

Kinga SZÚCS, Budapest

Verkettete Funktionen und die Kettenregel

Abstract: In this paper we focus on a basic problem in teaching calculus: how to handle the idea of function composition? In correspondence with the theory of fundamental ideas we show how and why to pay attention to this problem. Moreover we discuss a possible teaching concept that can be used as an analytical approach of the problem.

ZDM Subject Classification: E 40, I 20

Key words and phrases: Behandlung mathematischer Begriffe und Definitionen im MU, Abbildungen und Funktionen, Elementare Behandlung von Funktionen

1. Problemstellung

Einer ausführlichen Lehrwerkanalyse, die die unterschiedlichsten Ebenen (gymnasiale Oberstufe, Hochschule, Universität) und die unterschiedlichsten Bereiche des Mathematikunterrichts (fachspezifisch, nichtfachspezifisch) in Ungarn und im deutschen Sprachraum betrifft, ist Uneinheitlichkeit und gleichzeitig Konzeptlosigkeit hinsichtlich des Begriffs Verkettung von Funktionen zu entnehmen. Dem Begriff wird ein Sonderstatus zugeordnet, vernachlässigt werden aber die Ähnlichkeiten bzw. Unterschiede zu den anderen Verknüpfungsformen ebenso wie die Analogie mit der Verkettung von geometrischen Abbildungen. Die Behandlung des Begriffs zeigt eine breite Palette an Möglichkeiten: Verkettung als 5. Verknüpfungsform, Verkettung als Spezialfall der Funktion bis hin zu Verkettung als eine der drei Möglichkeiten (neben Einschränkung und Umkehrung) aus einer(!) vorhandenen Funktion eine neue zu bilden. Hinter dieser uneinheitlichen und durch mangelnde didaktische Überlegung geprägten Behandlung der Verkettung steht ein uneinheitlicher und meist in der Praxis unbrauchbarer Funktionsbegriff: von Funktionen als Grundbegriffe (d.h. Behandlung ohne Definition, ohne eine jeweilige Vereinbarung, was man unter diesem Begriff verstehen soll) bis hin zu Funktionen als spezielle Relationen kommen viele Betrachtungsweisen in den Lehrwerken vor.

2. Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen

Im Rahmen dieses Aufsatzes kann die auf Bruner zurückgehende Entwicklung des Begriffs der fundamentalen Idee nicht ausführlich dargestellt und diskutiert werden, es geht aber im wesentlichen darum, durch welche wenigen Leitgedanken, grundlegenden Ideen der Mathematik der Unterricht selbst strukturiert werden kann. Vohns¹ hat versucht, die vom

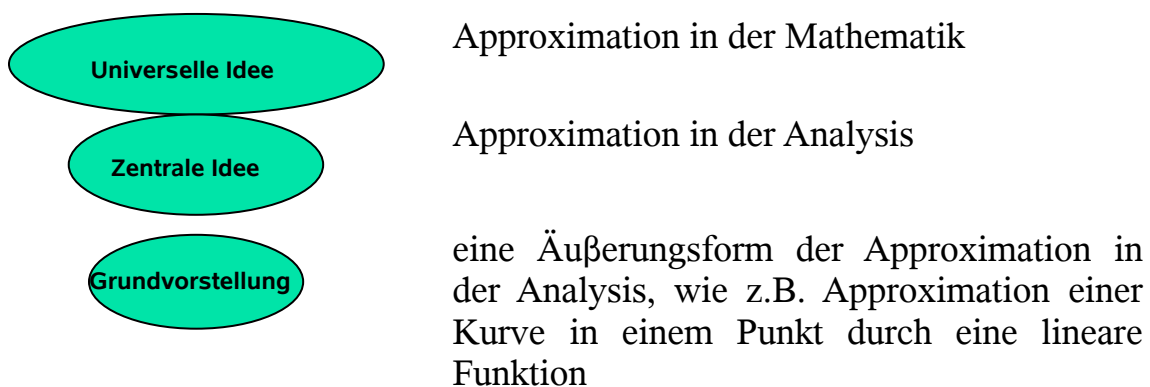
¹ Vohns 2005

Schreiber angesprochene Unterscheidung zw. universeller und zentraler Idee einerseits und den Begriff der Grundvorstellungen andererseits mit den fundamentalen Ideen zusammenzuführen, das von ihm vorgeschlagene Konzept mit drei Abstraktionsebenen bringt die Diskussionen und Beiträge zu diesem Thema auf einen gemeinsamen Nenner. Er behauptet:

„*Universell* schließt die Vorstellung einer Reichhaltigkeit ein, die sowohl aktuell innermathematisch, wissenschaftshistorisch, als auch außermathematisch anwendungsbezogen verstanden werden kann.

Zentrale Ideen bezeichnen bereichsspezifische Konkretionen und Überlagerungen universeller Ideen.”²

„Grundvorstellungen beschreiben damit Phänomene, die insbesondere für die individuelle Begriffsbildung als wesentlich angenommen werden, und zwar aus zunächst einmal aus inhaltsanalytischer Perspektive.”³ Sein Konzept macht er am Beispiel der Approximation deutlich⁴:



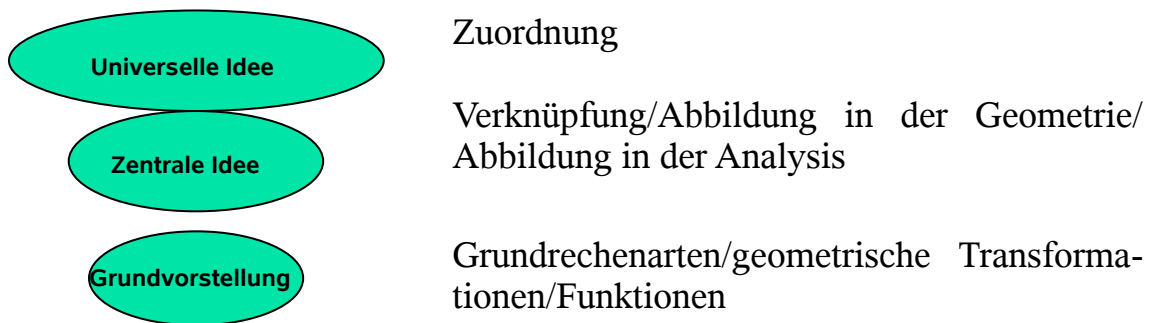
Im Anschluß ans Konzept von Vohns vertrete ich die Meinung, dass das Gemeinsame der Verknüpfungen und der Verkettung, nämlich die Tatsache, dass es in beiden Fällen um Zuordnungen geht, als universelle Idee betrachtet werden soll. Nimmt man Zuordnung in der Mathematik, d.h. alle Techniken und Strategien, die in der Mathematik eine Form von Zuordnung darstellen, als universelle Idee an, so können die konkrete Äußerungsformen der Zuordnung, wie z.B. algebraische Verknüpfungen, geometrische Transformationen, Funktionen als zentrale Ideen dieser universellen Idee

² Vohns 2005 S. 59.

³ ebenda

⁴Vgl: „Sprechen wir von Approximation als universeller Idee, so meinen wir damit die in der Mathematik insgesamt mit ihr verbundene spezifischen Handlungen, Strategien, Techniken und Zielvorstellungen. Die Analysis ist ein Teilbereich, in dem sich viele dieser Handlungen, Strategien und Zielvorstellungen wieder finden, aber nicht alle und eben in jeweils bereichsspezifischen Äußerungsformen. Die in der Analysis auftretenden Äußerungsformen bilden dann die zentrale Idee der Approximation in der Analysis. Eine dieser Äußerungsformen ist dann die gerade angesprochene Grundvorstellung zum Ableitungsbegriff. Man kann diese Grundvorstellung als weitere Konkretion der zentralen Idee auffassen.” In: Vohns 2005 S. 63.

aufgefasst werden. In diesem Sinne sind dann die weitere Konkretionen wie Addition, Punktspiegelung oder die Exponential-funktion, und die damit verbundenen Techniken, Strategien und Vorstellungen Grundvorstellungen der entsprechenden zentralen Idee.

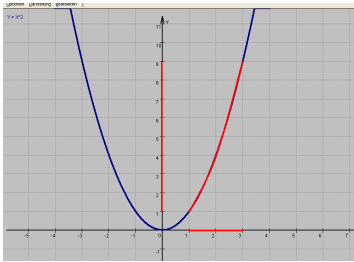


Unter diesem Aspekt lassen sich die Verknüpfungen von Funktionen einschließlich der Verkettung im Unterricht relativ einfach behandeln, eine Ähnlichkeit stellt beispielsweise dar, dass es in beiden Fällen Zuordnungen auf zwei Abstraktionsebenen, auf der Ebene der konkreten Funktionswerte, und auf der Ebene der Funktionen erfolgen, ein Unterschied besteht dahingegen darin, dass es bei Summen-, Differenz-, Produkt-, oder Quotientenfunktion insgesamt drei Zuordnungen erfolgen (zwei Funktionen mit einer Variablen und eine Verknüpfung mit zwei Variablen), im Falle einer verketteten Funktion werden aber zwei funktionale Zuordnungen hintereinander durchgeführt.

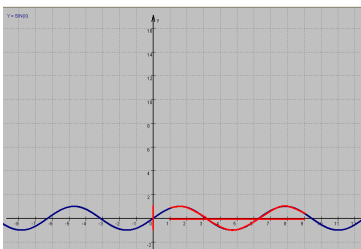
3. Unterrichtskonzept

Die durchgeführte Lehrwerkanalyse lenkt die Aufmerksamkeit nicht nur auf die oben genannten Probleme, sondern auf mangelnde oder aber unglückliche Beispiele. Für unglücklich wird von meiner Seite z.B. die Verkettung einer Polynomfunktion mit einer weiteren Polynomfunktion gehalten, da dabei die Verkettung wiederum eine neue Polynomfunktion ist und das Wesen der Verkettung nicht unbedingt erkannt werden kann. Geglückter wäre Funktionen unterschiedlicher Art zu wählen, wie Polynom- und trigonometrische Funktionen. Das vorgeschlagene Unterrichtskonzept, auf dessen ausführliche Darstellung hier verzichtet werden muss, nimmt eine trigonometrische Funktion und zwei Polynomfunktionen, eine lineare und eine quadratische als Ausgangspunkt, von denen alle Verknüpfungen und auch ihre Verkettung gebildet werden. Analysiert und verglichen werden demnächst nicht nur die Schaubilder der entstandenen Funktionen und einzelne Funktionswerte mithilfe von Wertetabellen, sondern auch einzelne Intervalle, die abgebildet werden. Die Analyse dieser Intervalle ermöglicht als letzter Punkt des Konzepts eine tiefere Einsicht der Kettenregel. Der

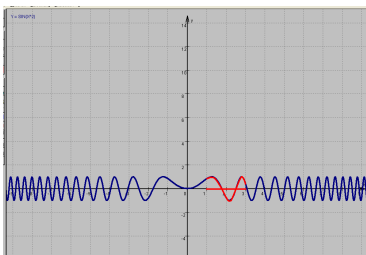
herausgegriffene Abschnitt des Modells zeigt, wie die Sinusfunktion mit der Funktion x^2 verkettet wird:



Das Intervall $[1;3]$ wird auf das Intervall $[1;9]$ abgebildet, zu den Werten von 1 bis 3 werden alle Werte von 1 bis 9 zugeordnet. Das heißt gleichzeitig, dass auf die Änderung der x-Werte von 1 bis 3, die Änderung der y-Werte von 1 bis 9 fällt. Durchschnittliche Änderungsrate in diesem Intervall: $9-1/3-1$



Die Sinusfunktion bildet das Intervall $[1;9]$ auf das Intervall $[-1;1]$ ab, indem zuerst alle reellen Werte von $\sin 1 \approx 0,84$ bis 1, dann von 1 bis -1, danach wiederum von -1 bis 1 und von 1 bis $\sin 9 \approx 0,41$ vorkommen. Durchschnittliche Änderungsrate in diesem Intervall: $\sin 9 - \sin 1 / 9 - 1$



Bei der Verkettung wird auf das Intervall $[1;3]$ die Kurve abgebildet, die die Sinusfunktion im Intervall $[1;9]$ macht, die durchschnittliche Änderungsrate lässt sich als Produkt der beiden obigen Änderungsraten auffassen: $\sin 9 - \sin 1 / 9 - 1 = \sin 9 - \sin 1 / 9 - 1 \cdot 9 - 1 / 3 - 1$

Hinweise zum ausführlichen Unterrichtskonzept und die Liste der analysierten Lehrwerke finden Sie unter:

www. <http://mathdid.elte.hu>

Literatur

- [1] Sigrid Schubert, Andreas Schwill: Didaktik der Informatik. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin 2004
- [2] Fritz Schweiger: Fundamentale Ideen. Manuskript 2003
- [3] Andreas Vohns: Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. In: JMD 26 H.1. 2005