranean Journal for the research in Mathematics Education; Vol. 4, 2*; 67-84.

[3] Hofe, R. vom (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.

[4] Janvier, C. (1983). Représentation et compréhension. Un exemple : Le concept de fonction. *Bulletin de l’association mathématique du Québec III*. 22-28.

[5] OECD (2004). *Lernen für die Welt von morgen – erste Ergebnisse von PISA 2003.* Paris: OECD Publication Service.

[6] Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 10 n° 2.3*, 133-170.

[7] Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of mathematical education in science and technology vol. 14 no. 3.* 293-305.

[8] Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik 10 (1989)*, 3-37.